



## توسعه روش باند گراف جهت مدل سازی نازل غیر آیزنتروپیک

احمد صانعی<sup>۱</sup>، علیرضا باصحبت نوینزاده<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 ۲- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 \* novinzadeh@kntu.ac.ir، ۴۴۱۶-۱۵۸۷۵ صندوق پستی تهران

### چکیده

در مقالاتی که تاکنون در زمینه مدل سازی سیستم های تراکم پذیر به روش باندگراف منتشر شده، جریان آیزنتروپیک فرض شده است؛ اما در نازل های همگرا-واگرا، در محدوده ای از نسبت فشارها، در قسمت واگرایی نازل شوک عمودی اتفاق می افتد که فرض آیزنتروپیک بودن جریان را نامعتبر می کند. در این مقاله برای در نظر گرفتن اثرات شوک عمودی، میدان ظرفیتی NIKE معرفی می شود. این میدان، علاوه بر در نظر گرفتن انرژی جنبشی سیال و معادلات مومنوم، قادر است محل ایجاد شوک قائم در قسمت واگرایی نازل را مدل سازی نماید. چگونگی کاربرد میدان انرژی NIKE در قالب یک مثال ساده توضیح داده خواهد شد و نشان داده می شود که نیروی پیشرانش به دست آمده از شبیه سازی، با روابط تحلیلی مطابقت دارد. از آنجایی که میدان معرفی شده جریان های غیر آیزنتروپیک را مدل می کند، این میدان می تواند برای مدل سازی نیروی پیشرانش راکت موتورها و تراسترها در حالت های گذرا مورد استفاده قرار گیرد. مزیت دیگر مدل ارائه شده این است که می تواند به راحتی در نرم افزارهایی مانند ام اس وان، تونتی سیم و سیمبولس به کار گرفته شود؛ بنابراین با استفاده از خواص ساختاری باندگراف، معادلات حالت به صورت سیستماتیک استخراج و با استفاده از روش های عددی مناسب حل می شوند و نیاز به استخراج معادلات به صورت دستی و حل آن ها مرتفع می گردد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: ۰۴ مهر ۱۳۹۲  
 پذیرش: ۱۲ دی ۱۳۹۲  
 ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۳  
 کلید واژگان:  
 باندگراف  
 سیال تراکم پذیر  
 نازل همگرا واگرا  
 جریان غیر آیزنتروپیک  
 شوک قائم

## Development of bond graph approaches for modeling of a non-isentropic nozzle

Ahmad Sanei, Alireza Basohbat Novinzadeh\*

Department of Aero-space Engineering, Khajeh Nasireddin Toosi University, Tehran, Iran  
 \* P.O.B. 4416-15875, Tehran, Iran, novinzadeh@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 26 September 2013  
 Accepted 02 January 2014  
 Available Online 13 July 2014

#### Keywords:

Bond Graph  
 Compressible fluid flow  
 Converging-diverging nozzle  
 Non-isentropic flow  
 Normal shock

### ABSTRACT

In the papers published on compressible fluid using Pseudo Bond Graph approach, isentropic flow is assumed. However in a converging-diverging nozzle, for a specific pressure ratio, the assumption of isentropic flow is invalid. For the purpose of considering normal shock effects, this paper introduces a new field (NIKE-field) to the pseudo bond graph. The output of the new field can be also used to determine normal shock position and to extract momentum equation as well. In the following, the methodology developed in this paper has been applied a simple pedagogic example. Simulation result is validated by comparison with the analytical result. As the new field can be modeled non-isentropic flow, it can be used to for modeling rockets motors and thrusters in transient state. One of another advantage of new field is that it can be easily used in many software applications like MS1, SYMBOLS2000 and 20SIM®; therefore, With regard to the systematic derivation of a mathematical model from a bond graph in these softwares, there is no need to derive any state equations and their solutions.

### ۱- مقدمه

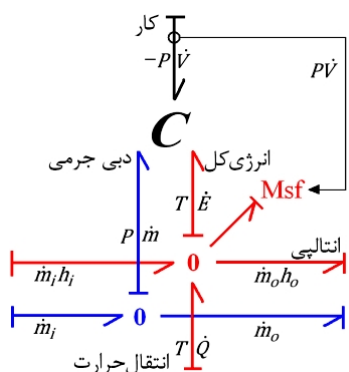
از طرف دیگر در سیستم های تراکم پذیر، به دلیل وابستگی خواص ترمودینامیکی، علاوه بر معادلات پیوستگی، مومنوم و انرژی، لازم است معادله حالت سیستم نیز در نظر گرفته شود. این موضوع معادلات حاکم بر سیستم را به شدت غیرخطی و پیچیده می سازد. مقالات زیادی در مورد مدل سازی سیستم های ترمودینامیکی و تراکم پذیر به روش باندگراف به چاپ رسیده است که در همه آن ها به دلیل پایین بودن سرعت سیال، از انرژی جنبشی در مقابل انرژی ناشی از انتقالی صرف نظر شده است. به عنوان مثال در المان معرفی شده (CETF) توسط اولد و همکارانش، از انرژی جنبشی صرف نظر شده است [۷]. آقای جزیری و مدجاهر نیز در مدل سازی سیستم ترموسیالاتی، انرژی جنبشی سیال را به دلیل کم بودن سرعت

روش های متعددی برای مدل سازی سیستم های دینامیکی وجود دارد، اما در این میان روش باندگراف یکی از کارآمدترین روش های مدل سازی است که قادر است سیستم هایی که رفتار غیرخطی داشته و با حوزه های مختلف انرژی (سیستم های مکانیکی، هیدرولیکی، الکتریکی، پنوماتیکی، ترمودینامیکی) در ارتباط هستند را به راحتی مدل نماید [۱-۳]. از آنجایی که باندگراف یک روش گرافیکی است و می تواند معادلات حالت را به صورت سیستماتیک استخراج کند، نرم افزارهای زیادی در این خصوص ارائه شده اند که از جمله آن ها می توان به نرم افزارهای تونتی سیم [۴]، ام اس وان [۵] و سیمبولس [۶] اشاره نمود.

### Please cite this article using:

A. Sanei, A.R. Basohbat Novinzadeh, Development of bond graph approaches for modeling of a non-isentropic nozzle, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.14, No. 6, pp. 99-106, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:



شکل ۱ باندگراف پیشنهادی کارنوپ [۱۱].

که در آن زیرنویس‌های  $i$  و  $o$  به ترتیب به ورود و خروج کمیت‌ها در مقاطع ورودی و خروجی،  $h$  به آنتالپی سیال،  $R_x$  به برآیند نیروهای خارجی بر حجم کنترل،  $p_{atm}$  به فشار محیط بیرون و  $A$  به سطح مقطع عبور جریان اشاره دارد. در روابط (۱)، فرض‌های زیر در نظر گرفته شده‌اند:

- جریان یک بعدی فرض شده‌است.
- دستگاه مختصات نسبت به حجم کنترل ثابت است.
- خواص جریان درون حجم کنترل یکنواخت است.
- در معادله مومنوم از اثرات ویسکوزیته و نیروهای برشی در جداره‌ها صرف‌نظر شده‌است.

کارنوپ و همکارانش با چشم‌پوشی از انرژی جنبشی و معادله مومنوم سیال، روابط (۱) را به شکل روابط (۲) ساده نموده و باندگراف آن را به صورت نشان داده شده در شکل ۱ نمایش دادند [۱۱].

$$\frac{d}{dt} E = \dot{m}_i h_i - \dot{m}_o h_o - P\dot{V} + \dot{Q} \quad \text{انرژی}$$

$$\frac{d}{dt} m = \dot{m}_i - \dot{m}_o \quad \text{جرم} \quad (2)$$

در مدل پیشنهادی کارنوپ، بعد از انتگرال‌گیری از  $\dot{m}_i E$ ، فشار و دما به ترتیب از رابطه  $P = RE / (C_v V)$ ؛  $T = E / (m C_v)$  محاسبه می‌شوند. اما صرف‌نظر کردن از انرژی جنبشی در مقابل انرژی منتقل شده توسط آنتالپی فقط زمانی معتبر است که سرعت سیال کسری از سرعت صوت باشد؛ بنابراین در نازل‌های همگرا-واگرا که سرعت سیال بیش از سرعت صوت است، مدل پیشنهادی کارنوپ نیاز به اصلاح دارد. علاوه بر آن مدل کارنوپ قادر به در نظر گرفتن معادلات مومنوم نیز نیست. به همین منظور نویسندگان با فرض جریان آیزنتروپیک در نازل همگرا-واگرا، میدان انرژی KE را به صورت نشان داده شده در شکل ۲ معرفی نمودند.

همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است، در میدان KE دبی جرمی ( $\dot{m}$ )، فشار و دمای جریان بالادست ( $T_{total}$ ،  $P_{total}$ ) به عنوان ورودی میدان و انرژی جنبشی ( $\dot{m} v_o^2 / 2$ ) و فشار استاتیک ( $P_{static}$ ) در مقطع خروجی به عنوان خروجی میدان KE هستند. عدد ماخ خروجی ( $M_e$ ) هم مقدار ثابتی بوده و باتوجه به رابطه (۳) تابعی از نسبت سطح مقطع خروجی به سطح مقطع گلوگاه نازل ( $A_e / A^*$ ) است [۱۴] که به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان می‌شود.

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}}{M_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}} \quad (3)$$

در نظر نگرفتند [۸،۹]. اگرچه توما و همکارانش در کتاب خود به لزوم در نظر گرفتن انرژی جنبشی در توربو ماشین‌های سرعت بالا اشاره کردند [۱۰]، اما آن‌ها نیز المانی که بتواند انرژی جنبشی را در سیالات تراکم‌پذیر مدل کند را معرفی نکردند. کارنوپ و همکارانش نیز برای مدل‌سازی سیستم‌های تراکم‌پذیر، میدان ظرفیتی را معرفی کردند که در آن با صرف‌نظر کردن از انرژی جنبشی، فقط اصول بقای جرم و انرژی ارضا می‌شد [۱۱].

اما در نازل‌های همگرا-واگرا که سرعت سیال بیش از سرعت صوت است، چشم‌پوشی کردن از اثرات انرژی جنبشی باعث خطای قابل توجهی می‌شود. به همین دلیل اخیراً نویسندگان با فرض جریان آیزنتروپیک، میدان ظرفیتی KE را معرفی کردند که قادر است اثرات انرژی جنبشی را در نظر گرفته و معادلات مومنوم را نیز ارضا کند.

از طرفی در لحظات اولیه روشن-خاموش شدن موتورها و تراسترها، نسبت فشار دو طرف نازل به گونه‌ای است که شوک قائم در قسمت واگرای نازل اتفاق می‌افتد که این امر فرض آیزنتروپیک بودن جریان را نامعتبر می‌کند.

در این مقاله برای در نظر گرفتن اثرات شوک قائم، میدان انرژی جنبشی غیرآیزنتروپیک NIKE معرفی و معادلات حاکم بر آن نیز ارائه می‌گردد. استفاده از میدان انرژی NIKE قابلیت به کارگیری معادله مومنوم را نیز به کاربر می‌دهد. همچنین روابط المان نازل آیزنتروپیک پیشنهادی کارنوپ، برای نازل همگرا-واگرای غیر آیزنتروپیک توسعه داده می‌شود. در ادامه، کاربرد میدان انرژی NIKE در قالب یک مثال ساده توضیح داده خواهد شد. مزیت مدل ارائه شده زمانی بیشتر آشکار می‌شود که مدل مذکور در نرم‌افزارهایی مانند ام‌اس‌وان، تونتی‌سیم و سیمبولس به کار گرفته شود. چون در این نرم‌افزارها، معادلات حالت به صورت سیستماتیک استخراج شده و با استفاده از روش‌های عددی مناسب حل می‌شوند؛ بنابراین نیاز به استخراج معادلات به صورت دستی و حل آن‌ها مرتفع می‌گردد.

این مقاله در ۶ بخش تهیه شده‌است. بخش اول به مقدمه اختصاص داشت. در بخش دوم به روابط حاکم بر میدان انرژی جنبشی KE برای جریان آیزنتروپیک و نحوه ارتباط آن با میدان ظرفیتی C در سیالات تراکم‌پذیر اشاره می‌شود. در بخش سوم، روابط نازل آیزنتروپیک که توسط کارنوپ پیشنهاد شده، برای نازل غیرآیزنتروپیک توسعه داده می‌شود. در بخش چهارم میدان انرژی جنبشی NIKE برای جریان‌های غیرآیزنتروپیک معرفی و در بخش پنجم مدل پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی اعتبارسنجی خواهد شد. بخش ششم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

## ۲- میدان انرژی جنبشی KE برای جریان آیزنتروپیک

با فرض یک بعدی بودن جریان، حجم کنترلی را در نظر بگیرید که خواص درون آن یکنواخت باشد. اگر این حجم کنترل دارای فشار  $P$ ، دمای  $T$ ، چگالی  $\rho$ ، حجم  $V$ ، سرعت  $v$ ، جرم  $m$  و انرژی داخلی  $E$  باشد و از طریق مرزهای متحرک کار  $P\dot{V}$  و انتقال حرارت  $\dot{Q}$  به حجم کنترل اعمال شود، روابط بقای انرژی، جرم و اندازه حرکت به صورت روابط (۱) خواهند بود [۱۱،۲].

$$\frac{d}{dt} E = \dot{m}_i \left( h_i + \frac{v_i^2}{2} \right) - \dot{m}_o \left( h_o + \frac{v_o^2}{2} \right) - P\dot{V} + \dot{Q} \quad \text{انرژی}$$

$$\frac{d}{dt} m = \dot{m}_i - \dot{m}_o \quad \text{جرم}$$

$$\frac{d}{dt} (mv) = \dot{m}_i v_i - \dot{m}_o v_o + P_i A_i - P_o A_o + P_{atm} (A_e - A_i) + R_x \quad \text{مومنوم} \quad (1)$$

هنگام استفاده از میدان ظرفیتی KE با معلوم بودن  $A_e/A^*$ ، عدد ماخ خروجی مافوق صوت ( $M_e$ )، از رابطه (۳) محاسبه و به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان KE می‌شود. لازم به ذکر است در این حالت فشار در صفحه خروجی با فشار بیرون برابر نبوده ( $P_e \neq P_d$ ) و سیال در خارج از نازل خود را با فشار بیرون تطبیق می‌دهد. بنابراین نیروی پیشرانش دو مؤلفه دارد. مؤلفه اول ناشی از خروج جرم سیال  $\dot{m}v_e$  و مؤلفه دوم ناشی از اختلاف فشار صفحه خروجی و محیط بیرون  $(P_e - P_d)A_e$ .

**ناحیه II**  $(pr \langle pr_{crit(Exit)sub} \rangle pr_{normal\_shock})$ : در این حالت یافتن حل آیزنتروپیک غیرممکن است و یک موج عمودی در قسمت واگرای نازل شکل می‌گیرد. مکان این شوک قائم به نسبت فشار دوطرف نازل ( $P_d/P_u$ ) وابسته است. در این حالت چون جریان در گلوگاه خفه شده‌است، جریان جرمی مانند حالت قبلی، با جایگذاری  $pr = pr_{crit}$  از رابطه (۴)، به دست می‌آید؛ اما به دلیل غیرآیزنتروپیک بودن جریان، میدان انرژی KE اعتبار خود را از دست می‌دهد. لذا در بخش ۴ میدان ظرفیتی NIKE برای جریان غیرآیزنتروپیک معرفی می‌شود.

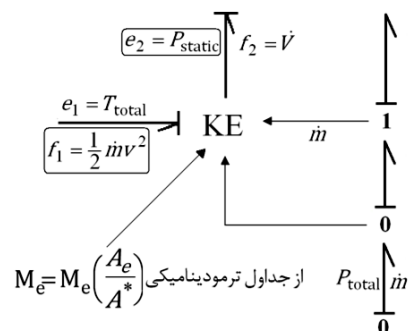
لازم به ذکر است، در این حالت چون فشار در صفحه خروجی با فشار پشت برابر است، نیروی پیشرانش فقط مؤلفه  $\dot{m}v_e$  خواهدداشت و مؤلفه پیشرانش فشاری  $(P_e - P_d)A_e$  حذف خواهدشد.

**ناحیه III**  $(pr \langle pr_{crit(Exit)sub} \rangle)$ : جریان درون نازل زیرصوت و آیزنتروپیک است. چون جریان در گلوگاه از حالت خفگی خارج شده‌است، لذا دبی جرمی تابعی از نسبت فشار  $P_d/P_u$  خواهدبود و برای محاسبه جریان جرمی با جایگذاری  $pr = P_d/P_u$  می‌توان از رابطه (۴) استفاده نمود. لازم به ذکر است چون از نسبت فشار در مقطع خروجی استفاده شده‌است، بنابراین بجای سطح مقطع گلوگاه نازل بایستی از سطح مقطع خروجی نازل استفاده شود. عدد ماخ خروجی زیرصوت نیز با معلوم بودن  $A_e/A^*$  به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان KE می‌شود. چون فشار در صفحه خروجی با فشار پشت برابر است، لذا مانند حالت قبلی نیروی پیشرانش مؤلفه فشاری ندارد. باتوجه به موارد مذکور، در رابطه پیشنهادی کارنوپ برای نازل آیزنتروپیک (رابطه (۳))،  $pr$  برای نازل همگرا-واگرا به صورت رابطه (۵) اصلاح می‌شود:

$$pr = \begin{cases} \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{crit(Exit)sub} \rangle & \text{اگر } \frac{P_d}{P_u} > pr_{crit} \\ pr_{crit} & \text{اگر } \frac{P_d}{P_u} < pr_{crit} \end{cases} \quad (5)$$

#### ۴- میدان انرژی جنبشی NIKE برای جریان غیر آیزنتروپیک

همان‌طور که گفته شد، وقتی  $(pr \langle pr_{crit(Exit)sub} \rangle pr_{normal\_shock})$ ، شوک قائم در قسمت واگرای نازل اتفاق می‌افتد. در این حالت، برای به دست آوردن فشار و نرخ انرژی جنبشی در صفحه خروجی، نمی‌توان از روابطی که برای میدان انرژی KE بیان شد استفاده کرد. لذا میدان انرژی NIKE برای جریان غیرآیزنتروپیک معرفی می‌گردد. ورودی و خروجی‌های میدان جدید دقیقاً با میدان انرژی KE یکسان هستند و تنها تفاوت آن نحوه محاسبه خروجی‌های  $f_1, e_2$  است (فشار خروجی و نرخ انرژی جنبشی در شکل ۲) که برای آن بایستی از روابط شوک قائم استفاده نمود. در این حالت به دلیل غیرآیزنتروپیک بودن جریان، برای محاسبه عدد ماخ خروجی، نمی‌توان از رابطه (۳) استفاده کرد. لذا مقدار  $P_d/P_u$  به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان انرژی NIKE شده و از آنجا با استفاده از روابط شوک قائم، عدد ماخ خروجی محاسبه می‌شود.



$$\begin{cases} e_1 = T_{total}, \quad f_2 = \dot{V} \\ f_1 = \frac{1}{2} \dot{m}v^2 = \frac{1}{2} \dot{m} \gamma R T_{total} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-1} M_e^2, \\ e_2 = P_{static} = P_{total} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

شکل ۲ میدان انرژی جنبشی KE

باتوجه به موارد فوق، ترکیب میدان انرژی KE با میدان ظرفیتی C در شکل ۳ نشان داده شده‌است. ملاحظه می‌شود در المان 01، از جمع جبری انرژی‌های وارد شده به میدان ظرفیتی C، معادلات انرژی بادر نظر گرفتن انرژی جنبشی ارضا می‌شود. (اولین معادله در روابط (۱))

از طرف دیگر باتوجه به معلوم بودن سرعت و فشار استاتیک در مقطع خروجی، به راحتی می‌توان نیروی پیشرانش را از معادله سوم رابطه (۱) به دست آورد. این موضوع در بخش ۵ در قالب یک مثال نشان داده خواهدشد. بنابراین ملاحظه می‌شود میدان ظرفیتی C پیشنهاد شده توسط کارنوپ، بعلاوه میدان انرژی جدید KE، قادر است مجموعه معادلات انرژی و مومنوم در رابطه (۱) را به طور کامل ارضا نماید.

#### ۳- اصلاح روابط نازل آیزنتروپیک R برای نازل همگرا-واگرا

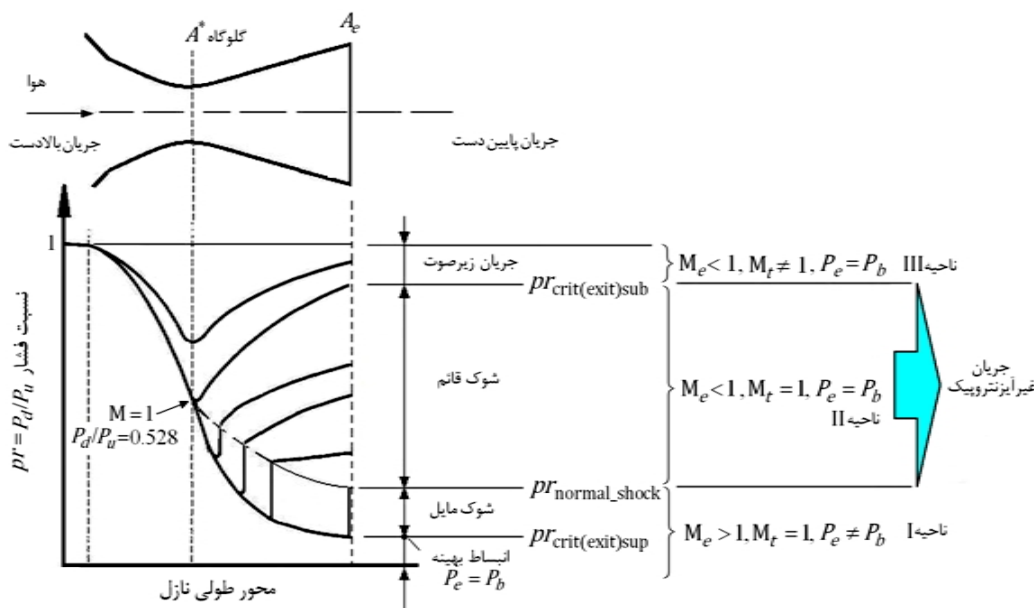
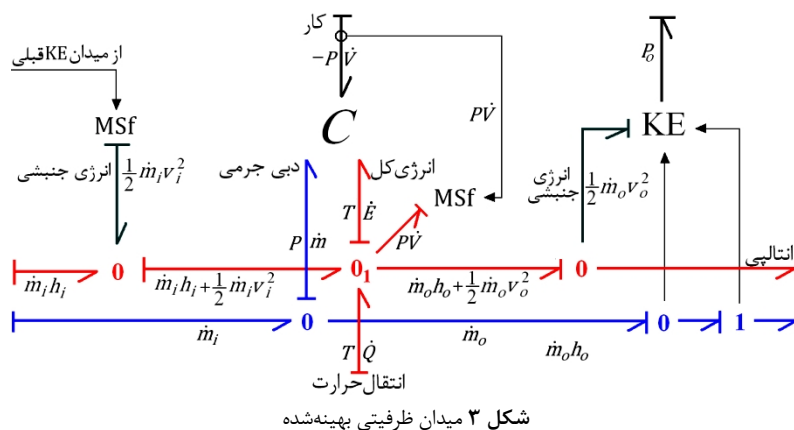
در میدان نازل آیزنتروپیک که توسط کارنوپ معرفی شد، دبی جرمی از رابطه (۴) به دست می‌آید [۱]:

$$\dot{m} = C_d \frac{AP_u}{\sqrt{RT_u}} \sqrt{\left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) \left( pr^\gamma - pr^\gamma \right)}$$

$$pr = \begin{cases} \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{crit} \rangle & \text{اگر } \frac{P_d}{P_u} > pr_{crit} \\ pr_{crit} & \text{اگر } \frac{P_d}{P_u} < pr_{crit} \end{cases} \quad (4)$$

در رابطه فوق مقادیر  $\gamma, C_d, A$  به ترتیب نشان‌دهنده سطح مقطع گلوگاه نازل، ضریب تخلیه نازل و نسبت گرمای ویژه سیال و زیرنویس‌های  $u$  و  $d$  به ترتیب به جریان بالادست و پایین‌دست اشاره دارد.  $pr_{crit}$  نیز نسبت فشار بحرانی است که مقدار آن از رابطه  $pr_{crit} = (2/(\gamma+1))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  به دست می‌آید؛ اما در یک نازل همگرا-واگرا، بسته به عدد ماخ خروجی و نوع جریان (آیزنتروپیک یا غیرآیزنتروپیک)، نسبت فشار دو طرف نازل را می‌توان به سه ناحیه مختلف مطابق شکل ۴ تقسیم‌بندی نمود.

**ناحیه I**  $(pr \langle pr_{normal\_shock} \rangle)$ : جریان در قسمت واگرا، مافوق صوت و آیزنتروپیک است. در این حالت جریان در گلوگاه خفه شده و برای محاسبه دبی جرمی می‌توان با جایگذاری  $pr = pr_{crit}$ ، از رابطه (۴) استفاده نمود.



محدود شدن حرکت مجموعه توسط فنر و دمپر، از انتقال حرارت جابجایی اجباری صرف‌نظر شده‌است.

در شکل ۶-ب باند اطلاعاتی که از سمت میدان ظرفیتی C به سمت المان اینرسی I می‌رود، نشان دهنده جرم لحظه‌ای مجموعه مخزن و گاز است که به دلیل خروج گاز، این جرم هر لحظه کاهش می‌یابد. همچنین باتوجه به اینکه جمع جبری متغیرهای سعی در المان 1<sub>1</sub> شکل ۶-ب، برابر صفر است، بنابراین اندازه حرکت (p) المان I و جابجایی (q) المان C از رابطه (۶) به‌دست می‌آیند:

$$\dot{p} = e = \frac{d}{dt}((M+m)v) = u_1 \dot{m}_e v_e + u_2 \dot{m}_e v_e + u_3 \dot{m}_e v_e + (P_e - P_{atm}) A_e u_1 - Rv - kq$$

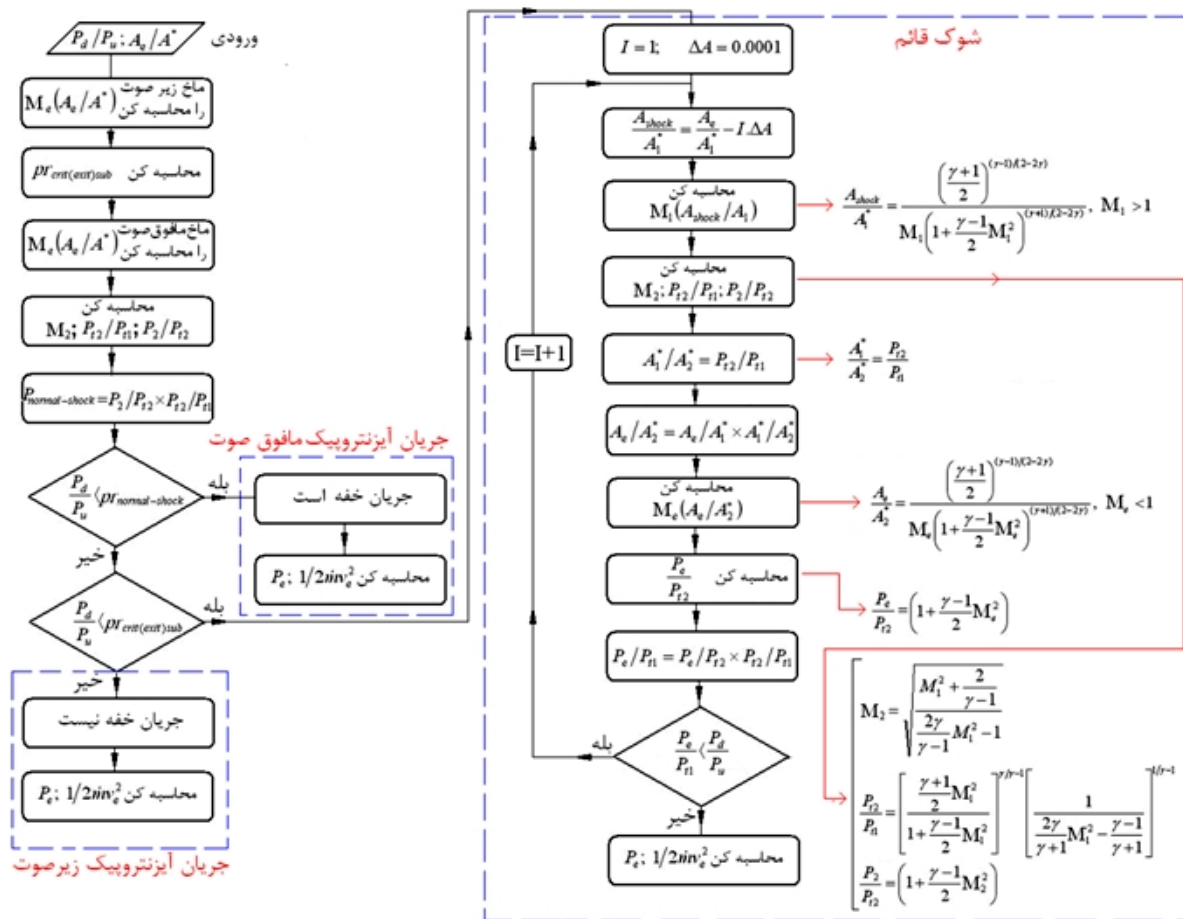
$$\dot{q} = f = \frac{P}{(M+m)} \quad (۶)$$

روابط نشان داده‌شده در اولین رابطه (۷) همان معادله مومنوم است که در مدل کارنوپ در نظر گرفته نشده بود. رابطه مذکور دارای فرم  $\sum f = ma$  است. بنابراین این مسئله را می‌توان مشابه هر مسئله دیگری حل نمود با این تفاوت که در این حالت جرم m تابعی از زمان است [۱۳] که به‌صورت باند اطلاعاتی وارد المان I می‌شود. ملاحظه می‌شود در مدل رسم شده علاوه بر اینکه انرژی جنبشی در مقطع خروجی نازل در نظر گرفته شده‌است، از خروجی میدان ظرفیتی KE و NIKE می‌توان معادله مومنوم که در مدل کارنوپ از آن صرف‌نظر شده بود [۱۱] را به‌دست آورد.

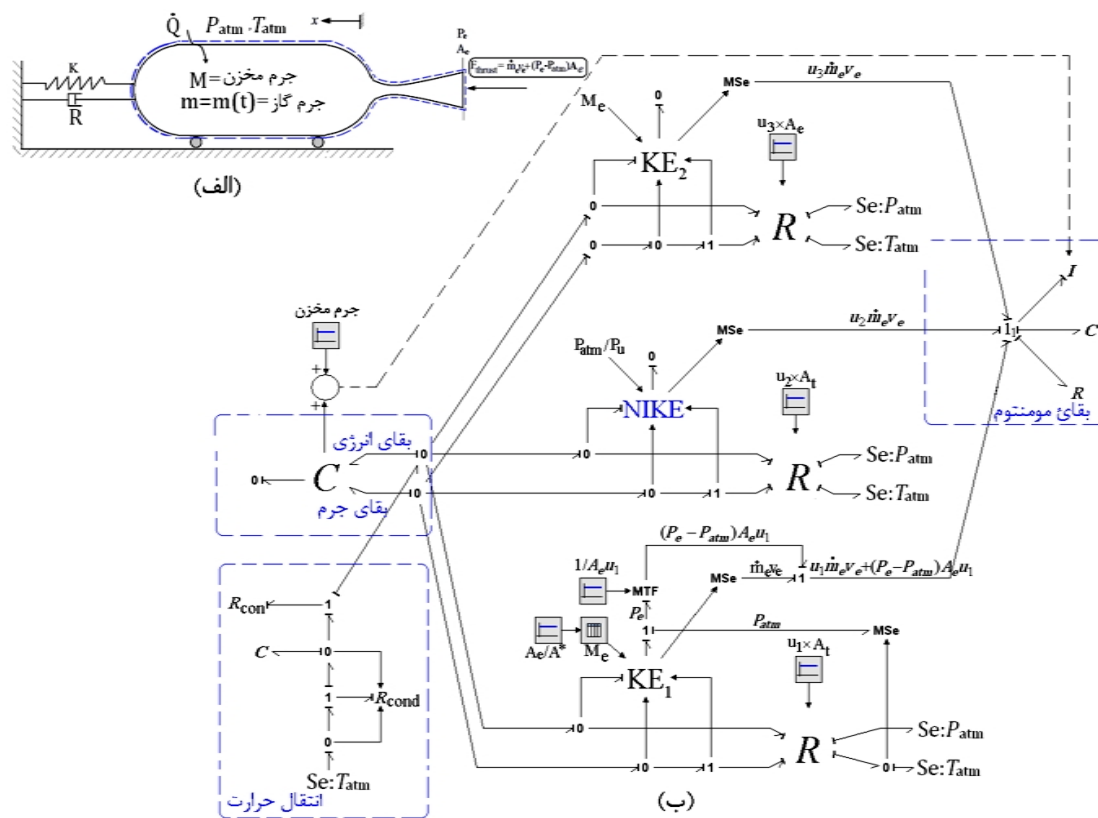
از طرف دیگر برای استفاده از روابط شوک قائم، بایستی محل وقوع شوک معلوم باشد. به این منظور در ابتدا فرض می‌شود، شوک درست در صفحه خروجی اتفاق افتاده است. با این فرض، فشار در صفحه خروجی محاسبه می‌شود. اگر فشار به‌دست آمده از فشار پشت کمتر بود یعنی شوک قائم در قسمت‌های داخلی نازل اتفاق افتاده و لذا محل فرضی شوک را به اندازه  $\Delta A$  به سمت داخل حرکت داده و محاسبات مجدداً انجام می‌شود. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد تا فشار به‌دست‌آمده در صفحه خروجی برابر فشار پشت شود. الگوریتم و روابط مورد نیاز برای به دست آوردن عدد ماخ خروجی و مقادیر  $f_1, e_2$  در شکل ۵ نشان داده‌شده‌است.

## ۵- شبیه‌سازی و اعتبارسنجی

در مجموعه مخزن و نازل همگرا-واگرای نشان داده‌شده در شکل ۶-الف، فرض شده که در زمان  $t=0$  مخزن با فشار ۲۰۰ بار از هوا پر شده‌باشد. باندگراف سیستم مذکور بادر نظر گرفتن اثرات انرژی جنبشی، مومنوم و اثرات مربوط به ایجاد شوک قائم، در شکل ۶-ب رسم شده‌است. برای نشان دادن قابلیت مدل‌سازی به روش باندگراف، ظرفیت حرارتی، انتقال حرارت هدایتی و جابجایی آزاد نیز در نظر گرفته شده‌است. مقاومت حرارتی ناشی از جابجایی آزاد ( $R_{conv}$ ) تابعی از اختلاف دمای مخزن با محیط بیرون است که برای محاسبه آن می‌توان از روابط تجربی در مرجع [۱۲]، استفاده نمود. باتوجه به



شکل ۵ الگوریتم محاسبه فشار و انرژی جنبشی در المان NIKE



شکل ۶ الف- شماتیک مخزن و نازل همگرا-واگرا ب- باندگراف سیستم

جدول ۱ پارامترهای استفاده شده برای شبیه‌سازی

پارامتر	واحد	مقدار	نماد
حجم مخزن	m <sup>3</sup>	۰/۰۱۷	V
فشار اولیه	bar	۲۰۰	P <sub>initial</sub>
دمای اولیه	K	۳۰۰	T <sub>initial</sub>
فشار محیط	bar	۱	P <sub>atm</sub>
دمای محیط	K	۳۰۰	T <sub>atm</sub>
وزن مخزن	kg	۱۳/۵	mass
ظرفیت گرمایی مخزن	J/(kg.K)	۱۳۰۰	C
مقاومت هدایتی مخزن	w/K	۰/۰۰۶	R <sub>cond</sub>
نسبت گرمای ویژه گاز	--	۱/۴	γ
ثابت گاز	J/(kg.K)	۲۹۶/۸	R
گرمای ویژه فشار ثابت	J/(kg.K)	۱۰۲۴	C <sub>p</sub>
سطح مقطع گلوگاه نازل	mm <sup>2</sup>	۳/۱۴	A*
نسبت سطح خروجی به گلوگاه	--	۲/۰۰۵	Ae/A*
ضریب دمیر ویسکوز	N.sec/m	۴۰	R
ضریب فنریت	N/m	۱۰۰۰	k

در شکل ۶-ب، پارامترهای کنترلی  $u_1, u_2, u_3$  نیز به صورت روابط (۷) زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1 = 1 - \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{crit(exit) sub} \rangle \text{ اگر } u_1 = 0$$

$$u_2 = 1 - pr_{(normal-shock)} \langle \frac{P_d}{P_u} \rangle \langle pr_{crit(exit) sub} \rangle \text{ اگر } u_2 = 0$$

$$u_3 = 1 - \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{(normal-shock)} \rangle \text{ اگر } u_3 = 0 \quad (7)$$

لازم به ذکر است، همان طور که در بخش ۳ گفته شد، درحالی‌که جریان در خروجی نازل زیرصوت باشد، فشار در صفحه خروجی با فشار محیط بیرون برابر می‌شود. به همین دلیل در خروجی میدان KE<sub>2</sub> و NIKE نیروی تراست فشاری حذف شده‌اند.

شبیه‌سازی باتوجه به پارامترهای داده‌شده در جدول ۱ و توسط نرم‌افزار تونتی‌سیم انجام شده‌است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های ۷ تا ۱۱ ترسیم شده‌اند.

شکل ۷ تغییرات دما و فشار مخزن را برای مدل کارنوپ و مدل بهینه‌شده نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود در مدل بهینه شده چون مقداری از انرژی سیال به صورت انرژی جنبشی از حجم کنترل خارج می‌شود، لذا دمای و فشار حجم کنترل نسبت به مدل کارنوپ بیشتر کاهش می‌یابد. از طرف دیگر کاهش بیشتر دما در مدل بهینه‌شده، باعث افزایش اختلاف دمای حجم کنترل نسبت به محیط اطراف و نهایتاً افزایش نرخ انتقال حرارت به حجم کنترل می‌گردد؛ بنابراین بخشی از انرژی حجم کنترل که به صورت انرژی جنبشی از سیستم خارج شده بود، توسط انتقال حرارت از محیط اطراف جبران می‌شود. به همین دلیل در لحظات کمتر از ۴۵ ثانیه، فشار محاسبه‌شده توسط مدل کارنوپ با فشار محاسبه‌شده توسط مدل بهینه شده برهم‌دیگر منطبق می‌شوند.

در شکل ۸ مکان ایجاد شوک قائم نشان داده شده‌است. لازم به ذکر است در طی فرآیند تخلیه کامل مخزن، هر سه نوع جریان (آیزنتروپیک مافوق، آیزنتروپیک مادون‌صوت و شوک قائم) درون نازل اتفاق خواهد افتاد. به خصوص وقتی نسبت فشار دوطرف نازل به  $pr_{(normal-shock)}$  کاهش می‌یابد، یک شوک قائم در دهانه خروجی اتفاق می‌افتد. با کاهش بیشتر فشار مخزن و در نتیجه افزایش  $P_d/P_u$ ، شوک قائم به طرف گلوگاه نازل حرکت

می‌کند تا اینکه در زمان ۱۴۹ ثانیه  $P_d/P_u = pr_{crit(exit)sub}$  حالت شوک قائم از بین رفته و جریان درون نازل کاملاً به صورت آیزنتروپیک منبسط می‌شود.

در شکل ۹ نیز تغییرات عدد ماخ خروجی نشان داده شده‌است. ملاحظه می‌شود تازمانی که شوک قائم درون نازل اتفاق نیافتاده‌است، عدد ماخ در صفحه خروجی  $M_e = 2/2$  است. با ایجاد شوک قائم، عدد ماخ با یک ناپیوستگی به کمتر از یک کاهش می‌یابد. وقتی نسبت فشار دوطرف نازل به  $P_d/P_u = pr_{crit(exit)sub}$  رسید، شوک قائم از بین رفته و جریان نیز از حالت خفگی خارج می‌شود. از این نقطه به بعد چون جریان از حالت خفگی خارج شده‌است، نرخ کاهش عدد ماخ در صفحه خروجی نیز افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۰ تغییرات سرعت و جابجایی مخزن نسبت به زمان ترسیم شده‌است. ملاحظه می‌شود در اثر نیروی پیشران، فنر با حرکت نوسانی میرا فشرده می‌شود. هم‌زمان با کاهش فشار مخزن، مقدار نیروی پیشران نیز کم می‌شود تا اینکه نیروی فشرده‌گی فنر بر نیروی پیشران غلبه کند. در این حالت (بعد از مستهلک شدن نوسانات) فنر تمایل به برگشتن به طول اولیه خود را دارد و هنگامی که نیروی پیشران به مقدار صفر رسید، مخزن نیز به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد.

در شکل‌های ۱۱-الف و ب نیز سهم نیروی پیشران ناشی از مومنتوم و نیروی پیشران فشاری کاهش نشان داده است. ملاحظه می‌شود با ایجاد شوک قائم، سهم نیروی پیشران ناشی از مومنتوم (به دلیل کاهش عدد ماخ در خروجی نازل) کاهش می‌یابد که این کاهش، با افزایش نیروی پیشران فشاری جبران می‌شود.

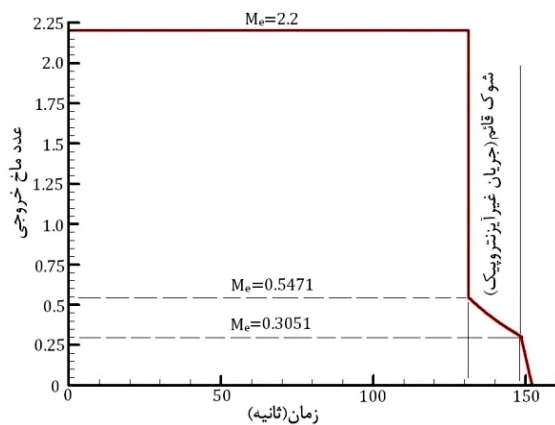
در شکل ۱۱-ج نیز کل نیروی پیشران به دست آمده از نتایج شبیه‌سازی، با نتایج تحلیلی مقایسه شده که با نتایج تحلیلی مطابقت دارد. برای مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی، از رابطه (۸) که مقدار نیروی پیشران را در یک نازل همگرا-واگر محاسبه می‌کند، استفاده شده است [۱۴].

$$F_{thrust} = \left( \sqrt{\left( \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left[ 1 - \left( \frac{P_e}{P_{total}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right)} \right) + \frac{P_e - P_{atm}}{P_{total}} \frac{A_e}{A^*} A^* P_{total} \quad (8)$$

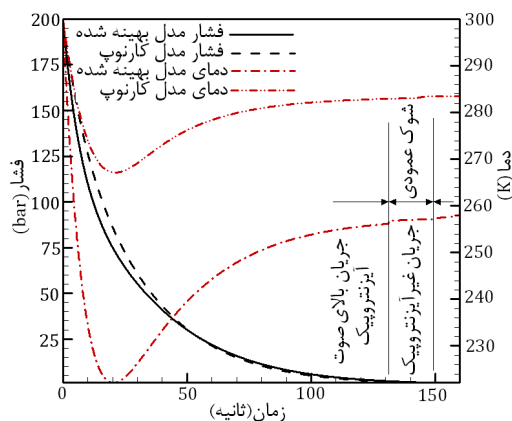
## ۶- نتیجه‌گیری

در جریان غیرآیزنتروپیک درون یک نازل همگرا-واگر که شوک عمودی در قسمت واگرا اتفاق می‌افتد، علاوه بر در نظر گرفتن اثرات انرژی جنبشی و معادلات مومنتوم، لازم است اثرات ناشی از شوک قائم نیز مدنظر قرارگیرد. به این منظور میدان انرژی NIKE معرفی شد. میدان جدید علاوه بر در نظر گرفتن اثرات انرژی جنبشی و مومنتوم سیال، قادر است محل ایجاد شوک را متناسب با نسبت فشار دوطرف نازل محاسبه نماید. چگونگی کاربرد میدان جدید در قالب یک مثال ترموسیالاتی توضیح داده‌شد. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی توسط نرم‌افزار تونتی‌سیم نشان داد که نیروی پیشران به دست آمده از شبیه‌سازی، مطابقت خوبی با نتایج تحلیلی دارد. از آنجاییکه مدل مذکور قابلیت پیاده‌سازی روی نرم‌افزارهایی مانند تونتی‌سیم را دارد، بنابراین بدون نیاز به استخراج معادلات و حل آن‌ها، می‌توان از مدل مذکور برای مدل‌سازی نیروی پیشران حالت گذرا استفاده نمود.

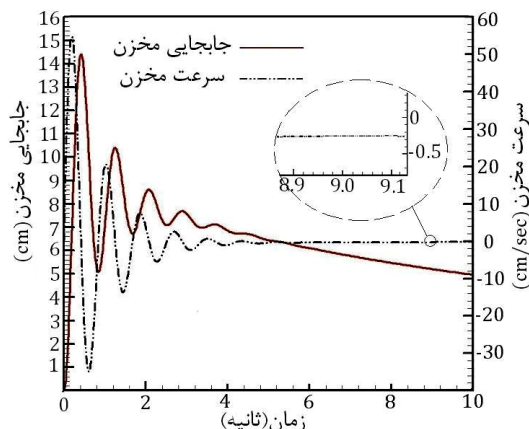




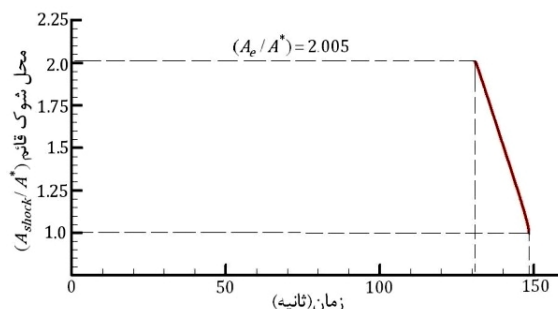
شکل ۹ تغییرات عدد ماخ خروجی



شکل ۷ مقایسه تغییرات دما و فشار مخزن برای مدل کانوپ [۱۱] و مدل بهینه شده



شکل ۱۰ جابجایی و سرعت مخزن



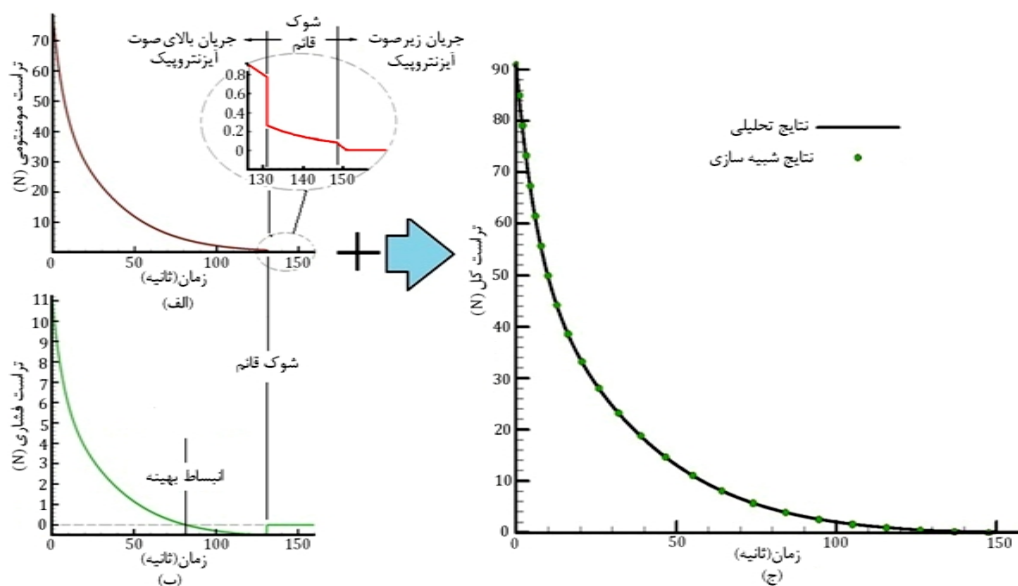
شکل ۸ تغییرات مکان ایجاد شوک قائم

## ۷- پیوست

در یک نازل همگرا و اگر که نسبت فشار بالادست به فشار محیط به اندازه‌ای بالاست که جریان در خروجی نازل مافوق صوت باشد، عدد ماخ خروجی از رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}}{M_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}} \quad (9)$$

که در آن،  $\gamma$  نسبت گرمای ویژه گاز ( $\gamma = c_p/c_v$ ) و  $M_e$  عدد ماخ در خروجی نازل و  $A_e, A^*$  نیز به ترتیب به سطح مقطع گلوگاه و سطح مقطع خروجی نازل اشاره می‌کند بنابراین با معلوم بودن عدد ماخ در خروجی، سرعت گاز در خروجی نازل، از رابطه  $v_e = M_e a$  به دست خواهد آمد. که در آن،  $a$  سرعت صوت در مقطع خروجی است و مقدار آن از رابطه (۱۰) به دست می‌آید:



شکل ۱۱ الف- نیروی پیشران مومنتوم ب-نیروی پیشران فشاری ج- نیروی پیشران کل

- [3] W. Borutzky, Bond Graph Modeling and Simulation of Multidisciplinary Systems - An Introduction, *J. Simulation Modeling Practice and Theory*, Vol. 17, No.1, pp. 3-21, 2009.
- [4] J. F. Broenink. *20-sim software for hierarchical bond-graph/block-diagram models*, Accessed 1999; <http://www.20sim.com>.
- [5] R. Jacob-Macoy, *Lorenz Simulation*. Accessed 2007 ; <http://www.lorsim.be/Default.htm>
- [6] Samantaray, A. K., and Mukherjee, A, *Manual of System Modeling by Bond graph Language Simulation: SYMBOLS Ver 1.0*, IIT Kharagpur.1997.
- [7] B. Ould Bouamama, K. Medjaher, A.K. Samantaray, and M. Staroswiecki. Supervision of an industrial steam generator. Part I: Bond graph modelling. *Control Engineering Practice*, Vol. 14, No.1, pp.71-83, 2006.
- [8] M. A. Djeziri, B. Ould Bouamama, R. Merzoudki, Modeling and robust FDI of steam generator using uncertain bond graph model. *Journal of Process Control*, Vol. 19, No. 1, pp.149-162, 2009.
- [9] K. Medjaher, A.K. Samantaray, and B. Ould Bouamama. Bond graph model of a vertical U-tube steam condenser coupled with a heat exchanger. *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 17, No. 1, pp.228-239, 2009.
- [10] J. U. Thoma and G. Mocellin. *Simulation with Entropy in Engineering Thermodynamics*, New York, Springer, pp.52-55, 2006.
- [11] D.C. Karnopp, D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. *System Dynamics - Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. 3th edition, John Wiley & Sons Inc., pp. 455-462, 2006.
- [12] F. P. incropera, D. P. Dewitt. *Fundamental of Heat and Mass Transfer*, 6th Edition, John Wiley & Sons Inc., pp.550-555, 2007.
- [13] A. sinaee, *Engineering Mechanics Dynamics*, 4th edition., Mashad: entesharat Nama, pp.309-311, 1998.(In persian).
- [14] George P. Sutton, O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements: An Introduction to the engineering of rockets*, 7th Edition, John Wiley & Sons, pp. 62-63, 2000.

$$a = \sqrt{\gamma RT} \Rightarrow v_e = \sqrt{\gamma RT} \cdot M_e \quad (10)$$

که در آن،  $R$  ثابت گازها (J/(kg.K)) و  $T$  دمای استاتیک گاز در مقطع خروجی است و مقدار آن از رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$T = T_{total} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{-1} \quad (11)$$

بنابراین چنانچه مقادیر  $P_{total}$ ,  $\dot{m}$ ,  $M_e$  در هر لحظه معلوم باشند، نرخ انرژی جنبشی که از سیستم خارج می‌شود از رابطه (۱۲) به دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{2} \dot{m}_e v_e^2 = \frac{1}{2} \dot{m}_e \gamma RT_{total} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{-1} M_e^2 \quad (12)$$

به همین ترتیب اگر روابط آیزنتروپیک را برای فشار در مقطع خروجی بنویسیم، رابطه فشار استاتیک و فشار کل به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$P_{static} = P_{total} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (13)$$

بنابراین باتوجه به روابط (۱۲) و (۱۳) باندگراف میدان انرژی جنبشی KE به صورت نشان داده شده در متن مقاله (شکل ۲) پیشنهاد می‌گردد.

#### ۸- مراجع

- [1] A. Mukherjee, R. Karmakar, and A.K. Samantaray. *Bond Graph in Modeling, Simulation and Fault Identification*. I.K. International Publishing House, New Delhi, India, 2006.
- [2] W. Borutzky, *Bond Graph Methodology Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamics System Models*, Springer-Verlag, London, 2010.