



ارائه‌ی یک مدل الکترومکانیکی وابسته به بُعد برای میکرو حسگرهای تشدیدی صفحه‌ای مستطیلی شکل بر اساس تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل

امیر رضا عسکری¹، مسعود طهانی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، mtahani@um.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 فروردین 1393

پذیرش: 22 خرداد 1393

ارائه در سایت: 26 شهریور 1393

کلید واژگان:

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی

صفحات مستطیلی گیردار

مدل کاهش مرتبه داده شده

فرکانس پایه

ولتاژ کشیدگی

میکرو حسگرهای تشدیدی صفحه‌ای مستطیلی شکل از فرکانس تشدید میکروصفحات گیردار خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی برای حس کردن استفاده می‌کنند. هدف پژوهش حاضر تحلیل ارتعاشات آزاد این سیستم‌ها به منظور بدست آوردن فرکانس تشدید آن-هاست. بدین منظور تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به همراه مدل صفحه‌ی کیرشلف در نظر گرفته می‌شود و معادله‌ی حرکت وابسته به بُعد که اثرات تنش‌های پسماند محوری و نیروی گسترده و غیرخطی الکترواستاتیک را در نظر می‌گیرد، با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌گردد. کوچکترین فرکانس سیستم نیز بعنوان فرکانس تشدید این میکروصفحات با استفاده از مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی تک مدی گالرکین استخراج می‌گردد. نتایج حاکی از آن است که فرکانس پایه‌ی سیستم با افزایش اختلاف پتانسیل اعمال شده به آن کاهش پیدا می‌کند و هنگامی که اختلاف پتانسیل ورودی به ولتاژ کشیدگی سیستم برسد، صفر می‌شود. یافته‌های پژوهش پیش‌رو با نتایج موجود در ادبیات مقایسه و صحت‌گذاری می‌شوند و تطابق بسیار خوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود. همچنین دیده می‌شود که استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل در تحلیل ناپایداری کشیدگی میکروصفحات گیردار مستطیلی، می‌تواند شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک و مشاهدات آزمایشگاهی را حذف نماید. بعلاوه مشاهده می‌گردد که به حساب آوردن اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد میکروصفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی از میکروصفحات تخت ضروری‌تر است.

Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory

Amir Reza Askari, Masoud Tahani*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

* P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, mtahani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 April 2014
Accepted 13 June 2014
Available Online 17 September 2014

Keywords:

MEMS
Clamped rectangular micro-plates
Reduced order model
Fundamental frequency
Pull-in voltage

ABSTRACT

Rectangular plates-based resonant micro-sensors utilize the resonance frequency of electrically pre-deformed clamped micro-plates for sensing. Free vibration analysis of such systems in order to find their resonance frequency is the objective of present paper. For this aim, the modified couple stress theory (MCST) together with the Kirchhoff plate model is considered and the size-dependent equation of motion which accounts for the effect of axial residual stresses as well as the non-linear and distributed electrostatic force is derived using the Hamilton's principle. The lowest frequency of the system as the resonance frequency of these micro-plates is extracted using a single mode Galerkin based reduced order model (ROM). It is found that the fundamental frequency of the system is decreased with an increase of applied voltage and becomes zero when the input voltage reaches the pull-in voltage of the system. The findings of present paper are compared and validated by available results in the literature and an excellent agreement between them is observed. Also it is found that using the MCST in pull-in analysis of clamped rectangular micro-plates can remove the existing gap between the results of classical theory (CT) and available empirical observations. Furthermore, it is observed that accounting for the size-effect on free vibration analysis of electro statically pre-deformed micro-plates is more essential than flat ones.

1- مقدمه

قابلیت تولید انبوهشان اخیراً بشدت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. حسگرهای میکروالکترومکانیکی تشدیدی¹ که گستره وسیعی از این سیستم‌ها را شامل

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بیشتر بعنوان حسگر و عملگر در صنعت کاربرد دارند. این سیستم‌ها بدلیل ابعاد کوچک، توان مصرفی مورد نیاز کم و

1- Resonant MEMS sensors

Please cite this article using:

A.R. Askari, M. Tahani, Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 121-130, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دلیل این تئوری وابسته به بُعد بیشتر مورد توجه پژوهشگران برای بررسی اثر اندازه بر رفتار مکانیکی مواد قرار گرفته است. تاکنون رفتار مکانیکی وابسته به بُعد میکروتیرها بعنوان یکی از اعضای پرکاربرد در صنعت توسط پژوهشگران بسیاری با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل مورد بررسی قرار گرفته است. اما پژوهش‌هایی که رفتار وابسته به بُعد میکروصفحات را بعنوان یکی دیگر از اعضای پرکاربرد در صنعت مورد توجه قرار دهند، بسیار محدود هستند. در اینجا پژوهش‌هایی که رفتار وابسته به بُعد میکروصفحات را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل بررسی کرده‌اند، به طور خلاصه مرور می‌گردند.

تسیاتاس [14] مدل وابسته به بُعدی برای صفحات نازک با شکل دلخواه با استفاده از فرضیات کیرشیف ارائه نمود. او نشان داد که در نظر گرفتن اثرات اندازه صلبیت خمشی میکروصفحات را افزایش می‌دهد. همچنین با کوچکتر شدن ضخامت صفحه یا بزرگتر شدن پارامتر مقیاس طول مادی آن، اثر اندازه افزایش می‌یابد. اصغری [15] نیز مدل وابسته به بُعدی برای صفحات نازک با شکل دلخواه بر اساس تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی ارائه نمود. جمعه‌زاده و همکارانش [16] اثر اندازه بر فرکانس‌های طبیعی میکروصفحات نازک مستطیلی و دایروی شکل را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات کیرشیف بصورت تحلیلی بررسی نمودند. ولی آن‌ها تنها میکروصفحات مستطیل شکلی را مورد مطالعه قرار دادند که در آن‌ها دو لبه‌ی مقابل تکیه‌گاه ساده داشته باشد. آن‌ها دریافتند که در نظر گرفتن اثر اندازه، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود. آگتزر و سیوالک [17] خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات مستطیل شکلی را که روی تکیه‌گاه الاستیک قرار گرفته‌اند بصورت تحلیلی برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بررسی نمودند. افزایش صلبیت خمشی و در نتیجه‌ی آن کاهش خیز استاتیکی و افزایش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش سیستم نیز در این پژوهش گزارش شد. کی و همکارانش [18] اثر اندازه بر فرکانس‌های طبیعی صفحات ضخیم را با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول به‌همراه تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل بررسی نمودند. آن‌ها معادلات بدست آمده را با استفاده از نسخه‌ی p روش ریتز حل نمودند و دریافتند که اثرات اندازه هنگامی که ضخامت صفحه با پارامتر مقیاس طول مادی آن برابر می‌شود، بشدت افزایش می‌یابد. روکی و همکارانش [19] نیز خمش استاتیکی میکروصفحات ضخیم را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین بررسی نمودند. افزایش صلبیت خمشی نیز در این پژوهش گزارش گردید. ژانگ و همکارانش [20] مدل اجزاء محدود وابسته به بُعدی برای صفحات ضخیم با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین ارائه نمودند. المان مستطیلی ارائه شده توسط آن‌ها که چهار گره و 15 درجه آزادی در هر گره داشت، دچار پدیده‌ی قفل برشی نمی‌شد. آن‌ها خمش استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات ضخیم را با استفاده از مدل اجزاء محدود خود مورد مطالعه قرار دادند. کی و همکارانش [21] خمش استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات ضخیم حلقوی ساخته شده از مواد تابعی مدرج⁵ را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات بدست آمده در مدل خود را با استفاده از روش تریبیعات تفاضلی⁶ حل نمودند و نشان دادند که اثرات اندازه بر روی میکروصفحاتی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادیشان بزرگتر از

می‌شوند نیز کاربردهای فراوانی در صنعت دارند، از جمله اینکه بعنوان حسگرهای شیمیایی و جرم مورد استفاده قرار می‌گیرند [1].

اجزای اصلی تشکیل دهنده‌ی حسگرهای الکترومکانیکی تشدیدی، میکروتیرها و میکروصفحات الکترومکانیکی هستند [2]. یک میکروصفحه‌ی الکترومکانیکی تشدیدی، یک صفحه نازک و رسانا می‌باشد که بعنوان الکتروود متحرک در فاصله کمی از یک الکتروود ثابت و صلب قرار گرفته است [3]. این صفحه‌ی نازک رسانا با اعمال جریان الکتروسیسته خیز برمی‌دارد و حول نقطه‌ی تعادلش نوسان می‌کند، به طوری که خیز استاتیکی و ارتعاشات حول نقطه‌ی تعادل به ترتیب بدلیل اعمال جریان‌های مستقیم (DC) و متناوب (AC) الکتروسیسته رخ می‌دهند [4]. شایان ذکر است که در اکثر حسگرهای تشدیدی دامنه‌ی اختلاف پتانسیل AC اعمال شده بسیار کوچکتر از دامنه‌ی ولتاژ DC اعمالی است. همچنین در سیستم‌هایی که دامنه‌ی ولتاژ اعمالی AC از DC خیلی کوچکتر باشد، فرکانس تشدید توسط اختلاف پتانسیل اعمالی DC کنترل می‌شود [5]. بنابراین برای تعیین فرکانس تشدید در این سیستم‌ها، کافیسیت فرکانس پایه (کوچکترین فرکانس طبیعی سیستم) بدست بیاید [6]. زیرا معمولاً فرکانس تحریک این سیستم‌ها از فرکانس پایه‌ی آن‌ها کوچکتر بوده و سایر فرکانس‌های طبیعی میکرو حسگر تحریک نمی‌شود.

شایان ذکر است که اختلاف پتانسیل اعمالی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دارای یک حد بالایی است که با اعمال ولتاژهایی بالاتر از آن، نیروی برگرداندنده‌ی کشسان میکروصفحه، توانایی مقابله با نیروی الکترواستاتیک اعمال شده بر آن را ندارد. در این حالت سیستم رفتار ناپایداری از خود بروز می‌دهد و الکتروود متحرک ناگهان به الکتروود ثابت برخورد می‌کند. این ناپایداری که ناپایداری کشیدگی¹ نامیده شده است، برای اولین بار بصورت همزمان توسط ناتانسون [7] و تیلور [8] مشاهده گردید و به کوچکترین اختلاف پتانسیل اعمالی که منجر به این ناپایداری می‌شود، ولتاژ کشیدگی می‌گویند.

اخیراً آزمایش‌های بسیاری نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی مواد در ابعاد میکرون و کوچکتر از آن تحت تاثیر اندازه‌ی آن‌ها قرار می‌گیرد [9,10]. خاصیت وابسته به بُعد مواد که یک خاصیت ذاتی است هنگامی نمود پیدا می‌کند که طول مشخصه‌ی (ضخامت یا قطر) ماده با پارامتر مقیاس طول مادی آن قابل مقایسه باشد [11,9]. پارامتر مقیاس طول مادی مواد یک خاصیت مکانیکی ماده می‌باشد که مانند سایر خواص مکانیکی بصورت آزمایشگاهی تعیین می‌گردد [9].

مکانیک محیط پیوسته کلاسیک قادر به توصیف رفتار وابسته به بُعد مواد نیست. برای برطرف نمودن این عدم توانایی مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک، تئوری‌های محیط پیوسته‌ی وابسته به بُعد ارائه شده‌اند که از میان آن‌ها تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل² [12] و گرادیان کرنش³ [13] به دلیل سادگی و دقت بالایشان بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. شایان ذکر است که تئوری‌های وابسته به بُعد ثوابت مادی بیشتری بعلاوه دو ثابت لامه برای مواد همسان‌گرد⁴ دارند. به طوری که تئوری‌های بهبود یافته‌ی تنش کوپل و گرادیان کرنش به ترتیب یک و سه ثابت بعلاوه دو ثابت لامه برای مواد همسان‌گرد دارند [12,13].

تعیین ثوابت مادی مرتبه‌ی بالای سایر تئوری‌های وابسته به بُعد نسبت به یک ثابت مادی تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل دشوارتر است. به همین

1- Pull-in instability

2- The modified couple stress theory (MCST)

3- The strain gradient theory (SGT)

4- Isotropic materials

5- Functionally graded materials (FGM)
6- Differential quadrature method (DQM)

که در آن $\vec{\sigma}$ ، $\vec{\varepsilon}$ ، \vec{m} و $\vec{\chi}$ به ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور متقارن انحنا می‌باشند. همچنین تانسورهای موجود در رابطه‌ی (1) با فرض کوچک بودن کرنش‌ها و جابجایی‌ها، با استفاده از روابط (2) تا (5) بدست می‌آیند.

$$\vec{\sigma} = \lambda \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \quad (3)$$

$$\vec{m} = 2l^2 \mu \vec{\chi} \quad (4)$$

$$\vec{\chi} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{\theta} + (\vec{\nabla} \vec{\theta})^T \right] \quad (5)$$

بطوریکه $\vec{\nabla}$ ، \vec{u} ، $\vec{\theta}$ ، l و \vec{I} به ترتیب عملگر گرادیان، بردار جابجایی، بردار چرخش، پارامتر مقیاس طول مادی و تانسور واحد می‌باشند. λ و μ نیز ثوابت لامه هستند. شایان ذکر است که عملگر گرادیان در مختصات دکارتی بصورت $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ می‌باشد. همچنین بردار چرخش نیز بصورت رابطه (6) تعریف می‌گردد:

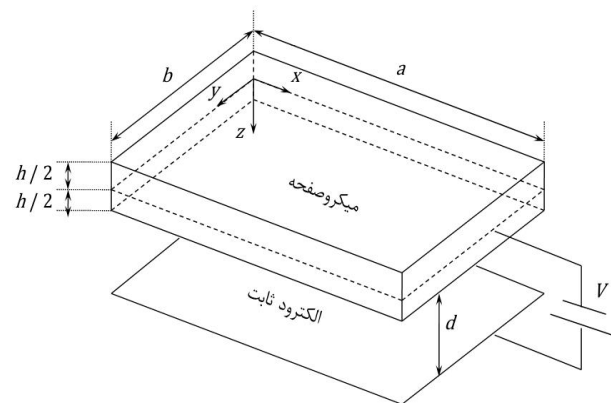
$$\vec{\theta} = \frac{1}{2} \text{curl}(\vec{u}) \quad (6)$$

قابل توجه است که طبق روابط (4) و (5)، تانسور \vec{m} به دلیل تقارن تانسور $\vec{\chi}$ ، متقارن است.

3- مدل الکترومکانیکی وابسته به بُعد برای یک میکروصفحه‌ی مستطیل شکل

شکل 1 شماتیکی از یک میکروصفحه‌ی الکترومکانیکی مستطیل شکل را با چگالی ρ طول a ، عرض b و ضخامت h نشان می‌دهد. فاصله‌ی بین میکروصفحه‌ی خیز برنداشته و الکتروود ثابت نیز d می‌باشد.

با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی $V = V_0 + \Delta V(t)$ (که در آن V_0 و $\Delta V(t)$ به ترتیب به بخش‌های DC و AC اختلاف پتانسیل اعمالی اشاره دارند) میکروصفحه به سمت الکتروود ثابت خیز برمی‌دارد و حول نقطه‌ی تعادلش نوسان می‌کند. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد، در اکثر حسگرهای تشدیدی اختلاف پتانسیل اعمال شده AC بسیار کوچکتر از ولتاژ اعمالی DC می‌باشد. به همین دلیل فرکانس تشدید سیستم، همان کوچکترین فرکانس طبیعی میکروصفحه‌ی خیز برداشته می‌باشد [5]. نیروی الکترواستاتیک وارد شده بر میکروصفحه در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی V بر واحد سطح، بدون در نظر گرفتن اثرات لبه بصورت رابطه‌ی (7) است [35]:



شکل 1 شماتیکی از یک میکروصفحه‌ی الکترومکانیکی مستطیل شکل

10 باشد، قابل صرف نظر کردن است. تالی و چوی [22] مدل‌های خطی و غیرخطی وابسته به بُعدی برای میکروصفحات مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی مدرج بر اساس فرضیات کیرشهف و میندلین با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل ارائه نمودند. آن‌ها خمش استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد این مدل‌ها را برای صفحاتی با تکیه‌گاه ساده بصورت تحلیلی بررسی نمودند. تالی و کیم [23] نیز با انجام پژوهشی مشابه مدل وابسته به بُعدی بر اساس فرضیات ردی برای میکروصفحات مستطیلی ارائه نمودند.

ارتعاشات آزاد میکروتریپا [24,6] و میکروصفحات الکترومکانیکی خازنی [27-25] تاکنون در مطالعات بسیاری بررسی شده است. ولی تاکنون اثرات همزمان ابعاد و اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی بر فرکانس تشدید این ابزارها مورد بررسی قرار نگرفته است. شایان ذکر است که مطابق جستجوهای انجام گرفته توسط نویسندگان، اکثر پژوهش‌های موجود در ادبیات به بررسی اثرات اندازه بر ارتعاشات میکروتریپا و میکروصفحات تخت محدود می‌شود و بررسی اثرات ابعاد بر رفتار نوسانی میکروساختارهای خازنی تغییر شکل داده در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی تا کنون بررسی نشده است. همچنین اکثر پژوهش‌های مرتبط با رفتار وابسته به بُعد میکروابزارهای خازنی به مطالعه‌ی اثرات اندازه بر پاسخ پایدار و ناپایدار استاتیکی در این سیستم‌ها پرداخته‌اند [28-33]. هدف پژوهش پیش‌رو بررسی اثرات اندازه بر فرکانس تشدید میکروصفحات مستطیل شکل خازنی تشدیدی می‌باشد. همچنین با توجه به فرایند ساخت ساده‌تر و کاربرد بیشتر میکروصفحات گیردار در حسگرهای تشدیدی [34]، نتایج پژوهش حاضر به این نوع شرط مرزی محدود گردیده است.

بخش‌های بعدی مقاله‌ی پیش‌رو به ترتیب زیر سازماندهی گردیده‌اند. در بخش 2، تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به‌طور خلاصه بیان گردیده است. بخش 3 به توصیف مدل الکترومکانیکی وابسته به بُعد برای میکروصفحات مستطیل شکل اختصاص یافته است. همچنین معادله‌ی حرکت حاکم بر سیستم در این قسمت استخراج گردیده و سپس بی‌بعد شده است. در بخش 4 مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی تک جمله‌ای بر اساس روش باقیمانده‌ی وزن‌دار گالرکین ارائه شده است. نتایج مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی تک جمله‌ای حاضر با نتایج تحلیلی موجود برای فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تخت (هنگامی‌که هنوز ولتاژی به سیستم اعمال نشده است) و همچنین مشاهدات آزمایشگاهی موجود برای ولتاژ کشیدگی این سیستم‌ها در بخش 5 مقایسه شده‌اند. ادامه‌ی بخش 5 نیز به بررسی اثرات اندازه و نیروی الکترواستاتیک بر فرکانس طبیعی پایه‌ی سیستم اختصاص یافته است. بر اساس نتایج بدست آمده در این قسمت، اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی صفحات تخت و تحریک شده با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی در آن‌ها به ترتیب بزرگتر از 10 و 20 باشد، معمولاً قابل صرف نظر کردن است. نتایج اصلی مستخرج از پژوهش حاضر نیز در بخش 6 خلاصه گردیده‌اند.

2- مروری بر تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل

طبق تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل [12]، علاوه بر تانسور کرنش (مزدوج با تانسور تنش)، تانسور انحنا¹ (مزدوج با بخش انحرافی تانسور تنش کوپل) نیز در چگالی انرژی کرنشی دخیل است. بنابراین انرژی کرنشی ایجاد شده بر روی دامنه‌ی Π در یک ماده‌ی الاستیک خطی تغییر شکل داده بصورت رابطه (1) است [12]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Pi} (\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} + \vec{m} : \vec{\chi}) d\Pi \quad (1)$$

1- Curvature tensor

$$W_{ext,2} = \int_{\Omega} \left(\int_0^w F_{es} dw \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\int_0^w \frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} dw \right) d\Omega \quad (16)$$

که در آن Ω سطح زیرین میکروصفحه است. قابل توجه است که با توجه به عدم تغییر ضخامت میکروصفحه در حین تغییر شکل بر اساس فرضیه‌ی کیرشهف، جابجایی این سطح با سطح میانی میکروصفحه یکسان است. بنابراین می‌توان در رابطه‌ی (16) سطح زیرین Ω را با سطح میانی A جایگزین نمود. قابل توجه است که کار خارجی کل انجام شده روی میکروصفحه برابر با مجموع کارهای انجام شده توسط نیروهای محوری و الکترواستاتیک می‌باشد.

انرژی جنبشی میکروصفحه را نیز می‌توان طبق رابطه‌ی (17) محاسبه نمود:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dz dA \quad (17)$$

که با جایگذاری از رابطه‌ی (8)، رابطه‌ی (17) می‌تواند بصورت رابطه (18) ساده شود:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \rho h (\dot{w})^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (18)$$

با توجه به نازکی میکروصفحات الکترومکانیکی، بخش دورانی انرژی جنبشی در مقابل بخش انتقالی آن قابل نظر کردن می‌باشد [38]. بنابراین عبارت انرژی جنبشی بصورت رابطه (19) ساده می‌شود:

$$K = \frac{\rho h}{2} \int_A (\dot{w})^2 dA \quad (19)$$

قابل توجه است که انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار خارجی انجام شده روی میکروصفحه طبق روابط (1)، (14)، (16) و (18) بر حسب جابجایی‌ها بدست می‌آیند. بنابراین معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه به‌سادگی می‌تواند طبق اصل همپلتون بدست بیاید. طبق این اصل می‌توان رابطه (20) را نوشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W_{ext,1} + \delta W_{ext,2}) dt = 0 \quad (20)$$

با جایگذاری از عبارات انرژی‌های کرنشی و جنبشی و کار خارجی انجام شده روی میکروصفحه توسط نیروهای محوری و جاذبه‌ی الکترواستاتیک در رابطه‌ی (20)، پس از ساده سازی معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه طبق رابطه‌ی (21) بدست خواهد آمد:

$$\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Ehl^2}{2(1+\nu)} \right) \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = \frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} + N_x^r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (21)$$

که در آن $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$ است. همچنین علامت نقطه، نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان می‌باشد. شرایط مرزی مساله نیز برای یک میکروصفحه‌ی گیردار می‌تواند بصورت رابطه‌ی (22) ساده شود:

$$w(x,0) = w(x,a) = w(0,y) = w(b,y) = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (22)$$

در این قسمت معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه برای سادگی و جلوگیری از ایجاد خطاهای محاسباتی در پاسخ، بی‌بُعد شده است. بدین

$$F_{es} = \frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} \quad (7)$$

که در آن ε و w به ترتیب ضریب گذردهی الکتریکی ماده‌ی دی‌الکتریک بین دو الکتروود و خیز میکروصفحه می‌باشند. شایان ذکر است که اثرات لبه در سیستم‌های میکرومکانیکی که الکتروود متحرک آن‌ها پهن باشد (مانند اکثر میکروصفحات)، قابل صرف نظر کردن است [36، 37].

طبق فرضیات کیرشهف برای صفحات نازک و متقارن، مؤلفه‌های میدان جابجایی در یک نقطه‌ی دلخواه از میکروصفحه بصورت روابط (8) است [38]:

$$u(x,y,z,t) = -z \frac{\partial}{\partial x} w(x,y,t) \quad (8الف)$$

$$v(x,y,z,t) = -z \frac{\partial}{\partial y} w(x,y,t) \quad (8ب)$$

$$w(x,y,z,t) = w(x,y,t) \quad (8ج)$$

که در آن (u,v,w) و t به ترتیب به مؤلفه‌های میدان جابجایی در امتداد مختصات (x,y,z) و زمان اشاره می‌کنند. درایه‌های غیر صفر تانسورهای کرنش و انحنا با توجه به روابط (3) و (5) برای میدان جابجایی ارائه شده در رابطه (8) بصورت روابط (9) و (10) می‌باشند:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_{xy} = -1/2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

همچنین درایه‌های غیر صفر تانسورهای تنش و بخش انحرافی تنش کوپل نیز به ترتیب بصورت روابط (11) و (12) می‌باشند:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_y, \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_y + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (11)$$

$$m_x = 2l^2 \mu \chi_x, m_y = 2l^2 \mu \chi_y, m_{xy} = 2l^2 \mu \chi_{xy} \quad (12)$$

به‌طوری‌که E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون میکروصفحه می‌باشند و طبق رابطه‌ی (13) با ثوابت لامه مرتبط می‌گردند [39]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (13)$$

واضح است که با جایگذاری روابط (9) تا (12) در رابطه (1)، انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروصفحه بر حسب مؤلفه‌های میدان جابجایی بدست می‌آید.

با توجه به نحوه تولید میکرو حسگرهای تشدیدی، معمولاً تنش پسماندی در میکروصفحه باقی می‌ماند که اجتناب از آن غیر ممکن است [40]. کار خارجی انجام شده توسط این تنش‌های پسماند بصورت رابطه (14) قابل محاسبه است [41]:

$$W_{ext,1} = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^r \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (14)$$

که در آن A سطح میانی میکروصفحه می‌باشد. همچنین N_x^r و N_y^r به ترتیب نیروهای محوری بر واحد طول در جهات x و y هستند که طبق رابطه‌ی (15) به تنش‌های پسماند σ_x^r و σ_y^r مرتبط می‌گردند:

$$N_x^r = \sigma_x^r h, N_y^r = \sigma_y^r h \quad (15)$$

کار خارجی نیروی الکترواستاتیک نیز طبق رابطه‌ی (16) قابل محاسبه می‌باشد:

منظور پارامترهای بی‌بُعد مساله مانند آن‌چه در رابطه (23) نشان داده شده است، در نظر گرفته شده‌اند.

$$\hat{x} = \frac{x}{a}, \hat{y} = \frac{y}{b}, \hat{w} = \frac{w}{d}, \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (23)$$

با جایگذاری از پارامترهای بی‌بُعد داده شده در رابطه (23) در معادله‌ی حرکت، معادله‌ی حاکم بر حرکت بی‌بُعد بصورت رابطه (24) بدست خواهد آمد. قابل توجه است که به منظور سادگی بیشتر، پارامترهای بی‌بُعد در رابطه (24) بدون هت، \hat{z} ، نوشته شده‌اند. همچنین لازم به ذکر است که از این پس تمام روابط بدست آمده بر پایه‌ی پارامترهای بدون بُعد خواهند بود.

$$\left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_1^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \dot{w} = \frac{\beta}{(1-w)^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (24)$$

به طوری که طبق رابطه (25):

$$T = \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}, \alpha_1 = \frac{a}{b}, \alpha_2 = \frac{1-\nu}{(h/l)^2},$$

$$\beta = \frac{\varepsilon a^4 (1-\nu^2) V^2}{2Eh^3 d^3}, N_1 = \frac{a^2 (1-\nu^2)}{Eh^3} N_x^r,$$

$$N_2 = \frac{a^4 (1-\nu^2)}{Eh^3 b^2} N_y^r \quad (25)$$

4- مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی تک جمله‌ای

تا کنون حل دقیقی برای معادله‌ی (24) ارائه نشده است. این معادله در اینجا با استفاده از روش باقیمانده‌ی وزن دار گالرکین بصورت تقریبی حل خواهد شد. بر اساس این روش، خیز میکروصفحه بعنوان متغیر وابسته در رابطه‌ی (24) می‌تواند بصورت ترکیبی از یک مجموعه‌ی کامل از توابع پایه‌ی مستقل خطی نوشته شود، به طوری که این توابع پایه تمام شرایط مرزی جابجایی و نیرویی مساله را ارضاء نمایند [42]. ثابت شده است که اگر از شکل موده‌های خطی و نامیرا بعنوان این توابع پایه استفاده شود، علاوه بر افزایش دقت تقریب، تنها یک جمله برای همگرا شدن پاسخ کافی است [43-45]. از آنجایی که برای شکل موده‌های خطی و نامیرای صفحات با شرایط مرزی چهار طرف گیردار حل دقیقی وجود ندارد، می‌توان از حاصلضرب شکل موده‌های خطی و نامیرای دو تیر دوسر گیردار بعنوان توابع پایه در این حالات استفاده نمود [26]. بنابراین خیز میکروصفحه را می‌توان بر اساس تقریب یک جمله - ای بصورت رابطه (26) نوشت.

$$w(x, y, t) = \zeta(t) \varphi(x, y) \quad (26)$$

که در آن $\varphi(x, y)$ تابع پایه‌ی تقریب زنده‌ی میدان جابجایی بوده و $\zeta(t)$ پارامتر مجهولی است که باید بدست بیاید. بنابراین بر اساس توضیحات ارائه شده، $\varphi(x, y)$ را می‌توان بصورت رابطه (27) نوشت.

$$\varphi(x, y) = \Lambda \psi(x) \psi(y) \quad (27)$$

به طوری که در آن ψ شکل مود اول خطی و نامیرای تیر دوسر گیردار بوده و ثابت Λ نیز به منظور نرمال کردن $\varphi(x, y)$ نسبت به خیز حدکثر میکروصفحه، که در نقطه مرکزی آن رخ می‌دهد، در آن ضرب شده است. شکل مود خطی و نامیرای تیر دوسر گیردار که در رابطه (27) استفاده شده است نیز بصورت رابطه (28) داده شده است.

$$\psi(x) = \cosh(\gamma x) - \cos(\gamma x) - \mathcal{G} [\sinh(\gamma x) - \sin(\gamma x)] \quad (28)$$

که در آن طبق رابطه (29):

$$\gamma = 4.7300, \mathcal{G} = 0.9825 \quad (29)$$

قابل توجه است که متغیرهای x و y که در روابط (26) تا (28) استفاده شده‌اند بی‌بُعد هستند و محدوده‌ی تغییرات آن‌ها طبق شکل 1 و رابطه‌ی (23) از صفر تا یک می‌باشد. همچنین ثابت Λ که برای نرمال کردن شکل مود از آن استفاده شده است، بصورت رابطه‌ی (30) قابل محاسبه می‌باشد [44].

$$\Lambda = 0.3965 \quad (30)$$

مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی یک جمله‌ای نیز بر اساس روش باقیمانده‌ی وزن دار گالرکین با جایگذاری از رابطه‌ی (26) در رابطه‌ی (24) و ضرب کردن طرفین این رابطه در $\varphi(x, y)$ و سپس انتگرال گیری از آن روی دامنه A بصورت رابطه‌ی (31) بدست می‌آید.

$$\zeta + K_1 \zeta = \bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta \varphi)^2 dA \quad (31)$$

به طوری که طبق رابطه (32):

$$K_1 = \frac{\int_A \left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \varphi \nabla^4 \varphi - N_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dA}{\int_A \varphi^2 dA},$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\int_A \varphi^2 dA} \quad (32)$$

که در آن $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_1^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$ است.

در این جا برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی میکروصفحه‌ی خیز برداشته در اثر اعمال ولتاژهایی کوچکتر از ولتاژ کشیدگی سیستم، از مدل ارائه شده توسط باترا و همکارانش [6] استفاده شده است. بر اساس این مدل، برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی سیستم به ترتیبی که در ادامه ذکر شده است عمل خواهیم کرد. ابتدا با صرف نظر کردن از جمله‌ی اینرسی در رابطه‌ی (31) (یعنی $\zeta_0 = 0$) و برابر گرفتن اختلاف پتانسیل کل اعمال شده به سیستم با ولتاژ DC اعمالی، خیز استاتیکی میکروصفحه (ζ_s) را بدست می‌آوریم. سپس با توجه به فیزیک مساله، فرض می‌شود که ابتدا میکروصفحه با اعمال اختلاف پتانسیل DC خیز بردارد و سپس حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی‌اش نوسان نماید [6]. بر اساس این فرضیه خیز میکروصفحه را می‌توان بصورت $\zeta(t) = \zeta_s + \Delta \zeta(t)$ نوشت. با جایگذاری از این عبارت در رابطه‌ی (31) و استفاده از بسط تیلور عبارت $\int_A \varphi / (1 - \zeta \varphi)^2 dA$ حول ζ_s ، معادله‌ی ارتعاشات آزاد میکروصفحه‌ی خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی با صرف نظر کردن از جملات غیرخطی بصورت رابطه‌ی (33) بدست می‌آید.

$$\Delta \zeta + \bar{K}_1 \Delta \zeta = 0 \quad (33)$$

که در آن طبق رابطه (34):

$$\bar{K}_1 = K_1 - 2\bar{\beta} \int_A \varphi^2 / (1 - \zeta_s \varphi)^3 dA \quad (34)$$

اکنون برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی میکروصفحه‌ی خیز برداشته، فرض می‌کنیم $\Delta \zeta(t) = \Delta \zeta_0 \exp(i\omega t)$ باشد، که در آن $i = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس پایه‌ی میکروصفحه است. با جایگذاری از $\Delta \zeta(t)$ در رابطه‌ی (33)، فرکانس پایه‌ی میکروصفحه بصورت $\omega = \sqrt{\bar{K}_1}$ بدست خواهد آمد.

واضح است که به ازای هر ولتاژ اعمالی به صفحه، ابتدا باید خیز استاتیکی بدست بیاید و سپس با استفاده از مقدار آن، فرکانس پایه‌ی سیستم محاسبه شود. در اینجا برای محاسبه‌ی خیز استاتیکی میکروصفحه، از روش

تکراری¹ ارائه شده توسط عسکری و طهانی [46,44] استفاده خواهیم نمود. بدین منظور ابتدا معادله‌ی حاکم بر تعادل میکروصفحه را بصورت رابطه‌ی (35) در نظر می‌گیریم.

$$K_1 \zeta_s - \bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_s \varphi)^2 dA = 0 \quad (35)$$

این معادله را می‌توان بصورت رابطه (36) بازنویسی نمود:

$$K_1 \zeta_s + \mathbb{N}(\zeta_s) = 0 \quad (36)$$

که در آن طبق رابطه (36):

$$\mathbb{N}(\zeta_s) = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_s \varphi)^2 dA \quad (37)$$

در اولین مرحله از این روش تکراری، جمله‌ی غیرخطی رابطه‌ی (35) (یعنی $\mathbb{N}(\zeta_s)$) هنگامی که خیز میکروصفحه صفر است (یعنی $\zeta_{s,0} = 0$)، محاسبه می‌شود. طبق رابطه (38) داریم:

$$\mathbb{N}_0 = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_{s,0} \varphi)^2 dA = -\bar{\beta} \int_A \varphi dA \quad (38)$$

با جایگذاری \mathbb{N}_0 از رابطه‌ی (38) در رابطه‌ی (36)، اولین تقریب از خیز حداکثر صفحه (یعنی $\zeta_{s,1}$) بصورت رابطه (39) بدست می‌آید:

$$\zeta_{s,1} = \frac{-\mathbb{N}_0}{K_1} \quad (39)$$

تقریب بعدی از $\mathbb{N}(\zeta_s)$ (یعنی \mathbb{N}_1) با جایگذاری $\zeta_{s,1}$ از رابطه‌ی (39) در معادله‌ی (37) بصورت رابطه (40) بدست خواهد آمد:

$$\mathbb{N}_1 = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_{s,1} \varphi)^2 dA \quad (40)$$

با جایگذاری \mathbb{N}_1 از رابطه‌ی (40) در معادله‌ی (36)، تقریب دوم از خیز حداکثر میکروصفحه (یعنی $\zeta_{s,2}$) نیز بدست می‌آید. طبق رابطه (41) داریم:

$$\zeta_{s,2} = \frac{-\mathbb{N}_1}{K_1} \quad (41)$$

این روند تا زمانی که پاسخ بدست آمده برای خیز حداکثر همگرا شود یا اینکه ناپایداری کشیدگی رخ دهد، ادامه خواهد یافت. معیار همگرایی مورد استفاده در این پژوهش بصورت رابطه (42) می‌باشد:

$$\left| (\zeta_{s,i} - \zeta_{s,i-1}) / \zeta_{s,i} \right| \leq 10^{-6} \quad (42)$$

همچنین ناپایداری کشیدگی هنگامی رخ خواهد داد که طبق رابطه (43):

$$\zeta_{s,i} > 1 \quad (43)$$

شایان ذکر است که انتگرال‌های $\int_A \varphi / (1 - \zeta_{s,i} \varphi)^2 dA$ در هر مرحله بصورت عددی با استفاده از روش انتگرال گیری سیمپسون محاسبه و تکرار خواهند شد.

5- نتایج

5-1- مقایسه و صحنه‌گذاری

با توجه به اینکه تاکنون نتایجی از تحلیل ارتعاش آزاد وابسته به بُعد برای میکروصفحات نازک چهار طرف گیردار با و بدون در نظر گرفتن اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی منتشر نشده است، در اولین مرحله فرکانس بی‌بُعد بدست آمده برای صفحات تخت بدون در نظر گرفتن اثر اندازه (یعنی مقایسه را برای صفحات تخت با ضریب‌های منظر² مختلف بدون در نظر گرفتن اثر نیروهای محوری، نشان می‌دهد.

همانطور که جدول 1 نشان می‌دهد، مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی حاضر

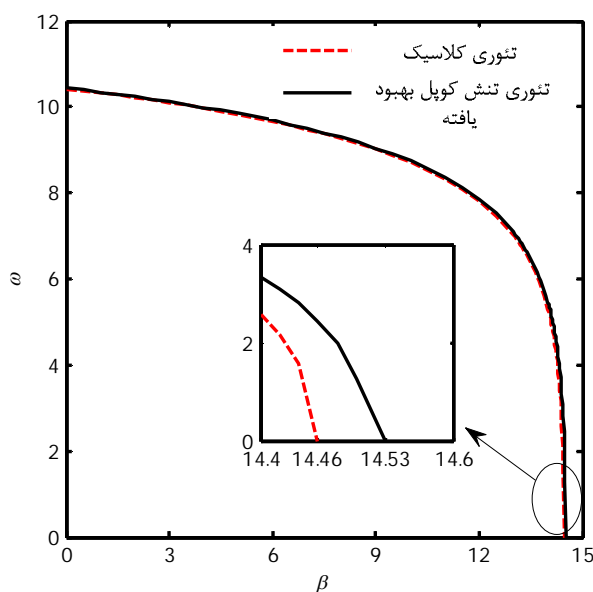
1- Iterative method
2- Aspect ratios

جدول 1 مقایسه‌ی بین فرکانس پایه‌ی بی‌بُعد در میکروصفحات تخت با ضریب‌های

منظری متفاوت بدون در نظر گرفتن اثرات اندازه			
روش حل	$a/b=0.1$	$a/b=0.5$	$a/b=1$
پژوهش حاضر	6/4783	7/1151	10/4234
آریناس [47]	6/4784	7/1153	10/4237

جدول 2 خواص هندسی و مکانیکی میکروصفحه‌ای از جنس سیلیکون

l [28]	ρ	E	ν	h	d
0/592 μm	2320 kg/m^3	169 GPa	0/3	20 μm	5 μm



شکل 2 تغییرات فرکانس پایه‌ی بی‌بُعد میکروصفحه‌ی مربعی با خواص داده شده در جدول 2 بر حسب تغییرات اختلاف پتانسیل بی‌بُعد اعمال شده بر سیستم

بهبود یافته‌ی تنش کوپل به مقدار تعیین شده از تئوری کلاسیک، از ضریب منظری میکروصفحه قبلاً نیز توسط تسیاتاس [14] با رسم نمودارهای متعدد گزارش شده بود.

همانطور که از رابطه‌ی (44) نیز مشاهده می‌شود، هنگامی که نیروی محوری به سیستم وارد شده باشد، این نسبت (یعنی $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$) از ضریب منظری میکروصفحه مستقل نخواهد بود. اثر نیروی محوری بر تغییرات این نسبت برای میکروصفحات مربعی با ضریب پواسون $\nu=0.3$ در شکل 3 بررسی شده است.

بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل 3، مشاهده می‌گردد که اثر نیروهای محوری فشاری از کششی بیشتر است. بنابراین اگر میکروصفحه تحت اثر تنش‌های پسماند فشاری قرار بگیرد، در نظر گرفتن اثرات اندازه برای تحلیل ارتعاشات آزاد آن ضروری‌تر خواهد بود. البته قابل ذکر است که میکروصفحات به کار رفته در حسگرهای تشدیدی معمولاً تحت تنش‌های کوچک کششی قرار دارند [48]. بنابراین در چنین حالاتی که نیروهای محوری اعمال شده به سیستم کششی و کوچک باشند، بر اساس نتایج شکل 3 و استقلال نسبت $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$ از ضریب منظری برای صفحات بدون تنش پسماند، می‌توان گفت که این نسبت از ضریب منظری تقریباً مستقل خواهد بود.

شکل‌های 4 (الف) و 4 (ب) اثر ضریب منظری بر نسبت $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$ را برای میکروصفحه‌ای با ضریب پواسون $\nu=0.3$ تحت نیروهای محوری به-ترتیب فشاری و کششی را نشان می‌دهند. بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل 4، دیده می‌شود که اثر ضریب منظری بر نسبت $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$ در نیروهای محوری فشاری از کششی بیشتر است.

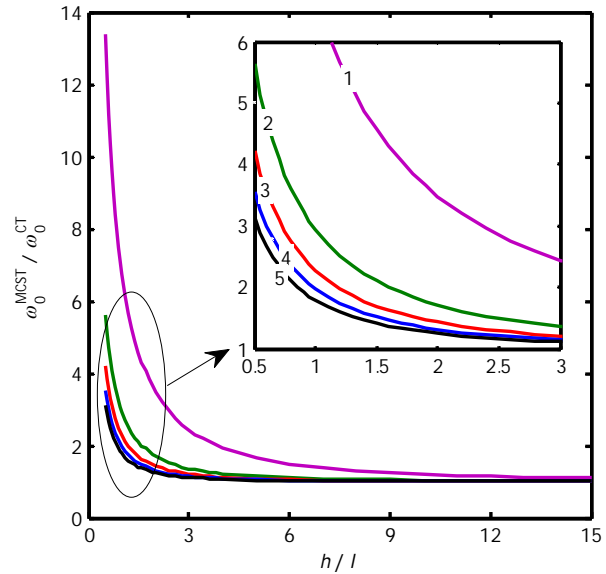
شایان ذکر است که اعمال نیروهای محوری فشاری بیشتر از بار بحرانی کمانش میکروصفحه، باعث کمانش آن و صفر شدن فرکانس پایه‌ی سیستم می‌گردد. قابل توجه است که این محدوده در اعمال بار فشاری محوری در شکل 4 (ب) رعایت شده است (بار بحرانی کمانش میکروصفحه با ضریب منظری $a/b=0.1$ بعنوان محدود کننده در اعمال نیروی محوری فشاری در این شکل می‌باشد). لازم به ذکر است که بار بحرانی کمانش برای میکروصفحات تخت طبق رابطه‌ی (34) با برابر صفر قرار دادن K_1 بدست خواهد آمد. همچنین این بار بحرانی برای حالاتی که $N_1 = N_2 = N$ باشد، می‌تواند بصورت رابطه‌ی (46) ساده شود:

$$N = \frac{\int_A \phi \nabla^4 \phi dA}{\int_A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dA} \quad (46)$$

با توجه به شکل‌های 3 و 4، دیده می‌شود که اثرات اندازه در میکروصفحات تختی که در آن‌ها نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی صفحه بزرگتر از 10 است، معمولاً قابل نظر کردن می‌باشد. البته این نتیجه برای میکروصفحاتی که تحت نیروهای محوری کششی و یا فشاری نه‌چندان بزرگ قرار دارند، درست می‌باشد. همچنین همانطور که در شکل 3 نیز نشان داده شده است، با اعمال نیروهای محوری فشاری نسبتاً بزرگ ($N_1 = N_2 = -4$)، این محدوده افزایش یافته و اثرات اندازه برای گستره‌ی بزرگتری از میکروصفحات باید در نظر گرفته شود.

5-3- بررسی اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی

در این قسمت برای مطالعه‌ی اثرات اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات الکترومکانیکی، میکروصفحه‌ای با نسبت پواسون $\nu=0.3$ بدون اعمال نیروهای محوری در نظر گرفته شده است.



شکل 3 اثر نیروی محوری بر روی نسبت $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$ برای یک میکروصفحه‌ی مربعی با نسبت پواسون $\nu=0.3$ ، نیروهای محوری اعمال شده در دو جهت x و y برابر و برای خطوط با شماره‌های 1 تا 5 به ترتیب مساوی هستند با $2, 0, -2, -4$ و 4

شایان ذکر است که فرانسیس و دیفور نتایج آزمایش‌های خود را برای میکروصفحات مربعی با مساحت‌های مختلفی انجام داده‌اند و نتیجه‌ی مشترک نهایی را بصورت بی‌بُعد گزارش کرده‌اند [34]. همچنین اختلاف پتانسیل کشیدگی بی‌بُعدی که توسط آنها گزارش شده است، 10.9 می‌باشد که با توجه به تفاوت روند بی‌بُعد سازی آن‌ها با روند به کار رفته در پژوهش حاضر در ضریب 16/12 ضرب گردیده است. همانگونه که از شکل 2 مشاهده می‌گردد، استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته، شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک¹ و آزمایشگاهی را از بین می‌برد.

5-2- بررسی اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تخت

نسبت فرکانس پایه‌ی میکروصفحه تخت محاسبه شده با تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به مقدار آن از تئوری کلاسیک طبق روابط (32) و (34) بصورت رابطه (44) خواهد بود:

$$\frac{\omega_0^{MCST}}{\omega_0^{CT}} = \sqrt{\frac{\int_A \left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \phi \nabla^4 \phi - N_1 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - N_2 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dA}{\int_A \left(\frac{1}{12} \phi \nabla^4 \phi - N_1 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - N_2 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dA}} \quad (44)$$

واضح است که برای میکروصفحات بدون نیروی محوری، این رابطه می‌تواند بصورت رابطه (45) ساده شود:

$$\frac{\omega_0^{MCST}}{\omega_0^{CT}} = \sqrt{1+6 \frac{1-\nu}{(h/l)^2}} \quad (45)$$

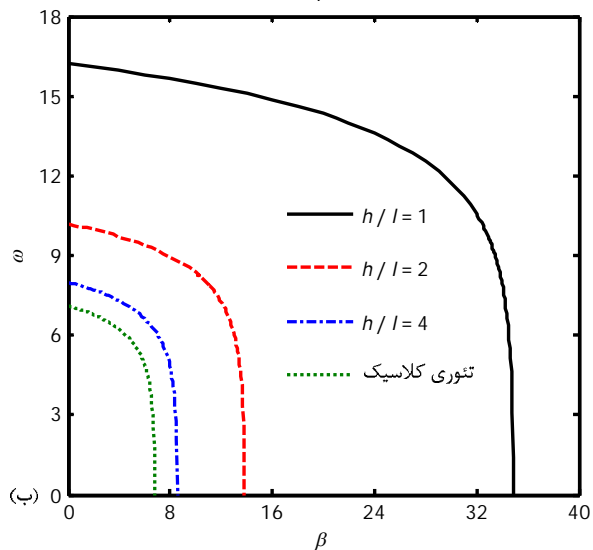
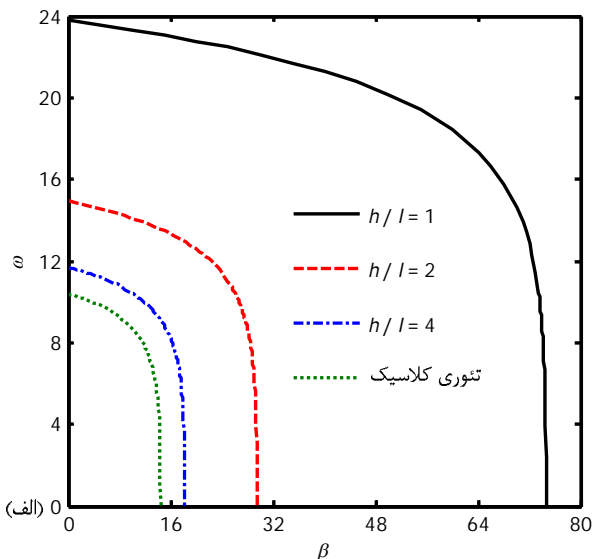
بنابراین همانطوری که دیده می‌شود، این نسبت تنها به پارامتر اندازه‌ی میکروصفحه (یعنی h/l) و نسبت پواسون آن بستگی دارد. به عبارت دیگر این نسبت هنگامی که نیروی محوری به سیستم وارد نشده باشد، کاملاً از ضریب منظری میکروصفحه مستقل است. شایان ذکر است که نتیجه‌ی مشابهی برای استقلال نسبت خیز استاتیکی محاسبه شده با استفاده از تئوری

1- Classical theory (CT)

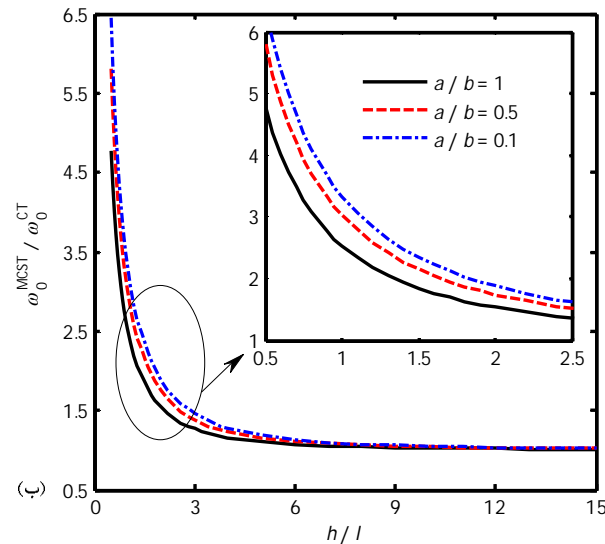
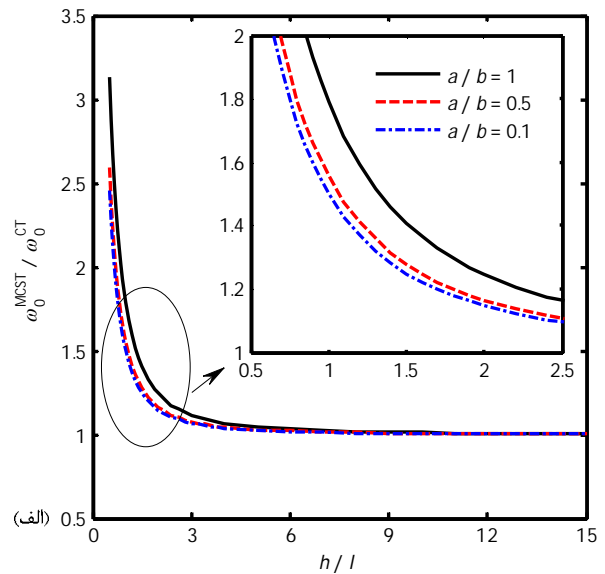
الکتریکی، این نسبت دیگر از ضریب منظری مستقل نخواهد بود. این وابستگی از رابطه‌ی (34) نیز بدلیل وابستگی خیز استاتیکی (ζ_s) به ضریب منظری، قابل استنباط است. همان‌طور که جدول‌های 3 و 4 نشان می‌دهند، در نظر گرفتن اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی، از صفحات تخت ضروری‌تر است.

جدول 3 اثر اندازه بر نسبت $\omega^{MCST} / \omega^{CT}$ برای میکروصفحات الکترومکانیکی خیز

برداشته تحت اختلاف پتانسیل‌های مختلف با ضریب منظری $a/b=1$					
$\beta=12$	$\beta=9$	$\beta=6$	$\beta=3$	$\beta=0$	پارامتر اندازه
5/5918	4/8548	4/5378	4/3486	4/2190	$h/l=0.5$
2/9707	2/5915	2/4331	2/3413	2/2804	$h/l=1$
1/7746	1/5742	1/4978	2/4570	1/4318	$h/l=2$
1/1918	1/1186	1/0965	1/0863	1/0807	$h/l=5$
1/0563	1/0316	1/0251	1/0223	1/0208	$h/l=10$
1/0260	1/0142	1/0113	1/0100	1/0093	$h/l=15$
1/0149	1/0081	1/0063	1/0056	1/0052	$h/l=20$
1/0096	1/0052	1/0041	1/0036	1/0034	$h/l=25$
1/0067	1/0036	1/0028	1/0025	1/0023	$h/l=30$



شکل 5 اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات الکترومکانیکی با ضریب‌های منظری (الف) $a/b=1$ و (ب) $a/b=0.5$



شکل 4 اثر ضریب منظری بر روی نسبت $\omega_0^{MCST} / \omega_0^{CT}$ برای یک میکروصفحه با نسبت پواسون $\nu=0.3$ تحت نیروهای محوری (الف) $N_1=N_2=4$ و (ب) $N_1=N_2=-1$

شکل 5 تغییرات فرکانس پایه‌ی این میکروصفحه را بر حسب تغییرات اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی بی‌بُعد اعمال شده بر آن از صفر تا ولتاژ کشیدگی سیستم، در چند پارامتر اندازه مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود این فرکانس با افزایش اختلاف پتانسیل الکتریکی کاهش پیدا می‌کند و زمانی که اختلاف پتانسیل اعمالی به ولتاژ کشیدگی سیستم می‌رسد، صفر می‌شود. بر اساس نتایج شکل 5، دیده می‌شود که در نظر گرفتن اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات الکترومکانیکی که تحت اعمال ولتاژ الکتریکی خیز برداشته‌اند از صفحات تخت مهم‌تر است، چراکه با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی فاصله‌ی بین نتایج تئوری کلاسیک و تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل افزایش می‌یابد.

جدول‌های 3 و 4 اثرات اندازه بر نسبت $\omega^{MCST} / \omega^{CT}$ را در چند ولتاژ اعمال شده‌ی مختلف به ترتیب برای میکروصفحاتی با نسبت پواسون $\nu=0.3$ و ضریب‌های منظری $a/b=1$ و $a/b=0.5$ بدون اعمال نیروی محوری نشان می‌دهند. همان‌طور که قبلاً نیز نشان داده شد، دیده می‌شود که این نسبت هنگامی که اختلاف پتانسیلی به سیستم وارد نشده باشد، از ضریب منظری کاملاً مستقل است. ولی با اعمال اختلاف پتانسیل

درحالی‌که این نسبت برای میکروصفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی تا عدد 20 افزایش می‌یابد.

7- مراجع

- [1] J. F. Rhoads, S. W. Shaw, K. L. Turner, The nonlinear response of resonant microbeam systems with purely-parametric electrostatic actuation, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 16, pp. 890-899, 2006.
- [2] S. D. Senturia, *Microsystem Design*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [3] J. A. Pelesko, Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 62, No. 3, pp. 888-908, 2002.
- [4] A. H. Nayfeh, M. I. Younis, Dynamics of MEMS resonators under superharmonic and subharmonic excitations, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 1840-1847, 2005.
- [5] J. D. Zook, D. W. Burns, H. Guckel, J. J. Sniegowski, R. L. Engelstad, Z. Feng, Characteristics of polysilicon resonant microbeams, *Sensor Actuat. A-Phys.*, Vol. 35, pp. 290-294, 1992.
- [6] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field, *J. Sound Vib.*, Vol. 309, pp. 600-612, 2008.
- [7] H. C. Nathanson, W. E. Newell, R. A. Wickstrom, J. R. Davis, The resonant gate transistor, *IEEE T. Electron. Dev.*, Vol. 14, No. 3, pp. 117-133, 1967.
- [8] G. I. Taylor, The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials, *Proc. of Roy. Soc. A*, 306, pp. 423-434, 1968.
- [9] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metall. Mater.*, Vol. 42, pp. 475-487, 1994.
- [10] J. S. Stolken, A. G. Evans, Microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Mater.*, Vol. 46, pp. 5109-5115, 1998.
- [11] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, Phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* Vol. 41, No. 12, pp. 1825-1857, 1993.
- [12] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.
- [13] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1508, 2003.
- [14] G. C. Tsiatas, A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 46, pp. 2757-2764, 2009.
- [15] M. Asghari, Geometrically nonlinear micro-plate formulation based on the modified couple stress theory, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 51, pp. 292-309, 2012.
- [16] E. Jomehzadeh, H. R. Noori, A. R. Saidi, The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory, *Physica E*, Vol. 43, pp. 877-883, 2011.
- [17] B. Akgöz, Ö. Civalek, Modeling and analysis of micro-sized plates resting on elastic medium using the modified couple stress theory, *Meccanica* Vol. 48, pp. 863-873, 2013.
- [18] L. L. Ke, Y. S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *J. Sound Vib.*, Vol. 331, pp. 94-106, 2012.
- [19] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, J. N. Reddy, Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method, *Appl. Math. Model.*, Vol. 37, pp. 4626-4633, 2013.
- [20] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, A non-classical Mindlin plate finite element based on a modified couple stress theory, *Eur. J. Mech. A-Solid*, Vol. 42, pp. 63-80, 2013.
- [21] L. L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, M. A. Bradford, Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates, *Compos. Struct.*, Vol. 94, pp. 3250-3257, 2012.
- [22] H. T. Thai, D. H. Choi, Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory, *Compos. Struct.*, Vol. 95, pp. 142-153, 2013.
- [23] H. T. Thai, S. E. Kim, A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory, *Compos. Part B-Eng* Vol. 45, pp. 1636-1645, 2013.
- [24] E. M. Abdel-Rahman, M. I. Younis, A. H. Nayfeh, Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 12, No. 6, pp. 759-766, 2002.
- [25] X. Zhao, E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, A reduced-order model for electrically actuated microplates, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 14, pp. 900-906, 2004.

جدول 4 اثر اندازه بر نسبت $\omega^{MST} / \omega^{CT}$ برای میکروصفحات الکترومکانیکی خیز

برداشتنه تحت اختلاف پتانسیل‌های مختلف با ضریب منظری $a/b=0.5$					
پارامتر اندازه	$\beta=0$	$\beta=1.5$	$\beta=3$	$\beta=4.5$	$\beta=6$
$h/l=0.5$	4/2190	4/3599	4/5734	4/9579	6/0978
$h/l=1$	2/2804	2/4367	2/4506	2/6438	3/2348
$h/l=2$	1/4318	1/4593	1/5059	1/6007	1/9213
$h/l=5$	1/0807	1/0869	1/0986	1/1270	1/2557
$h/l=10$	1/0208	1/0224	1/0257	1/0342	1/0809
$h/l=15$	1/0093	1/0100	1/0115	1/0155	1/0383
$h/l=20$	1/0052	1/0057	1/0065	1/0088	1/0221
$h/l=25$	1/0034	1/0036	1/0042	1/0056	1/0143
$h/l=30$	1/0023	1/0025	1/0029	1/0039	1/0100

بر اساس نتایج این دو جدول، اثرات اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تختی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی آن‌ها بزرگتر از 10 است، معمولاً قابل صرف نظر کردن می‌باشد. درحالی‌که این محدوده برای صفحات الکترومکانیکی خیز برداشته تا $h/l=20$ گسترش می‌یابد.

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مدل وابسته به بُعدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد میکروصفحات چهار طرف گیردار خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی ارائه شد. معادله‌ی وابسته به بُعد حاکم بر حرکت که در آن اثرات تنش‌های پسماند محوری و نیروی گسترده و غیرخطی الکترواستاتیک لحاظ شده بود، بر اساس مدل صفحه‌ی کیرشهف و تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به کمک اصل همیلتون استخراج گردید. این معادله با استفاده از تقریب تک مدی در روش باقی‌مانده‌ی وزن‌دار گالرکین به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان کاهیده و فرکانس پایه‌ی سیستم با استفاده از آن بدست آورده شد. مشاهده گردید که فرکانس پایه‌ی سیستم با افزایش اختلاف پتانسیل اعمال شده به آن کاهش می‌یابد و هنگامی‌که اختلاف پتانسیل ورودی به ولتاژ کشیدگی سیستم برسد، صفر می‌شود. یافته‌های پژوهش حاضر با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی موجود در ادبیات مقایسه و صحت‌گذاری شدند. بررسی اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تخت و خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی، نتایج مهمی را در برداشت که در ادامه خلاصه شده‌اند.

- استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل، شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک و مشاهدات آزمایشگاهی را برای اختلاف پتانسیل کشیدگی میکروصفحات چهار طرف گیردار از بین می‌برد.
- نسبت فرکانس پایه‌ی محاسبه شده با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به مقدار بدست آمده از تئوری کلاسیک در صفحات تخت هنگامی‌که تنش‌های پسماند محوری صفر باشند، کاملاً از ضریب منظری میکروصفحه مستقل بوده و فقط به نسبت پواسون آن بستگی دارد.
- این نسبت فرکانسی در حالتی‌که تنش‌های پسماند محوری وجود داشته باشند و یا اختلاف پتانسیل الکتریکی به سیستم اعمال شده باشد، از ضریب منظری مستقل نیست. همچنین تنش‌های پسماند محوری فشاری اثر بیشتری از تنش‌های کششی بر این نسبت فرکانسی می‌گذارند.
- اثرات اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات خیز برداشته از میکروصفحات تخت بیشتر است. بنابراین در نظر گرفتن اثرات اندازه در این سیستم‌ها ضروری‌تر می‌باشد.
- اثرات اندازه در میکروصفحات تختی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادیشان بیشتر از 10 باشد، معمولاً قابل صرف نظر کردن است.

- [37] P. C. P. Chao, C. W. Chiu, T. H. Liu, DC dynamic pull-in predictions for a generalized clamped-clamped microbeam based on a continuous model and bifurcation analysis, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 18, pp. 115008, 2008.
- [38] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. 2nd ed.*, Philadelphia: Taylor & Francis, 2007.
- [39] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics, 2nd ed.*, Burlington, MA 01803, USA: Academic Press, 2009.
- [40] J. Qian, C. Liu, D. C. Zhang, Y. P. Zhao, Residual stresses in micro-electro-mechanical system, *J. Mech. Strength*, Vol. 23, pp. 393-401, 2001.
- [41] E. B. Magrab, *Vibrations of Elastic Systems with Applications to MEMS and NEMS*, New York: Springer, 2012.
- [42] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [43] A. R. Askari, M. Tahani, Analytical Approximations to Nonlinear Vibration of a Clamped Nanobeam in Presence of the Casimir Force, *Int. J. Aerosp. Lightweight Struct.*, Vol. 2, No. 3, pp. 317-334, 2012.
- [44] A. R. Askari, M. Tahani, An alternative reduced order model for electrically actuated micro-beams under mechanical shock, *Mech. Res. Commun.*, 2014.
- [45] A. R. Askari, M. Tahani, Investigating nonlinear vibration of a fully clamped nanobeam in presence of the van der Waals attraction, *Appl. Mech. Mater.*, Vol. 226-228, pp. 181-185, 2012.
- [46] A. R. Askari, *Static and Dynamic Analysis of Nano/Micro Beams Actuated by DC Voltage in presence of the van der Waals Force* MS Thesis, Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, 2013. (in Persian)
- [47] J. P. Arenas, On the vibration analysis of rectangular clamped plates using the virtual work principle, *J. Sound Vib.*, Vol. 266, pp. 912-918, 2003.
- [48] H. A. C. Tilmans, R. Legtenberg, Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators - part II: theory and performance, *Sensor Actuate. A-Phys.*, Vol. 45, No. 1, pp. 67-84, 1994.
- [26] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the Casimir force, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 45, pp. 3558-3583, 2008.
- [27] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Kármán elliptic plates incorporating the Casimir force, *J. Sound Vib.*, Vol. 315, No. 4-5, pp. 939-960, 2008.
- [28] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. T. Ahmadian, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, *Sensor Actuat. A-Phys.*, Vol. 171, pp. 370-374, 2011.
- [29] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Size-dependent pull-in phenomena in nonlinear microbridges, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 54, pp. 306-310, 2012.
- [30] S. Kong, Size effect on pull-in behavior of electrostatically actuated microbeams based on a modified couple stress theory, *Appl. Math. Model.*, pp. In press, 2013.
- [31] J. Zhang, Y. Fu, Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory, *Meccanica*, Vol. 47, pp. 1649-1658, 2012.
- [32] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *J. Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (in Persian)
- [33] M. Baghani, Analytical study on size-dependent static pull-in voltage of microcantilevers using the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 54, No. 0, pp. 99-105, 2012.
- [34] O. Français, I. Dufour, Normalized abacus for the global behavior of diaphragms: pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation, *J. Model. Simul. Microsyst.*, Vol. 1, No. 2, pp. 149-60, 1999.
- [35] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Mater. Struct.*, Vol. 16, pp. R23-31, 2007.
- [36] P. C. P. Chao, C. W. C. hui, C. Y. Tsai, A novel method to predict the pull-in voltage in a closed form for micro-plates actuated by a distributed electrostatic force, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 16, pp. 986-998, 2006.