



ماشینکاری مسیرهای فیثاغورث هدوگراف اسپیلاین درجه پنج با لحاظ محدودیت جرک

جواد جهان پور^{۱*}، حسین دولت آبادی^۲، امیر واحدیان عظیمی^۳

- ۱- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
 - ۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
 - ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
- *مشهد، کدپستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، jahanpourfr@mshdiau.ac.ir

چکیده - در این مقاله، با به کارگیری منحنی‌های فیثاغورث هدوگراف اسپیلاین درجه پنج که از اتصال چند منحنی فیثاغورث هدوگراف (پی‌اچ) با پیوستگی مرتبه دو در نقاط اتصال بنا می‌گردند، به طراحی مسیر ماشینکاری پرداخته می‌شود. سپس دستورات موقعیت این مسیر، با ترکیب درونیاب‌های وابسته به زمان (در نواحی شتابگیری/ کاهش شتاب مسیر) و سرعت ثابت (در نواحی میانی مسیر)، تولید می‌شوند. در الگوریتم درونیابی ذکر شده، با ارائه پیشنهاد جدیدی مبنی بر به کارگیری توابع نمایی برای اصلاح پروفیل سرعت و استفاده از روش بهینه‌سازی جستجوی الگو، پروفیل سرعت پیشنهادی به‌منظور حفظ ماکزیمم جرک محرک‌های سیستم در محدوده مقادیر مجاز بهینه می‌گردد. در ادامه، با طراحی کنترلر متداول دارای پیشخورد/پس‌خورد سرعت و موقعیت، ماشینکاری سریع مسیر حرکت ابزار یک دستگاه کنترل عددی در محیط سیمولینک نرم‌افزار مطلب شبیه‌سازی شده و خطای ماشینکاری برای دو نمونه از مسیرهای باز و بسته که در قالب منحنی‌های فیثاغورث هدوگراف اسپیلاین درجه پنج طراحی شده‌اند مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

کلیدواژگان: منحنی پی‌اچ اسپیلاین، بهینه‌سازی پروفیل سرعت، محدودیت جرک، کنترل حرکت مسیر ماشینکاری.

Jerk limited machining using C^2 Pythagorean-hodograph (PH) quintic spline curves

J. Jahanpour^{1*}, H. Dolatabadi², A. Vahedian Azimi³

- 1- Assis., Prof., Dep., of Mech., Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad
 - 2- Master student of Applied Mech., Islamic Azad Univ., Mashhad
 - 3- Master student of Applied Mech., Islamic Azad Univ., Mashhad
- *P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran, jahanpourfr@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this paper, Pythagorean-hodograph (PH) quintic spline curves constructed by several connected PH curves with C^2 continuity are used to designing the toolpath in machining operation. To generate the toolpath commands, the acceleration/ deceleration phase of motion and the middle regions of the toolpath are devised by time-dependent and constant velocity interpolation algorithms, respectively. In the aforementioned interpolation algorithm, the exponential functions are employed to modify the feedrate profile and subsequently using the Pattern Search algorithm (PSA), the proposed feedrate profile is optimized to maintain the maximum jerk within allowable physical limits. Finally, high speed CNC machining for two cases of open and closed C^2 PH quintic spline curves along with the commonly used feed forward/feedback controller is simulated in Simulink-Matlab software and the contouring error is studied and analyzed.

Keywords: PH Spline Curve, Feedrate Profile Optimization, Jerk Limited, Contouring Control

۱- مقدمه

انتخاب سرعت حرکت ابزار ماشینکاری و نحوه شتابگیری و کاهش شتاب محورها، با لحاظ محدودیت‌های فیزیکی حرکت آنها، از مسایل مهم در فرایند ماشینکاری با سرعت بالا به شمار می‌رود. لذا طراحی مسیر هموار حرکت ابزار و همچنین حفظ محدودیت‌های ماکزیمم شتاب و جرک درایوها به منظور دستیابی به یک حرکت نرم و تعقیب دقیق مسیر حرکت ابزار بسیار مهم می‌باشند [۲،۱].

اگر چه منحنی‌های پارامتری در قالب بزیر^۱، بی‌اسپیلاین^۲ و نربز^۳ جهت طراحی انواع مسیرهای حرکت ابزار ارائه شده‌اند [۴،۳]، اما برای محاسبه طول قوس این منحنی‌ها به منظور درونیابی مسیر حرکت از روش‌های انتگرال‌گیری عددی از جمله روش رانگ کوتا^۴ و یا بسط سری تیلور^۵ استفاده می‌شود و از جملات با درجات بالا صرف‌نظر می‌گردد. لذا، به علت استفاده از روشهای تقریبی در محاسبه طول قوس منحنی، الگوریتم‌های درونیابی این منحنی‌ها دقیق نبوده و دستورات موقعیت مسیر ماشینکاری را - حتی با نرخ پیشروی ثابت- به‌طور دقیق محاسبه نکرده و نوسانات ناخواسته ای در پروفیل سرعت ابزار ایجاد می‌نماید [۵]. برای غلبه بر این مشکل، محققین تلاش‌های بسیاری نموده‌اند. به‌طور مثال، ارکور کماز و آلتینتاس [۶] برای درونیابی منحنی‌های اسپیلاین یک روش تکرار شونده^۶ پیشنهاد دادند. تسای و چنگ [۷] نیز یک درونیاب پیش‌بینی کننده- تصحیح کننده^۷ برای درونیابی منحنی‌های نربز ارائه کردند، اما این روشها نیز ذاتاً تقریبی می‌باشند.

در سال ۱۹۹۰ فروکی و ساکالیس [۸] منحنی‌های پی‌اچ را با قابلیت محاسبه دقیق طول قوس منحنی به‌صورت تابعی چند جمله‌ای از پارامتر منحنی معرفی کردند. این منحنی‌ها دسته خاصی از منحنی‌های به فرم آزاد در قالب نمایش بزیر هستند

که برای درونیابی بلادرنگ^۸ با سرعت‌های ثابت و متغیر کاملاً مناسب‌اند. در این منحنی‌ها مقدار طول قوس توسط یک تابع چند جمله‌ای از پارامتر منحنی به راحتی قابل محاسبه می‌باشد [۹،۱۰]. بر این مبنا الگوریتم‌های درونیابی این منحنی‌ها توسعه یافته است. در سال ۲۰۰۱، درونیابی منحنی‌های پی‌اچ با به‌کارگیری پروفیل سرعت وابسته به زمان توسط تسای و همکارانش [۱۱] پیشنهاد شد.

معمولاً، در مدل‌سازی انواع مسیرهای پیچیده، از منحنی‌های پی‌اچ اسپیلاین که از اتصال تکه منحنی‌های پی‌اچ بوجود می‌آیند بهره می‌گیرند [۱۲]. این منحنی‌ها نه تنها قابلیت طراحی انواع مسیرهای پیچیده باز و بسته را دارند، بلکه منحنی هموارتری نسبت به منحنی چند جمله‌ای پارامتری هم مرتبه خود تولید می‌کنند [۱۳]. اخیراً، روش جدیدی برای طراحی منحنی‌های پی‌اچ اسپیلاین با پیوستگی C^2 به کمک چند ضلعی نقاط کنترل^۹ و نقاط گره‌ای^{۱۰} منحنی‌های بی‌اسپیلاین و نربز ارائه شده است [۱۵،۱۴].

در این مقاله، ابتدا با مروری اجمالی بر منحنی‌های بی‌اسپیلاین، نحوه محاسبه نقاط گره‌ای روی منحنی بی‌اسپیلاین درجه سه بیان می‌گردد. در بخش ۳، مسیر حرکت ابزار در قالب منحنی پی‌اچ اسپیلاین درجه پنج طراحی شده و در بخش بعد، الگوریتم درونیابی مسیر ماشینکاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵، به‌منظور کاهش مقدار ماکزیمم جرک در امتداد مسیر ابزار، روش جدیدی مبنی بر به‌کارگیری توابع نمایی در پروفیل سرعت پیشنهاد می‌شود. در انتها، نتایج درونیابی مسیر حرکت ابزار با به‌کارگیری پروفیل سرعت اصلاح شده و تاثیرات آن بر مقادیر ماکزیمم شتاب و جرک ارائه می‌گردد. همچنین، با به‌کارگیری کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش‌خورد^{۱۱}، نحوه حرکت ابزار در امتداد مسیر در محیط نرم‌افزار مطلب شبیه‌سازی شده و خطای ماشینکاری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

1. Bezier
2. B-spline
3. Non Uniform Rational B-spline
4. Runge-Kutta
5. Taylor's expansion
6. Iteration method
7. Predictor-Corrector interpolator

8. Real-Time interpolation
9. Control Points
10. Nodal Points
11. Pseudo-Derivative Feedback Feedforward

۲- منحنی‌های بی‌اسپیلاین

یک منحنی بی‌اسپیلاین از درجه p با $n+1$ نقطه کنترلی p_0, \dots, p_n و بردار گره ای $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$C(u) = \sum_{k=0}^n N_{k,p}(u) P_k \quad (1)$$

که در آن $N_{k,p}(u)$ توابع پایه^۲ بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۳]:

$$N_{k,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \in [u_k, u_{k+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{k,p}(u) = \frac{u-u_k}{u_{k+p}-u_k} N_{k,p-1}(u) + \frac{u_{k+p+1}-u}{u_{k+p+1}-u_{k+1}} N_{k+1,p-1}(u) \quad (2)$$

برای ترسیم یک منحنی بی‌اسپیلاین با درجه p که در نقاط ابتدا و انتها بر چند ضلعی نقاط کنترلی^۳ مماس گردد، بردار گره‌ای بایستی شامل $p+1$ تکرار در ابتدا و انتها باشد. معمولاً فاصله نقاط متوالی u_i مجزا را به‌طور یکنواخت انتخاب می‌کنند. همچنین $m+1$ گره u_0, u_1, \dots, u_m و $n+1$ نقطه کنترلی P_0, P_1, \dots, P_n در رابطه $(m+1) = (n+1) + (p+1)$ صدق می‌کنند. نقاط متناظر با گره‌های مجزای u_m, \dots, u_{p+1} روی منحنی بی‌اسپیلاین نقاط گره ای نامیده می‌شوند. با لحاظ نکات ذکر شده، بردار گره ای برای یک بی‌اسپیلاین درجه سه^۴ به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \{0, 0, 0, 0, \dots, u_i = i-3, \dots, n-2, n-2, n-2, n-2\} \quad (3)$$

$, i = 4, \dots, n$

نقاط گره ای روی منحنی بی‌اسپیلاین $C(u)$ از الگوریتم دی-بور قابل محاسبه اند [۱۵]. جهان پور و همکارانش [۱۴] با در نظر گرفتن فواصل یکسان برای نقاط u_i مطابق رابطه (۳)، روابطی

1. Knot Vector
2. Basis Function
3. Control polygon
4. Qubic-Bspline

جهت محاسبه نقاط گره ای واقع بر منحنی نریز درجه سه ارائه داده‌اند. از آنجا که منحنی‌های بی‌اسپیلاین حالت خاصی از منحنی‌های نریز - با ضرایب وزنی واحد^۵ می‌باشند، روابط ارائه شده در مرجع [۱۴] برای محاسبه $n-1$ نقطه گره ای روی منحنی بی‌اسپیلاین درجه سه به صورت زیر خواهند بود:

$$q_0 = C(u_3) = P_0$$

$$q_1 = C(u_4) = (3P_1 + 7P_2 + 2P_3) / 12$$

$$q_i = C(u_{i+3}) = (P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}) / 6, i = 2 \dots n-4 \quad (4)$$

$$q_{n-3} = C(u_n) = (2P_{n-3} + 7P_{n-2} + 3P_{n-1}) / 12$$

$$q_{n-2} = C(u_{n+1}) = P_n$$

برای منحنی‌های بی‌اسپیلاین درجه سه بسته با منطبق کردن سه نقطه کنترلی انتهایی بر سه نقطه کنترلی ابتدایی به صورت: $P_{n-2} = P_0, P_{n-1} = P_1, P_n = P_2$ رابطه (۴) به صورت زیر خواهد بود [۱۳]:

$$q_i = C(u_{i+3}) = (P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}) / 6 \quad (5)$$

$i = 0 \dots n-2$

۳- منحنی‌های پی‌اچ اسپیلاین درجه پنج

نمایش مختلط یک منحنی پارامتری صفحه ای به صورت رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$r(\xi) = x(\xi) + iy(\xi) \quad (6)$$

بنابراین، هُدوگراف منحنی $r(\xi)$ ، یعنی $dr(\xi)/d\xi$ به صورت زیر است:

$$r'(\xi) = x'(\xi) + iy'(\xi) \quad (7)$$

منحنی پارامتری با رابطه (۶) را فیثاغورث هُدوگراف یا پی‌اچ گویند اگر مولفه‌های هُدوگراف آن در رابطه زیر صدق کنند:

$$x'(\xi) = u^2(\xi) - v^2(\xi)$$

$$y'(\xi) = 2u(\xi)v(\xi) \quad (8)$$

$$\sigma(\xi) = u^2(\xi) + v^2(\xi)$$

5. Unit-weight

برای یافتن منحنی پی اچ اسپیلاین درجه پنج، هیدوگراف منحنی‌های پی‌اچ متصل به هم به فرم کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$r_i'(\xi) = w_i^2(\xi) \\ = \left[\frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)(1-\xi)^2 + 2z_i(1-\xi)\xi + \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})\xi^2 \right]^2 \quad (11) \\ , \quad i=1, \dots, M=n-2$$

با توجه به رابطه (۱۱)، شرایط پیوستگی C^2 در نقطه اتصال دو قسمت متوالی i ام و $i+1$ ام ارضا می‌گردد، زیرا:

$$r_i(1) = r_{i+1}(0) \\ r_i'(1) = r_{i+1}'(0) = \frac{1}{4}(z_i + z_{i+1})^2 \quad (12) \\ r_i''(1) = r_{i+1}''(0) = (z_i + z_{i+1})(z_{i+1} - z_i)$$

با محاسبه بردارهای شیب در نقاط ابتدایی q_0 و انتهایی q_{n-2} منحنی و همچنین شرط عبور منحنی از نقاط گره ای؛ رابطه (۱۱) به دستگاه معادلات زیر منتهی می‌گردد [۱۳]:

$$(z_0 + z_1)^2 - 12(p_1 - p_0) = 0 \\ (z_M + z_{M+1})^2 - 12(p_n - p_{n-1}) = 0 \quad (13) \\ 3z_{i-1}^2 + 27z_i^2 + 3z_{i+1}^2 + z_{i-1}z_{i+1} \\ + 13z_{i-1}z_i + 13z_i z_{i+1} - 60(q_i - q_{i-1}) = 0, \quad i=1, \dots, M$$

با حل دستگاه معادلات فوق به روش نیوتن-رافسون، مجهولات z_i محاسبه گردیده و با استفاده از رابطه (۱۱)، هیدوگراف تکه منحنی‌های پی‌اچ به دست می‌آید. در ادامه، با انتگرال گیری از این هیدوگراف ها و لحاظ شرط عبور منحنی پی اچ اسپیلاین درجه پنج حاصل می‌گردد. در شکل ۱ نمونه ای از منحنی پی اچ اسپیلاین درجه پنج به همراه چند ضلعی نقاط کنترل و نقاط گره ای واقع بر منحنی نمایش داده شده است. در طراحی این مسیر ماشینکاری به شکل ستاره، بردار گره ای یکنواخت به فرم رابطه (۳) به کار گرفته شده است.

که در آن $u(\xi)$ و $v(\xi)$ توابع چند جمله‌ای مستقل از یکدیگر هستند [۸]. با توجه به رابطه (۷) و جایگزینی (۸) در آن خواهیم داشت:

$$|r'(\xi)| = u^2(\xi) + v^2(\xi) \quad (9)$$

با تعریف $w(\xi) = u(\xi) + iv(\xi)$ ، هیدوگراف یک منحنی پی‌اچ به صورت $r'(\xi) = w^2(\xi)$ قابل نمایش است. همچنین، طول قوس یک منحنی پی‌اچ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$s(\xi) = \int_0^\xi |r'(\xi)| d\xi = \int_0^\xi \sigma(\xi) d\xi \quad (10)$$

با توجه به رابطه (۱۰)، عبارت $\sigma(\xi) = ds/d\xi$ نرخ طول قوس پی‌موده شده در راستای منحنی $r(\xi)$ نسبت به ξ بوده و سرعت پارامتری نامیده می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود، طول قوس منحنی‌های پی‌اچ به صورت تابعی چند جمله‌ای از پارامتر منحنی بوده و بطور دقیق قابل محاسبه است.

یک منحنی پی‌اچ به تنهایی توانایی مدل‌سازی مسیرهای پیچیده را ندارد، لذا با اتصال چند منحنی پی‌اچ، منحنی‌های پی اچ اسپیلاین طراحی می‌گردند. این منحنی‌ها علاوه بر دارا بودن خواص منحنی‌های بی‌اسپیلاین از خواص منحنی‌های پی‌اچ نیز بهره می‌گیرند. از آنجاییکه منحنی‌های پی‌اچ درجه پنج، پرکاربردترین منحنی‌های پی‌اچ می‌باشند [۱۶]، لذا برای دستیابی به یک مسیر ماشینکاری نرم و هموار به فرم منحنی پی اچ اسپیلاین، در عمل از چند منحنی پی‌اچ درجه پنج متصل به هم و دارای پیوستگی C^2 در نقاط اتصال استفاده می‌شود. این نقاط اتصال را می‌توان نقاط گره ای واقع بر منحنی بی‌اسپیلاین درجه سه - محاسبه شده در بخش ۲ - در نظر گرفت. مولفات هیدوگراف منحنی‌های پی‌اچ متصل به هم بایستی از درجه چهار بوده و لذا با توجه به رابطه (۸)، توابع $u(\xi)$ و $v(\xi)$ و همچنین $w(\xi)$ از درجه دو نسبت به پارامتر ξ می‌باشند.

ضرایب V_k در رابطه (۱۴)، با اعمال شرایط حرکتی در نواحی شتابگیری/ کاهش شتاب محاسبه می گردند.

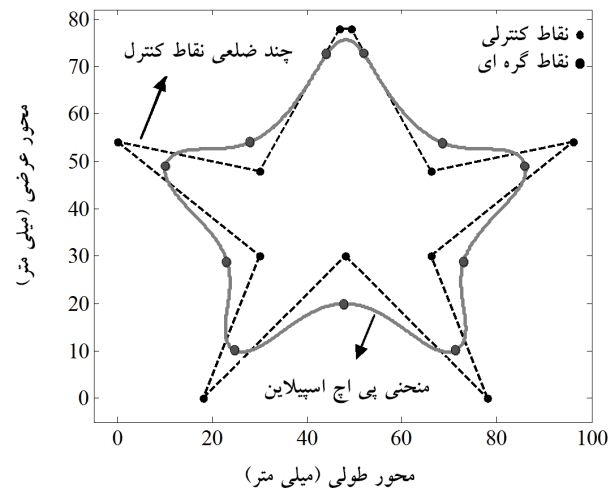
نرخ پیشروی خطی ($n=1$ در رابطه (۸))، به علت تولید پروفیل شتاب ناپیوسته و ایجاد تغییرات آنی گشتاور در محرک های سیستم، پیشنهاد نمی شود. از آنجایی که استفاده از درجات بالاتر، $n > 1$ ، موجب دستیابی به پروفیل سرعت "S" شکل شده و باعث ملایم تر شدن تغییرات در شتاب و جرک می گردد [۱۷]؛ لذا در این مقاله، از نرخ پیشروی متداول درجه پنج وابسته به زمان استفاده شده است [۱۱].

برای دستیابی به دستورات موقعیت حرکت ابزار روی مسیر پی اچ اسپیلاین درجه پنج طراحی شده، با انتگرال گیری از تابع سرعت وابسته به زمان تعریف شده در رابطه (۱۴) طول قوس پیموده شده به صورت رابطه $S(\xi) = F(t)$ برای نواحی شتابگیری/ کاهش شتاب محاسبه می شود. تابع $F(t)$ انتگرال تابع سرعت، یعنی $F(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau$ و به فرم برنشتاین از درجه $n+1$ نسبت به زمان می باشد. با لحاظ بازه زمانی درونیایی Δt ، مسئله درونیایی به حل معادله $S(\xi_k) = F(k \Delta t)$ برای محاسبه ξ_k متناظر با زمان $k \Delta t$ منجر می گردد. از روش نیوتن-رافسون معادله اخیر دارای جواب ξ_k به صورت زیر است:

$$\xi_k^{(r)} = \xi_k^{(r-1)} - \frac{S(\xi_k^{(r-1)}) - F(k \Delta t)}{\sigma(\xi_k^{(r-1)})}, r = 1, 2, \dots \quad (16)$$

در ناحیه سرعت ثابت حرکت روی مسیر، رابطه طول قوس طی شده به صورت $S(\xi_k) = kV_f \Delta t$ بوده و در این حالت با محاسبه ξ_k ، نقاط موقعیت ابزار متناظر با آن پارامتر روی مسیر ماشینکاری در هر بازه کنترلی مشخص می گردد.

ضرایب V_k در رابطه (۱۴) برای حالت پروفیل سرعت درجه پنج وابسته به زمان، با اعمال شرایط سرعت، شتاب و جرک در ابتدای حرکت ($V_i, \dot{V}_i, \ddot{V}_i$) و انتهای ناحیه شتابگیری ($V_f, \dot{V}_f, \ddot{V}_f$) به صورت زیر محاسبه می گردند [۱۱]:



شکل ۱ نمونه ای از منحنی پی اچ اسپیلاین

۴- درونیایی منحنی پی اچ اسپیلاین درجه پنج

پس از طراحی مسیر ابزار ماشینکاری، چگونگی محاسبه دستورات موقعیت ابزار که تحت عنوان درونیایی مسیر حرکت ابزار مطرح است، بررسی می گردد. از آنجایی که پروفیل های سرعت به فرم "S" شکل در دستیابی به حرکتی نرم در موضوع ماشینکاری از اهمیت بسزایی برخوردارند؛ در این مقاله، نرخ پیشروی وابسته به زمان مورد استفاده قرار گرفته و در ادامه، مساله درونیایی بر اساس این نرخ پیشروی مورد بررسی قرار می گیرد.

روابط درونیایی یک منحنی پی اچ با لحاظ پروفیل سرعت "S" شکل وابسته به زمان در مرجع [۱۱] ارائه شده است. بر این اساس، نرخ پیشروی در امتداد مسیر ابزار، به فرم توابع برنشتاین^۱ درجه n از زمان و به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$V(\tau) = \sum_{k=0}^n V_k b_k^n(\tau) \quad (14)$$

که در این رابطه، $\tau = t/T$ زمان نرمال شده در بازه زمانی شتابگیری/ کاهش شتاب می باشد و همچنین:

$$b_k^n(\tau) = \binom{n}{k} (1-\tau)^{n-k} \tau^k, k = 0, \dots, n \quad (15)$$

1. Bernestain

2. Sampling period

جدول ۱ مشخصات فرایند ماشینکاری نمونه های مورد مطالعه

مقدار	مشخصات فرایند ماشینکاری
۱۰۰	سرعت نامی ماشینکاری (میلی متر بر ثانیه): V_f
۰/۱	زمان شتابگیری (ثانیه): T
۰	شتاب در ابتدای حرکت (میلی متر بر مجذور ثانیه): \dot{V}_i
۰	شتاب در پایان ناحیه شتابگیری (میلی متر بر مجذور ثانیه): \dot{V}_f
۲۰۰۰	ماکزیمم مقدار شتاب در امتداد مسیر حرکت (میلی متر بر مجذور ثانیه): a_{max}
۵۰۰۰۰	ماکزیمم مقدار جرک در امتداد مسیر حرکت (میلی متر بر مکعب ثانیه): J_{max}

در زیر پروسه اصلاح پروفیل های سرعت درجه پنج جهت محدود کردن ماکزیمم شتاب و جرک در محدوده مجاز تعیین شده ارائه می گردد.

ضرایب \dot{V}_f, \dot{V}_i در رابطه (۱۷) را توابعی از زمان و مطابق رابطه زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= 1 - e^{(n_c \tau)} \\ \dot{V}_f &= 1 - e^{n_c(1-\tau)} \end{aligned} \quad (18)$$

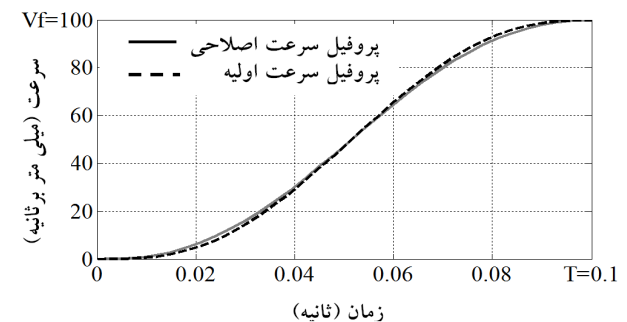
که در این رابطه، پارامتر n_c ضریب تغییر شیب پروفیل سرعت در ناحیه شتابگیری / کاهش شتاب می باشد. در نظر گرفتن \dot{V}_f, \dot{V}_i به فرم رابطه (۱۸) به گونه ای است که شرایط حرکتی سرعت از صفر در شروع حرکت، $\dot{V}_i|_{\tau=0} = 0$ ، به سرعت نامی در پایان شتابگیری، $\dot{V}_f|_{\tau=1} = V_{nom}$ ، را ارضا می کند. علاوه بر این، شرایط شتاب صفر در ابتدا و انتهای ناحیه شتابگیری / کاهش شتاب، $\dot{V}_i|_{\tau=0} = 0$ و $\dot{V}_f|_{\tau=1} = 0$ ، نیز برقرار است. در روش پیشنهاد شده جدید، با توجه به اینکه ضرایب \dot{V}_f, \dot{V}_i تابعی از زمان می باشند، امکان ایجاد تغییرات مطلوب در پروفیل اصلاحی سرعت فراهم شده که کاهش مقادیر ماکزیمم شتاب و جرک را به دنبال دارد.

$$\begin{aligned} V_0 &= V_i \\ V_1 &= V_i + \frac{1}{5}T\dot{V}_i \\ V_2 &= V_i + \frac{2}{5}T\dot{V}_i + \frac{1}{20}T^2\ddot{V}_i \\ V_3 &= V_f - \frac{2}{5}T\dot{V}_f + \frac{1}{20}T^2\ddot{V}_f \\ V_4 &= V_f - \frac{1}{5}T\dot{V}_f \\ V_5 &= V_f \end{aligned} \quad (17)$$

در بخش بعدی، روشی جدید برای کاهش مقدار ماکزیمم جرک و شتاب در امتداد مسیر حرکت ابزار ارائه می گردد. در این روش، ضرایب ارائه شده در رابطه (۱۷) و به تبع آن پروفیل سرعت درجه پنج وابسته به زمان به گونه ای مناسب اصلاح می گردد.

۵- محدود کردن جرک و شتاب به کمک اصلاح پروفیل سرعت

با داشتن زمان شتابگیری T و نرخ پیشروی نامی V_f در امتداد مسیر، پروفیل سرعت درجه پنج تابع از زمان را به گونه ای اصلاح می کنیم که تغییرات سرعت در ابتدا و انتهای ناحیه شتابگیری / کاهش شتاب افزایش یابد. این امر باعث افزایش شیب منحنی سرعت در ابتدا و انتهای ناحیه شتابگیری / کاهش شتاب می شود. در نتیجه، در داخل این ناحیه، پروفیل سرعت از شیب کمتری نسبت به فرم اولیه خود برخوردار گشته و به تبع آن ماکزیمم مقادیر شتاب و جرک کاهش می یابند (شکل ۲).



شکل ۲ مقایسه پروفیل اصلاح شده سرعت و پروفیل سرعت اولیه (درجه پنج تابع زمان) در ناحیه شتابگیری

بهینه‌سازی جستجوی الگو پس از تعداد ۲۰۵ بار محاسبه تابع هدف^۶ $X = n_c = 8.12$ می‌باشد (شکل ۳-ب).

۶- نتایج شبیه‌سازی حرکت ابزار

در این بخش، به منظور مقایسه پروفیل سرعت اصلاح شده و سرعت درجه پنج وابسته به زمان - ارائه شده در بخش ۴ - پروفیل های جرک به دست آمده در حرکت ابزار روی مسیره های پی اچ اسپیلاین درجه پنج با پیوستگی C^2 به شکل های آلفا و قلب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه چگونگی تعقیب مسیر حرکت ابزار و خطای ماشینکاری در محیط سیمولینک^۷ نرم افزار مطلب با به کارگیری کنترلر پیشرفته شبه مشتق گیر دارای پس خورد و پیش خورد بررسی می‌شود. نقاط کنترلی مورد استفاده در طراحی مسیره های به شکل آلفا و قلب به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

$$P_0 = 0, P_1 = 12 + 18i, P_2 = 24 + 27i, P_3 = 36 + 9i, \\ P_4 = 24 - 9i, P_5 = 12, P_6 = 0 + 18i$$

قلب:

$$P_0 = -20 - 50i, P_1 = 5i, P_2 = -5i, P_3 = -20 + 50i, \\ P_4 = 40 + 50i, P_5 = 75 - 5i, P_6 = 75 + 5i, \\ P_7 = 40 - 50i, P_8 = P_0, P_9 = P_1, P_{10} = P_2$$

۶-۱- پروفیل های سرعت، شتاب و جرک

با استفاده از مقادیر ارائه شده در جدول ۱ و مقدار بهینه $n_c = 8.12$ به دست آمده از الگوریتم جستجوی الگو، ضرایب اصلاح شده V_f, V_i مطابق رابطه (۱۸) محاسبه می‌گردند. با جایگزینی این ضرایب در رابطه (۱۷)، پروفیل اصلاح شده سرعت در امتداد مسیر حرکت ابزار از رابطه (۱۴) به دست می‌آید. به عنوان نمونه، پروفیل اصلاح شده سرعت در امتداد مسیر منحنی پی اچ اسپیلاین به شکل آلفا مطابق شکل ۴- الف می‌باشد. در این شکل پروفیل سرعت درجه پنج

در این مقاله، مقدار n_c از روش بهینه‌سازی جستجوی الگو^۱ به گونه ای محاسبه می‌شود که مقدار جرک در امتداد مسیر ماشینکاری در محدوده مجاز تعیین شده حفظ شود. چگونگی به کارگیری روش بهینه‌سازی جستجوی الگو در بخش زیر برای نمونه مورد مطالعه به تفصیل بیان شده است.

مشخصات فرایند ماشینکاری نمونه های مورد مطالعه در شبیه‌سازی ها مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است [۱۶، ۱].

۵-۱- بهینه‌سازی ضریب تغییر شیب پروفیل سرعت

با تعریف تابع هدف^۲ "ماکزیمم جرک در راستای مسیر ماشینکاری" در الگوریتم بهینه‌سازی جستجوی الگو، مقدار n_c به گونه ای محاسبه می‌شود که تابع هدف ذکر شده حداقل گردد.

دستور patternsearch (@O.F.,X0,LB,UB) در محیط نرم افزار مطلب به منظور کمینه کردن تابع هدف O.F. با شروع از نقطه اولیه X0 برای متغیرها در محدوده مرز پایین LB^۳ و بالای UB^۴ آن ها استفاده می‌شود. اجرای این کد منجر به دستیابی به متغیرهای بهینه X در محدوده مرز پایین و بالا خواهد شد ($LB \leq X \leq UB$).

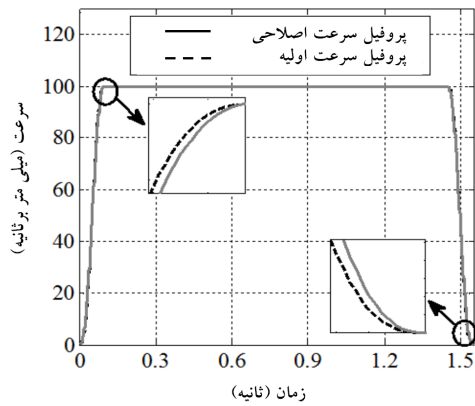
در این مقاله، مشخصات پارامترهای به کار گرفته شده در الگوریتم جستجوی الگو مطابق مرجع [۱۶] انتخاب شده‌اند. مقدار اولیه متغیر n_c و همچنین مرزهای بالا و پایین استفاده شده در الگوریتم بهینه‌سازی جستجوی الگو، مقادیر $UB = 12, LB = 2, X0 = 5$ فرض شده است.

نتایج به دست آمده از اجرای این الگوریتم در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۳- الف دیده می‌شود، ماکزیمم جرک متناظر به ازاء مقدار اولیه $n_c = 5$ حدود $10^4 \times 5/65$ میلی متر برمکعب ثانیه است که بعد از ۵۶ بار تکرار^۵ به مقدار $10^4 \times 4/85$ میلی متر برمکعب ثانیه کاهش می‌یابد. مقادیر بهینه متغیر n_c به دست آمده از الگوریتم

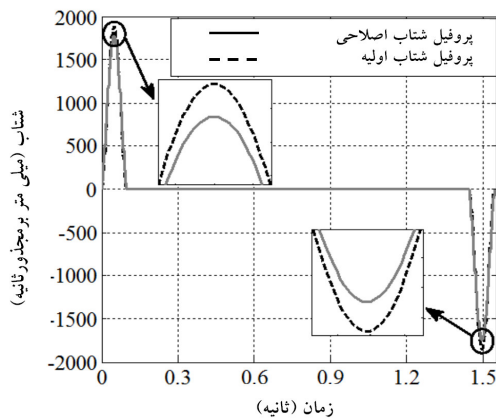
1. Pattern Search Algorithm
2. Objective Function
3. Lower Bound
4. Upper Bound
5. Iteration

6. Total Function Evaluation
7. Simulink- Matlab Software

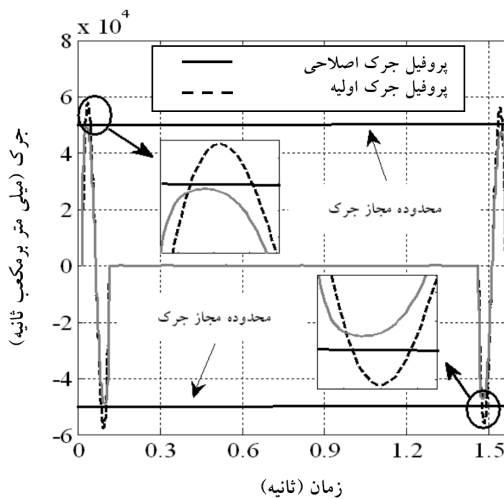
نیز به صورت نقطه چین نمایش داده شده است. شکل های ۴-ب و ۴-ج به ترتیب پروفیل شتاب و جرک در راستای مسیر را در دو حالت استفاده از پروفیل سرعت درجه پنج و پروفیل اصلاح شده پیشنهادی نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود، مطابق شکل های ۴-ب و ۴-ج، مقدار ماکزیمم جرک با استفاده از پروفیل سرعت درجه پنج، $4/85 \times 10^4$ میلی متر بر مکعب ثانیه می باشد. در حالیکه مقدار حداکثر جرک به دست آمده در استفاده از پروفیل اصلاح شده سرعت، $4/85 \times 10^4$ میلی متر بر مکعب ثانیه بوده که در محدوده مجاز کمتر از 50000 میلی متر بر مکعب ثانیه (مشخص شده در شکل ۴-ج) قرار دارد. همچنین مقدار حداکثر شتاب نیز کاهش یافته است.



الف: پروفیل سرعت در راستای مسیر

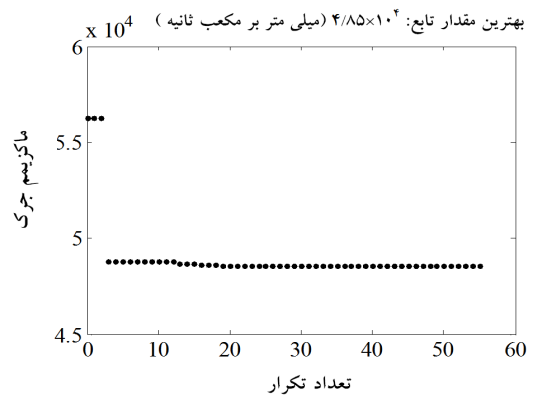


ب: پروفیل شتاب در راستای مسیر

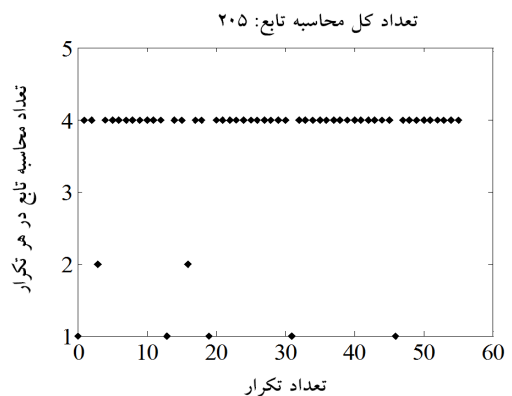


ج: پروفیل جرک در راستای مسیر

شکل ۴ نمایش پروفیل های سرعت، شتاب و جرک اصلاح شده و اولیه (درجه پنج تابع زمان)



الف: حداقل مقدار تابع هدف



ب: تعداد کل محاسبه تابع هدف

شکل ۳ نتایج به دست آمده از الگوریتم بهینه سازی جستجوی الگو

کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد دارای شرایط تعادلی بین واکنش پذیری به دستورات ورودی و مقابله با اغتشاش می باشد و با داشتن بهره پیشخورد موقعیتی و سرعتی k_{pf} و k_{vf} آزادی عمل مناسبی در تنظیم دارد [۲۰، ۲۱].

دیگرام بلوکی کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد در شکل ۶ نمایش داده شده است که در آن $G(s)$ تابع تبدیل سروو در مود گشتاور^۱ درایو بوده و $k = \frac{1}{0.716}$ (ولت بر نیوتون متر) نسبت تبدیل گشتاور روی شفت موتور به ولتاژ می باشد. $r_g = 1.59$ (میلی متر بر رادیان) نسبت انتقال بال اسکرو^۲ فرض شده است. k_{pp} و k_{pv} و k_{iv} به ترتیب بهره های تناسبی موقعیت، تناسبی سرعت و انتگرال گیر سرعت می باشند. همچنین x_{com} و x_{act} به ترتیب دستورات موقعیتی به دست آمده از درونیایی مسیر حرکت و موقعیت واقعی ابزار بوده و k_{pf} و k_{vf} به ترتیب بهره های پیشخورد موقعیت و سرعت هستند. تابع انتقال استفاده شده در شبیه سازی کنترلر حرکت روی مسیر منحنی پی اچ اسپیلاین به شکل های آلفا و قلب برای محورهای طولی X و عرضی Y به صورت زیر در نظر گرفته شده اند [۱۴]:

$$G_x(s) = \frac{83.0089}{1+0.19936s} \left(\frac{\text{rad/s}}{\text{volt}} \right)$$

$$G_y(s) = \frac{50.4977}{1+0.15641s} \left(\frac{\text{rad/s}}{\text{volt}} \right)$$

مقادیر تنظیم شده پارامترهای کنترلی کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد، با لحاظ محدودیت های اشباع محرکها^۳ به مقدار ± 5 ولت و حداکثر خطای مجاز ماشینکاری ۳۰ میکرومتر، در جدول ۲ آمده است.

با توجه به محاسبه دقیق طول قوس منحنی های پی اچ، درونیایی منحنی های پی اچ اسپیلاین درجه پنج با پیوستگی C^2 منجر به دستیابی به پروفیل سرعت پیوسته در کلیه نواحی حرکت - شتابگیری/کاهش شتاب و سرعت ثابت- گردیده و به تبع آن پروفیل های شتاب و جرک پیوسته ای را به دست می دهد. بطور مثال، تغییرات شتاب و جرک در نقاط اتصال تکه منحنی های پی اچ روی مسیر به شکل آلفا - که با مقیاس بزرگتر نشان داده شده اند- در شکل ۵ مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که در شکل ۵- الف و ۵- ب ملاحظه می شود، ماکزیمم تغییرات شتاب در راستای مسیر در نقاط اتصال مقدار ناچیز ۰/۵ میلی متر بر مجذور ثانیه و ماکزیمم تغییرات جرک در راستای مسیر حرکت به میزان کم ۲۱۰ میلی متر بر مکعب ثانیه - و مربوط به نقطه برگشت منحنی الف- می باشند که بیانگر دقت مناسب ترکیب الگوریتم های درونیایی سرعت ثابت و سرعت وابسته به زمان می باشد. به طور مشابه، ماکزیمم نوسانات پروفیل های شتاب و جرک در نقاط اتصال تکه منحنی های پی اچ در راستای مسیر به شکل قلب به ترتیب مقادیر کم ۰/۱ میلی متر بر مجذور ثانیه و ۱۶ میلی متر بر مکعب ثانیه می باشند.

۶-۲- کنترلر حرکت مسیر ابزار

برای کنترلر حرکت ابزار در امتداد مسیر، از کنترلرهای دارای حلقه سرعت/ موقعیت در قالب تناسبی- تناسبی انتگرالگیر و شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد بطور گسترده استفاده می گردد [۱۶، ۱۸، ۱۹]. در این بخش، با استفاده از پروفیل سرعت اصلاح شده پیشنهادی در بخش ۵، چگونگی تعقیب مسیر حرکت ابزار در قالب منحنی پی اچ اسپیلاین در محیط سیمولینک مطلب با به کارگیری کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد شبیه سازی شده و قابلیت کنترلر حرکت مورد بررسی قرار می گیرد.

1. Torque mode
2. Ballscrew
3. Drives Saturation

جدول ۲ مقادیر پارامترهای کنترلی کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخور و پیش خورد

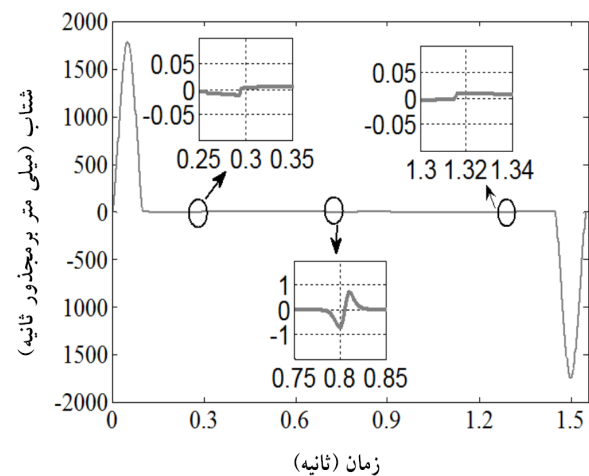
پارامتر کنترلی	واحد	قلب		آلفا	
		محور عرضی	محور طولی	محور عرضی	محور طولی
k_{pp}	رادیان ثانیه بر میلیمتر	۱۰۹/۹۵	۱۰۹/۹۵	۹۷/۳۸	۹۷/۳۸
k_{pv}	نیوتون متر ثانیه بر رادیان	۱/۵	۱/۲	۱/۵۳	۱/۱۹
k_{iv}	یک بر ثانیه	۲۵۳	۲۵۲	۲۵۳/۲	۲۵۲/۸
k_{pf}	رادیان بر میلیمتر	۰/۸	۰/۸	۰/۸	۰/۸
k_{vf}	-	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵	۰/۸۵

چگونگی تعقیب مسیرهای باز و بسته آلفا و قلب با استفاده از کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخور و پیش خورد و همچنین خطای ماشینکاری در شکل ۷ نمایش داده شده است. در تعقیب مسیر منحنی آلفا حرکت ابزار از مبدا شروع شده و به نقطه با مختصات ۱۸ میلیمتر روی محور عرضی ختم می‌گردد، همچنین، در تعقیب مسیر منحنی بسته قلب حرکت از مبدا آغاز شده و به همان نقطه ختم می‌گردد.

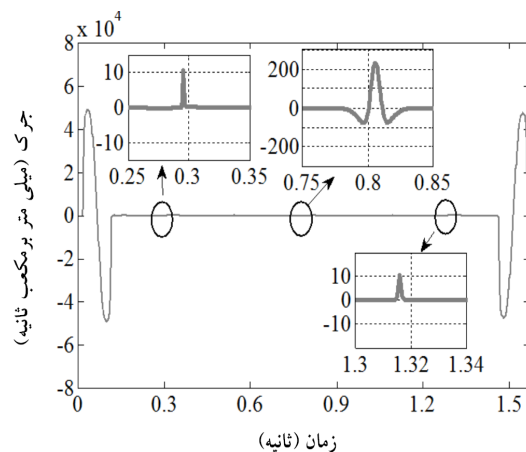
با توجه به شکل‌های ۷-الف و ۷-ب؛ به وضوح مشخص است که کنترلر در تعقیب دستورات موقعیتی ابزار ماشینکاری عملکرد مطلوبی دارد. همچنین مطابق شکل ۷-ج، حداکثر خطای ماشینکاری در استفاده از کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخور و پیش خورد برای مسیرهای آلفا و قلب به ترتیب مقادیر ۱۰/۵ میکرومتر و ۱۰/۸ میکرومتر می‌باشد که در نواحی بزرگنمایی شده در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب اتفاق می‌افتد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از نقاط گره ای واقع بر منحنی بی‌اسپیلاین درجه سه، مسیر حرکت ابزار ماشینکاری در قالب منحنی پی‌اچ اسپیلاین طراحی شده است. همچنین، با ترکیب درونیاب‌های سرعت ثابت و سرعت وابسته به زمان، الگوریتم درونیابی منحنی‌های پی‌اچ اسپیلاین به‌منظور کاربرد در ماشینهای کنترل عددی توسعه داده شده است. علاوه بر این، با به‌کارگیری توابع نمایی در اصلاح پروفیل سرعت درجه پنج وابسته به زمان، روش جدیدی در کاستن مقدار ماکزیمم جرک در امتداد مسیر ماشینکاری ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی حرکت ابزار با به‌کارگیری کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخور و پیش خورد، بیانگر کارایی و عملکرد مطلوب درونیاب اصلاح شده با پروفیل سرعت پیشنهادی در کنترل حرکت روی مسیر منحنی پی‌اچ اسپیلاین می‌باشد. شبیه‌سازی حرکت روی مسیرهای آلفا و قلب با پروفیل سرعت اصلاحی پیشنهادی، نشان می‌دهد که علاوه بر حفظ خطای ماشینکاری در محدوده مجاز تعیین شده، مقدار ماکزیمم جرک در راستای مسیر ابزار به میزان حدود ۱۴٪ نسبت به استفاده از پروفیل سرعت درجه پنج وابسته به زمان کاهش یافته است.

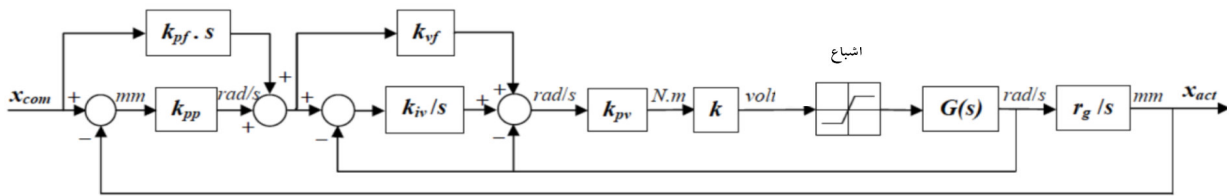


الف: تغییرات شتاب در راستای مسیر آلفا



ب: تغییرات جرک در راستای مسیر آلفا

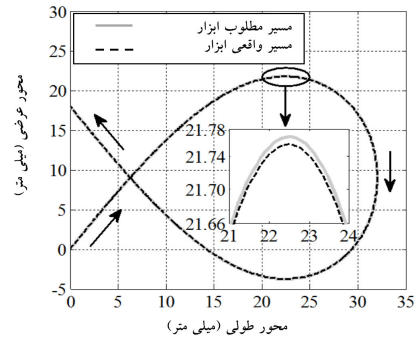
شکل ۵ تغییرات شتاب و جرک در نقاط اتصال روی مسیر به شکل آلفا



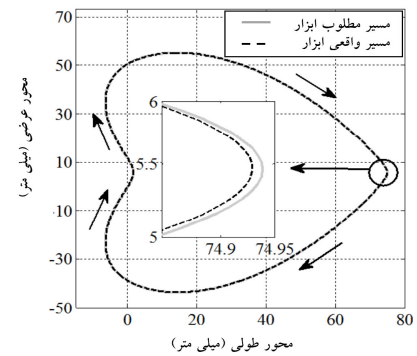
شکل ۶ دیگرام بلوکی کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد

۸- مراجع

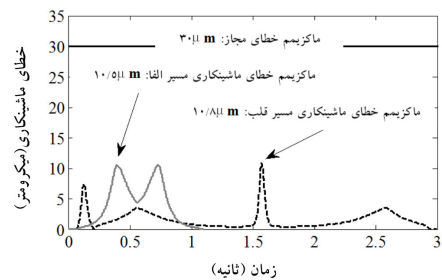
- [1] Erkorkmaz K., Altintas Y.; "High speed CNC system design. Part I: jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation" Int J Machine Tools Manuf; Vol.41, 2001, pp.1323-1345.
- [2] Farouki R.T., Tsai Y.F., Wilson C.S.; "Physical constraints on feed rates and feed accelerations along curved tool paths" Comput Aided Geom Des; Vol.17, 2000, pp.337-359.
- [3] Cheng C.W., Tsai M.C.; "Real-time variable feedrate NURBS curve interpolator for CNC machining" Int J Adv Manuf Technol; Vol.23, No.11&12, 2004, pp.865-873.
- [4] Wang F.C., Wright P.K.; "Open architecture controllers for machine tools, part 2: a real time quintic spline interpolator" ASME J Manuf Sci Eng; Vol.120, No.2, 1998, pp.425-432.
- [5] Farouki R.T., Tsai Y.F.; "Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators" Comput Aided Geom Des; Vol.33, No.2, 2001, pp.155-165.
- [6] Erkorkmaz K., Altintas Y.; "Quintic spline interpolation with minimal feed fluctuation" ASME J Manuf Sci Eng; Vol.127, No.2, 2005, pp.339-349.
- [7] Tsai M.C., Cheng C.W.; "A real-time predictor-corrector interpolator for CNC machining" Trans ASME J Manuf Sci Eng; Vol.125, No.3, 2003, pp.449-460.
- [8] Farouki R.T., Sakkalis T.; "Pythagorean Hodographs" IBM J Res Dev; Vol.34, No.5, 1990, pp.736-752.
- [9] Moon H.P., Farouki R.T., Choi H.I.; "Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants" Comput Aided Geom Des; Vol.18, No.2, 2001, pp.93-115.



الف: تعقیب مسیر منحنی به شکل آلفا



ب: تعقیب مسیر منحنی بسته به شکل قلب



ج: پروفیل خطای ماشینکاری

شکل ۷ چگونگی حرکت ابزار و پروفیل خطای ماشینکاری در امتداد مسیرهای به شکل آلفا و قلب با کنترلر شبه مشتق گیر دارای پسخورد و پیش خورد

- [16]Jahanpour J., Imani B.M.; “Real-time P-H curve CNC interpolators for high speed cornering” *Int J Adv Manuf Technol*; Vol.39, No.3&4, 2008, pp.302–316.
- [17]Kim D.N., Teck C.N., Chen I.M.; “On Algorithms for Planning S-curve Motion Profiles” *International Journal of Advanced Robotic Systems*; Vol.5, No.1, 2008.
- [18]Ernesto C.A., Farouki R.T.; “Solution of inverse dynamics problems for contour error minimization in CNC machines” *Int J Adv Manuf Technol*; 2009.
- [19]Ellis G.; “PDFF: evaluation of a velocity loop control method” *PCIM Conference*; Europe; 1999.
- [20]Ellis G.; “PDFF Velocity Control: Extending PI” *PCIM Conference*; Europe; 1999.
- [21]Shen B.H., Tsai M.C.; “Robust dynamic stiffness design of linear servomotor drives” *Control Engineering Practice*; Vol.14, 2006, pp.1325–1336.
- [10]Farouki R.T., Sagar S.; “Real-time CNC interpolators for Pythagorean-hodograph curves” *Comput Aided Geom Des*; Vol.13, No.7, 1995, pp.583–600.
- [11]Tsai Y.F., Farouki R.T., Feldman B.; “Performance analysis of CNC interpolators for time-dependent feed rates along PH curves” *Comput Aided Geom Des*; Vol.18, No.3, 2001, pp.245–265.
- [12]Farouki R.T., Kuspa B.K., Manni C., Sestini A.; “Efficient solution of the complex quadratic tridiagonal system for C^2 PH quintic splines” *Numer Algor*; Vol.27, No.1, 2001, pp.35–60.
- [13]Pelosi F., Sampoli M.L., Farouki R.T., Manni C.; “A control polygon scheme for design of planar C^2 PH quintic spline curves” *Comput Aided Geom Des*; Vol.24, No.1, 2007, pp.28–52.
- [14]Jahanpour J., Tsai M.C., Cheng M.Y.; “High-speed contouring control with NURBS-based C^2 PH spline curves” *Int J Adv Manuf Technol*; Vol.49, No.5, 2010, pp.663-674.
- [15]de Boor C.; “On calculating with B-splines” *J.Approx.Theory*; Vol.6, 1972, pp.50–62.