



ارتعاشات چرخدنده‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیرمتقارن سیاره‌ها

علی شهابی^۱، فرهاد شیخ سامانی^{۲*}

۱- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهمن کرمان، کرمان

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهمن کرمان، کرمان

* کرمان، ۷۶۱۶۹-۱۳۳ farhad.samani@uk.ac.ir

چکیده

موقعیت قرارگیری غیریکسان نسبت به یکسان نسبت به یکدیگر می‌باشد. پژوهش حاضر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر بررسی می‌کند. سیستم دینامیکی مجموعه چرخدنده سیاره‌ای این پژوهش به صورت مجموعه‌ای از جرم و فتر مدل‌سازی شده است. هر یک از اجزاء شامل چرخدنده خورشیدی، حمل کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها دارای سه درجه آزادی هستند که به صورت اجسام صلب مدل شده‌اند. سختی یاتاقان‌ها و سختی ناشی از تعییر شکل دنده چرخدنده‌ها به صورت فترهای خطی شبیه‌سازی شده‌اند. به طور کلی، سیستم‌های سیاره‌ای دارای پنج مد ارتعاشی سیاره‌ای، دورانی، انتقالی، متمازی و غیر مقید می‌باشند. بر اساس نتایج، مد انتقالی در سیستم‌ها با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، متفاوت می‌باشد. بر اساس نتایج، مد انتقالی در سیستم‌ها با موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های مشابهی می‌باشند. به خوبیکه برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیریکسان و مدهای دورانی و سیاره‌ای برای هر دو سیستم دارای ویژگی‌های مشابهی می‌باشند. فرد شدن تعداد یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی دارای گوناگونی بک می‌باشند. با فرد شدن تعداد سیاره‌ها و غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، مدهای ارتعاشی دورانی و سیاره‌ای در سیستم به وجود می‌آیند و فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. برای مدهای متمازی و غیر مقید موجود در سیستم با موقعیت قرارگیری غیریکسان سیاره‌ها فقط دارای حرکت دورانی می‌باشند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۸ شهریور ۱۳۹۵

پذیرش: ۱۰ آبان ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۲۱ اذر ۱۳۹۵

کلید واژگان:

چرخدنده سیاره‌ای

فرکانس طبیعی

مد ارتعاشی

موقعیت قرارگیری غیر متقارن سیاره‌ها

Vibrations of the Planetary Gear Sets with Unequally Spaced Planets

Ali Shahabi, Farhad Sheykh Samani*

Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

* P.O.B. 76169-133, Kerman, Iran, farhad.samani@uk.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 08 September 2016

Accepted 31 October 2016

Available Online 11 December 2016

Keywords:

Planetary Gear

Natural Frequency

Vibration Mode

Unequally Spaced Planets

ABSTRACT

The position of the planets for the planetary gear systems are in two forms of equally and unequally spaced. This paper investigates free vibration of the planetary gear with unequally spaced planets. The planetary gear set of this study is modeled as a set of lumped masses and springs. Each component such as sun gear, carrier, ring gear and planets possesses three degrees of freedom and is considered as rigid body. Bearing and mesh stiffness are modeled in the form of linear springs. Generally, planet, rotational, translational, distinct and degenerate modes are five vibration modes of the planetary gear systems. The results show that the translational mode for the system with numbers of even equally and unequally spaced planets, is different and rotational and translational modes have the same characteristics for both systems. For the system with numbers of even unequally spaced planets, the natural frequencies of the translational modes have a multiplicity one. When the numbers of the planets of the system are odd and the position of them is unequally spaced, the rotational and planet modes are generated and the natural frequencies of the translational modes do not appear. For the distinct and degenerate modes of the system with unequally spaced planets, the planets only have the rotational motion.

۱- مقدمه

می‌تواند نسبت به یکدیگر نیز یکسان نباشد.^۲ به دلیل بازدهی نسبتاً بالا، کاهش سرعت‌های زیاد در حجم‌های محدود، انتقال قدرت بالا و حرکت‌های ترکیبی چندگانه، موارد استفاده از گیربکس‌های سیاره‌ای در فضای‌پیماها، خودروها، توربین‌های بادی و سایر سیستم‌های انتقال در حال افزایش است. در طراحی چرخدنده‌های سیاره‌ای سختی بین چرخدنده‌ها^۳، سختی

چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای دارای یک چرخدنده خورشیدی، یک بازو یا حمل کننده سیاره‌ها، یک چرخدنده رینگ و چند (عموماً سه) سیاره می‌باشد. سیاره‌ها در سیستم‌های سیاره‌ای عموماً دارای موقعیت قرارگیری یکسانی نسبت به یکدیگر می‌باشند.^۱ همچنین موقعیت قرارگیری سیاره‌ها

² Unequally Spaced Planets

³ Mesh Stiffnesses

¹ Equally Spaced Planets

متمازی^۵ و غیر مقید^۶ برای مدل‌های دورانی با تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز معرفی می‌گردد.

2- مدل‌سازی سیستم چرخدنده‌ای

شکل 1، مدل دو بعدی و مختصات استفاده شده در چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را نشان می‌دهد. چرخدنده خورشیدی، حمل کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها به صورت صلب فرض شده‌اند. هر کدام از این اجزاء دارای سه درجه آزادی (دو درجه آزادی حرکت انتقالی و یک درجه آزادی حرکت دورانی) هستند، لذا تمام مجموعه سیاره‌ای نیز دارای $(3 + N)$ مختصات دورانی است. درجه آزادی خواهد بود که N عدد کل سیاره‌ها را نشان می‌دهد. سختی انتقالی و سختی دورانی یاتاقان‌ها به صورت فنرهای خطی در جهت‌های انتقالی x و y مختصات انتقالی چرخدنده خورشیدی (c)، حمل کننده رینگ (r) با x_c و y_c نمایش داده می‌شوند که $s, c, r = s, c, r, 1, \dots, N$ است و از N متغیر است. مختصات دورانی اجزاء سیستم به صورت گرفته می‌شود که از مرکز سیاره m بیان می‌شوند که $r_j \theta_j$ زاویه دوران هر جزء است و برای چرخدنده خورشیدی، چرخدنده رینگ و سیاره‌ها ۲ ساعع مبنا این چرخدنده‌ها است. ۲ برای حمل کننده سیاره‌ها، ساعع دایره‌ای در نظر گرفته شده در راستای خط عمل قرار گرفته‌اند. در شکل 1، مدل دینامیکی چرخدنده سیاره m را نشان می‌دهد که مقدارش بستگی به چرخش بردار پکه $\dot{\theta}$ دارد، به گونه‌ای که $0 = \psi$.

شکل 2 مدل دینامیکی چرخدنده خورشیدی و چرخدنده رینگ با سیاره m که توسط فنرهای خطی مدل شده‌اند را نمایش می‌دهد. همچنین فنرهای مدل شده در راستای خط عمل قرار گرفته‌اند. در شکل 2، زاویه فشار، خطای انتقال استاتیک و سختی بین چرخدنده خورشیدی و سیاره m و همچنین زاویه فشار، خطای انتقال استاتیک و سختی بین چرخدنده رینگ و سیاره m به ترتیب با $\alpha_s, e_{sn}, \alpha_r, k_{sn}$ نشان داده شده‌اند. در مدل دینامیکی چرخدنده خورشیدی و

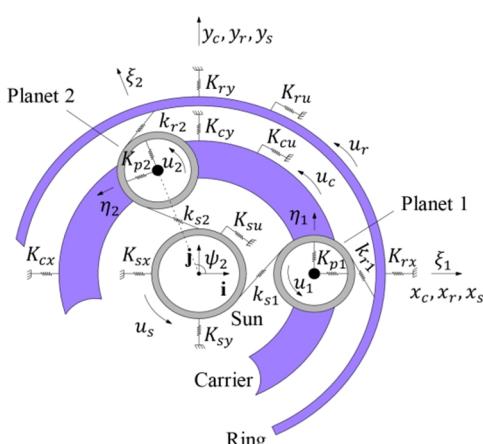


Fig. 1 Lumped parameter 2D model of the single-stage spur planetary gear and system coordinates

شکل 1 مدل دو بعدی چرخدنده سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای و مختصات سیستم

⁵ Distinct Mode
⁶ Degenerate Mode

یاتاقان‌ها¹، جرم و ممان اینترسی از جمله عوامل تاثیرگذار به شمار می‌آیند. کهرمان [2,1] پژوهش‌هایی در زمینه‌های گوناگون چرخدنده سیاره‌ای از جمله بررسی فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس انجام و با ارائه فرمول‌های تئوری سعی در بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی چرخدنده سیاره‌ای در حالت دورانی محض داشت [3]. لین و پارکر [4] به بررسی معادلات حرکت، فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم‌های سیاره‌ای پرداختند. لین و پارکر همچنین تأثیر پارامترهای مهم مد نظر در طراحی سیستم‌های سیاره‌ای را بر فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی پژوهش کردند [5]. پارکر و همکاران دینامیک غیر خطی یک جفت چرخدنده سیاره‌ای در مدل دورانی ساده را بررسی کردند [6]. تحقیق و بررسی ویژگی‌های ارتعاش سیستم‌های سیاره‌ای مرکب دورانی توسط کهرمان انجام شد [7]. ژرامیتیشویسکی و ترازووسکی متغیر بودن سختی بین چرخدنده‌های موجود در سیستم سیاره‌ای را در مدل خود لحاظ کردند [8]. کهرمان و همکاران تأثیر انعطاف پذیری اعضای چرخدنده سیاره‌ای را بر رفتار دینامیکی سیستم پژوهش کردند [9]. بررسی عوامل غیر خطی کننده دینامیک سیستم سیاره‌ای توسط سان و ها انجام شد [10]. صادقی و خسروی [11] به بررسی پارامترها و متغیرهای مختلف فرایند طراحی پارامتری چرخدنده‌های ساده برای مدل‌سازی پرداختند. هوانگ و همکاران دینامیک چرخدنده سیاره‌ای تک مرحله‌ای را با کمک روش المان محدود تحقیق کردند [12]. کیم و همکاران [13] دینامیک غیر خطی چرخدنده سیاره‌ای را در نظر گرفتن زاویه‌های فشار و ضربیت تماش با زمان بررسی کردند. نفی و همکاران [14] یک سیستم کنترل فعال ارتعاشات چرخدنده-یاتاقان را پیشنهاد دادند و سعی در به حداقل رساندن اثرات نامطلوب اختشاشات و پارامترهای طراحی ناخواسته به ارتعاشات سیستم داشتند. سان و همکاران [15] ارتعاشات سیستم سیاره‌ای چند مرحله‌ای را پژوهش کردند. بررسی دینامیک غیر خطی و همکاران بهینه‌سازی عملکرد سیستم سیاره‌ای تک مرحله‌ای توسط شاکری و همکاران انجام شد [16]. نفی و فرشیدیان فر [17] به بررسی کنترل و حذف رفقار آشوبی از طریق آنالیز تحلیلی ملتفیک پرداختند. لی و همکاران [18] با مدل‌سازی غیر خطی سیستم سیاره‌ای، تأثیر ترک و شکاف‌های موجود در حمل کننده سیاره را بر روی رفتار دینامیکی چرخدنده سیاره‌ای تحقیق و پژوهش کردند. بررسی رفتار دینامیکی سیستم چرخدنده موجود در یک توربین بادی را بیانوی و همکاران انجام دادند [19]. ژیانگ و همکاران دینامیک غیر خطی یک جفت چرخدنده ساده را با در نظر گرفتن متغیر بودن سختی بین چرخدنده‌ها با زمان پژوهش کردند [20]. شهابی و شیخ‌سامانی نیز انواع مدهای ارتعاشی موجود در سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای را بررسی و آنها را به پنج نوع مد مختلف تقسیم‌بندی کردند [21].

در بررسی فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم‌های سیاره‌ای مطابق پژوهش‌هایی که تاکنون صورت گرفته است، موقعیت قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر متقارن در نظر گرفته شده است. در پژوهش حاضر به بررسی کامل ویژگی‌های فرکانس‌های طبیعی و سه مد ارتعاشی دورانی²، انتقالی³ و سیاره‌ای⁴ موجود در سیستم سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با در نظر گرفتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر (سیستم نامتقارن) پرداخته می‌شود. در این پژوهش همچنین علاوه بر سه مد ارتعاشی ذکر شده، دو مد ارتعاشی

¹ Bearing Stiffnesses

² Rotational Mode

³ Translational Mode

⁴ Planet Mode

$$m_r \ddot{y}_r + \sum_{n=1}^N \{k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \cos \psi_{rn}\} + K_{ry} y_r = 0 \quad (8)$$

$$\frac{I_r}{r_r^2} \ddot{u}_r + \sum_{n=1}^N \{k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}]\} + K_{ru} u_r = \frac{T_r}{r_r} \quad (9)$$

چرخدنده خورشیدی:

$$m_s \ddot{x}_s - \sum_{n=1}^N \{k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] \sin \psi_{sn}\} + K_{sx} x_s = 0 \quad (10)$$

$$m_s \ddot{y}_s + \sum_{n=1}^N \{k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] \cos \psi_{sn}\} + K_{sy} y_s = 0 \quad (11)$$

$$\frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{n=1}^N \{k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}]\} + K_{su} u_s = \frac{T_s}{r_s} \quad (12)$$

که m_I و m_m ممان اینرسی و جرم یاتاقان‌ها را نمایش می‌دهند. همچنین $\psi_{rn} = \psi_n + \alpha_r$ و $\psi_{sn} = \psi_n - \alpha_s$ نیز گشتاور اعمالی به شفت‌های ورودی و خروجی سیستم سیاره‌ای را نمایش می‌دهد. معادله حرکت چرخدنده سیاره‌ای با N سیاره به فرم ماتریسی زیر نمایش داده می‌شود:

$$M\ddot{q}(t) + [K_m(t) + K_b]q(t) = T(t) + F(t) \quad (13)$$

در معادله (13) K_b و K_m به ترتیب بیانگر ماتریس قطری اینرسی، بردار مختصات عمومی، ماتریس متقارن سختی بین چرخدنده‌ها و ماتریس قطری سختی یاتاقان‌ها هستند. $T(t)$ و $F(t)$ نیز بردار گشتاور و بردار نیروی خارجی اعمال شده به سیستم سیاره‌ای را نشان می‌دهند. چرخدنده‌های سیاره‌ای در حالت کلی توسط دو مدل دورانی یا دورانی-انتقالی شبیه‌سازی می‌شوند. در مدل‌های دورانی، از درجه آزادی اجزای سیستم‌ها در راستاهای انتقالی صرف‌نظر می‌شود. در مدل‌های دورانی-انتقالی، درجه آزادی تمام اجزای سیستم‌ها در راستاهای دورانی و انتقالی سیستم می‌گردد. اساس کار سیستم‌های سیاره‌ای بهنحوی است که از بین چرخدنده‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها، ورودی و خروجی سیستم تعیین می‌گردد. در این پژوهش چرخدنده خورشیدی، حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخدنده رینگ به ترتیب به عنوان توان ورودی، توان خروجی و ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

3- فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی

به منظور بررسی ارتعاش آزاد چرخدنده سیاره‌ای، ترمومات (t) و $F(t)$ از معادله (13) حذف می‌شوند و معادله (13) و مساله مقدار ویژه آن به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$M\ddot{q} + (K_b + K_m)q = 0 \quad (14)$$

$$[-\omega_i^2 M + (K_b + K_m)]\varphi_i = 0 \quad (15)$$

در ابطه (15) $\omega_i, i = 1, \dots, 3(3+N)$. بیانگر فرکانس‌های طبیعی است و $\varphi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_N]^T$ فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد بهنحویکه $P_j = [x_j, y_j, u_j]^T, j = c, r, s$ با $P_n = [\xi_n, \eta_n, u_n]^T, n = 1, \dots, N$ و رابطه مربوط به هر یاتاقان سیستم سیاره‌ای می‌رسیم [4]:

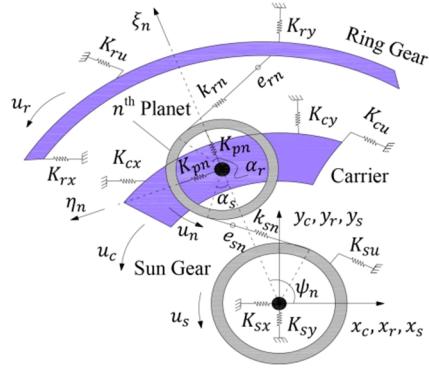


Fig. 2 Mesh of the n^{th} planet, ring and sun gears

شکل 2 شبکه‌بندی سیاره n ام، چرخدنده‌های رینگ و خورشیدی

چرخدنده رینگ با سیاره n ام (شکل 2) به ترتیب سختی‌های انتقالی یاتاقان‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها در جهت‌های انتقالی x و y هستند. همچنین، سختی دورانی یاتاقان‌های خورشیدی، رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها در جهت دورانی u ترتیب با K_{cy}, K_{cx} و K_{ry}, K_{sx} مشخص شده‌اند. سختی انتقالی یاتاقان سیاره n ام در جهت‌های x و y نیز با K_{pn} نمایش داده شده است. معادلات حرکت سیاره n ام بدون در نظر گرفتن میرایی در جهت‌های ξ , η و ψ ، مطابق زیر خواهد بود:

$$m_n \ddot{\xi}_n - k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] \sin \alpha_s + k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \times \sin \alpha_r - K_{pn}[\sin \psi_n y_c + \cos \psi_n x_c - \xi_n] = 0 \quad (1)$$

$$m_n \ddot{\eta}_n - k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] \cos \alpha_s - k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \times \cos \alpha_r - K_{pn}[\cos \psi_n y_c - \sin \psi_n x_c - \eta_n + u_c] = 0 \quad (2)$$

$$I_n \ddot{r}_n^2 \ddot{u}_n + k_{sn}[\cos \psi_{sn} y_s - \sin \psi_{sn} x_s - \sin \alpha_s \xi_n - \cos \alpha_s \eta_n + u_s + u_n + e_{sn}] - k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] = 0 \quad (3)$$

به طور مشابه معادلات حرکت حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و حمل‌کننده سیاره‌ها:

$$m_c \ddot{x}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} \{[\sin \psi_n y_c + \cos \psi_n x_c - \xi_n] \cos \psi_n - [\cos \psi_n y_c - \sin \psi_n x_c - \eta_n + u_c] \sin \psi_n\} + K_{cx} x_c = 0 \quad (4)$$

$$m_c \ddot{y}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} \{[\sin \psi_n y_c + \cos \psi_n x_c - \xi_n] \sin \psi_n - [\cos \psi_n y_c - \sin \psi_n x_c - \eta_n + u_c] \cos \psi_n\} + K_{cy} y_c = 0 \quad (5)$$

$$I_c \ddot{r}_c^2 \ddot{u}_c + \sum_{n=1}^N K_{pn} [\cos \psi_n y_c - \sin \psi_n x_c - \eta_n + u_c] + K_{cu} u_c = \frac{T_c}{r_c} \quad (6)$$

چرخدنده رینگ:

$$m_r \ddot{x}_r - \sum_{n=1}^N \{k_{rn}[\cos \psi_{rn} y_r - \sin \psi_{rn} x_r + \sin \alpha_r \xi_n - \cos \alpha_r \eta_n + u_r - u_n + e_{rn}] \sin \psi_{rn}\} + K_{rx} x_r = 0 \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$K_{pp}^n - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_n & 0 & 0 \\ 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_n}{r_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \xi_1 \\ w_n \eta_1 \\ w_n u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

که S بیانگر سینوس زاویه‌های مربوطه می‌باشد. به عنوان نمونه برای سیستم با تعداد سیاره‌های زوج با موقعیت‌های قرارگیری غیر یکسان (صفرا، 180° و 260° درجه) نسبت به یکدیگر، روابط (24-22) همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مطابق زیر ساده می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^N w_n S\psi_n = 0, \quad \sum_{n=1}^N w_n = 0, \quad \sum_{n=1}^N w_n \frac{s2\psi_n}{2s\psi_n} = 0 \quad (26)$$

با توجه به مستقل بودن رابطه (25) از زاویه قرارگیری سیاره‌ها (ψ) و بر اساس روابط (26)، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد زوج و فرد سیاره‌ها همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد زوج و فرد سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، مدد ارتعاشی سیاره‌ای برای هر دو سیستم یکسان می‌باشد. لذا برای هر یک از سه مساله مقدار ویژه موجود در رابطه (25) یعنی بردار مدد سیاره‌ای موجود در رابطه (21) بدست می‌آید.

2-3 مد دورانی

مد دورانی سیستم‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [4]:

1- اگر M گوناگونی فرکانس‌های طبیعی سیستم سیاره‌ای را نشان دهد، فرکانس‌های طبیعی متناظر با این مدد فقط یک بار ظاهر می‌شوند ($M = 1$). به عبارت دیگر این فرکانس‌ها متمایز هستند و دارای تکرار نمی‌باشند.

2- در این مدد جایجایی حمل‌کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و چرخدنده خورشیدی در جهت‌های انتقالی x و y به سمت صفر میل می‌کند:

$$P_j = [0, 0, u_j]^T, j = c, r, s \quad (27)$$

3- همچنین در این مدد تمامی سیاره‌ها نیز به یک شکل حرکت می‌کنند:

$$P_1 = P_2 = \dots = P_N = [\xi_1, \eta_1, u_1]^T \quad (28)$$

بنابراین بردار مدد دورانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_1]^T, P_n = P_1 \quad (29)$$

موقعیت قرارگیری سیاره‌های مورد بحث این پژوهش برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد با فرض $\psi_1 = 0$ ، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\psi_1 = 0, \psi_{n+N/2} = \psi_n + \pi \rightarrow \sum_{n=1}^N S\psi_n = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\psi_1 = 0, \sum_{n=1}^N S\psi_n = 0 \quad (\text{ب})$$

با جایگذاری روابط (27) و (28) در رابطه (16) و بر اساس روابط (30)، روابط (16) به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\left(K_{cb} + \sum_{n=1}^N K_{c1}^n - \omega_i^2 M_c \right) P_c + \sum_{n=1}^N K_{c2}^n P_n = 0 \quad (16)$$

$$\left(K_{rb} + \sum_{n=1}^N K_{r1}^n - \omega_i^2 M_r \right) P_r + \sum_{n=1}^N K_{r2}^n P_n = 0 \quad (17)$$

$$\left(K_{sb} + \sum_{n=1}^N K_{s1}^n - \omega_i^2 M_s \right) P_s + \sum_{n=1}^N K_{s2}^n P_n = 0 \quad (18)$$

$$(K_{c2}^n)^T P_c - (K_{r2}^n)^T P_r + (K_{s2}^n)^T P_s + (K_{pp}^n - \omega_i^2 M_p) P_n = 0 \quad (19)$$

به طور کلی در سیستم‌های سیاره‌ای پنج مدد ارتعاشی دورانی، انتقالی، سیاره‌ای، متمایز و غیر مقید ظاهر می‌شوند. در بخش‌های آتی ویژگی‌های این مدهای ارتعاشی بررسی می‌شوند.

1-3 مد سیاره‌ای

برای سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و

فرد نسبت به یکدیگر، مدد سیاره‌ای دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [4]:

- 1- این نوع مدد زمانی ظاهر می‌شود که تعداد کل سیاره‌ها بیشتر از سه عدد باشند ($N > 3$).

2- سه فرکانس طبیعی متناظر با این مدد، $3 - N$ بار تکرار می‌شوند.

- 3- در این مدد به جز سیاره‌ها سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی ندارند. بنابراین:

$$P_j = [0, 0, 0]^T, j = c, r, s \quad (20)$$

لذا بردار مدد سیاره‌ای به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_i = [0, 0, 0, P_1, P_1, \dots, w_N P_1]^T, P_n = w_n P_1 \quad (21)$$

در رابطه (21)، w_n یک ضریب اسکالار می‌باشد (به عنوان مثال $w_1 = 1$). لذا می‌توان گفت که در مدد سیاره‌ای با وارد شدن یک ضریب اسکالار در شکل حرکت سیاره اول، به شکل حرکت سیاره n می‌رسیم. با توجه به ماتریس سختی K_{pn} موجود در مرجع [4]، برای سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر با جایگذاری روابط (20) و (21) در روابط (16-19)، روابط (19-16) را می‌توان به ترتیب به صورت زیر ساده کرد:

$$\sum_{n=1}^N K_{pn} \begin{bmatrix} -s2\psi_n & s\psi_n & 0 \\ 2s\psi_n & -s2\psi_n & 0 \\ -s\psi_n & 2s\psi_n & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \xi_1 \\ w_n \eta_1 \\ w_n u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^N k_{rn} \times \begin{bmatrix} -s\psi_{rn} s\alpha_r & s\psi_{rn} \frac{s2\alpha_r}{2s\alpha_r} & s\psi_{rn} \\ \frac{s2\psi_{rn}}{2s\psi_{rn}} s\alpha_r & -\frac{s2\psi_{rn} s2\alpha_r}{2s\psi_{rn} 2s\alpha_r} & -\frac{s2\psi_{rn}}{2s\psi_{rn}} \\ s\alpha_r & -\frac{s2\alpha_r}{2s\alpha_r} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \xi_1 \\ w_n \eta_1 \\ w_n u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^N k_{sn} \times \begin{bmatrix} s\psi_{sn} s\alpha_s & s\psi_{sn} \frac{s2\alpha_s}{2s\alpha_s} & -s\psi_{sn} \\ -\frac{s2\psi_{sn}}{2s\psi_{sn}} s\alpha_s & -\frac{s2\psi_{sn} s2\alpha_s}{2s\psi_{sn} 2s\alpha_s} & \frac{s2\psi_{sn}}{2s\psi_{sn}} \\ -s\alpha_s & -\frac{s2\alpha_s}{2s\alpha_s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \xi_1 \\ w_n \eta_1 \\ w_n u_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{n'} \\ \eta_{n'} \\ u_{n'} \end{bmatrix} = \frac{\varphi_i}{2s\psi_{n'}} \begin{bmatrix} \theta_1 & \mathbf{0} & \mathbf{P}_1 \\ \eta_1 & u_1 \end{bmatrix} + \sin \psi_{n'} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{\xi_1} \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix}, \quad w_N \mathbf{P}_1]^T,$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{n''} \\ \eta_{n''} \\ u_{n''} \end{bmatrix} = \frac{s2\psi_{n''}}{2s\psi_{n''}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \sin \psi_{n''} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{n'''} \\ \eta_{n'''} \\ u_{n'''} \end{bmatrix} = \frac{s2\psi_{n'''}}{2s\psi_{n'''}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \sin \psi_{n'''} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

با حذف $[\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{u}_1]^T$ و $[\xi_1, \eta_1, u_1]^T$ از روابط (34) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin(\psi_{n''} - \psi_{n'''}) \begin{bmatrix} \xi_{n'} \\ \eta_{n'} \\ u_{n'} \end{bmatrix} + \sin(\psi_{n'''} - \psi_{n'}) \begin{bmatrix} \xi_{n''} \\ \eta_{n''} \\ u_{n''} \end{bmatrix} \\ + \sin(\psi_{n'} - \psi_{n''}) \begin{bmatrix} \xi_{n'''} \\ \eta_{n'''} \\ u_{n'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n', n'', n''' = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (35)$$

جابجایی سیاره n می‌تواند به صورت ترکیب خطی از جابجایی‌های دو سیاره دلخواه بیان شود. به عنوان نمونه بر اساس جابجایی‌های سیاره‌های اول و دوم، جابجایی سیاره‌های سیستم در وضعیتی که سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر موقعیت قرارگیری غیر یکسانی داشته باشند، به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \\ u_n \end{bmatrix} = [\sin(\psi_2 - \psi_n) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \sin \psi_n \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ u_2 \end{bmatrix}] / \sin \psi_2 \quad (36)$$

مختصات ξ_n و η_n برای u_n به شش مختصه مستقل $n = 1, \dots, N$ اینکه مدهای انتقالی و دورانی در سیستم‌های سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر مستقل از هم نیستند [4]، لذا با جایگذاری روابط (36) و (32) برای $n = 1$ و $n = 2$ در رابطه (16) و با توجه به رابطه (30-الف)، رابطه (16) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cx} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cy} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cu} \end{bmatrix} \\ - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_c}{r_c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s2\psi_1}{2s\psi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s2\psi_1}{2s\psi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \sin \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

با توجه به رابطه (37)، فقط دو معادله مستقل از هم ووابسته به زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر از رابطه (16) باقی می‌مانند. به طور مشابه با جایگذاری روابط (36) و (32) در روابط (19-17) و (18) با توجه به رابطه (30-الف)، دو معادله از هر کدام از روابط (17) و (18) و شش معادله نیز از رابطه (19) باقی می‌مانند. این دوازده معادله مستقل از یکدیگر و وابسته به زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، مساله مقدار ویژه با بردار ویژه $\varphi_i = [x_c, y_c, x_r, y_r, x_s, y_s, \xi_1, \eta_1, u_1, \xi_2, \eta_2, u_2]^T$ به وجود می‌آورند. بنابراین دوازده فرکانس طبیعی متمایز (با

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cx} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cy} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=1}^N K_{pn} + K_{cu} \end{bmatrix} \\ - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_c}{r_c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum_{n=1}^N k_{pn} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

با توجه به رابطه (31)، فقط یک رابطه مستقل از زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر، از رابطه (16) باقی می‌ماند. همچنین با جایگذاری روابط (27) و (28) در روابط (19-17) و بر اساس روابط (30)، روابط (19-17) مربوط به سیستم با موقعیت غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز همانند سیستم با موقعیت یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر ساده می‌شوند. به نحویکه از هر کدام از روابط (17) و (18)، یک رابطه و از رابطه (19) سه رابطه باقی می‌مانند. بنابراین برای سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر همانند سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر، روابط (16-19) نیز به شش مساله مقدار ویژه مستقل از زاویه قرارگیری سیاره‌ها نسبت به یکدیگر کاوش پیدا می‌کنند. حل این شش مساله مقدار ویژه، شش جواب ویژه $\varphi_i = [\bar{P}_c, \bar{P}_r, \bar{P}_s, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_N]^T$ را به وجود می‌آورند. این شش جواب ویژه، شش بردار مدد دورانی φ_i را براساس روابط (29) نتیجه می‌دهند. لازم به ذکر است که در سیستم‌های سیاره‌ای اگر موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر به نحوی باشد که روابط (30) را برقرار نکند، آنگاه مدد دورانی به وجود نمی‌آید.

3-3 مد انتقالی

ویژگی‌های مد انتقالی سیستم سیاره‌ای با موقعیت یکسان تعداد سیاره‌های زوج و فرد نسبت به یکدیگر به صورت زیر می‌باشد [4]:

1- فرکانس‌های طبیعی متناظر با این مد، غیر مقید هستند و دو بار تکرار می‌شوند ($M = 2$). بنابراین دو بردار مدد ارتعاشی متناظر با هر

فرکانس طبیعی ω_i وجود دارد:

$$\bar{\varphi}_i = [\bar{P}_c, \bar{P}_r, \bar{P}_s, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_N]^T, \quad \varphi_i = [P_c, P_r, P_s, P_1, \dots, P_N]^T$$

2- حمل کننده سیاره‌ها، چرخدنده رینگ و چرخدنده خورشیدی در این مد بدون دوران هستند و فقط در راستاهای انتقالی X و Y جابجا می‌شوند:

$$\bar{P}_j = [-y_j, x_j, 0]^T, \quad P_j = [x_j, y_j, 0]^T, \quad j = c, r, s \quad (32)$$

3- جابجایی سیاره‌ها در این مد به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} P_n \\ \bar{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_n & \sin \psi_n \\ -\sin \psi_n & \cos \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \bar{P}_1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$P_n = [\xi_n, \eta_n, u_n]^T, \quad \bar{P}_n = [\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n, \bar{u}_n]^T$$

در سیستم با تعداد سیاره‌های زوج با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر، برای سه سیاره دلخواه n' و n'' رابطه (33) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

مطابق جدول 3، نه فرکانس طبیعی مشابه برای سیستم سیارهای با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیارهای نسبت به یکدیگر وجود دارند که مددار ارتعاشی متناظر با این نه فرکانس از نوع دورانی و سیارهای میباشند. بهنحویکه شش فرکانس طبیعی دارای گوناگونی یک و سه فرکانس طبیعی دارای گوناگونی 3 N به ترتیب دارای مددورانی و سیارهای میباشند. برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سیارهای نسبت به یکدیگر، شش فرکانس طبیعی غیر مقید با گوناگونی دو ظاهر میشوند که مددار ارتعاشی متناظر با این دوازده فرکانس از نوع انتقالی میباشد. با توجه به نتایج جدول 3، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری چهار سیاره نسبت به یکدیگر، دوازده فرکانس طبیعی متمایز با گوناگونی یک ظاهر میشوند که دارای مددار انتقالی میباشند و این دوازده فرکانس با دوازده فرکانس طبیعی سیستم با موقعیت یکسان سیارهای نسبت به یکدیگر متفاوت میباشند. در واقع با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد سیارهای زوج نسبت به یکدیگر، متفاوت شدن فرکانس های نتیجه میشود که مددار ارتعاشی با آن فرکانس ها از نوع انتقالی میباشد.

در شکل های 3 و 4، مدهای ارتعاشی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر آورده شده اند که خط چین ها وضعیت اولیه و خطوط توپر وضعیت نهایی را نمایش می دهند. همچنین به منظور واضح تر شدن شکل های 3 و 4، جابجایی های حمل کننده سیاره ها و چرخدنده رینگ نمایش داده نشده اند. مطابق شکل های 3 و 4، مدهای ارتعاشی دورانی (شکل های 3(a) و 4(a)) و سیارهای (شکل های 3(b) و 4(b)) برای سیستم ها با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیاره ها نسبت به یکدیگر مشابه میباشند. همچنین مدهای ارتعاشی انتقالی برای دو سیستم با موقعیت یکسان و غیر یکسان سیاره ها نسبت به یکدیگر متفاوت میباشند (شکل های 3(c)، 3(d)، 4(c) و 4(d)). همانطور که در شکل های 3(c) و 3(d) ملاحظه میشود برای سیستم با موقعیت یکسان سیاره ها نسبت به یکدیگر، فرکانس طبیعی دوم ($\omega_2 = 727 \text{ Hz}$) دارای گوناگونی دو میباشد و دو مددار انتقالی متناظر با آن متفاوت میباشند. با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری چهار سیاره نسبت به یکدیگر، فرکانس های طبیعی متناظر با مدهای ارتعاشی انتقالی متفاوت میباشند. همچنین در شکل های 4(c) و 4(d) نتیجه تغییر فرکانس های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره (21 درجه آزادی) با توجه به نتایج جدول 3 آورده شده اند. مطابق شکل 5 و جدول 3.

جدول 1 فرکانس های طبیعی این پژوهش و مرجع [4]

Table 1 Natural frequencies of this study and Ref. [4]

نوع مددار ارتعاشی	خطای (%)	مرجع [4]	این پژوهش	فرکانس طبیعی (Hz)
دورانی	0	$\omega_1 = 0$	$\omega_1 = 0$	اول
دورانی	0.04	$\omega_6 = 1536.6$	$\omega_6 = 1537.3$	ششم
سیارهای دورانی	0.04	$\omega_7 = 1808.2$	$\omega_7 = 1809$	هفتم
دورانی	0.04	$\omega_{10} = 1970.6$	$\omega_{10} = 1971.5$	دهم
دورانی	0.04	$\omega_{13} = 2625.7$	$\omega_{13} = 2626.9$	سیزدهم
سیارهای دورانی	0.04	$\omega_{14} = 5963.8$	$\omega_{14} = 5966.7$	چهاردهم
سیارهای دورانی	0.05	$\omega_{15} = 6981.7$	$\omega_{15} = 6985.2$	پانزدهم
دورانی	0.04	$\omega_{18} = 7773.6$	$\omega_{18} = 7777.4$	هجدهم
دورانی	0.05	$\omega_{21} = 13071.1$	$\omega_{21} = 13077.7$	بیست و یکم

گوناگونی یک ($M = 1$) در سیستم سیارهای ساده تک مرحله ای برای تعداد زوج سیارهای متفاوت ($N \geq 3$) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر وجود دارند. مدهای ارتعاشی متناظر با این دوازده فرکانس از نوع انتقالی میباشند که با مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان تعدا زوج سیارهای نسبت به یکدیگر [4] متفاوت میباشند. با فرد شدن تعداد سیارهای و با توجه به موقعیت قرارگیری غیر یکسان آنها نسبت به یکدیگر (رابطه (30- ب)), مجموع کسینوس راویه های قرارگیری غیر یکسان سیارهای نسبت به یکدیگر مخالف صفر میشود:

$$\psi_1 = 0, \sum_{n=1}^N \sin \psi_n = 0 \\ \rightarrow \sum_{n=1}^N \cos \psi_n = \frac{\sin 2 \psi_n}{2 \sin \psi_n} \neq 0 \quad (38)$$

بنابراین میتوان نتیجه گرفت که مددار انتقالی در سیستم با تعداد سیارهای فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر ظاهر نمیشود.

3-4- مددار انتقالی و مددار غیر مقید

در مدل های دورانی سیستم های ساده تک مرحله ای دو مددار ارتعاشی متمایز و غیر مقید نیز میتوانند در سیستم ها با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیارهای زوج و فرد نسبت به یکدیگر ظاهر شوند. در مددار انتقالی تمام اجزاء سیستم دارای دوران هستند و هیچ حرکت انتقالی ندارند. لذا بردار مددار ارتعاشی متمایز مطابق زیر میباشد:

$$P_j = [0, 0, u_j]^T, j = c, r, s, 1, \dots, N \quad (39)$$

در مددار ارتعاشی غیر مقید فقط سیارهای سیستم دارای حرکت دورانی میباشند و سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی ندارند. بنابراین بردار مددار غیر مقید نیز مطابق زیر میباشد:

$$P_j = [0, 0, u_j]^T, j = 1, \dots, N \quad (40)$$

4- اعتبارسنجی

نتایج اعتبارسنجی فرکانس های طبیعی سیستم سیارهای با مرجع [4] در جدول 1 آورده شده اند. به منظور اعتبارسنجی، سیستم سیارهای با چهار سیاره (21 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان (صفرا، 80، 180 و 260 درجه) نسبت به یکدیگر انتخاب شده است. با توجه به متفاوت بودن فرکانس های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیارهای زوج نسبت به یکدیگر، اعتبارسنجی فرکانس های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در جدول 1 آورده نشده اند. همچنین، پارامترهای هندسی و انواع سختی های سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره ها نسبت به یکدیگر نیز مشابه مرجع [4] و مطابق جدول 2 در نظر گرفته شده اند.

5- نتایج عددی

به منظور بررسی فرکانس های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس طبیعی، سیستم سیارهای ساده تک مرحله ای، دارای مدل دورانی با چهار سیاره (21 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان (صفرا، 80، 180 و 260 درجه) نسبت به یکدیگر انتخاب شده است. با استفاده از پارامترهای هندسی جدول 2، برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان [4] و غیر یکسان سیاره ها نسبت به یکدیگر، نتایج مطابق جدول 3 میباشند.

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

Table 3 Natural frequencies and vibration modes of the system with four equally and unequally spaced planets

نوع مد ارتعاشی	سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان	سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری غیریکسان	سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	[4]
دورانی	0	0		
دورانی	1536.6	1537.3	فرکانس‌های	
دورانی	1970.6	1971.5	طبیعی متمايز	
دورانی	2625.7	2626.9	با گوناگونی	
دورانی	7773.6	7777.4	یک (M = 1)	
دورانی	13071.1	13077.7		
انتقالی	727	—	فرکانس‌های	
انتقالی	1091	—	طبیعی غیر مقید	
انتقالی	1892.8	—	با گوناگونی [Hz]	
انتقالی	2342.5	—		
انتقالی	7189.9	—	دو	
انتقالی	10437.6	—	(M = 2)	
سیاره‌ای	1808.2	1809	فرکانس‌های	
سیاره‌ای	5963.8	5966.7	طبیعی [Hz] با	
سیاره‌ای	6981.7	6985.2	گوناگونی	
		M = N - 3		
انتقالی	—	713.3, 739		
انتقالی	—	1085.5, 1095.3	فرکانس‌های	
انتقالی	—	1859.2, 1937	طبیعی متمايز	
انتقالی	—	2330.6, 2357.6	با گوناگونی [Hz]	
انتقالی	—	7053.6, 7328.2	یک (M = 1)	
انتقالی	—	9900.5, 10958.6		

مطابق جدول 4 و شکل 6، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی متفاوت و دارای گوناگونی یک (دوازده فرکانس طبیعی متمايز) می‌باشند. همچنین، شش فرکانس طبیعی متمايز با گوناگونی یک وجود دارند که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این شش فرکانس طبیعی از نوع دورانی می‌باشد. با توجه به جدول 4 و شکل 6، سه فرکانس طبیعی دارای گوناگونی سه در سیستم ظاهر می‌شود که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این نه فرکانس طبیعی از نوع سیاره‌ای می‌باشد. به عبارت دیگر در سیستم سیاره‌ای با موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، زیاد شدن تعداد سیاره‌ها تعداد فرکانس‌های را افزایش می‌دهد که مد ارتعاشی متناظر با این فرکانس‌ها از نوع سیاره‌ای می‌باشد.

براساس جدول 5، با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد فرد سیاره‌ها (سه عدد و 18 درجه آزادی) نسبت به یکدیگر و با توجه به موقعیت قرارگیری غیر یکسان تعداد فرد سیاره‌ها نسبت به یکدیگر با توجه به روابط (30- ب) و (38)، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. همچنین با توجه به اینکه مد سیاره‌ای برای سیستم با تعداد سیاره‌های بیشتر از سه عدد ظاهر می‌شود، لذا برای سیستم‌های موجود در جدول 5 مد سیاره‌ای به وجود نمی‌آید. بنابراین برای تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر، در سیستم تنها فرکانس‌های

جدول 2 پارامترهای هندسی سیستم چرخدنده ساده نک مرحله‌ای

Table 2 Numerical parameters of the single-stage spur planetary gear

سیاره	چرخدنده خورشیدی	چرخدنده رینگ	حمل کننده سیاره‌ها	حمل کننده
نام	(kg)	(kg)	(kg)	I/r^2
جرم (kg)	0.61	0.39	3	6.29
قطر پایه (mm)	100.3	77.4	275	5.43
سختی انتقالی (N/m)	—	—	—	176.8
یاتاقن‌ها (N/m)	—	—	—	10^8
سختی دورانی (N/m)	—	—	—	10^8
یاتاقن‌ها (N/m)	—	—	—	10^9
بین چرخدنده خورشیدی و سیاره	5×10^8	5×10^8	m_{in}	m_{out}
سختی (N/m)	24.6	24.6	زاویه فشار (درجه)	

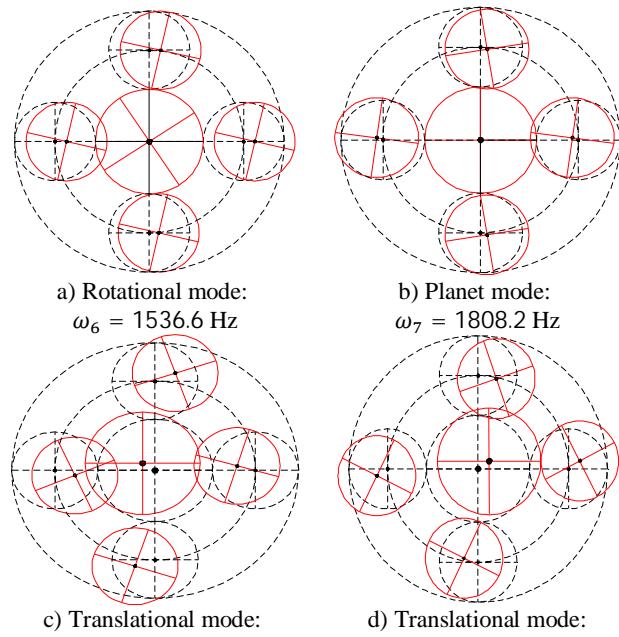


Fig. 3 Types of vibration modes of the system with four equally spaced planets

شکل 3 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی متفاوت می‌باشند (دوازده فرکانس طبیعی متمايز). همچنین شش فرکانس طبیعی متمايز وجود دارد که مد ارتعاشی متناظر با هر کدام از این شش فرکانس از نوع دورانی می‌باشد و سه فرکانس طبیعی با گوناگونی یک نیز دارای مد سیاره‌ای می‌باشند.

برای سیستم دورانی با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره سیاره نسبت به یکدیگر (صفر، 80، 120، 180، 260، 300 درجه، 27 درجه آزادی) نتایج فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس بر اساس پارامترهای هندسی موجود در جدول 2، در جدول 4 آورده شده‌اند. شکل 6 نیز نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد.

دورانی در سیستم ظاهر می‌شوند. به نحویکه شکل 9 نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی متضاد با مدهای ارتعاشی دورانی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد.

با زیاد شدن تعداد سیاره‌های فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر علاوه بر فرکانس‌های متضاد با مدهای دورانی، فرکانس‌های متضاد با مدهای سیاره‌ای نیز در سیستم ظاهر می‌شوند. به عنوان نمونه نتایج برای سیستم دورانی با تعداد پنج سیاره (24 درجه آزادی) با موقعیت قرارگیری غیر یکسان (صفر، 72، 144، 252 و 324 درجه با توجه به رابطه 30- ب)) و موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به یکدیگر با استفاده از

پارامترهای هندسی جدول 2، در جدول 6 آورده شده‌اند.

شکل 10 نیز نحوه تغییر فرکانس‌های طبیعی و انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان پنج سیاره نسبت یکدیگر را نمایش می‌دهد. مطابق شکل 10 با توجه به فرد بودن تعداد سیاره‌ها و غیر یکسان

جدول 4 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت به یکدیگر

Table 4 Natural frequencies and vibration modes of the system with six unequally spaced planets

	نوع مدهای ارتعاشی	سیستم دارای شش سیاره با موقعیت	فرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر
دورانی	0	1581.3	فرکانس‌های
دورانی	2033.6	2625.6	طبیعی متضاد
دورانی	8346.9	15353.8	[Hz] با گوناگونی (M = 1)
سیاره‌ای		1809	فرکانس‌های
سیاره‌ای		5966.7	طبیعی [Hz] با
سیاره‌ای		6985.2	گوناگونی M = N - 3
انتقالی	675.3	706.5	
انتقالی	1027.8	1069.3	فرکانس‌های
انتقالی	1840.9	1943.9	طبیعی متضاد
انتقالی	2496	2535	[Hz] با گوناگونی
انتقالی	7316.3	7814.4	(M = 1)
انتقالی	10913.1	12750.7	

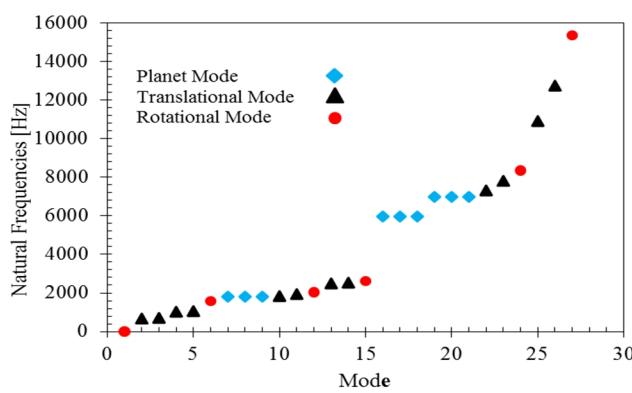


Fig. 6 Variation of the vibration modes of the system with six unequally spaced planets

شکل 6 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان شش سیاره نسبت به یکدیگر

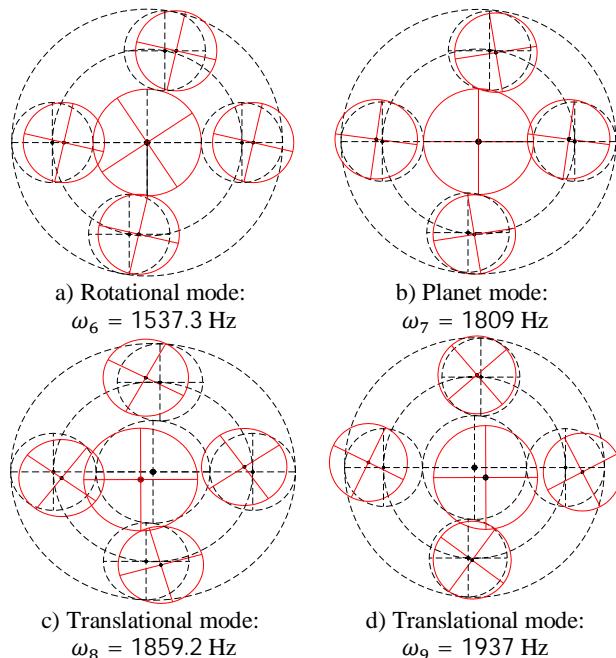


Fig. 4 Types of vibration modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 4 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

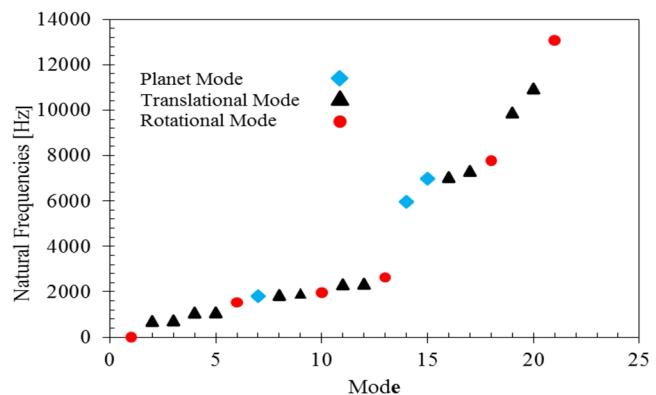


Fig. 5 Variation of the vibration modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 5 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

متضاد با مدهای دورانی ظاهر می‌شوند. این در حالی است که برای سیستم با تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان نسبت به یکدیگر، سیستم علاوه بر فرکانس‌های طبیعی متضاد با مدهای دورانی، فرکانس‌های متضاد با مدهای انتقالی را هم دارد. در شکل‌های 7 و 8، مدهای ارتعاشی برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر آورده شده‌اند.

در شکل 7 با توجه به حداقل بودن تعداد سیاره‌ها (سه عدد) مدهای ارتعاشی سیاره‌ای متضاد با هیچ فرکانسی در سیستم ظاهر نمی‌شود و در سیستم فرکانس‌هایی ظاهر می‌شوند که دارای مدهای انتقالی و دورانی می‌باشند. مطابق شکل 8 با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری سه سیاره نسبت به یکدیگر علاوه بر فرکانس‌های متضاد با مدهای انتقالی، فرکانس‌های متضاد با مدهای انتقالی نیز از سیستم حذف و تنها فرکانس‌های طبیعی متضاد با مدهای انتقالی نیز از سیستم حذف شده‌اند.

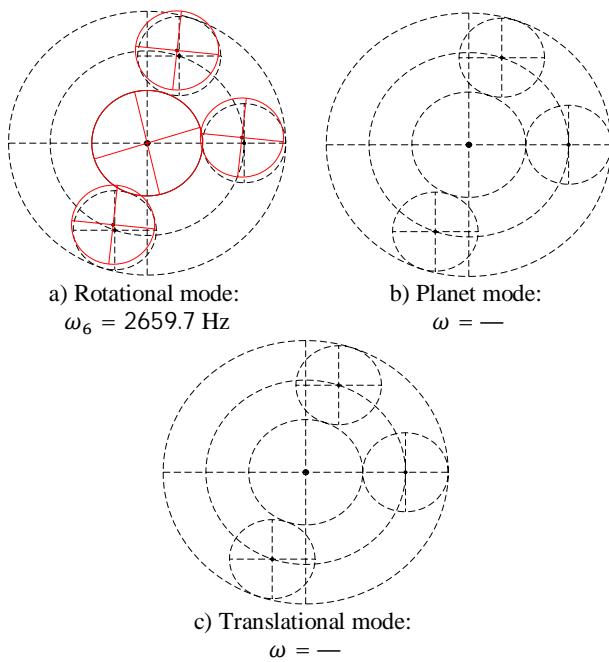


Fig. 8 Types of vibration modes of the system with three unequally spaced planets

شکل 8 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره
نسبت به یکدیگر

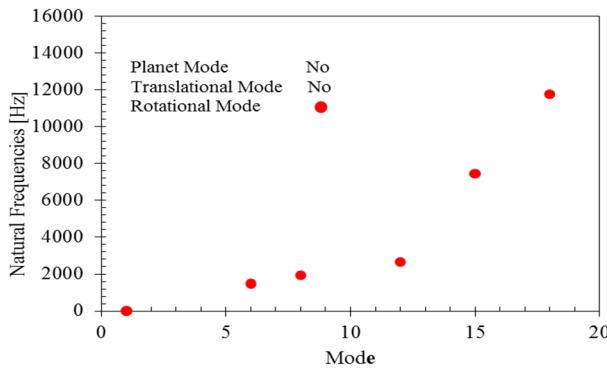


Fig. 9 Variation of the vibration modes of the system with three unequally spaced planets

شکل 9 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

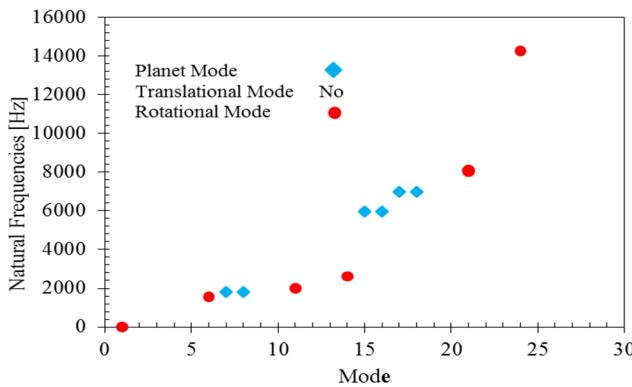


Fig. 10 Variation of the vibration modes of the system with five unequally spaced planets

شکل 10 نحوه تغییر مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان پنج سیاره نسبت به یکدیگر

جدول 5 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

Table 5 Natural frequencies and vibration modes of the system with three equally and unequally spaced planets

نوع مدهای ارتعاشی	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان	سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4]
دورانی	0	0	فرکانس‌های طبیعی متمایز
دورانی	1475.7	1476.7	[Hz] با گوناگونی
دورانی	1930.3	1931.2	(M = 1)
دورانی	2658.3	2659.7	یک
دورانی	7462.8	7464.5	
دورانی	11775.2	11778.1	
انتقالی	743.2	—	فرکانس‌های طبیعی متمایز
انتقالی	1102.4	—	[Hz] با گوناگونی
انتقالی	1896.0	—	(M = 2)
انتقالی	2276.4	—	
انتقالی	6986.3	—	
انتقالی	9647.9	—	

فرکانس‌های طبیعی [Hz] با گوناگونی M = N – 3

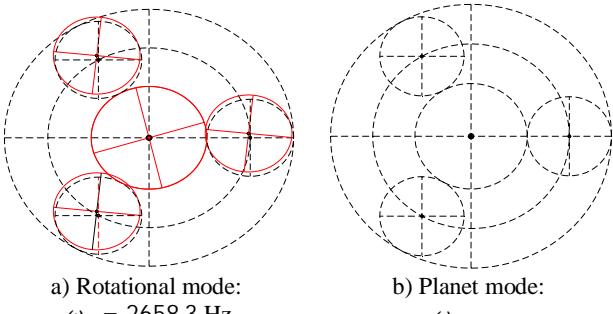


Fig. 7 Types of vibration modes of the system with three equally spaced planets

شکل 7 انواع مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

بودن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند.

به ترتیب برای سیستم‌ها با تعداد چهار سیاره غیر متقارن و سه سیاره متقارن موجود در جدول 7 آورده شده‌اند. برایوضوح شکل‌های 11 و 12، جابه‌جایی حمل‌کننده سیاره‌ها و چرخدنده رینگ نمایش داده نشده‌اند. گفتنی است از منظر کاربردی سه فرکانس طبیعی اول نسبت به سایر فرکانس‌ها اهمیت بیشتری دارند.

جدول 7 فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های دورانی در حالت خروجی (حمل‌کننده سیاره‌ها) ثابت

Table 7 Natural frequencies of the rotational systems for the fixed output (carrier)

سیستم دارای سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان	سیستم دارای سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان	فرکانس طبیعی (Hz)	سیاره‌ها نسبت به یکدیگر	سیستم دارای پنج ارتعاشی	نوع مد
713.3	743.5	اول	یک (M = 1)	دورانی	0
739	743.5	دوم		دورانی	1567.4
988.2	1002	سوم		دورانی	2006.1
1085.5	1102.9	چهارم		دورانی	2614.8
1085.5	1102.9	پنجم		دورانی	8065.4
1809	1845.9	ششم		انتقالی	710.0
1839.3	1896.9	هفتم		انتقالی	1072.0
1859.6	1896.9	هشتم		انتقالی	1888.1
1937	2277.5	نهم		انتقالی	2425.3
1937	2277.5	دهم		انتقالی	7382.4

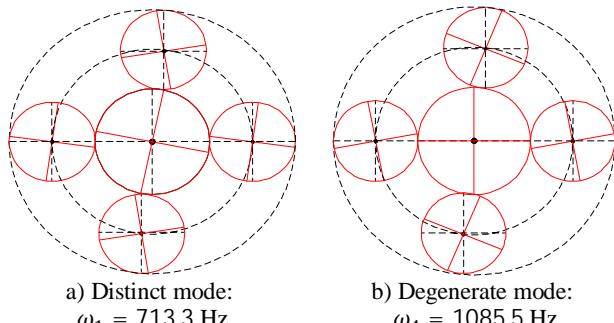


Fig. 11 Distinct and degenerate modes of the system with four unequally spaced planets

شکل 11 مد متمایز و غیر مقید سیستم با موقعیت قرارگیری غیر یکسان چهار سیاره نسبت به یکدیگر

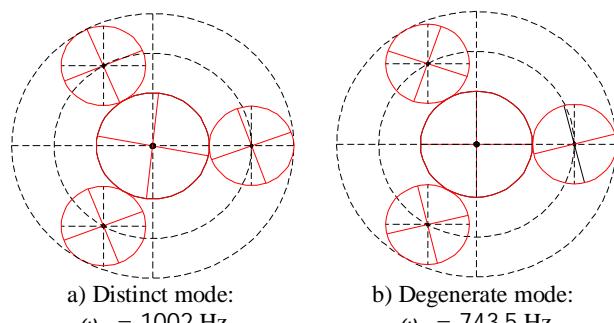


Fig. 12 Distinct and degenerate modes of the system with three equally spaced planets

شکل 12 مد متمایز و غیر مقید سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان سه سیاره نسبت به یکدیگر

جدول 6 فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان پنج سیاره نسبت به یکدیگر

Table 6 Natural frequencies and vibration modes of the system with five equally and unequally spaced planets

سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4]	سیستم دارای پنج سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان	سیستم دارای پنج سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان	سیاره‌ها نسبت به یکدیگر [4]	سیستم دارای پنج سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان	سیستم دارای پنج ارتعاشی
دورانی	0	0	دورانی	1568.1	فرکانس‌های
دورانی	1567.4	1568.1	دورانی	2007.8	طبیعی متمایز
دورانی	2006.1	2007.8	دورانی	2615.4	[Hz] با گوناگونی
دورانی	2614.8	2615.4	دورانی	(M = 1)	(M = 1)
دورانی	8065.4	8070.5	دورانی	14260.8	
دورانی	14253.1	14260.8	انتقالی	—	فرکانس‌های
انتقالی	710.0	—	انتقالی	—	طبیعی غیر مقید
انتقالی	1072.0	—	انتقالی	—	[Hz] با گوناگونی
انتقالی	1888.1	—	انتقالی	—	دو
انتقالی	2425.3	—	انتقالی	—	(M = 2)
انتقالی	7382.4	—	انتقالی	—	
انتقالی	11172.3	—	انتقالی	—	فرکانس‌های
سیاره‌ای	1808.2	1809.0	سیاره‌ای	1809.0	طبیعی
سیاره‌ای	5963.8	5966.7	سیاره‌ای	5966.7	[Hz] با
سیاره‌ای	6981.7	6985.2	سیاره‌ای	6985.2	گوناگونی M = N - 3
انتقالی	—	—	انتقالی	—	فرکانس‌های
انتقالی	—	—	انتقالی	—	طبیعی متمایز
انتقالی	—	—	انتقالی	—	[Hz] با گوناگونی
انتقالی	—	—	انتقالی	—	(M = 1)

در مدل‌های دورانی سیستم‌های سیاره‌ای تک مرحله‌ای هنگامیکه خروجی سیستم (حمل‌کننده سیاره‌ها) به سمت ثابت شدن تغییر رفتار می‌دهد، مدهای متناظر با فرکانس‌های متمایز و غیر مقید، متمایز و غیر مقید نیز می‌توانند باشند. با ثابت شدن خروجی سیستم (این امر با میل دادن سختی دورانی خروجی به سمت بینهایت انجام می‌شود)، سیستم دچار ارتعاش و قفل‌شوندگی می‌شود. برای سیستم دارای مدل دورانی با پارامترهای موجود در جدول 2 با افزایش سختی دورانی حمل‌کننده از صفر تا 10^{10} (N/m) برخی از فرکانس‌های طبیعی برای سیستم با تعداد سه و چهار سیاره به ترتیب با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر در جدول 7 آورده شده‌اند.

به عنوان نمونه مطابق جدول 7، فرکانس طبیعی اول برای سیستم دارای چهار سیاره با موقعیت قرارگیری غیر یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر با ثابت شدن خروجی به مقدار 713.3 هرتز می‌رسد و مدهای متناظر با فرکانس طبیعی اول به مدهای متمایز تبدیل می‌شود. همچنین با افزایش صلیبت حمل‌کننده سیاره‌ها و تغییر رفتار آن از دوران آزاد به سمت ثابت شدن، فرکانس طبیعی چهارم به مقدار 1085.5 هرتز می‌رسد و مدهای متناظر با چهارمین فرکانس طبیعی به مدهای غیر مقید تبدیل می‌شود. برای سیستم با تعداد سه سیاره با موقعیت قرارگیری یکسان سیاره‌ها نسبت به یکدیگر نیز به عنوان نمونه فرکانس طبیعی اول دارای مدهای غیر مقید و فرکانس طبیعی سوم دارای مدهای متمایز می‌باشد. در شکل‌های 11 و 12 مدهای متمایز و غیر مقید

ψ	مختصه شعاعی (degree)
ω	فرکانس طبیعی (Hz)
b	زیرنویس‌ها
c	یاتاقان
m	حمل کننده سیاره‌ها
N	سختی ناشی از تغییر شکل دندانه چرخدنده‌ها
n	محدوده تغییر
p	سیاره
r	چرخدنده رینگ
s	چرخدنده خورشیدی
u	راستای دورانی
x, y	راستاها ای انتقالی

8- مراجع

- A. Kahraman, Planetary gear train dynamics, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 3, pp. 713-720, 1994.
- A. Kahraman, Load sharing characteristics of planetary transmissions, *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 8, pp. 1151-1165, 1994.
- A. Kahraman, Natural modes of planetary gear trains, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, No. 1, pp. 125-130, 1994.
- J. Lin, R.G. Parker, Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 3, pp. 316-321, 1999.
- J. Lin, R.G. Parker, Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 1, pp. 109-128, 1999.
- R.G. Parker, S.M. Vijayakar, T. Imajo, Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 3, pp. 435-455, 2000.
- A. Kahraman, Free torsional vibration characteristics of compound planetray gear sets, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, No. 8, pp. 953-971, 2001.
- T. Geramicioski, L. Trajcevski, Theoretical improvement of the planetary gear dynamic model, *International Design Conference-Design, Dubrovnik*, May 14 - 17, 2002.
- A. Kahraman, A.A. Kharazi, M. Umrani, A deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No. 3, pp. 752-768, 2003.
- T. Sun, H. Y. Hu, Nonlinear dynamics of a planetary gear system with multiple clearances, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, No. 12, pp. 1371-1390, 2003.
- H. Sadeghi, A. Khosravi, Parametric design and manufacturing of precision forging dies of idler gear of peugeot 405 using cad/cam, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 8, No. 1, pp. 115-127, 2008. (in Persian فارسی).
- K. J. Huang, S. R. Zhang, J. T. Tseng, Dynamic analysis of single-stage planetary gearings by the FE approach, *Chung Hua Journal of Science and Engineering*, Vol. 7, No. 2, pp. 27-33, 2009.
- W. Kim, J. Y. Lee, J. Chung, Dynamic analysis for a planetary gear with time-varying pressure angles and contact ratios, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 4, pp. 883-901, 2012.
- A. Saghafi, A. Farshidianfar, A. Akbari, Vibrations control of gear- bearing dynamic system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 135-143, 2014. (in Persian فارسی).
- W. Sun, X. Ding, J. Wei, X. Hu, Q. Wang, An analyzing method of coupled modes in multi-stage planetary gear system, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 15, No. 11, pp. 2357-2366, 2014.
- F. Shakeri Aski, M. Mirparizi, F. Sheikh Samani, M. A. Hajabasi, Vibration behavior optimization of planetary gear sets, *Propulsion and Power Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 196-206, 2014.
- A. Saghafi, A. Farshidianfar, Bifurcation and chaos control in a gear transmission system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 61-68, 2015. (in Persian فارسی).
- F. Lei, W. Shaoping, W. Xingjian, H. Feng, L. Huawei, Nonlinear dynamic modeling of helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 29, No. 3, pp. 675-687, 2016.
- M. Beyaoui, M. Tounsi, K. Abboudi, N. Feki, L. Walha, M. Haddar, Dynamic behaviour of a wind turbine gear system with uncertainties, *Comptes Rendus Mecanique*, Vol. 334, No. 6, pp. 375-387, 2016.
- L. Xiang, Y. Jia, A. Hu, Bifurcation and chaos analysis for multi-freedom gear-bearing system with time-varying stiffness, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 23, pp. 10506-10520, 2016.
- A. Shahabi, F. Sheikh Samani, Natural frequencies and vibration modes of the single-stage spur planetary gear, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, No. 9, pp. 109-120, 2016. (in Persian فارسی).

6- نتیجه‌گیری

در چرخدنده‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با داشتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان نسبت به یکدیگر پنج مد ارتعاشی دورانی، سیاره‌ای، انتقالی، متمایز و غیر مقید در سیستم ظاهر می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی و سیاره‌ای برای سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، مشابه و دارای گوناگونی یکسانی می‌باشند. در سیستم‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی برای دو سیستم با موقعیت یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر متفاوت و دارای گوناگونی متفاوت نیز می‌باشند. بهنحویکه با غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی از گوناگونی دو در سیستم با موقعیت یکسان تعداد سیاره‌های زوج نسبت به یکدیگر، به فرکانس‌های متفاوت با گوناگونی یک تبدیل می‌شوند. با فرد شدن تعداد سیاره‌های سیستم و غیر یکسان شدن موقعیت قرارگیری آنها نسبت به یکدیگر، فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای انتقالی در سیستم ظاهر نمی‌شوند. همچنین فرکانس‌های طبیعی متناظر با مدهای دورانی و سیاره‌ای برای دو سیستم با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان تعداد سیاره‌های فرد مشابه و دارای گوناگونی یکسانی نیز می‌باشند. برای هر دو سیستم با تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری غیر یکسان نسبت به یکدیگر نیز زیاد شدن تعداد سیاره‌ها از نوع سیاره‌ای را افزایش می‌دهد که مد ارتعاشی متناظر با آن فرکانس‌ها از نوع سیاره‌ای می‌باشد. برای مدل‌های دورانی سیستم‌های سیاره‌ای ساده تک مرحله‌ای با داشتن تعداد سیاره‌های زوج و فرد با موقعیت قرارگیری یکسان و غیر یکسان نسبت به یکدیگر، دو مد متمایز و غیر مقید نیز می‌توانند در سیستم ظاهر شوند. در مد متمایز اجزاء سیستم دارای حرکت دورانی می‌باشند. در مد غیر مقید فقط سیاره‌های سیستم دارای حرکت دورانی می‌باشند و سایر اجزاء سیستم هیچ حرکتی را دارا نمی‌باشند.

7- فهرست عالیم

$e(t)$	خطای انتقال استاتیک
I	ممان اینرسی ($kg \cdot m^2$)
k	سختی ناشی از تغییر شکل دندانه چرخدنده‌ها (N/m)
K	سختی یاتاقان‌ها (N/m)
K	ماتریس سختی (kg)
m	جرم (kg)
M	ماتریس اینرسی
N	تعداد کل سیاره‌ها
q	بردار مختصات عمومی
r	شعاع پایه (m)
T	گشتاور ($N \cdot m$)
u	مختصه دورانی
x, y	مختصات انتقالی
عالیم یونانی	
α	زاویه فشار (degree)
η	مختصه مماسی (m)
θ	زاویه دوران هر یاتاقان (Rad)