مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1395، دوره 16، شماره 10، ص‌ص 147-154

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی مساله ترموالاستیسیته در استوانه جدارضخیم تحت بار حرارتی گذرا

امیررضا شاهانی[1*]، حمید شریفی ترکی[2]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، تهران

* تهران، کد پستی 19991-43344، shahani@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 12 تیر 1395

پذیرش: 13 شهریور 1395

ارائه در سایت: 18 مهر 1395

کلید واژگان:

ترموالاستیسیته

استوانه جدارضخیم

بارگذاری گذرا

تبدیل هنکل

چکیده

مساله ترموالاستیسیته در یک استوانه جدارضخیم همسانگرد و همگن توخالی به صورت تحلیلی و با استفاده از تبدیل هنکل و تبدیل لاپلاس حل شد. شرایط مرزی مکانیکی و حرارتی برای سطح داخلی و سطح خارجی استوانه به صورت وابسته به زمان در نظر گرفته شده‌اند. برای شرایط مرزی دمایی، خود دما در مرزها اعمال شده و برای شرایط مرزی مکانیکی نیز، اعمال تنش بر روی سطوح داخلی و خارجی استوانه توخالی در نظر گرفته شده‌است. توزیع دما در راستای ضخامت استوانه بدست آمده و سپس با حل معادله سازه‌ای دینامیکی، روابط به صورت حل بسته برای میدان‌های جابجایی، تنش شعاعی و تنش محیطی ارائه شده‌اند. برای بررسی یک حالت نمونه، دما با تابعیت نمایی نسبت به زمان در سطح داخلی استوانه و دمای صفر در سطح خارجی آن اعمال شده و تنش‌های مکانیکی در سطح داخلی و خارجی استوانه صفر در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به دینامیکی بودن مساله، پس از رسم نمودارهای تنش، موج شوک حرارتی به وضوح قابل مشاهده است. سپس با استفاده از نمودارهای رسم شده تنش، لحظه رسیدن موج اتساعی به چند موقعیت شعاعی مشخص محاسبه شده و سپس نتایج آن با رابطه معمولی محاسبه زمان مقایسه شده‌است.

Analytical solution of the thermoelasticity problem in a thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading

AmirReza Shahani*, Hamid Sharifi Torki

Department of Mechanical Engineering, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran
*P.O.B. 19991-43344, Tehran, Iran, shahani@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 July 2016
Accepted 03 September 2016
Available Online 09 October 2016

Keywords:
Thermoelasticity
Thick-walled Cylinder
Transient Loading
Hankel Transform

ABSTRACT

The thermoelasticity problem in a thick-walled isotropic and homogeneous cylinder is solved analytically using finite Hankel transform and Laplace transform. Time-dependent thermal and mechanical boundary conditions are prescribed on the inner and the outer surfaces of the hollow cylinder. For the thermal boundary conditions, the temperature itself is prescribed on the boundaries. For the mechanical boundary conditions, the tractions are prescribed on both the inner and the outer surfaces of the hollow cylinder. Obtaining the distribution of the temperature throughout the cylinder, the dynamical structural problem is solved and closed-form relations are derived for radial displacement, radial stress and hoop stress. As a case study, exponentially decaying temperature with respect to time is prescribed on the inner surface and the temperature of the outer surface is considered to be zero, where the mechanical tractions on the inner and the outer surfaces of the hollow cylinder are assumed to be zero. On solving the dynamical thermoelasticity problem, a thermal shock was observed after plotting the results. Using the obtained plots, instants of dilatation wave being reached to specific radial positions are computed and compared with those from the classical formula.

1- مقدمه

بسیاری از سازه‌ها و قطعات مکانیکی مورد استفاده در صنعت علاوه بر تحمل بارهای مکانیکی، تحت تاثیر تنش‌های حرارتی نیز قرار دارند. از این رو با توجه به کاربرد گسترده در صنعت، تئوری‌های کلاسیک و جدید ترموالاستیسیته گسترش بسیاری پیدا کرده‌اند. روش‌های ریاضی با توجه به دقت بالا و داشتن عمومیت حل ارائه شده، ابزار بسیار قدرتمندی برای حل مسائل مهندسی، به خصوص ترموالاستیسیته، به شمار می‌روند.

حل تحلیلی معادلات ترموالاستیسیته که متشکل از دو معادله انرژی و معادله حرکت است، به دلیل وجود عبارت کوپلینگ ترمومکانیکی بین دما و جابجایی، دارای پیچیدگی‌های ریاضی بسیاری است. منظور از عبارت کوپلینگ ترمومکانیکی تاثیر میدان‌های جابجایی و دما بر یکدیگر است که با وجود این عبارت در معادله انرژی، باید هر دو معادله به صورت همزمان حل شوند. به دلیل وجود این پیچیدگی برخی ساده‌سازی‌ها مانند صرف‌نظر از عبارت کوپلینگ انجام می‌شود که منجر به تئوری مساله ترموالاستیسیته غیرکوپله دینامیکی می‌گردد. در حالت کلی تاثیر عبارت کوپلینگ ترمومکانیکی در معادله انرژی ناچیز بوده و در بسیاری از کاربردهای صنعتی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. R. Shahani, H. Sharifi Torki, Analytical solution of the thermoelasticity problem in a thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 10, pp. 147-154, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOI: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

اختلاف بین تئوری‌های کوپل و غیرکوپل، قابل چشم‌پوشی است.

از زمان بوجود آمدن علم ترموالاستیسیته حل‌های تحلیلی بسیار محدودی ارائه شده و حل‌های دقیق گسترش چندانی نیافته‌اند. درهمین زمینه حل تحلیلی مساله ترموالاستیسیته شبه استاتیکی برای استوانه ایزوتروپیک تحت بار حرارتی گذرا برای اولین بار در سال 2007 توسط شاهانی و نبوی [1] ارائه شده‌است، همچنین حل تحلیلی مساله ترموالاستیسیته کوپله دینامیکی برای یک کره ایزوتروپیک تحت فشار [2] در سال 2013 و برای حالت غیرکوپله و بارگذاری حرارتی گذرا [3] در سال 2014 برای اولین بار توسط شاهانی و مومنی ارائه شد.

کوچک‌زاده و انتظاری [4] مساله ترموالاستیسیته کوپله را برای یک دیسک در حال چرخش به صورت تحلیلی حل نمودند، برای حل از تئوری کلاسیک استفاده شده‌است، همچنین شرایط مرزی حرارتی به صورت اعمال شار حرارتی در سطح داخلی و تغییر دمای صفر برای سطح خارجی بوده و برای شرایط مرزی مکانیکی نیز حالت گیردار برای سطح داخلی و حالت عاری از تنش برای سطح خارجی در نظر گرفته شده‌است.

کاردوماتیس [5] مساله ترموالاستیسیته غیرکوپله و غیردینامیکی را در یک استوانه اورتوتروپیک توخالی و با مقاطع دایروی و بیضوی بررسی نمود، شرایط مرزی به صورت اعمال انتقال حرارت همرفت در سطح خارجی بوده و دمای سطح داخلی برابر دمای اولیه نگه داشته شده‌است، روش حل استفاده از روش جابجایی و بسط تقریبی هنکل برای توابع بسل بوده‌است.

ین و کریمسر [6] تنش‌های حرارتی در یک استوانه محدود که تحت شار حرارتی متقارن قرار دارد بدست آوردند، این حل با استفاده از ساختن یک تابع پتانسیل برای جابجایی های ترموالاستیک و معادله بای هارمونیک برای ارضا کردن شرایط مرزی بدست آمده‌است.

تانیگاوا و همکارانش [7] مساله ترموالاستیسیته سه بعدی را با در نظر گرفتن کوپلینگ مکانیکی-حرارتی در مختصات استوانه ای گسترش داده‌اند، میدان‌های تنش و جابجایی بدست آمده و تفاوت بین مسئله کوپله و غیرکوپله نشان داده شده‌است، در ابتدای مقاله ذکر شده که وجود ترم کوپلینگ ترمومکانیکی و اینرسی در مواردی مانند شوک‌های حرارتی مهم است ولی به دلیل پیچیدگی حل، از ترم اینرسی صرف نظر شده‌است، سپس سه تابع پتانسیل جابجایی برای سه جهت ارائه شده که هم برای حالت کوپله و هم غیرکوپله قابل استفاده است، در پایان معادلات برای استوانه طویل توخالی که حالت دوبعدی دارد حل شده اند.

ونگ [8] روشی برای تحلیل مساله ترموالاستیسیته دینامیکی در استوانه توخالی ارائه نمود، مشکل این روش عدم محاسبه میدان دما در مثال ارائه شده و در نظر گرفتن توزیع یکنواخت دما در تمام مقاطع است، با رویکردی مشابه چاو و همکاران [9] مساله ترموالاستیسیته را در یک استوانه ارتوتروپیک توخالی حل نمودند که دارای همین اشکال است، دینگ و همکاران [10] حلی برای مساله ترموالاستیسیته دینامیکی در یک استوانه ارتوتروپیک ناهمگن ارائه نمودند، در اینجا نیز معادله انرژی حل نشده و مقدار ثابتی برای دما در تمام نقاط در نظر گرفته شده‌است.

یی و مون [11] حل تحلیلی برای حالت غیرکوپله تنش صفحه‌ای گذرا برای استوانه ارتوتروپیک توخالی ارائه داده‌اند، شرایط مرزی به صورت شار حرارتی صفر در سطح داخلی و انتقال حرارت همرفت در سطح خارجی است، شرط اولیه دمایی به صورت نامتقارن اعمال شده و به همین دلیل مساله به صورت دوبعدی درآمده‌است. همچنین برای حل از توابع تنش و بسط توابع ویژه بسل-فوریه استفاده شده‌است.

گوشیما و همکاران [12] مساله ترموالاستیسیته در استوانه طویل توخالی تحت شار حرارتی ناشی از اشعه گاما را حل نمودند، شرایط مرزی آن به صورت جریان همرفت سیال در سطح داخلی و خارجی است، از ترم اینرسی در معادلات صرف نظر شده‌است، همچنین خواص نسبت به دما غیر وابسته هستند، برای حل از تبدیلات لاپلاس و توابع گرین استفاده شده‌است.

آشیدا و همکارانش [13] با معرفی توابع پتانسیل به ارائه حلی برای مساله ترموالاستیسیته گذرا در یک استوانه ایزوتروپیک عرضی پرداختند، شرایط مرزی به صورت انتقال حرارت همرفت روی سطح خارجی در نظر گرفته شده‌است، عبدالله و همکارانش [14] تنش‌های حرارتی دینامیکی را در استوانه توپر ایزوتروپیک عرضی بررسی کردند، معادلات ترموالاستیسیته به صورت غیرکوپله دینامیکی در نظر گرفته شده‌اند، برای حل معادله انرژی از تبدیل فوریه و تئوری اعداد مختلط استفاده شده‌است، معادله حرکت نیز به دو قسمت موج چرخشی و غیرچرخشی تقسیم شده و پاسخ‌ها به صورت سری‌هایی از توابع بسل ارائه شده‌اند.

لی و همکارانش [15] به حل یک‌بعدی مساله کوپله شبه‌استاتیک در یک استوانه طویل چندلایه پرداختند، روش حل به صورت نیمه تحلیلی و استفاده همزمان از تبدیل لاپلاس و تفاضل‌محدود بوده است، سطوح عاری از تنش بوده و دمای ثابت به سطح داخلی اعمال شده، همچنین برای سطح خارجی نیز شار صفر در نظر گرفته شده‌است.

ژنگ و همکارانش [16] مساله ترموالاستیسیته حالت پایدار را برای یک استوانه چندلایه با انتهای بسته حل نمودند، شرایط مرزی مکانیکی به صورت اعمال فشار در سطح داخلی بوده و سطح خارجی عاری از تنش در نظر گرفته شده‌است، شرایط مرزی دمایی نیز عبارتند از اعمال دمای ثابت به سطوح داخلی و خارجی، در پایان یک تحلیل اجزا محدود جهت مقایسه با حل تحلیلی ارائه شده‌است.

کودینف و همکارانش [17] برای یک استوانه چندلایه توخالی و تحت شوک حرارتی مساله ترموالاستیسیته را به صورت شبه استاتیک و غیرکوپله حل نمودند، همچنین سطوح داخلی و خارجی به صورت عاری از تنش هستند.

النگار و همکاران [18] تنش‌های حرارتی را برای یک استوانه دوار ارتوتروپیک غیرهمگن با استفاده از روش تفاضل محدود و سایر روش‌های عددی بدست آوردند، مساله به صورت دینامیکی و غیرکوپله فرض شده و استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال دوران است و خواص به صورت وابسته به شعاع هستند، همچنین شرایط مرزی دمایی به صورت اعمال دمای ثابت در سطح داخلی و اعمال شار حرارتی صفر در سطح خارجی بوده و شرایط مرزی مکانیکی به صورت جابجایی صفر در سطح داخلی و سرعت صفر در سطح خارجی در نظر گرفته شده‌اند.

شرعیات و همکاران [19] تنش‌های گذرای غیرخطی و انتشار امواج ترموالاستیک را برای یک استوانه جدارضخیم از جنس مواد دارای چیدمان هدفمند و دارای وابستگی دمایی تحت بار دینامیکی ترمومکانیکی بررسی نمودند، برای حل از روش اجزا محدود استفاده شده‌است.

دسای و کنت [20] به روش نیمه تحلیلی به بررسی استوانه کوتاه از جنس مواد با چیدمان هدفمند ارتوتروپیک تحت بار حرارتی پرداخته‌اند، مساله به صورت کرنش صفحه‌ای دوبعدی درنظر گرفته شده‌است، لازم به ذکر است که دما فقط به صورت یک بارگذاری خارجی اعمال و توزیع آن در جسم

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

ارائه نشده‌است.

عسگری و اخلاقی [21] برای یک استوانه توخالی از جنس مواد دارای چیدمان هدفمند دوبعدی، تنش‌های حرارتی گذرا را بررسی نمودند. روش حل استفاده از اجزا محدود بوده و همچنین تاثیرات تغییر خواص در جهات شعاعی و محوری بر تنش‌های حرارتی بررسی شده‌است.

احترام و همکاران [22] برای یک استوانه توخالی چندلایه ارتوتروپیک به حل تحلیلی تنش‌ها تحت بارگذاری گذرا پرداختند. مساله به صورت غیرکوپله و غیردینامیکی درنظر گرفته شده و روش حل استفاده از بسط فوریه و تبدیلات هنکل است.

قناد و پرهیزکار [23] پاسخ پایدار مساله ترموالاستیسیته را در یک استوانه تحت بارگذاری ترمومکانیکی برای شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی به دست آوردند. میدان‌های جابجایی و دما به صورت دوبعدی در نظر گرفته شده‌اند.

با توجه به مقالات بررسی شده ملاحظه می‌گردد که در زمینه حل مساله ترموالاستیسته به صورت تحلیلی، پژوهش‌های محدودی انجام شده و در هیچ کدام از مسائل دینامیکی مربوط به استوانه، معادله توزیع دما حل نشده و توزیع دما به صورت یکنواخت و ثابت فرض شده‌است.

در این مقاله مساله ترموالاستیسیته به صورت دینامیکی و غیرکوپله حل شد. معادله انرژی به صورت کامل حل شده و توزیع دما در راستای شعاعی بدست آمد. شرایط مرزی به صورت گذرا و متغیر با زمان در نظر گرفته شده و توابع مربوط به توزیع دما، جابجایی، تنش محیطی و تنش شعاعی به صورت فرم بسته استخراج گردید. سپس به عنوان نمونه اعمال دما در سطح داخلی به صورت تابعی نمائی از زمان در نظر گرفته شده و روابط و همچنین نمودارهای مربوط به این حالت استخراج شده‌اند.

2- معادلات ترموالاستیسیته

یک استوانه توخالی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر می‌گیریم. برای یک استوانه همگن و همسانگرد که دارای تقارن محوری است، معادلات ترموالاستیسیته غیرکوپله دینامیکی به صورت زیر هستند [1] و [24]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u-\beta\frac{\partial\theta}{\partial r}=\gamma^2\ddot{u} \quad (\text{a -1})$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{1}{\alpha^*}\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (\text{b -1})$$

که در آن:

$$\gamma^2=\frac{\rho}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \quad (\text{a -2})$$

$$\beta=\alpha\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \quad (\text{b -2})$$

$$\alpha^*=\frac{k}{\rho c} \quad (\text{c -2})$$

که در آن ρ چگالی، E مدول الاستیسیته، ν نسبت پوآسون، α ضریب انبساط حرارتی، k ضریب انتقال حرارت هدایت و c گرمای ویژه است. همچنین داریم:

$$\theta=T(r,t)-T_\infty \quad (\text{a -3})$$

$$u=u(r,t) \quad (\text{b -3})$$

که در آن T_∞ دمای محیط است. همچنین روابط مربوط به تنش‌های محیطی و شعاعی به صورت زیر هستند:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}\right]-\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\theta \quad (\text{a -4})$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r}+(1-\nu)\frac{u}{r}\right]-\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\theta \quad (\text{b -4})$$

و شرایط اولیه و مرزی دمایی به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\theta(a,t)=g(t) \quad (\text{a -5})$$

$$\theta(b,t)=0 \quad (\text{b -5})$$

$$\theta(r,0)=0 \quad (\text{c -5})$$

که در آن $g(t)$ تابع معلومی از زمان است که به صورت شرط مرزی در سطح داخلی اعمال می‌گردد. همچنین شرایط مرزی معادله جابجایی به صورت تجویز تنش شعاعی در سطح داخلی و خارجی است.

$$\sigma_{rr}(a,t)=-P_i \quad (\text{a -6})$$

$$\sigma_{rr}(b,t)=-P_o \quad (\text{b -6})$$

3- روش ریاضی حل معادلات

برای حل معادلات از روش تبدیل هنکل محدود استفاده می‌کنیم. این تبدیل یکی از انواع تبدیلات انتگرالی است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H[f(r,t);\zeta_n]=\overline{f}(\zeta_n,t)=\int_a^b rf(r,t)k_1(r,\zeta_n)dr \quad (7)$$

که در آن $k_1(r,\zeta_n)$ کرنل تبدیل است. شکل کرنل انتخاب شده بستگی به معادلات و نوع شرایط مرزی تجویز شده بر مساله دارد. همچنین لازم به ذکر است که کرنل تبدیل باید شرایط مرزی همگن مساله را ارضا نماید. برای معادله انرژی، کرنل مناسب می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود [25]:

$$k_1(r,\zeta_n)=J_0(\zeta_n r)Y_0(\zeta_n R_i)-J_0(\zeta_n R_i)Y_0(\zeta_n r) \quad (8)$$

که در آن ζ_n ها ریشه‌های معادله مشخصه زیر هستند:

$$J_0(\zeta_n b)Y_0(\zeta_n a)-J_0(\zeta_n a)Y_0(\zeta_n b)=0 \quad (9)$$

همچنین معکوس این تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^{-1}\left[\overline{f}(\zeta_n,t);r\right]=f(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{f}(\zeta_n,t)k_1(r,\zeta_n) \quad (10)$$

با استفاده از خاصیت تعامد توابع بسل داریم:

$$a_n=\frac{1}{\int_a^b rk_1^2(r,\zeta_n)dr} \quad (\text{a -11})$$

همچنین a_n به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a_n=\frac{\pi^2}{2}\frac{{\zeta_n}^2\{J_0(\zeta_n b)\}^2}{\{J_0(\zeta_n a)\}^2-\{J_0(\zeta_n b)\}^2} \quad (\text{b -11})$$

4- حل معادله انرژی

برای اعمال تبدیل هنکل به معادله انرژی نیاز به اعمال تبدیل به مشتقات دما داریم. رابطه تبدیل برای این معادله به صورت زیر بدست می‌آید [26]:

$$H\left[\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{d\theta}{dr}\right]=\frac{2J_0(\zeta_n a)}{\pi J_0(\zeta_n b)}\theta(b,t)-\frac{2}{\pi}\theta(a,t)-{\zeta_n}^2\overline{\theta}(\zeta_n,t) \quad (12)$$

با اعمال تبدیل هنکل به معادله (b -1) و در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم:

$$-\frac{2}{\pi}g(t)-{\zeta_n}^2\overline{\theta}(\zeta_n,t)=\frac{1}{\alpha^*}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} \quad (13)$$

با حل معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$\overline{\theta}(\zeta_n,t)=-\frac{2\alpha^* e^{-\alpha^*{\zeta_n}^2 t}}{\pi}\int_0^t g(\tau)e^{\alpha^*{\zeta_n}^2\tau}d\tau \quad (14)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

حال با استفاده از (10)، یعنی اعمال تبدیل معکوس هنکل، معادله توزیع دما به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\theta(r,t)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{\zeta_n}^2\{J_0(\zeta_n b)\}^2\overline{\theta}(\zeta_n,t)}{\{J_0(\zeta_n a)\}^2-\{J_0(\zeta_n b)\}^2}\times[J_0(\zeta_n r)Y_0(\zeta_n a)-J_0(\zeta_n a)Y_0(\zeta_n r)] \quad (15)$$

5- حل معادله جابجایی

معادله (1- a) را در نظر می‌گیریم، شرایط مرزی به صورت اعمال تنش در سطح داخلی و خارجی به صورت زیر هستند:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}+h_1u(a,t)=B_1(t) \quad (16\text{-a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b}+h_2u(b,t)=B_2(t) \quad (16\text{-b})$$

همچنین شرایط اولیه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u(r,0)=0 \quad (17\text{-a})$$

$$\dot{u}(r,0)=0 \quad (17\text{-b})$$

برای حل معادله جابجایی، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$u=u_d+u_g \quad (18)$$

با جاگذاری معادله (18) در معادلات (1- a)، (16) و (17) داریم:

$$\frac{\partial^2(u_d+u_g)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_d+u_g)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}(u_d+u_g)-\beta\frac{\partial\theta}{\partial r}=\gamma^2\frac{\partial^2(u_d+u_g)}{\partial t^2} \quad (19\text{-a})$$

$$\frac{\partial(u_d+u_g)}{\partial r}\Big|_{r=a}+h_1[u_d(a,t)+u_g(a,t)]=B_1(t) \quad (19\text{-b})$$

$$\frac{\partial(u_d+u_g)}{\partial r}\Big|_{r=b}+h_2[u_d(b,t)+u_g(b,t)]=B_2(t) \quad (19\text{-c})$$

$$u_d(r,0)+u_g(r,0)=0 \quad (19\text{-d})$$

$$\dot{u}_d(r,0)+\dot{u}_g(r,0)=0 \quad (19\text{-e})$$

معادلات (19) به دو دسته معادلات زیر تقسیم می‌شوند:

$$\frac{\partial^2u_d}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_d}{\partial r}-\frac{u_d}{r^2}-\gamma^2\frac{\partial^2u_d}{\partial t^2}=0 \quad (20\text{-a})$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial r}\Big|_{r=a}+h_1u_d(a,t)=B_1(t) \quad (20\text{-b})$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial r}\Big|_{r=b}+h_2u_d(b,t)=B_2(t) \quad (20\text{-c})$$

$$u_d(r,0)=0 \quad (20\text{-d})$$

$$\dot{u}_d(r,0)=0 \quad (20\text{-e})$$

و دسته دوم:

$$\frac{\partial^2u_g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_g}{\partial r}-\frac{u_g}{r^2}-\gamma^2\frac{\partial^2u_g}{\partial t^2}-\beta\frac{\partial\theta}{\partial r}=0 \quad (21\text{-a})$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial r}\Big|_{r=a}+h_1u_g(a,t)=0 \quad (21\text{-b})$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial r}\Big|_{r=b}+h_2u_d(b,t)=0 \quad (21\text{-c})$$

$$u_g(r,0)=0 \quad (21\text{-d})$$

$$\dot{u}_g(r,0)=0 \quad (21\text{-e})$$

با اعمال تبدیل هنکل به (20- a) داریم:

$$H[u_d(r,t);\xi_m]=\overline{u}_d(\xi_m,t)=\int_a^b ru_d(r,t)k_2(r,\xi_m)dr \quad (22)$$

که در آن ξ_m ها ریشه‌های مثبت معادله مشخصه زیر هستند:

$$[\xi_m Y_1'(\xi_m a)+h_1Y_1(\xi_m a)][\xi_m J_1'(\xi_m b)+h_2J_1(\xi_m b)]-[\xi_m Y_1'(\xi_m b)+h_2Y_1(\xi_m b)]\times[\xi_m J_1'(\xi_m a)+h_1J_1(\xi_m a)]=0 \quad (23)$$

و کرنل تبدیل به صورت زیر انتخاب می‌شود [23]:

$$k_2(r,\xi_m)=\{J_1(\xi_m r)[\xi_m Y_1'(\xi_m a)+h_1Y_1(\xi_m a)]-Y_1(\xi_m r)[\xi_m J_1'(\xi_m a)+h_1J_1(\xi_m a)]\} \quad (24)$$

همچنین لازم به یادآوریست که کرنل تبدیل باید شرایط مرزی همگن مساله را ارضا نماید، تبدیل معکوس به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H^{-1}[\overline{u}_d(\xi_m,t);r]=u_d(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\overline{u}_d(\xi_m,t)k_2(r,\xi_m) \quad (25)$$

عبارت b_m برابر است با:

$$b_m=\frac{\pi^2\xi_m^2e_2^2}{2\{(h_2^2+\xi_m^2[1-(\frac{1}{\xi_m b})^2])e_1^2-(h_1^2+\xi_m^2[1-(\frac{1}{\xi_m a})^2])e_2^2\}} \quad (26)$$

در معادله (28) پارامترهای e_1 و e_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_1=\xi_m J_1'(\xi_m a)+h_1J_1(\xi_m a) \quad (27\text{-a})$$

$$e_2=\xi_m J_1'(\xi_m b)+h_2J_1(\xi_m b) \quad (27\text{-b})$$

پس داریم:

$$\frac{2e_1}{\pi e_2}B_2(t)-\frac{2}{\pi}B_1(t)-\xi_m^2\overline{u_d}(\xi_m,t)-\gamma^2\frac{\partial^2\overline{u_d}(\xi_m,t)}{\partial t^2}=0 \quad (28)$$

معادله (28) یک معادله دیفرانسیل معمولی است که حل آن با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\overline{u_d}(\xi_m,t)=L^{-1}\left\{\frac{\phi(s)}{(s^2+(\frac{\xi_m}{\gamma})^2)}\right\} \quad (29)$$

که در آن:

$$\phi(s)=L\{\Gamma(t)\} \quad (30)$$

و:

$$\Gamma(t)=\frac{2e_1}{\pi\gamma^2e_2}B_2(t)-\frac{2}{\pi\gamma^2}B_1(t) \quad (31)$$

با جاگذاری (29) در معادله (25) داریم:

$$u_d(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_mL^{-1}\left\{\frac{\phi(s)}{(s^2+(\frac{\xi_m}{\gamma})^2)}\right\}k_2(r,\xi_m) \quad (32)$$

برای محاسبه u_g، آن‌را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_g(r,t)=S(t,\xi_m)k_2(r,\xi_m) \quad (33)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که فرم در نظر گرفته شده برای u_g شرایط مرزی همگن مساله را ارضا می‌کند. با جاگذاری معادله (33) در (21- a) داریم:

$$-\xi_m^2k_2(r,\xi_m)S(t,\xi_m)-\gamma^2k_2(r,\xi_m)\frac{d^2S(t,\xi_m)}{dt^2}=\beta\frac{\partial\theta}{\partial r} \quad (34)$$

برای محاسبه $S(t,\xi_m)$ از خاصیت تعامد توابع بسل استفاده می‌کنیم:

$$\int_a^b rk_2(r,\xi_m)k_2(r,\xi_q)dr=N_m\delta_{mq} \quad (35)$$

که در آن δ_{mq}، دلتای کرونیکر است و برای N_m داریم:

$$N_m=\frac{1}{\xi_m^2}\{b^2\frac{dk_2}{dr}\Big|_{r=b}^2-a^2\frac{dk_2}{dr}\Big|_{r=a}^2+(\xi_m^2-1)[b^2k_2^2(b)-a^2k_2^2(a)]\} \quad (36)$$

با ضرب طرفین (34) در $rk_2(r,\xi_m)$ و استفاده از (36) داریم:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

$$\frac{d^2S}{dt^2}+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2S=-\frac{\beta}{\gamma^2N_m}\int_a^b rk_2(r,\xi_m)\frac{\partial\theta}{\partial r}dr \tag{37}$$

تابع توزیع دما قبلا به صورت زیر بدست آمد:

$$\theta(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\theta}(\zeta_n,t)k_1(r,\zeta_n) \tag{38}$$

با جاگذاری (38) در (37) داریم:

$$\frac{d^2S}{dt^2}+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2S=\{-\frac{\beta}{\gamma^2N_m}\int_a^b rk_2\frac{\partial k_1}{\partial r}dr\}a_n\bar{\theta}(\zeta_n,t) \tag{39}$$

پس داریم:

$$S(t)=\left\{-\frac{a_n\beta\int_a^b rk_2\frac{\partial k_1}{\partial r}dr}{\gamma N_m\xi_m}\right\}\times\int_0^t\bar{\theta}(\zeta_n,\tau)\sin\left(\frac{\xi_m}{\gamma}(t-\tau)\right)d\tau \tag{40}$$

با محاسبه $S(t)$ میدان جابجایی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(r,t)=\sum_{\xi_m}^{\infty}\sum_{\zeta_n}^{\infty}[b_m\bar{u}_d(\xi_m,t)+S(t)]k_2(r,\xi_m) \tag{a -41}$$

حال با استفاده از (4- a) و (4- b) میدان‌های تنش به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\sum_{\xi_m}^{\infty}\sum_{\zeta_n}^{\infty}[b_m\bar{u}_d(\xi_m,t)+S(t)]\times\left[(1-\nu)\frac{\partial k_1}{\partial r}+\nu\frac{k_1}{r}\right]-\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\theta}(\zeta_n,t)k_1(r,\zeta_n) \tag{b -41}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\sum_{\xi_m}^{\infty}\sum_{\zeta_n}^{\infty}[b_m\bar{u}_d(\xi_m,t)+S(t)]\times\left[\nu\frac{\partial k_1}{\partial r}+(1-\nu)\frac{k_1}{r}\right]-\frac{E\alpha}{(1-2\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{\theta}(\zeta_n,t)k_1(r,\zeta_n) \tag{c -41}$$

6- بررسی یک حالت نمونه

به عنوان نمونه با در نظر گرفتن اعمال دمای نمائی در سطح داخلی استوانه داریم:

$$g(t)=\theta_0e^{-\omega t} \tag{42}$$

با جاگذاری در (14) داریم:

$$\bar{\theta}(\zeta_n,t)=-\frac{2\alpha^*\theta_0}{\pi(\alpha^*{\zeta_n}^2-\omega)}\left(e^{-\omega t}-e^{-\alpha^*{\zeta_n}^2t}\right) \tag{43}$$

با استفاده از (15) رابطه مربوط به توزیع دما به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\theta(r,t)=-\alpha^*\pi\theta_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{{\zeta_n}^2\{J_0(\zeta_nb)\}^2}{\{J_0(\zeta_na)\}^2-\{J_0(\zeta_nb)\}^2}[J_0(\zeta_nr)Y_0(\zeta_na)-J_0(\zeta_na)Y_0(\zeta_nr)]\frac{(e^{-\omega t}-e^{-\alpha^*\zeta_n^2t})}{(\alpha^*{\zeta_n}^2-\omega)} \tag{44}$$

همچنین با در نظر گرفتن تنش ثابت روی مرزها داریم:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a}=-P_i \tag{a -45}$$

$$\sigma_{\theta\theta}\big|_{r=b}=-P_o \tag{b -45}$$

با جاگذاری (45- a) و (45- b) در (20- b) و (20- c) :

$$h_1=\frac{\nu}{(1-\nu)a} \tag{a -46}$$

$$h_2=\frac{\nu}{(1-\nu)b} \tag{b -46}$$

$$B_1(t)=-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}P_i+\frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)}\theta_0e^{-\omega t} \tag{c -46}$$

$$B_2(t)=-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}P_o \tag{d -46}$$

با جاگذاری (46- c) و (46- d) در (31) و استفاده از (32) داریم:

$$\overline{u_d}(\xi_m,t)=\frac{2(1+\nu)}{\pi(1-\nu)\xi_m^2}\left((P_i-\frac{e_1P_o}{e_2})\frac{(1-2\nu)}{E}\right)\times\left(1-\cos\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)\right)-\frac{2(1+\nu)}{\pi\gamma^2(1-\nu)}\times\left\{\frac{e^{-\omega t}}{\omega^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}-\frac{\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)\cos\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)-\omega\sin\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)}{\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)\left(\omega^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2\right)}\right\} \tag{47}$$

همچنین با جاگذاری (14) در (40) داریم:

$$S(t)=-\frac{2a_n\theta_0U_1\alpha^*\gamma}{\pi(\alpha^*\gamma{\zeta_n}^2-\omega)\xi_m}\{-\frac{e^{-\omega t}}{\omega^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}-\frac{\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)}{\omega^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}\cos\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)+\frac{\omega}{\omega^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}\sin\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)+\frac{e^{-\alpha^*{\zeta_n}^2t}}{(\alpha^*{\zeta_n}^2)^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)}{(\alpha^*{\zeta_n}^2)^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}\cos\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)-\frac{\alpha^*{\zeta_n}^2}{\left(\alpha^*{\zeta_n}^2\right)^2+\left(\frac{\xi_m}{\gamma}\right)^2}\sin\left(\frac{\xi_m}{\gamma}t\right)\} \tag{48}$$

که در آن:

$$U_1=-\frac{\beta}{\gamma^2N_m}\int_a^b rk_2(r,\xi_m)\frac{\partial k_1(r,\zeta_n)}{\partial r}dr \tag{49}$$

7- نتایج و بحث

برای بررسی نتایج، مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم.

$a=1$ m ; $b=2$ m; $P_i=P_o=0$; $\nu=0.3$; $\theta_0=100$ °C
$E=70$ GPa ; $\rho=2707$ $^{\text{kg}}/_{\text{m}^3}$; $k=204$ $^{\text{W}}/_{\text{mK}}$
$\alpha=23E-6$ $^1/_\text{K}$; $c=903$ $^\text{J}/_{\text{kgK}}$;

همچنین برای ω دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

7-1- حالت اول: $\omega=0.001$

شکل 1 نمودار توزیع دما در راستای شعاعی استوانه را تحت اعمال دما در سطح داخلی که دارای فرم نمایی است، نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود با گذشت زمان این نمودار به حالت پایا نزدیک می‌شود.

با توجه به نمائی بودن و توان منفی، با گذشت زمان تاثیر این دمای اعمال شده کاهش یافته و در زمان 10000 ثانیه نمودار کاملا بر محور افقی منطبق می‌شود.

شکل 2 و 3 توزیع تنش شعاعی و محیطی در راستای ضخامت استوانه و برای حالت $\omega=0.001$ را نشان می‌دهد. ماهیت هذلولوی معادله (1- a) باعث بوجود آمدن شوک حرارتی شده‌است که به وضوح در شکل‌های 2 و 3 ملاحظه می‌شود. برخلاف ماهیت فشاری بار حرارتی اعمال شده، در ابتدا موج تنش کششی است. اعمال بارگذاری حرارتی در سطح داخلی استوانه باعث

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

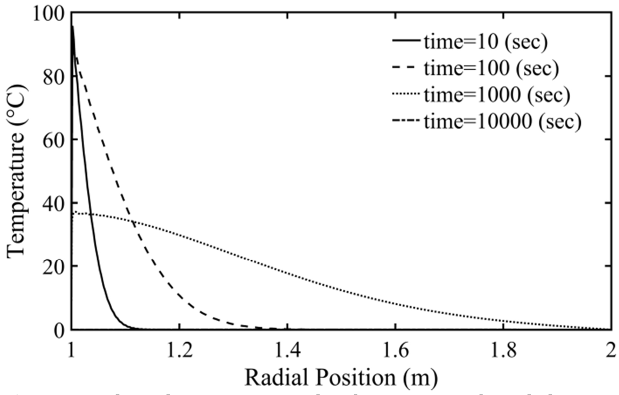

Fig. 1 Time-dependent temperature distribution versus the radial distance for $\omega = 0.001$

شکل 1 توزیع دمای وابسته به زمان در راستای شعاعی برای $\omega = 0.001$

انتشار امواج ترموالاستیک به سمت سطح خارجی استوانه می‌گردد، این امواج پس از برخورد با سطح خارجی استوانه مجددا به سمت داخل برمی‌گردند و این روند ادامه پیدا می‌کند، امواج ترموالاستیک انتشار یافته در ابتدا دارای ماهیت کششی هستند، ولی پس از برخورد با سطح خارجی و بازگشت به سمت داخل دارای ماهیت فشاری می‌شوند، ملاحظه می‌شود که دامنه تنش‌های شعاعی برای شعاع‌های بزرگتر، کوچکتر است، علامت مولفه شعاعی تنش پس از مدتی منفی می‌شود که علت این تغییر علامت تاثیر نمایی بارگذاری حرارتی در شعاع‌های مختلف با گذشت زمان است، در حقیقت می‌توان گفت مولفه‌های تنش از دو بخش تشکیل شده‌اند؛ یک بخش به دلیل

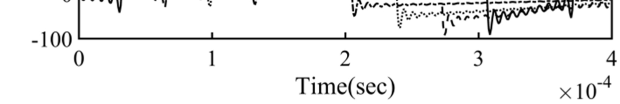

Fig. 2 History of radial stress for $\omega = 0.001$

شکل 2 تاریخچه تنش شعاعی برای $\omega = 0.001$

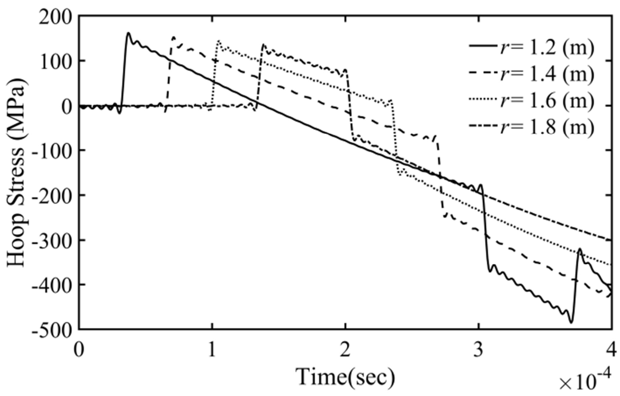

Fig. 3 History of hoop stress for $\omega = 0.001$

شکل 3 تاریخچه تنش محیطی برای $\omega = 0.001$

اعمال شرط مرزی حرارتی ایجاد می‌شود و یک بخش حاصل موج تنش در لحظه‌ای است که بار حرارتی به طور ناگهانی اعمال می‌گردد، همچنین در لحظه‌ای که موج کششی به یک موقعیت مکانی می‌رسد، مولفه مماسی تنش به طور ناگهانی فشاری می‌شود که علت این امر مقاومت ذرات مجاور است.

سرعت موج اتساعی در استوانه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V_e = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = 5.9 \times 10^3 (\mathrm{m/s}) \quad (50)$$

حال با استفاده از رابطه (51) می‌توان زمانی را که برای اولین بار موج اتساع به یک شعاع می‌رسد را محاسبه نمود.

$$t^* = \frac{r-a}{V_e} \quad (51)$$

جدول 1 مقایسه زمان رسیدن موج اتساع به هر نقطه را، با استفاده از رابطه (51) و شکل‌های 2 و 3 نشان می‌دهد.

2-7 حالت دوم: $\omega = 0$ و صحت‌سنجی داده‌ها

شکل 4 نمودار توزیع دما در راستای شعاعی استوانه را تحت اعمال شرط مرزی دما ثابت در سطح داخلی استوانه نشان می‌دهد، همانطور که ملاحظه می‌شود با گذشت زمان این نمودار به حالت پایا نزدیک می‌شود.

حالت $\omega = 0$ در واقع اعمال دمای ثابت بر سطح داخلی استوانه است. دینگ و همکاران [10] مساله اعمال دمای ثابت به سطوح استوانه را بررسی نمودند، با این تفاوت که بدون حل معادله دما، افزایش ناگهانی و یکنواخت دما به اندازه θ_0 را برای همه مقاطع استوانه فرض نمودند. برای اطمینان از صحیح بودن نتایج، مساله را با فرض‌های حاکم بر [10] حل می‌کنیم. البته همانطور که قبلا ذکر شد و همچنین با توجه به نمودار به دست آمده برای توزیع دما، این فرض دارای خطای زیادی خواهد بود. شکل 5 نمودار مربوط به تنش‌های شعاعی و شکل 6 نمودار مربوط به تنش‌های برشی را برای مقطع

جدول 1 مقایسه نتایج بین زمان رسیدن موج به یک شعاع مشخص با استفاده از شکل 2 و شکل 3 و معادله (51)

Table 1 Comparison between the instants of reaching dilatation wave to specific radial positions considered in Fig. 2 and Fig. 3 and equation (51)

موقعیت شعاعی(m)	با استفاده از رابطه (53)	بدست آمده از شکل‌های 2 و 3
r=1.2	3.38×10^{-5}	3.3715×10^{-5}
r=1.4	6.76×10^{-5}	6.7850×10^{-5}
r=1.6	10.14×10^{-5}	10.1755×10^{-5}
r=1.8	13.52×10^{-5}	13.5650×10^{-5}

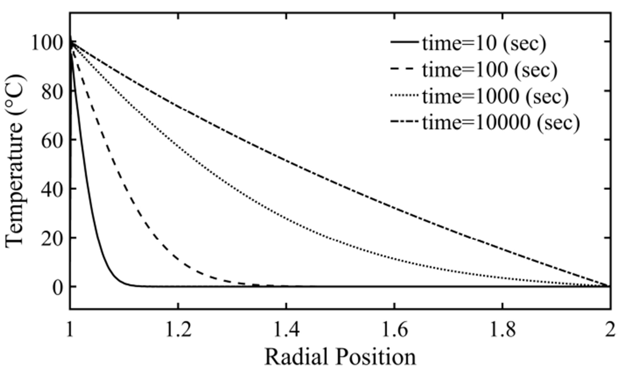

Fig. 4 Time-dependent temperature distribution versus the radial distance for $\omega = 0$

شکل 4 توزیع دمای وابسته به زمان در راستای شعاعی برای $\omega = 0$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]

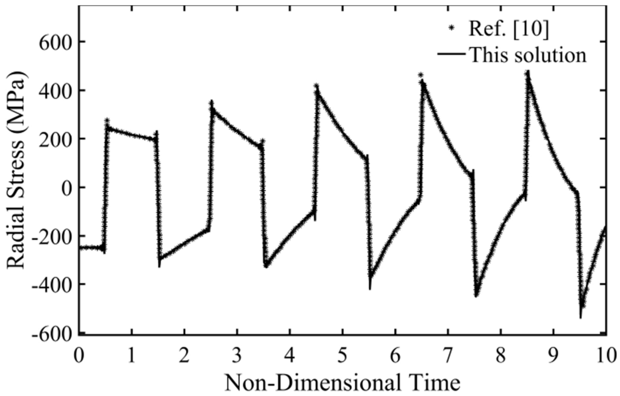

Fig. 5 Comparison of radial stress with Ref.[10] for middle point

شکل 5 مقایسه نتایج تنش شعاعی با مرجع [10] برای شعاع میانی

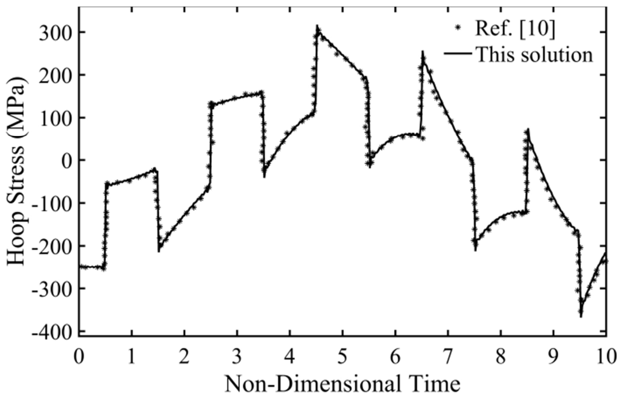

Fig. 6 Comparison of hoop stress with Ref.[10] for middle point

شکل 6 مقایسه نتایج تنش محیطی با مرجع [10] برای شعاع میانی

میانی استوانه ارائه می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل، با نتایج بدست آمده توسط [10] کاملا مطابقت دارند. زمان بی‌بعد شده، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{t} = \frac{V_e t}{a} \qquad (52)$$

8- فهرست علایم

a	شعاع داخلی (m)
b	شعاع خارجی(m)
c	گرمای ویژه (J/kgK)
E	مدول الاستیسیته (N/m^2)
k	ضریب انتقال حرارت هدایت (W/mK)
P_i	فشار اعمالی به سطح داخلی (N/m^2)
P_o	فشار اعمالی به سطح خارجی (N/m^2)
T_∞	دمای محیط (°C)
t^*	زمان رسیدن موج اتساعی به نقطه مورد نظر (s)
u	جابجایی (m)
V_e	سرعت موج اتساعی (m/s^2)

علایم یونانی

α	ضریب انبساط حرارتی (1/K)
θ	دما (°C)
θ_0	دمای اعمالی در سطح داخلی (°C)
ν	نسبت پوآسون
ρ	چگالی (kg/m^3)
σ_{rr}	تنش شعاعی (N/m^2)
$\sigma_{\theta\theta}$	تنش محیطی (N/m^2)

زیرنویس‌ها

rr	شعاعی
θθ	محیطی

9- مراجع

[1] A. R. Shahani, S. M. Nabavi, Analytical solution of the quasi-static thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading , Vol. 31, Issue 9, pp. , 2007., *Applied Mathematical Modeling,* Vol. 31, No. 9, pp. 1807–1818, 2007.

[2] A. R. Shahani, S. Momeni Bashusqeh, Analytical Solution of the Coupled Thermo-Elasticity Problem in a Pressurized Sphere, *Journal of Thermal Stresses,* Vol. 36, No. 12, pp. 1283–1307, 2013.

[3] A. R. Shahani, S. Momeni Bashusqeh, Analytical solution of the thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled sphere subjected to transient thermal loading, *Mathematics and Mechanics of Solids,* Vol. 19, No. 2, pp. 135–151, 2014.

[4] M. A. Kouchakzadeh, A. Entezari, Analytical solution of classic coupled thermoelasticity problem in a rotating disk, *Journal of Thermal Stresses,* Vol. 38, No. 1, pp. 1269–1291, 2015.

[5] G. A. Kardomateas, Thermoelastic stresses in a filament-wound orthotropic composite elliptic cylinder due to a uniform temperature change, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 26, No. 5-6, pp. 527-537, 1990.

[6] A. C. Yen, P. G. Kirmser, On the Thermal Stresses in a Finite Circular Cylinder, *Journal of Engineering Mathematics,* Vol. 5, No. 1, pp. 19-32, 1971.

[7] Y. Tanigawa, Y. Takeuti, Osaka, N. Noda, Shizuoka, On a General Treatment for Coupled Thermal Stress Problems in a cylindrical Coordinate System, *archive of applied mechanics,* Vol. 53, No. 5, pp. 317-327, 1983.

[8] X. Wang, Thermal shock in a hollow cylinder caused by rapid arbitrary heating, *Journal of Sound Vibration,* Vol. 183, No. 5, pp. 899-906, 1995.

[9] H. Cho, G. A. Kardomateas, C. S. Valle, Elastodynamic Solution for the Thermal Shock Stresses in an Orthotropic Thick Cylindrical Shell *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 65, No. 1, pp. 184-193, 1998.

[10] H. J. Ding, H. M. Wang, W. Q. Chen, A solution of a non-homogeneous orthotropic cylindrical shell for axisymmetric plane strain dynamic thermoelastic problems, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 263, No. 4, pp. 815–829, 2003.

[11] K.-C. Yee, T. J. Moon, Plane Thermal Stress Analysis of an Orthotropic Cylinder Subjected to an Arbitrary, Transient Asymmetric Temperature Distribution, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 69, No. 5, pp. 632-640, 2002.

[12] T. Goshima, K. Miyao, Transient thermal stresses in a hollow cylinder subjected to y-ray heating and convective heat losses, *Nuclear Engineering and Design,* Vol. 125, No. 2, pp. 267-273, 1991.

[13] F. Ashida, Tsuyama, N. Noda, Hamamatsu, I. A. Okumura, General solution technique for transient thermoelasticity of transversely isotropic solids in cylindrical coordinates, *Acta Mechanica,* Vol. 101, No. 1, pp. 215-230, 1993.

[14] A. M. Abd-Alla, A. N. Abd-Alla, N. A. Zeidan, Transient thermal stresses in a transversely isotropic infinite circular cylinder, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 121, No. 1, pp. 93-122, 2001.

[15] Z.-Y. Lee, C. K. Chen, C. I. Hung, Transient thermal stress analysis of multi layered hollow cylinder, *Acta Mechanica,* Vol. 151, No. 1, pp. 75 – 88, 2001.

[16] Q. Zhang, Z. W. Wang, C. Y. Tang, D. P. Hu , P. Q. Liu, L. Z. Xia, Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 98, No. 1, pp. 102-110, 2012.

[17] V. A. Kudinov, A. V. Eremin, A. E. Kuznetsova, E. V. Stefanyuk, Thermal Stresses in a Multilayer Hollow Cylinder under Thermal Shock on its External Surface, *Russian Aeronautics,* Vol. 57, No. 1, pp. 37–44, 2014.

[18] A. M. El-Naggar, A. M. Abd-Alla, M. A. Fahmy, S. M. Ahmed, Thermal stresses in a rotating non-homogeneous orthotropic hollow cylinder, *Heat and Mass Transfer,* Vol. 39, No. 1, pp. 41 – 46, 2002.

[19] M. Shariyat, S. M. H. Lavasani, M. Khaghani, S. M. Ahmed, Nonlinear transient thermal stress and elastic wave propagation analyses of thick temperature-dependent FGM cylinders, using a second-order point-collocation method, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 34, No. 4, pp. 898-918, 2010.

[20] P. Desai, T. Kant, A mixed semi analytical solution for functionally graded (FG) finite length cylinders of orthotropic materials subjected to thermal load, *International Journal of Material Design,* Vol. 8, No. 1, pp. 89–100, 2012.

[21] M. Asgari, M. Akhlaghi, Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 80, No. 4, pp. 353–376, 2010.

[22] M. A. Ehteram, M. Sadighi, H. Basirat Tabrizi, Analytical solution for

thermal stresses of laminated hollow cylinders under transient non-uniform thermal loading, *MECHANIKA*, Vol. 17, No. 1, pp. 30-37, 2011.
[23] M. Ghannad, M. Parhizkar Yaghoobi, A Thermoelasticity Solution for Thick Cylinders Subjected to Thermo-Mechanical Loads under Various Boundary Conditions *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 8, No. 4, 2015.
[24] N. Noda, R. B. Hetnarski, Y. Tanigawa, *Thermal Stresses*: Taylor & Francis, 2003.
[25] G. Cinelli, An extension of the finite hankel transform and applications, *international journal of engineering science*, Vol. 3, pp. 539-559, 1965.
[26] I. N. Sneddon, *The Use of Integral Transform*, New York: Mc-Graw-Hill Book Company, 1972.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.10.38.9]