مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 13، ص‌ص 37-46

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی کمانش ورق‌های مستطیلی تحت بار صفحه‌ای غیریکنواخت به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

سعید ابوالقاسمی[1]، حمیدرضا ایپکچی[2*]، محمود شریعتی[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود
3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* شاهرود، صندوق‌پستی 316، web2-eipakchi@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 23 اردیبهشت 1393
پذیرش: 21 خرداد 1393
ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:
بارگذاری غیریکنواخت
تئوری تنش برشی مرتبه اول
کمانش محوری
روش گالرکین

چکیده

در این مقاله کمانش ورق‌های مستطیلی که تحت بار صفحه‌ای غیریکنواخت قرار دارند، بررسی شده است. نخست معادلات تعادل ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است. روابط سینماتیک براساس مدل فن کارمن و معادلات بنیادین، خطی فرض شده‌اند. سپس از روش تعادل در مجاورت برای به‌دست آوردن معادلات پایداری استفاده شده است. معادلات تعادل مربوط به میدان تنش پیش‌کمانش، به کمک تئوری معادلات دیفرانسیل حل شده است. برای تعیین بار کمانش ورق با شرایط مرزی ساده، روش گالرکین برای حل معادلات پایداری که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است به‌کار گرفته شده است. در این مقاله چهار نوع بارگذاری مختلف شامل بارگذاری یکنواخت، سهمی شکل، کسینوسی و مثلثی شکل در نظر گرفته شده و تأثیر نسبت ظاهری ورق و ضخامت آن بر بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته، نتایج با حل عددی و نتایج تئوری کلاسیک مقایسه شده است. براساس آن، بار کمانش به‌دست آمده از تئوری کلاسیک برای همه حالت‌های بارگذاری همواره بزرگ‌تر از مقدار آن براساس تئوری تنش برشی مرتبه اول است.

Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory

Saeed Abolghasemi[1], Hamidreza Eipakchi[2*], Mahmoud Shariati[3]

1- Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran
3- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 316, Shahrood, Iran, web2-eipakchi@shahroodut.ac.i

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 13 May 2014
Accepted 11 June 2014
Available Online 04 October 2014

Keywords:
Non-uniform loading
First order shear deformation theory
Axial Buckling
Galerkin method

ABSTRACT

In this paper, the buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading is investigated. At first the equilibrium equations of plate based on the first order shear deformation theory have been extracted. The kinematic relations have been assumed based on the von-Karman model and the Hook's law has been considered as the constitutive equations. The adjacent equilibrium method has been used for deriving the stability equations. The equilibrium equations which are related to the prebuckling stress distribution have been solved using the differential equations theory. To determine the buckling load of a simply supported plate, the Galerkin method has been used for solving the stability equations which are a system of differential equations with variable coefficients. In this paper, four types of in-plane loading, including the uniform, parabolic, cosine and triangular loading, have been considered and the effects of the plate aspect ratio and thickness on the buckling load has been investigated and the results have been compared with the finite element method and the classical plate theory. The comparison of the results show that for all loading cases, the buckling load computed by the classical plate theory is higher than the value obtained based on first order shear deformation theory.

1- مقدمه

ورق‌ها دسته ای از اجزای پرکاربرد در ساخت سازه‌های مختلف مانند بدنه کشتی‌هاست. هنگامی که یک ورق در معرض بارگذاری فشاری قرار می‌گیرد، بررسی پدیده کمانش اهمیت زیادی پیدا می‌کند. یک ورق ممکن است درمعرض بار غیریکنواخت در لبه‌ها قرار داشته باشد و این بار می‌تواند به‌صورت خطی و یا غیرخطی اعمال شود. برای نمونه پانل‌های مورد استفاده در پوسته بال هواپیماها و یا بدنه کشتی‌ها به دلیل شرایط تکیه‌گاهی، معمولاً در معرض بار داخل صفحه‌ای غیریکنواخت قرار می‌گیرند. برخلاف مساله کمانش ورق‌های با بارگذاری یکنواخت در لبه‌ها که مطالعات زیادی در مورد آن انجام و حل‌های دقیق و تقریبی مختلفی برای آن ارائه شده است، کمانش ورق‌ها با

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
S. Abolghasemi, H.R. Eipakchi, M. Shariati, Analytical solution for buckling of rectangular plates subjected to non-uniform in-plane loading based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 13, pp. 37-46, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.5.8]

بارگذاری غیریکنواخت عمدتاً به دلیل پیچیدگی فرایند حل کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

کمانش ورق‌های مستطیلی که در معرض حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت از جمله بارگذاری متمرکز، بارگذاری موضعی، بارگذاری سینوسی و غیره قرار دارند، توسط جانا و باسکار [2,1] مورد مطالعه قرار گرفته است. ایشان نخست با استفاده از ترکیب چندین تابع تنش ایری براساس اصل جمع آثار، مساله پیش‌کمانش را جهت تعیین میدان تنش داخل صفحه ای[1] ورق، حل کرده‌اند. پس از آن با استفاده از روش گالرکین به حل معادله کمانش ورق براساس تئوری کلاسیک[2] پرداخته و بارکمانش ورق را برای حالت‌های مختلف بارگذاری به‌دست آورده‌اند. همچنین در مرجع [1] از روش کانتورویچ توسعه‌یافته[3] برای به‌دست آوردن میدان تنش داخل صفحه‌ای استفاده شده و نتایج آن با حل مربوط به تابع تنش ایری مقایسه شده است. پاندا و راچاماندرا [3] به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، به بررسی کمانش ورق‌های کامپوزیتی که در معرض بارگذاری غیر-یکنواخت به شکل خطی و سهمی در لبه‌ها قرار دارند، پرداخته‌اند. با توجه به این‌که باراعمالی بر لبه‌های ورق یکنواخت نیست، محاسبه بارکمانش در طی دو مرحله انجام شده است: در مرحله اول برای تعیین توزیع تنش پیش-کمانش، یک مساله الاستیسیته دوبعدی با مینیمم کردن انرژی کرنشی غیریکنواخت به شکل خطی و سهمی در لبه‌ها قرار دارند، پرداخته‌اند. با توجه به این‌که باراعمالی بر لبه‌های ورق یکنواخت نیست، محاسبه بارکمانش در دو مرحله انجام شده است. در مرحله اول برای تعیین توزیع تنش پیش‌کمانش، یک مساله الاستیسیته دوبعدی با مینیمم کردن انرژی کرنشی غشایی ورق[4] حل شده است. درمرحله دوم معادلات کمانش ورق با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به‌دست آمده و برای حل این معادلات از روش گالرکین استفاده شده است. کشمیری و همکاران [4] با استفاده از تئوری کلاسیک به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های بیضوی نازک کامپوزیتی متقارن واقع بر بستر الاستیک که تحت بار نرمال داخل صفحه‌ای مرزی اولیه قرار دارند، پرداخته و از روش ریتز برای حل معادلات حاکم استفاده نموده‌اند. کمانش ورق‌های اورتوتروپیک در معرض بارغیر یکنواخت توسط کالیان و باسکار [5] بررسی شده است. براساس نتایج این مقاله، تأثیر شکل توزیع بار در لبه‌ها بر بار کمانش نسبت به ورق‌های ایزوتروپیک به مراتب بیشتر است. لیسا و کانگ [7,6] کمانش و ارتعاشات ورق‌ها به‌واسطه بارگذاری خطی را مورد بررسی قرار داده‌اند. شرایط مرزی در لبه‌های بارگذاری شده به صورت ساده است. با درنظر گرفتن حل مساله به صورت حاصل ضرب دو تابع بر حسب x و y، معادله کمانش ورق به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل و برای حل آن، سری‌های فروبینیوس به‌کار گرفته شده و بارکمانش ورق برای توزیع‌های مختلف بارگذاری، به‌دست آمده است. آتشی پور و سعیدی [8] به تحلیل کمانش و ارتعاشات ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ساده در دو لبه موازی و شرایط مرزی دلخواه در دولبه دیگر پرداخته‌اند که در آن لبه‌های با شرایط مرزی ساده، دارای بارگذاری نرمال غیریکنواخت است. در این مقاله برای حل معادلات حاکم، از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. برت و دوراکوندا [9] به بررسی کمانش ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها، که در معرض بارگذاری سینوسی قرار دارند پرداخته‌اند. برای محاسبه میدان تنش پیش کمانش از جمع چند تابع تنش ایری استفاده شده است. پس از محاسبه میدان تنش داخل صفحه‌ای، معادله کمانش ورق که براساس تئوری کلاسیک به‌دست آمده است، با استفاده از روش گالرکین حل شده است. ونگ و همکاران [10-12] از روش کوادراتور دیفرانسیلی برای محاسبه بارکمانش ورق‌های مستطیلی که در معرض بار غیریکنواخت در لبه‌ها قرار دارند، استفاده و تأثیر بارگذاری کسینوسی، خطی و سهمی شکل را روی بارکمانش ورق مورد بررسی قرار داده‌اند. جعفری و افتخاری [13] با ترکیب روش ریتز و روش کوادراتور دیفرانسیلی، بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک واقع بر بستر الاستیک را برای حالت‌های مختلف بارگذاری و نیز انواع مختلف شرایط مرزی محاسبه کرده‌اند. همچنین فتاحی و همکاران [14] به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، کمانش ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک و غیراورتوتروپیک با توزیع‌های مختلف بارگذاری فشاری محوری را مورد بررسی قرار داده و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله جنس ورق، نسبت طول به عرض ورق و تعداد لایه‌ها بر بار کمانش را ارزیابی کرده‌اند. کمانش نانو ورق‌های گرافنی تک لایه که در معرض بار خطی در لبه‌ها قرار دارند، توسط فرج پور و همکاران [15] مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم براساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی[5] استخراج و برای حل این معادلات از روش کوادراتور دیفرانسیلی و نیز روش سری‌های فروبینیوس استفاده شده است. بداغی و سعیدی [16] یک حل دقیق برای کمانش ورق‌های تابعی[6] بر بستر الاستیک که در معرض بار غیریکنواخت در لبه‌ها قرار دارند ارائه کرده‌اند. با استفاده از حل به روش لوی[7]، معادله مربوط به کمانش ورق که براساس تئوری کلاسیک به‌دست آمده است، به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل شده است و برای حل دقیق این معادله دیفرانسیل، از سری‌های فروبینیوس استفاده شده است. چن و لیو [17] به بررسی تأثیر سه نوع بارگذاری متمرکز، بارگذاری یکنواخت موضعی و بارگذاری سهمی شکل بر بار کمانش ورق‌های مرکب تابعی پرداخته‌اند. فرمول‌بندی مساله براساس روش بدون مش و تقریب میدان جابه‌جایی براساس توابع پایه شعاعی انجام شده است. شریعت و عاصمی [18] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی براساس توابع اسپیلاین به بررسی کمانش ورق‌های تابعی با بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها پرداخته‌اند. فرمول‌بندی ارائه‌شده دارای پیوستگی از مرتبه دو در مرز المان‌ها است. آن‌ها اثر حالت‌های مختلف بارگذاری و نیز شرایط مرزی را بر بار کمانش بررسی کرده‌اند.

مرور مقالات موجود در زمینه کمانش ورق‌های دارای بارگذاری غیریکنواخت نشان می‌دهد که برای محاسبه بار کمانش این ورق‌ها هر دو روش حل عددی و حل تحلیلی مورد توجه بوده است. در زمینه حل تحلیلی، معمولاً برای به‌دست آوردن میدان تنش ورق پیش از وقوع کمانش، از حل براساس تابع تنش ایری استفاده شده است. این روش در عین پیچیدگی‌هایی که دارد، قادر به ارضای شرایط مرزی جابه‌جایی داخل صفحه‌ای[8] نیست و تنها می‌تواند شرایط مرزی نیرویی را ارضا کند. در مطالعه حاضر، معادلات تعادل براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط سینماتیک فن کارمن، به کمک اصل کارمجازی استخراج و سپس معادلات پایداری تعیین شده است. میدان تنش ورق پیش‌کمانش با حل تحلیلی معادلات تعادل که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است به‌دست آمده است. در نهایت معادلات پایداری ورق که معادلاتی با مشتقات جزئی و با ضرایب

1- In-plane
2- Classical Plate Theory(CPT)
3- Extended Kantorovich method
4- Membrane strain energy
5- Non-local
6- Functionally graded plates
7- Levy type solution
8- In-plane displacements

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.5.8]

متغیر است با استفاده از روش گالرکین حل و مقادیر بار کمانش برای حالت‌های مختلف بارگذاری محاسبه و با نتایج حاصل از حل اجزای محدود[1] و نتایج تئوری کلاسیک مقایسه شده است.

2- معادلات تعادل

میدان جابه‌جایی یک ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به شکل رابطه (1) درنظر گرفته می‌شود:

$$u = u_0(x,y) + zu_1(x,y)$$
$$v = v_0(x,y) + zv_1(x,y)$$
$$w = w(x,y) \quad (1)$$

که در آن u_0 و v_0 و w مربوط به تغییر شکل صفحه میانی بوده و u_1 و v_1 بیانگر چرخش است. روابط کرنش- جابه‌جایی فن کارمن به صورت روابط (2) بیان می‌شوند [19]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad \text{(2-الف)}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad \text{(2-ب)}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad \text{(2-ج)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(2-د)}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{(2-ه)}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(2-و)}$$

با قرار دادن میدان جابه‌جایی (1) در روابط کرنش- جابه‌جایی فن کارمن مولفه‌های کرنش به شکل روابط (3) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \text{(3-الف)}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial v_1}{\partial y} \quad \text{(3-ب)}$$
$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{(3-ج)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(3-د)}$$
$$\gamma_{xz} = u_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{(3-ه)}$$
$$\gamma_{yz} = v_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(3-و)}$$

براساس اصل کار مجازی، معادلات تعادل ورق به صورت روابط (4) به‌دست می‌آیند [19]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{(4-الف)}$$
$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{(4-ب)}$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{(4-ج)}$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad \text{(4-د)}$$
$$N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad \text{(4-ه)}$$

منتجه‌های نیرو و ممان به‌صورت رابطه (5) تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x, M_x \\ N_y, M_y \\ N_{xy}, M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} (1,z)dz,$$
$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (5)$$

در رابطه (5)، k_s ضریب تصحیح برشی بوده و مقدار آن برابر با5/6 درنظر گرفته شده است. معادلات تعادل (4) را می‌توان برحسب میدان جابه‌جایی بازنویسی کرد. بدین‌جهت از روابط تنش- کرنش براساس قانون هوک استفاده شده است. شکل کلی قانون هوک برای یک ماده الاستیک به‌صورت رابطه (6) است [20]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + G\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

که در آن، λ و G ضرایب لامه بوده و رابطه آن‌ها برحسب مدول الاستیک و ضریب پواسون به‌صورت رابطه (7) است[20] :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ ,\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

با جای‌گذاری مولفه‌های تنش از رابطه (6) در (5) و سپس قرار دادن در معادلات تعادل (4)، می‌توان این معادلات را برحسب میدان جابه‌جایی به شکل روابط (8) نوشت:

$$A\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (G+\lambda)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + G\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(8-الف)}$$
$$A\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (G+\lambda)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + G\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(8-ب)}$$
$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{h^3 G}{12}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right) - k_s Gh\left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{(8-ج)}$$
$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{h^3 G}{12}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}\right) - k_s Gh\left(v_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{(8-د)}$$
$$N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_s Gh\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{(8-ه)}$$

که در آن $A=\lambda+2G$ است. معادلات به‌دست آمده، مربوط به تعادل یک المان ورق هستند. این معادلات همگن بوده و تنها در صورتی جواب غیر صفر دارند که شرایط مرزی ناهمگن باشد. بنابراین برای یک ورق با شرایط مرزی ساده که در لبه‌ها در معرض ممان خمشی و یا پیچشی نباشند، معادلات (8-ج) تا (8-ه) دارای جواب همگن صفر بوده و تنها معادلات (8-الف) و (8-ب) به دلیل شرایط مرزی ناهمگن (بارگذاری داخل صفحه‌ای) دارای جواب غیر صفر است.

3- معادلات پایداری

برای به‌دست آوردن معادلات پایداری از روش تعادل در مجاورت[2] استفاده شده است. براساس این روش اگر $u_0^0, u_1^0, v_0^0, v_1^0, w_0^0$ جابه‌جایی‌های مربوط به یک حالت تعادل باشند، میدان جابه‌جایی مربوط به حالت تعادل پایدار که در مجاورت تعادل اولیه قرار دارد، به اندازه $u_0^1, u_1^1, v_0^1, v_1^1, w_0^1$ با آن اختلاف دارد، بنابراین میدان جابه‌جایی کل مربوط به این حالت را می‌توان به شکل رابطه (9) نوشت [21]:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, v_0 = v_0^0 + v_0^1, u_1 = u_1^0 + u_1^1$$
$$v_1 = v_1^0 + v_1^1, w = w^0 + w^1 \quad (9)$$

همچنین مقادیر منتجه‌های نیرو را برای این حالت تعادل می‌توان به شکل رابطه (10) نوشت:

$$N_x = N_{x0} + N_{x1},\ N_y = N_{y0} + N_{y1},$$
$$N_{xy} = N_{xy0} + N_{xy1} \quad (10)$$

که در آن N_{x1}, N_{y1}, N_{xy1} بخش خطی مربوط به تغییرات منتجه‌های نیرو مطابق جابه‌جایی‌های در همسایگی تعادل $u_0^1, u_1^1, v_0^1, v_1^1, w_0^1$ است. اکنون می‌توان معادلات پایداری را با قرار دادن روابط (9) و (10) در معادلات تعادل، به‌دست آورد. در این صورت حاصل جمع جملات با اندیس صفر، به دلیل این که معادلات تعادل را ارضا می‌کنند برابر با صفر خواهد بود. با صرف نظر کردن از جملات غیرخطی، معادلات پایداری به شکل روابط (11) به‌دست می‌آیند:

1- Finite elements

2- Adjacent equilibrium method

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} = 0 \quad \text{(11-الف)}$$

$$\frac{\partial N_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} = 0 \quad \text{(11-ب)}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x\partial y}\right) + \frac{h^3 G}{12}\left(\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x\partial y}\right) - k_s G h\left(u_1^1 + \frac{\partial w^1}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{(11-ج)}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x\partial y}\right) + \frac{h^3 G}{12}\left(\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x\partial y}\right) - k_s G h\left(v_1^1 + \frac{\partial w^1}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{(11-د)}$$

$$N_x^0\frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + N_y^0\frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0\frac{\partial^2 w^1}{\partial x\partial y} + k_s G h\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{(11-ه)}$$

معادلات (11-ج) تا (11-ه) مستقل از معادلات (11-الف) و (11-ب) قابل حل است. در معادله (11-ه) مقادیر N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 مربوط به شرایط تعادل اولیه بوده و از حل معادلات (4-الف) و (4-ب) و یا معادلات (8-الف) و (8-ب) به‌دست می‌آیند. این‌جا ابتدا معادلات (8-الف) و (8-ب) حل می‌شوند، پس از تعیین میدان جابه‌جایی داخل صفحه‌ای، مقادیر N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 محاسبه می‌شوند که در حالت کلی تابعی از x و y است. سپس با استفاده از روش گالرکین، معادلات (11-ج) تا (11-ه) حل شده و مقادیر بارکمانش محاسبه می‌شوند. در یک ورق نازک و یا یک ورق نسبتاً ضخیم، به این دلیل که ضخامت ورق در مقایسه با ابعاد دیگر ورق کوچک است، حالت تنش صفحه‌ای وجود دارد [19] که در این حالت ضرایب A و λ به ترتیب برابر با $E/(1-\nu^2)$ و $\nu E/(1-\nu^2)$ است.

4- حل معادلات تعادل

برای حل معادلات (8-الف) و (8-ب)، میدان جابه‌جایی داخل صفحه‌ای به صورت رابطه (12) درنظر گرفته می‌شود:

$$u_0(x,y) = f_1(x)e^{\beta y}$$
$$v_0(x,y) = f_2(x)e^{\beta y} \quad (12)$$

با قرار دادن حل درنظر گرفته شده از رابطه (12) در معادلات (8-الف) و (8-ب) این معادلات به شکل روابط (13) نوشته می‌شوند:

$$\left(Af_1''(x) + (G+\lambda)\beta f_2'(x) + G\beta^2 f_1(x)\right)e^{\beta y} = 0$$
$$\left(A\beta^2 f_2(x) + (G+\lambda)\beta f_1'(x) + G\beta^2 f_2''(x)\right)e^{\beta y} = 0 \quad (13)$$

برای محاسبه توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در معادلات (13)، این معادلات به شکل فضای حالت و به صورت $\dot{X} = PX$ بازنویسی می‌شود که در آن $X = \{f_1 \quad f_1' \quad f_2 \quad f_2'\}$ بردار حالت و P ماتریس ضرایب سیستم است. با توجه به معادلات (13)، ماتریس P به‌صورت رابطه (14) به‌دست می‌آید:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{G}{A}\beta^2 & 0 & 0 & -\frac{G+\lambda}{A}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{G+\lambda}{G}\beta & -\frac{A}{G}\beta^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

حل عمومی دستگاه معادلات $\dot{X} = PX$ به‌صورت رابطه (15) است:

$$X = \sum_{i=1}^{4} c_i V_i e^{\lambda_i x} \quad (15)$$

که در آن c_i ضرایب ثابت بوده و از شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. همچنین λ_i و V_i به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه iام ماتریس ضرایب P است که از حل معادله $PV = \lambda V$ به‌دست می‌آیند. این معادله را می‌توان به شکل $(P - \lambda I)V = 0$ بازنویسی کرد. اکنون برای داشتن جواب غیر صفر باید دترمینان ماتریس $P - \lambda I$ برابر با صفر باشد. با مساوی صفر قراردادن این دترمینان و حل معادله مشخصه حاصل، رابطه (16) نتیجه می‌شود:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta \,, \lambda_{3,4} = \pm i\beta \quad (16)$$

مشاهده می‌شود که مقادیر ویژه سیستم دارای مرتبه تکرار دو است. دراین حالت با قراردادن مقدار ویژه در معادله ماتریسی، بردارهای ویژه سیستم که آن‌ها نیز از مرتبه تکرار دو است، به‌صورت رابطه (17) به‌دست می‌آید:

$$V_{1,2} = \left\{\frac{1}{\beta} \quad \pm i \quad \mp\frac{i}{\beta} \quad 1\right\}^{\mathrm{T}}, V_{3,4} = V_{1,2} \quad (17)$$

برای به‌دست آوردن یک جفت دیگر از بردارهای ویژه سیستم، باید از اصل بردارهای ویژه تعمیم یافته[1] استفاده کرد. براساس این اصل، اگر یک ماتریس دارای مقادیر ویژه تکراری باشد، بردار ویژه تعمیم یافته مربوط به آن براساس رابطه (18) به‌دست می‌آید [22]

$$(P - \lambda I)W = V \quad (18)$$

در رابطه (18)، V بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه تکراری مورد نظر و W بردار ویژه تعمیم یافته است. در این حالت، جواب مساله را برای مقدار ویژه‌ای که دارای مرتبه تکرار دو است، می‌توان به شکل رابطه (19) نوشت:

$$X = C_1 V e^{\lambda x} + C_2(xV + W)e^{\lambda x} \quad (19)$$

برای مساله مورد بررسی، بردار ویژه تعمیم‌یافته متناظر با مقدار ویژه تکراری $\lambda = \pm i\beta$ با استفاده از رابطه (18) به‌صورت رابطه (20) به‌دست می‌آید:

$$W_{3,4} = \left\{0 \quad \frac{1}{\beta} \quad \frac{(4\nu-3)}{\beta^2} \quad \mp\frac{4i(\nu-1)}{\beta}\right\}^{\mathrm{T}} \quad (20)$$

بنابراین جواب کلی را می‌توان به شکل رابطه (21) درنظر گرفت:

$$X = C_1V_1e^{i\beta x} + C_2V_2e^{-i\beta x} + C_3(xV_3 + W_3)e^{i\beta x} + C_4(xV_4 + W_4)e^{-i\beta x} \quad (21)$$

با توجه به تعریف بردار حالت X، درایه‌های اول و سوم این بردار به ترتیب متناظر با $f_1(x)$ و $f_2(x)$ است. به همین ترتیب می‌توان جواب مساله را به‌صورت رابطه (22) در نظر گرفت:

$$u_0(x,y) = f_1(y)e^{\alpha x}$$
$$v_0(x,y) = f_2(y)e^{\alpha x} \quad (22)$$

در این صورت ماتریس P به‌صورت رابطه (23) خواهد بود:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{G}\alpha^2 & 0 & 0 & -\frac{G+\lambda}{G}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{G+\lambda}{A}\alpha & -\frac{G}{A}\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تکراری سیستم نیز به صورت رابطه (24) به‌دست می‌آیند:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha \,, V_{1,2} = \left\{-\frac{1}{\alpha} \quad \mp i \quad \mp\frac{i}{\alpha} \quad 1\right\}^{\mathrm{T}}$$
$$\lambda_{3,4} = \pm i\alpha \,, V_{3,4} = V_{1,2} \quad (24)$$

همچنین بردار ویژه تعمیم‌یافته متناظر با مقدار ویژه تکراری سیستم نیز به‌صورت رابطه (25) محاسبه می‌شوند:

$$W_{3,4} = \left\{\frac{\mp i(4\nu-3)}{\alpha^2} \quad \frac{4(\nu-1)}{\alpha} \quad 0 \quad \mp\frac{i}{\alpha}\right\}^{\mathrm{T}} \quad (25)$$

اکنون با جمع جواب‌های دو قسمت پیشین، جواب نهایی را پس از ساده سازی می‌توان به شکل روابط (26) نوشت:

1- Generalized eigen-vectors

$$u_0(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(C_{1n}\cos(\beta_n x) + C_{2n}\sin(\beta_n x) + C_{3n}x\cos(\beta_n x) + C_{4n}x\sin(\beta_n x)\Big) e^{\beta_n y} + \Big(C_{5n}\cos(\alpha_n y) + C_{6n}\sin(\alpha_n y) + C_{7n}\Big(y\cos(\alpha_n y) - \frac{(4\nu-3)\sin(\alpha_n y)}{\alpha_n}\Big) + C_{8n}\Big(y\sin(\alpha_n y) + \frac{(4\nu-3)\cos(\alpha_n y)}{\alpha_n}\Big)\Big) e^{\alpha_n x} \quad \text{(26-الف)}$$

$$v_0(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(C_{1n}\sin(\beta_n x) - C_{2n}\cos(\beta_n x) + C_{3n}\Big(x\sin(\beta_n x) + \frac{(4\nu-3)\cos(\beta_n x)}{\beta_n}\Big) + C_{4n}\Big(-x\cos(\beta_n x) + \frac{(4\nu-3)\sin(\beta_n x)}{\beta_n}\Big)\Big) e^{\beta y} - \big(C_{5n}\sin(\alpha_n y) - C_{6n}\cos(\alpha_n y) + C_{7n}y\sin(\alpha_n y) - C_{8n}y\cos(\alpha_n y)\big)e^{\alpha_n x} \quad \text{(26-ب)}$$

4-1- شرایط مرزی

اکنون ورقی را درنظر بگیرید که شرایط مرزی و بارگذاری آن به‌صورت متقارن است (شکل 1). در این ورق جابه‌جایی داخل صفحه‌ای در راستای y در لبه‌های بالایی و پایینی محدود شده و در لبه‌های راست و چپ خود در معرض بارگذاری متقارن قرار دارد. شرایط مرزی مربوط به این ورق را می‌توان به صورت روابط (27) نوشت:

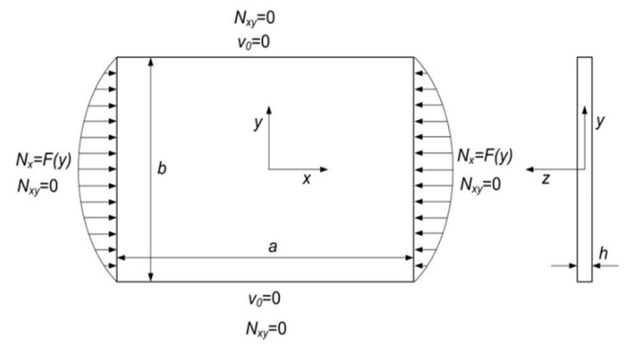
$$v_0\left(x, y = \pm\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \text{(27-الف)}$$

$$N_{xy}\left(x, y = \pm\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \text{(27-ب)}$$

$$N_{xy}\left(x = \pm\frac{a}{2}, y\right) = 0 \quad \text{(27-ج)}$$

$$N_x\left(x = \pm\frac{a}{2}, y\right) = -F(y) \quad \text{(27-د)}$$

واضح است که شرایط مرزی نیرویی و جابه‌جایی، از نظر فیزیکی باید با هم سازگار باشند. مانند در لبه $x = \pm a/2$ که بار محوری اعمال می‌شود نمی‌توان انتظار داشت $u_0 = 0$ باشد و یا در لبه $y = \pm b/2$، نیروی N_y نمی‌تواند اعمال شود زیرا در این لبه $v_0 = 0$ است. دراین مقاله فقط بارگذاری متقارن یک محوری بررسی شده است.



شکل 1 ورق مستطیلی با بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها

براساس این شرایط مرزی و به دلیل وجود تقارن، ضرایب $C_{1n}, C_{4n}, C_{6n}, C_{7n}$ در معادلات (26) برابر با صفر خواهند بود. اکنون با قرار دادن میدان جابه‌جایی در شرایط مرزی مساله، مشاهده می‌شود که شرایط مرزی (27-الف) تا (27-ج) در دو حالت و به شکل روابط (28) قابل ارضا شدن است:

$$C_{2n} = C_{3n} = 0\,, C_{5n} = C_{8n}\frac{\mathrm{acot}\left(\frac{\alpha_n a}{2}\right)}{2}\,, \alpha_n = 0 \quad \text{(28-الف)}$$

$$C_{5n} = C_{8n} = 0\,, C_{2n} = \frac{1}{2}\frac{C_{3n}\left(4\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)(\nu-1) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n a\right)}{\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n}$$

$$\beta_n = \frac{2n\pi i}{b}\,, n = 1,2,3,\dots \quad \text{(28-ب)}$$

همچنین شرط مرزی (27-د) در این دو حالت به صورت روابط (29) به‌دست می‌آید:

$$N_x\left(x = \pm\frac{a}{2}, y\right) = C_{8n}\frac{2Eh(\nu-1)}{1+\nu} \quad \text{(29-الف)}$$

$$N_x\left(x = \pm\frac{a}{2}, y\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_{3n}\frac{Eh\left(2\cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right) + \beta_n a\right)\cosh(\beta_n y)}{(1+\nu)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)} \quad \text{(29-ب)}$$

با جای‌گذاری روابط (28) در معادلات (26)، جواب نهایی را می‌توان با جمع جواب‌ها به شکل معادلات (30) نوشت:

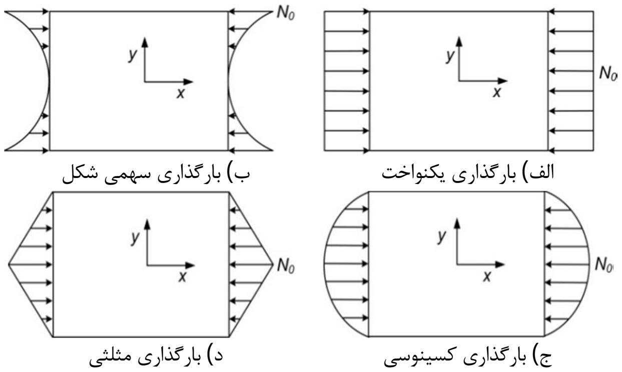
$$u_0(x,y) = C_0 x(4\nu-2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}C_n\cosh(\beta_n y)\Big(-\sin(\beta_n x)\cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n a + 4\sin(\beta_n x)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\nu - 4\sin(\beta_n x)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right) + 2x\cos(\beta_n x)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n\Big) / \sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n \quad \text{(30-الف)}$$

$$v_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}C_n\sinh(\beta_n y)\Big(\cos(\beta_n x)\cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n a + 4\nu\cos(\beta_n x)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right) - 2\cos(\beta_n x)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right) + 2x\sin(\beta_n x)\beta_n\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\Big) / \sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\beta_n \quad \text{(30-ب)}$$

برای اعمال شرط مرزی نیرویی در لبه‌های ورق (شرط مرزی 27-د)، بسط کسینوسی تابع $F(y)$ مساوی با مقدار به‌دست آمده در روابط (29) برای این شرط مرزی قرار داده شده و رابطه (31) به‌دست می‌آید:

$$N_x\left(x = \pm\frac{a}{2}, y\right) = F(y) \to b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = C_0\frac{2Eh(\nu-1)}{1+\nu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}C_n\frac{Eh\left(2\cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right) + \beta_n a\right)\cosh(\beta_n y)}{(1+\nu)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)} \quad (31)$$

برای محاسبه ضرایب C_n در رابطه (31)، این رابطه در توابع $\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$ ضرب و از $-b/2$ تا $b/2$ انتگرال گرفته می‌شود.

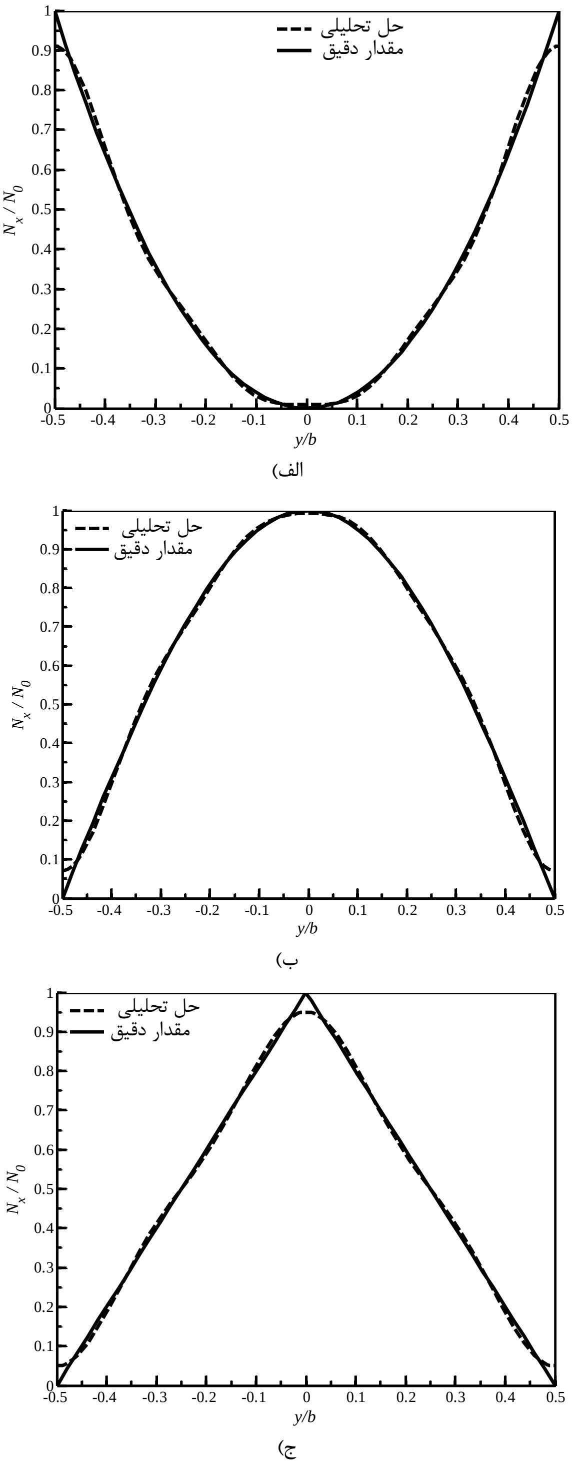


ب) بارگذاری سهمی شکل الف) بارگذاری یکنواخت

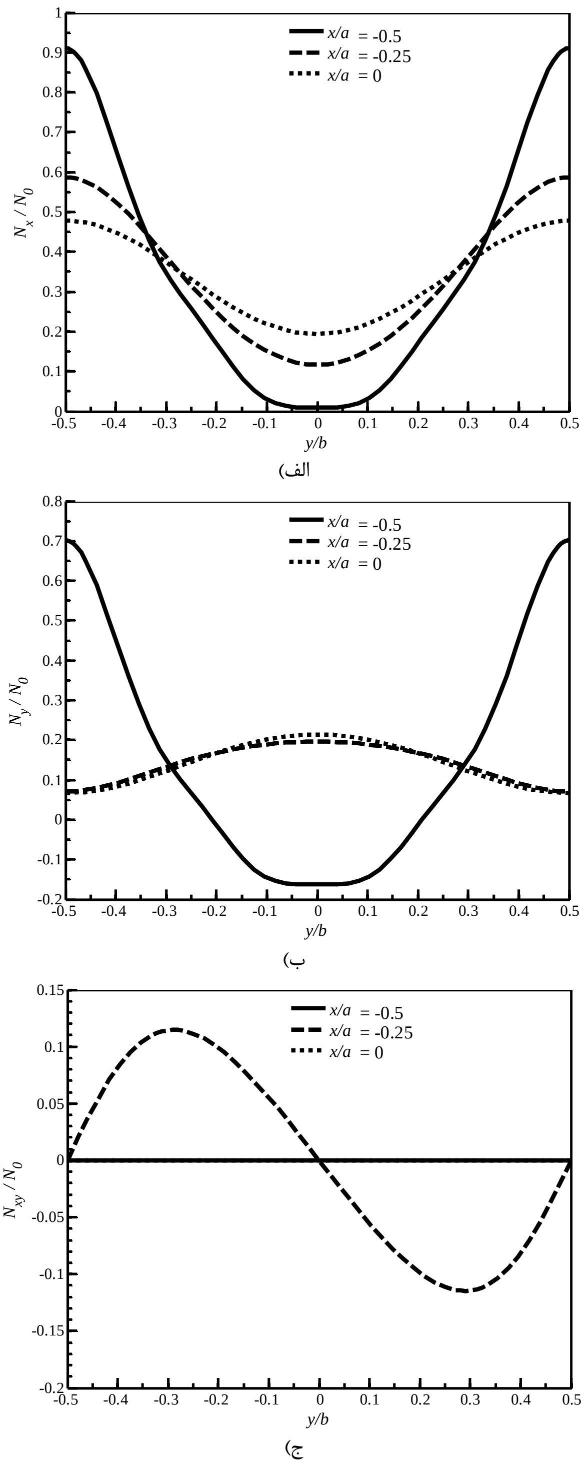
د) بارگذاری مثلثی ج) بارگذاری کسینوسی

شکل 2 حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت یک ورق مستطیلی.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.5.8]



شکل 3 مقایسه مقدار به‌دست آمده از حل تحلیلی برای N_x در لبه سمت راست و چپ ورق با مقدار دقیق آن، الف) بارگذاری سهمی شکل، ب) بارگذاری کسینوسی و ج) بارگذاری مثلثی.



شکل 4 تغییرات منتجه نیروی‌های داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری سهمی شکل الف) منتجه نیروی N_x، ب) منتجه نیروی N_y، ج)منتجه نیروی N_{xy}.

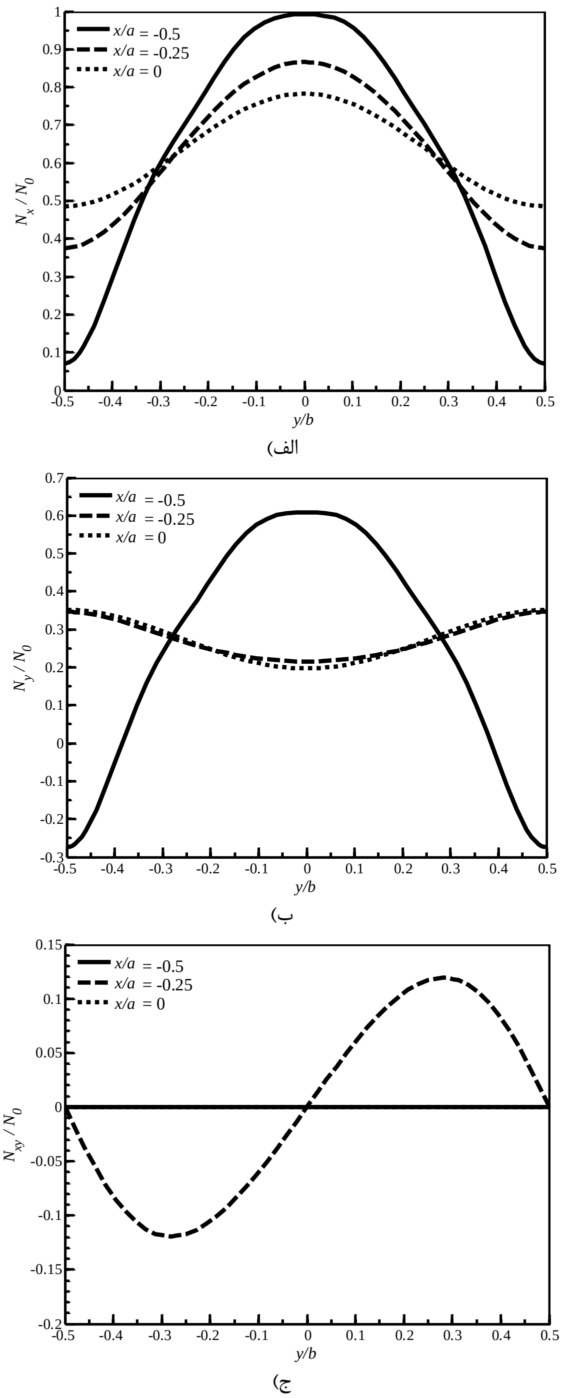
در این صورت یک دستگاه معادلات جبری به‌دست می‌آید که با حل آن، مقادیر ضرایب C_n قابل محاسبه است. پس از محاسبه این ضرایب، می‌توان میدان جابه‌جایی ورق را محاسبه کرد و با داشتن میدان جابه‌جایی، مؤلفه‌های میدان تنش و منتجه‌های نیروی داخل صفحه‌ای N_{x0} و N_{y0} و N_{xy0} نیز قابل محاسبه هستند. در این مقاله، مساله کمانش ورق برای چهار نوع بارگذاری مختلف که دامنه همه آن‌ها برابر با N_0 است، مورد بررسی قرار گرفته است، این بارگذاری‌ها در شکل 2 قابل مشاهده است.

برای بررسی دقت حل تحلیلی ارائه شده در ارضای شرایط مرزی نیرویی در لبه‌های بارگذاری شده، در شکل 3، مقدار N_x در این لبه‌ها که ازحل تحلیلی و به ازای $n = 5$ به‌دست آمده است با مقدار دقیق آن براساس نوع تابع بارگذاری در لبه ورق، برای سه نوع بارگذاری مقایسه شده است.

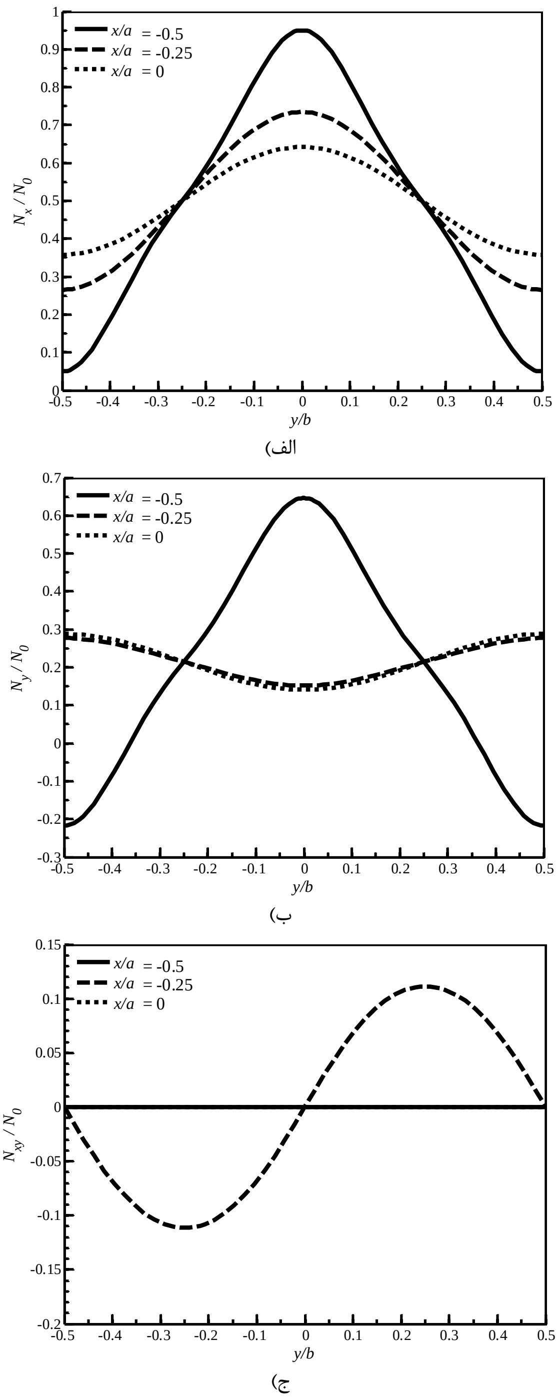
در این شکل محور y برحسب دامنه بارگذاری N_0 نرمالیزه شده است. توضیح

این‌که مقدار $n = 5$ با توجه به بررسی همگرایی مقادیر به‌دست آمده برای بار کمانش ورق (جدول 1) مورد استفاده قرار گرفته است. برای بارگذاری یکنواخت، شرایط مرزی نیرویی در لبه‌ها به صورت دقیق ارضا می‌شود. با توجه به شکل 3 مشاهده می‌شود که حل ارائه شده با وجود استفاده از تعداد جملات محدود، به خوبی قادر به ارضای شرایط مرزی نیرویی در لبه‌ها بوده و تنها در نزدیکی گوشه-های ورق و نقاط تیز بارگذاری، با مقدار دقیق شرایط مرزی تفاوت دارد. همچنین در شکل‌های 4 تا 6، تغییرات مقادیر منتجه نیروی‌های داخل صفحه‌ای در سه موقعیت و برای سه نوع بارگذاری نشان داده شده است.

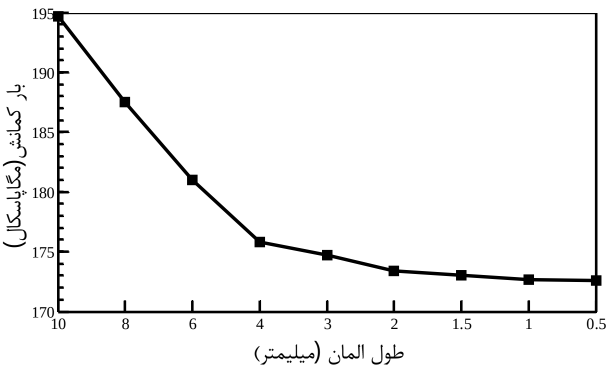
با توجه به شکل‌های 4 تا 6 مشاهده می‌شود که با دور شدن از لبه‌ها، تغییرات منتجه‌های نیرو و به‌خصوص مقدار N_y یکنواخت‌تر می‌شود. در واقع با دور شدن از لبه‌ها، اثرات بارگذاری لبه‌ای بر میدان تنش داخل ورق کاهش می‌یابد. با توجه به نمودار تغییرات منتجه نیروی برشی N_{xy} ، مشاهده می‌شود که دامنه تغییرات آن نسبت به منتجه نیروی N_x و N_y کمتر بوده و مقدار آن در لبه ورق برابر صفر است که نشان‌گر ارضای شرایط مرزی می‌باشد. همچنین به دلیل تقارن در بارگذاری و شرایط مرزی، مقدار این منتجه نیرو در وسط ورق، یعنی برای $x/a = 0$ نیز در تمام حالت‌ها برابر با صفر است.



شکل 5 تغییرات منتجه نیروی‌های داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری کسینوسی الف) منتجه نیروی N_x، ب) منتجه نیروی N_y، ج)منتجه نیروی N_{xy}.



شکل 6 تغییرات منتجه نیروی‌های داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری مثلثی الف) منتجه نیروی N_x، ب) منتجه نیروی N_y، ج)منتجه نیروی N_{xy}.



شکل 7 نمودار همگرایی مش برای محاسبه بار کمانش یک ورق مربعی در معرض بارگذاری کسینوسی.

5- محاسبه بار کمانش

5-1- حل عددی

برای مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی، از مدل‌سازی ورق در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. برای مش‌بندی ورق از المان‌های مربعی با اندازه 2mm × 2mm و از نوع S4Rاستفاده شده است. این المان که در فرمول‌بندی آن اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت لحاظ می‌شود، دارای 4 گره بوده و برای مدل‌سازی ورق‌ها و پوسته‌ها استفاده می‌شود. در شکل 7 نمودار همگرایی مش نشان داده شده است. در این شکل مقدار بار کمانش برای یک ورق مربعی با ابعاد 100mm × 100mm و تحت بارگذاری کسینوسی برای مقادیر مختلف اندازه المان نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با کاهش طول ضلع المان‌ها بیشتر از 2mm ، تغییر محسوسی در مقدار بار کمانش ایجاد نمی‌شود، بنابراین برای مش‌بندی ورق از المان‌های مربعی با ابعاد تقریبی 2mm × 2mm استفاده شده است.

5-2- تئوری کلاسیک

در این قسمت نحوه محاسبه بار کمانش ورق براساس تئوری کلاسیک توضیح داده می‌شود. در تئوری کلاسیک فرض می‌شود خطوط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل نیز به‌صورت عمود باقی می‌مانند و بنابراین مقادیر u_1 و v_1 به شکل رابطه (32) خواهند بود:

$$u_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, v_1 = -\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (32)$$

با استفاده از رابطه (32) و ادغام معادلات (11-ج) تا (11-ه)، معادله پایداری در این حالت به شکل رابطه (33) به‌دست می‌آید [19]:

$$D\nabla^4 w - N_{x0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{y0}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy0}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (33)$$

اکنون مقادیر N_{x0} و N_{y0} و N_{xy0} که از حل قسمت پیشین به‌دست آمده‌اند، در معادله (33) جای‌گذاری می‌شود. معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر بوده که حل دقیق آن کار دشواری است.

در این مقاله برای حل معادله (33) از روش گالرکین استفاده شده است. در این روش جواب به‌صورت رابطه (34) درنظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\,\phi_{m,n}(x, y) \qquad (34)$$

که در آن $\phi_{m,n}(x, y)$ توابع شکل برحسب x و y است که شرایط مرزی مساله را ارضا کرده و C_{mn} ضرایب ثابت بوده و باید محاسبه شوند. برای یک ورق مستطیلی به طول a و عرض b که دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده در تمامی لبه‌هاست، توابع شکل به صورت رابطه (35) تعریف می‌شوند.

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi(y - b/2)}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y - b/2)}{b}\right)$$
$$m, n = 1,2,3, \ldots \qquad (35)$$

با قرار دادن رابطه (35) در معادله دیفرانسیل (33)، یک باقیمانده $R(x, y)$ به‌دست خواهد آمد. براساس روش گالرکین، این باقی‌مانده باید بر تک تک توابع شکل درنظر گرفته شده (توابع $\phi_{m,n}(x, y)$) عمود باشد، که این موضوع به شکل رابطه (36) بیان می‌شود:

$$\iint R(x, y)\phi_{m,n}(x, y)\,dxdy = 0\ , m, n = 1,2,3, \ldots \qquad (36)$$

براساس رابطه (36)، یک دستگاه معادلات جبری همگن به شکل $[B]\{C\} = 0$ حاصل می‌شود که در آن B ماتریس ضرایب بوده و بردار C شامل ضرایب C_{mn} است. برای داشتن جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس B مساوی صفر قرار داده می‌شود و از حل معادله حاصل، مقادیر بار کمانش به‌دست می‌آیند. برای بررسی همگرایی مقدار به‌دست آمده برای بار کمانش ورق براساس تعداد جملات مورد استفاده در رابطه (30)، در جدول 1 بار کمانش یک ورق مربعی برای چند نوع بارگذاری و به‌ازای مقادیر مختلف n محاسبه و با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شده است. در این جدول درصد خطا برای حالت $n = 5$ نسبت به مقدار عددی، در ستون آخر آورده شده است. مشاهده می‌شود که به‌ازای $n = 5$ همگرایی قابل قبولی به‌دست آمده است. مشخصات ورق مورد استفاده به صورت زیر است:

$E = 200$ GPa , $\nu = 0.3$, $h = 2.5$ mm , $a = 100$ mm

که در آن E مدول الاستیک، ν ضریب پواسون، h ضخامت و a طول ورق است.

5-3- تئوری تنش برشی مرتبه اول

براساس این تئوری، خطوط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل الزاماً عمود نخواهند بود و برای محاسبه بار کمانش، باید از حل همزمان معادلات (11- ج) تا (11- ه) استفاده کرد. برای یک ورق با شرایط مرزی ساده، میدان جابه‌جایی را می‌توان به شکل روابط (37) درنظر گرفت:

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\cos\left(\frac{m\pi(x - a/2)}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y - b/2)}{b}\right)$$
$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}\sin\left(\frac{m\pi(x - a/2)}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi(y - b/2)}{b}\right)$$
$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}\sin\left(\frac{m\pi(x - a/2)}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y - b/2)}{b}\right) \qquad (37)$$

اکنون با استفاده از میدان جابه‌جایی (37) و با استفاده از روش گالرکین، مقدار بارکمانش ورق قابل محاسبه است. در جدول 2 مقادیر بار کمانش به‌دست آمده به کمک روش گالرکین و براساس تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با درنظر گرفتن $n = 5$ ، با نتایج عددی مقایسه شده‌اند. در این جدول بار کمانش برای نسبت عرض به ضخامت (b/h) مختلف و همچنین نسبت ظاهری (a/b) مختلف، ارائه و به‌صورت $\bar{N} = N_{cr}b^2/D$ بی‌بعد شده است که در آن b عرض ورق بوده و $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ صلبیت خمشی ورق است. همچنین برای نسبت ضخامت $b/h = 10$، خطای نسبی بین تئوری کلاسیک و تئوری تنش برشی مرتبه اول و نیز بین تئوری تنش برشی مرتبه اول و روش اجزای محدود برحسب درصد نشان داده شده است. برای مقایسه نتایج، بار معادل استاتیکی برای همه حالت‌های بارگذاری (مقدار انتگرال $\int_{-b/2}^{b/2} F(y)dy$) یکسان درنظر گرفته شده است.

با توجه به جدول 2، بار کمانش به‌دست آمده براساس تئوری کلاسیک برای تمامی حالت‌های بارگذاری، بزرگ‌تر از مقدار این بار براساس تئوری تنش برشی مرتبه اول است و همچنین برای تمامی حالت‌های بارگذاری، با

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.5.8]

افزایش ضخامت ورق، دقت تئوری کلاسیک به‌خصوص برای نسبت‌های ظاهری کوچک کاهش یافته و اختلاف بار کمانش به‌دست آمده براساس آن با مقادیر عددی و تئوری تنش برشی افزایش می‌یابد. با توجه به داده‌های به‌دست آمده، با افزایش ضخامت ورق، بار کمانش بی‌بعد شده کاهش پیدا می‌کند، اما با توجه به این‌که بار کمانش برحسب صلبیت خمشی ورق بی‌بعد شده است، بار کمانش با افزایش ضخامت افزایش می‌یابد.

جدول 1 بار کمانش یک ورق مربعی برای مقادیر مختلف n و برای بارگذاری‌های مختلف براساس تئوری کلاسیک و مقایسه آن با مقادیر عددی (MPa)

بارگذاری	n: 1	2	3	4	5	آباکوس	خطای نسبی(درصد)
یکنواخت	869/048	869/048	869/048	869/048	869/048	869/048	0/28
سهمی شکل	2607/144	3528/397	3587/366	3640/551	3642/213	3642/000	0/50
کسینوسی	1365/097	1194/141	1188/602	1183/972	1183/832	1173/421	0/89
مثلثی	1738/096	1480/409	1480/409	1471/538	1471/538	1450/853	1/43

جدول 2 مقایسه بار کمانش بی‌بعد شده یک ورق با نسبت ظاهری و ضخامت مختلف براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با تئوری کلاسیک و حل عددی

بارگذاری	b/h	نوع حل	a/b: 0/5	1	1/5	2	3
یکنواخت	40	تئوری کلاسیک	57/381	30/368	27/591	28/039	27/661
		تئوری تنش برشی مرتبه اول	56/880	30/261	27/591	27/977	27/591
		آباکوس	56/994	30/282	27/609	27/996	27/609
	20	تئوری تنش برشی مرتبه اول	55/428	29/946	27/382	27/794	27/382
		آباکوس	55/535	29/966	27/400	27/813	27/400
	10	تئوری تنش برشی مرتبه اول	50/291	28/747	26/576	27/084	26/578
		آباکوس	50/379	28/765	26/596	27/102	26/596
	10	خطای نسبی(تئوری کلاسیک و تنش برشی مرتبه اول)	14/10	5/64	3/81	3/53	3/07
		خطای نسبی(تئوری تنش برشی مرتبه اول و آباکوس)	0/18	0/07	0/07	0/07	0/07
سهمی شکل	40	تئوری کلاسیک	107/709	42/424	31/040	30/075	29/950
		تئوری تنش برشی مرتبه اول	106/595	42/275	31/040	30/009	29/891
		آباکوس	105/334	42/212	32/042	30/066	29/262
	20	تئوری تنش برشی مرتبه اول	103/377	41/835	30/805	29/813	29/717
		آباکوس	101/949	41/745	31/779	29/851	29/025
	10	تئوری تنش برشی مرتبه اول	88/932	40/160	29/901	29/051	29/040
		آباکوس	90/090	39/961	30/758	29/016	28/114
	10	خطای نسبی(تئوری کلاسیک و تنش برشی مرتبه اول)	21/11	5/64	3/81	3/53	3/13
		خطای نسبی(تئوری تنش برشی مرتبه اول و آباکوس)	1/29	0/50	2/79	0/12	3/29
کسینوسی	40	تئوری کلاسیک	44/547	26/271	26/021	27/034	27/077
		تئوری تنش برشی مرتبه اول	44/263	26/243	25/239	27/040	27/055
		آباکوس	44/161	26/104	25/363	26/528	26/288
	20	تئوری تنش برشی مرتبه اول	43/126	25/969	24/875	26/863	26/794
		آباکوس	43/021	25/830	25/173	26/348	26/083
	10	تئوری تنش برشی مرتبه اول	39/106	23/930	23/520	26/177	25/787
		آباکوس	38/994	24/788	24/419	25/644	25/289
	10	خطای نسبی(تئوری کلاسیک و تنش برشی مرتبه اول)	14/19	5/64	10/91	3/53	5/26
		خطای نسبی(تئوری تنش برشی مرتبه اول و آباکوس)	0/29	0/57	3/68	2/08	1/97
مثلثی	40	تئوری کلاسیک	39/706	25/711	26/155	27/205	24/721
		تئوری تنش برشی مرتبه اول	40/967	25/620	26/088	27/145	24/659
		آباکوس	41/994	25/349	24/917	26/192	25/976
	20	تئوری تنش برشی مرتبه اول	39/911	25/353	25/891	26/968	24/472
		آباکوس	40/902	25/083	24/725	26/009	25/769
	10	تئوری تنش برشی مرتبه اول	36/179	24/338	25/131	26/279	23/754
		آباکوس	37/049	24/069	23/977	25/302	24/970
	10	خطای نسبی(تئوری کلاسیک و تنش برشی مرتبه اول)	9/75	5/64	4/07	3/53	4/07
		خطای نسبی(تئوری تنش برشی مرتبه اول و آباکوس)	2/35	1/12	4/81	3/86	4/87

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.13.5.8]

تأثیر نسبت ظاهری ورق بر بار کمانش وابسته به نوع بارگذاری است و برای بارگذاری سهمی شکل، با افزایش این نسبت، بار کمانش همواره کاهش می‌یابد، برای حالت‌های دیگر بارگذاری، افزایش نسبت ظاهری می‌تواند منجر به کاهش یا افزایش بار کمانش شود، در عین حال یک ورق با نسبت ظاهری a/b = 0.5 همواره دارای بیشترین بار کمانش است.

بار کمانش ورق تا حد زیادی وابسته به نوع بارگذاری در لبه‌هاست و برای بارگذاری‌های مختلف با معادل استاتیکی یکسان، بیشترین مقادیر بار کمانش مربوط به بارگذاری سهمی شکل بوده و پس از آن بارگذاری یکنواخت دارای بیشترین بار کمانش است. در بین بارگذاری کسینوسی و مثلثی شکل نیز در حالت بارگذاری کسینوسی بار کمانش بیشتر است، البته برای نسبت‌های ظاهری a/b = 1.5,2، بار کمانش در بارگذاری مثلثی تا حدی بیشتر از بارگذاری کسینوسی است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش ورق‌های مستطیلی با بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای محاسبه بار کمانش، نخست لازم است معادلات تعادل حل شوند. این معادلات به صورت دو معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی وکوپل به‌هم است که حل آن‌ها با استفاده از تئوری معادلات دیفرانسیل انجام شده است. حل ارائه شده از دقت خوبی برخوردار بوده و قادر به ارضای شرایط مرزی مساله است. پس از به‌دست آوردن میدان جابه‌جایی و میدان تنش داخل صفحه‌ای، با حل معادلات پایداری، مقادیر بار کمانش محاسبه گردید. این معادلات از نوع معادلات با ضرایب متغیر بوده که این ضرایب متغیر، مولفه‌های میدان تنش به‌دست آمده از حل معادلات تعادل است.

حل معادلات پایداری براساس دو تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش گالرکین انجام شده است و مقادیر به‌دست آمده برای بار کمانش برای یک ورق با نسبت‌های ظاهری و ضخامت‌های مختلف، با یکدیگر مقایسه و نتایج زیر حاصل شده است:

1- بار کمانش بدست آمده با استفاده از تئوری کلاسیک همواره بیشتر از مقدار آن براساس تئوری تنش برشی مرتبه اول است.

2- با توجه به این‌که در تئوری کلاسیک، اثر تنش برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته نمی‌شود، بارکمانش بی‌بعد شده مستقل از نسبت عرض به ضخامت ورق بوده و با افزایش ضخامت ورق، دقت این تئوری به‌خصوص در نسبت‌های ظاهری کوچک، نسبت به تئوری تنش برشی مرتبه اول کاهش می‌یابد.

3- برای بارگذاری سهمی شکل، با افزایش نسبت ظاهری ورق، مقاومت آن در مقابل کمانش کاهش می‌یابد، درحالی که برای حالت‌های دیگر بارگذاری، افزایش این نسبت می‌تواند بارکمانش را کاهش و یا افزایش دهد.

4- بار کمانش ورق تا حد زیادی وابسته به نوع بارگذاری است به‌طوری‌که برای بارگذاری با معادل استاتیکی یکسان، یک ورق با بارگذاری سهمی شکل دارای بیشترین بار کمانش بوده و پس از آن بیشترین بار کمانش مربوط به بارگذاری یکنواخت است.

5- مقاومت یک ورق با بارگذاری کسینوسی در مقابل کمانش، بیشتر از مقاومت آن در حالت بارگذاری مثلثی است، البته برای نسبت‌های ظاهری a/b = 1.5,2، بار کمانش در بارگذاری مثلثی تا حدی بیشتر از بارگذاری کسینوسی است.

7- مراجع

[1] P. Jana, K. Bhaskar, Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions, *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, pp. 507-516, 2006.

[2] P. Jana, K. Bhaskar, Analytical solutions for buckling of rectangular plates under non-uniform biaxial compression or uniaxial compression with in-plane lateral restraint, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 1104-1112, 2007.

[3] S. Kumar Panda, L. S. Ramachandra, Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform inplane loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 6, pp. 819-828, 2010.

[4] A. Keshmiri, A. Ghaheri, F. Taheri-behrooz, Buckling and vibration of symmetrically-laminated composite elliptical plates resting on winkler-type foundation subjected to initial in-plane stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 19-26, 1393. (In Persian)

[5] J. Bharat Kalyan, K. Bhaskar, An analytical parametric study on buckling of non-uniformly compressed orthotropic rectangular plates, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 1, pp. 10-18, 2008.

[6] J. H. Kang, A. W. Leissa, Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No. 14, pp. 4220-4238, 2005.

[7] A. W. Leissa, J.-H. Kang, Exact solutions for vibration and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, 2002.

[8] S. A. Atashipoor, A. Saeidi, Analysis of non-uniform normal loading on two parallel edges with simply supported boundary conditions on lateral vibration and buckling of rectangular plates, *in The 14th Annual Conference of Mechanical Engineering*, Isfahan, Iran, 2006. (In Persian)

[9] C. W. Bert, K. K. Devarakonda, Buckling of rectangular plates subjected to nonlinearly distributed in-plane loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 16, pp. 4097-4106, 2003.

[10] X. Wang, L. Gan, Y. Zhang, Differential quadrature analysis of the buckling of thin rectangular plates with cosine-distributed compressive loads on two opposite sides, *Advances in Engineering Software*, Vol. 39, No. 6, pp. 497-504, 2008.

[11] X. Wang, X. Wang, X. Shi, Differential quadrature buckling analyses of rectangular plates subjected to non-uniform distributed in-plane loadings, *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, No. 8, pp. 837-843, 2006.

[12] X. Wang, X. Wang, X. Shi, Accurate buckling loads of thin rectangular plates under parabolic edge compressions by the differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, No. 4, pp. 447-453, 2007.

[13] A. A. Jafari, S. A. Eftekhari, An efficient mixed methodology for free vibration and buckling analysis of orthotropic rectangular plates, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, No. 6, pp. 2670-2692, 2011.

[14] M. Fattahi, F. Farhatnia, M. Darvizeh, Buckling analysis of orthotropic and anisotropic rectangular plates by GDQ method, *Journal of solid mechanics in engineering*, Vol. 1, No. 1, pp. 23-33, 2008. (In Persian)

[15] A. Farajpour, A. R. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1605-1615, 2012.

[16] M. Bodaghi, A. R. Saidi, Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 6, pp. 765-780, 2010.

[17] X. L. Chen, K. M. Liew, Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads, *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, No. 6, pp. 1430-1437, 2004.

[18] M. Shariyat, K. Asemi, 3D B-spline finite element nonlinear elasticity buckling analysis of rectangular FGM plates under non-uniform edge loads, using a micromechanical model, *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 397-408, 2014.

[19] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press, 2003.

[20] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, India: Elsevier, 2005.

[21] D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of bars, plates, and shells*: McGraw-Hill New York, 1975.

[22] K. M. Abadir, J. R. Magnus, Matrix Algebra: *Cambridge University Press*, 2005