



ارائهٔ یک مدل الکترومکانیکی وابسته به بُعد برای میکروحسگرهای تشدیدی صفحه‌ای مستطیلی شکل بر اساس تئوری بهبود یافتهٔ تنش کوپل

امیر رضا عسکری^۱، مسعود طهانی^{۲*}

۱- دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۲- استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

mtahani@um.ac.ir .91775-1111 *

چکیده

میکروحسگرهای تشدیدی صفحه‌ای مستطیلی شکل از فرکانس تشدید میکروصفحات گیردار خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی برای حس کدن استفاده می‌کنند. دعف پژوهش حاضر تحلیل ارتعاشات آزاد این سیستم‌ها به منظور بدست آوردن فرکانس تشدید آن-هاست. بدین منظور تئوری بهبود یافتهٔ تنش کوپل به همراه مدل صفحه‌ی کیرشهف در نظر گرفته می‌شود و معادله‌ی حرکت وابسته به بُعد که اثرات تنش‌های پسماند محوری و نیروی گسترش و غیرخطی الکترواستاتیک را در نظر می‌گیرد، با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌گردد. کوچکترین فرکانس سیستم نیز بعنوان فرکانس تشدید این میکروصفحات با استفاده از مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی تک مُدی گالرکین استخراج می‌گردد. نتایج حاکی از آن است که فرکانس پایهٔ سیستم با افزایش اختلاف پتانسیل اعمال شده به آن کاهش بیان می‌کند و هنگامی که اختلاف پتانسیل ورودی به ولتاژ کشیدگی سیستم برسد، صفر می‌شود. یافته‌های پژوهش پیش رو با نتایج موجود در ادبیات مقایسه و صحه‌گذاری می‌شوند و تطابق بسیار خوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود. همچنین دیده می‌شود که استفاده از تئوری بهبود یافتهٔ تنش کوپل در تحلیل ناپایداری کشیدگی میکروصفحات گیردار مستطیلی، می‌تواند شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک و مشاهدات آزمایشگاهی را حذف نماید. بعلاوه مشاهده می‌گردد که بهحساب آوردن اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد میکروصفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی از میکروصفحات تخت ضروری تر است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۷ فروردین ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۲ خرداد ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۲۶ شهریور ۱۳۹۳

کلید واژگان:

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی

صفحات مستطیلی گیردار

مدل کاهش مرتبه داده شده

فرکانس پایه

ولتاژ کشیدگی

Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory

Amir Reza Askari, Masoud Tahani*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
* P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, mtahani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 April 2014
Accepted 13 June 2014
Available Online 17 September 2014

Keywords:
MEMS
Clamped rectangular micro-plates
Reduced order model
Fundamental frequency
Pull-in voltage

ABSTRACT

Rectangular plates-based resonant micro-sensors utilize the resonance frequency of electrically pre-deformed clamped micro-plates for sensing. Free vibration analysis of such systems in order to find their resonance frequency is the objective of present paper. For this aim, the modified couple stress theory (MCST) together with the Kirchhoff plate model is considered and the size-dependent equation of motion which accounts for the effect of axial residual stresses as well as the non-linear and distributed electrostatic force is derived using the Hamilton's principle. The lowest frequency of the system as the resonance frequency of these micro-plates is extracted using a single mode Galerkin based reduced order model (ROM). It is found that the fundamental frequency of the system is decreased with an increase of applied voltage and becomes zero when the input voltage reaches the pull-in voltage of the system. The findings of present paper are compared and validated by available results in the literature and an excellent agreement between them is observed. Also it is found that using the MCST in pull-in analysis of clamped rectangular micro-plates can remove the existing gap between the results of classical theory (CT) and available empirical observations. Furthermore, it is observed that accounting for the size-effect on free vibration analysis of electro statically pre-deformed micro-plates is more essential than flat ones.

قابلیت تولید انبوهشان اخیراً بشدت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. حسگرهای

میکروالکترومکانیکی تشدیدی^۱ که گستره وسیعی از این سیستم‌ها را شامل

1- Resonant MEMS sensors

۱- مقدمه

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بیشتر بعنوان حسگر و عملگر در صنعت کاربرد دارند. این سیستم‌ها بدليل ابعاد کوچک، توان مصرفی مورد نیاز کم و

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A.R. Askari, M. Tahani, Presenting a size-dependent electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 121-130, 2014 (In Persian)

دلیل این تئوری وابسته به بعد بیشتر مورد توجه پژوهشگران برای بررسی اثر اندازه بر رفتار مکانیکی مواد قرار گرفته است. تاکنون رفتار مکانیکی وابسته به بعد میکروتیرها بعنوان یکی از اعضای پرکاربرد در صنعت توسط پژوهشگران بسیاری با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل مورد بررسی قرار گرفته است. اما پژوهش‌هایی که رفتار وابسته به بعد میکروصفحات را بعنوان یکی دیگر از اعضای پرکاربرد در صنعت مورد توجه قرار دهنده، بسیار محدود هستند. در اینجا پژوهش‌هایی که رفتار وابسته به بعد میکروصفحات را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل بررسی کردند، به طور خلاصه مرور می‌گردند.

تسیارات [14] مدل وابسته به بعدی برای صفحات نازک با شکل دلخواه با استفاده از فرضیات کیرشهف ارائه نمود. او نشان داد که در نظر گرفتن اثرات اندازه صلبیت خمی میکروصفحات را افزایش می‌دهد. همچنین با کوچکتر شدن ضخامت صفحه یا بزرگ‌تر شدن پارامتر مقیاس طول مادی آن، اثر اندازه افزایش می‌باشد. اصغری [15] نیز مدل وابسته به بعدی برای صفحات نازک با شکل دلخواه بر اساس تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی ارائه نمود. جمعهزاده و همکارانش [16] اثر اندازه بر فرکانس‌های طبیعی میکروصفحات نازک مستطیلی و دایروی شکل را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات کیرشهف بصورت تحلیلی بررسی نمودند. ولی آن‌ها تنها میکروصفحات مستطیل شکلی را مورد مطالعه قرار دادند که در آن‌ها دو لبه مقابله گاه ساده داشته باشد. آن‌ها دریافتند که در نظر گرفتن اثر اندازه، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود. آکگر و سیوالک [17] خمی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات مستطیل شکلی را که روی تکیه‌گاه ساده بررسی اند بصورت تحلیلی برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بررسی نمودند. افزایش صلبیت خمی و در نتیجه‌ی آن کاهش خیز استاتیکی و افزایش فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش سیستم نیز در این پژوهش گزارش شد. کی و همکارانش [18] اثر اندازه بر فرکانس‌های طبیعی صفحات ضخیم را با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول به همراه تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل بررسی نمودند. آن‌ها معادلات بدست آمده را با استفاده از نسخه‌ی m روش ریتز حل نمودند و دریافتند که اثرات اندازه هنگامی که ضخامت صفحه با پارامتر مقیاس طول مادی آن برابر می‌شود، بشدت افزایش می‌باشد. روکی و همکارانش [19] نیز خمی استاتیکی میکروصفحات ضخیم را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین بررسی نمودند. افزایش صلبیت خمی نیز در این پژوهش گزارش گردید. زانگ و همکارانش [20] مدل اجزاء محدود وابسته به بعدی برای صفحات ضخیم با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین ارائه نمودند. المان مستطیلی ارائه شده توسط آن‌ها که چهار گره و 15 درجه آزادی در هر گره داشت، دچار پیدیده قفل برشی نمی‌شد. آن‌ها خمی استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات ضخیم را با استفاده از مدل اجزاء محدود خود مورد مطالعه قرار دادند. کی و همکارانش [21] خمی استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروصفحات ضخیم حلقوی ساخته شده از مواد تابعی مدرج 5 را با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل و فرضیات میندلین مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات بدست آمده در مدل خود را با استفاده از روش تربیعات تفاضلی⁶ حل نمودند و نشان دادند که اثرات اندازه بر روی میکروصفحاتی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادیشان بزرگ‌تر از

می‌شوند نیز کاربردهای فراوانی در صنعت دارند، از جمله اینکه بعنوان حسگرهای شیمیایی و جرم مورد استفاده قرار می‌گیرند [1]. اجزای اصلی تشکیل دهنده حسگرهای الکترومکانیکی تشدیدی، میکروتیرها و میکروصفحات الکترومکانیکی هستند [2]. یک میکروصفحه‌ی الکترومکانیکی تشدیدی، یک صفحه نازک و رسانا می‌باشد که بعنوان الکتروود متحرک در فاصله کمی از یک الکترود ثابت و صلب قرار گرفته است [3]. این صفحه‌ی نازک رسانا با اعمال جریان الکتریسیته خیز بر می‌دارد و حول نقطه‌ی تعادلش نوسان می‌کند، به طوری که خیز استاتیکی و ارتعاشات حول نقطه‌ی تعادل به ترتیب بدليل اعمال جریان‌های مستقیم (DC) و متناوب (AC) الکتریسته رخ می‌دهند [4]. شایان ذکر است که در اکثر حسگرهای تشدیدی دامنه‌ی اختلاف پتانسیل AC اعمال شده بسیار کوچکتر از دامنه‌ی ولتاژ DC اعمالی است. همچنین در سیستم‌هایی که دامنه‌ی ولتاژ اعمالی AC از DC خیلی کوچکتر باشد، فرکانس تشدید توسط اختلاف پتانسیل اعمالی DC کنترل می‌شود [5]. بنابراین برای تعیین فرکانس تشدید در این سیستم‌ها، کافیست فرکانس پایه (کوچکترین فرکانس طبیعی سیستم) بدست بیاید [6]. زیرا عمولاً فرکانس تحریک این سیستم‌ها از فرکانس پایه‌ی آن‌ها کوچکتر بوده و سایر فرکانس‌های طبیعی میکروحسگر تحریک نمی‌شود.

شایان ذکر است که اختلاف پتانسیل اعمالی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی دارای یک حد بالایی است که با اعمال ولتاژهایی بالاتر از آن، نیروی برگرداننده کشسان میکروصفحه، توانایی مقابله با نیروی الکترواستاتیک اعمال شده بر آن را ندارد. در این حالت سیستم رفتار ناپایداری از خود بروز می‌دهد و الکتروود متحرک ناگهان به الکتروود ثابت برخورد می‌کند. این ناپایداری که ناپایداری کشیدگی¹ نامیده شده است، برای اولین بار بصورت همزمان توسط نانانسون [7] و تیلور [8] مشاهده گردید و به کوچکترین اختلاف پتانسیل اعمالی که منجر به این ناپایداری می‌شود، ولتاژ کشیدگی می‌گویند.

آخرآزمایش‌های بسیاری نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی مواد در ابعاد میکرون و کوچکتر از آن تحت تاثیر اندازه‌ی آن‌ها قرار می‌گیرد [10.9]. خاصیت وابسته به بعد مواد که یک خاصیت ذاتی است هنگامی نمود پیدا می‌کند که طول مشخصه‌ی (صخامت یا قطر) ماده با پارامتر مقیاس طول مادی آن قابل مقایسه باشد [11.9]. پارامتر مقیاس طول مادی مواد یک خاصیت مکانیکی ماده می‌باشد که مانند سایر خواص مکانیکی بصورت آزمایشگاهی تعیین می‌گردد [9].

مکانیک محیط پیوسته کلاسیک قادر به توصیف رفتار وابسته به بعد مواد نیست. برای برطرف نمودن این عدم توانایی مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک، تئوری‌های محیط پیوسته وابسته به بعد ارائه شده‌اند که از میان آن‌ها تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل² [12] و گرادیان کرنش³ [13] به دلیل سادگی و دقت بالایشان بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. شایان ذکر است که تئوری‌های وابسته به بعد ثوابت مادی بیشتری بعلاوه دو ثابت لامه برای مواد همسان گرد⁴ دارند. به طوری که تئوری‌های بهبود یافته‌ی تنش کوپل و گرادیان کرنش به ترتیب یک و سه ثابت بعلاوه دو ثابت لامه برای مواد همسان گرد دارند [13.12].

تعیین ثوابت مادی مرتبه‌ی بالای سایر تئوری‌های وابسته به بعد نسبت به یک ثابت مادی تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل دشوارتر است. به همین

1- Pull-in instability

2- The modified couple stress theory (MCST)

3- The strain gradient theory (SGT)

4- Isotropic materials

که در آن $\bar{\sigma}$, \bar{e} , \bar{m} و $\bar{\chi}$ به ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور متقارن انحنا می‌باشند. همچنین تانسورهای موجود در رابطه (1) با فرض کوچک بودن کرنش‌ها و جابجایی‌ها، با استفاده از روابط (2) تا (5) بدست می‌آید.

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{e}) \bar{I} + 2\mu \bar{e} \quad (2)$$

$$\bar{e} = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u})^T \right] \quad (3)$$

$$\bar{m} = 2I^2 \mu \bar{\chi} \quad (4)$$

$$\bar{\chi} = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \bar{\theta} + (\bar{\nabla} \bar{\theta})^T \right] \quad (5)$$

بطوریکه $\bar{\nabla}$, \bar{u} , \bar{I} , $\bar{\theta}$ و \bar{A} به ترتیب عملگر گرادیان، بردار جابجایی، بردار چرخش، پارامتر مقیاس طول مادی و تانسور واحد می‌باشند. λ و μ نیز ثوابت لامه هستند. شایان ذکر است که عملگر گرادیان در مختصات دکارتی بصورت $\bar{\nabla} = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ می‌باشد. همچنین بردار چرخش نیز بصورت رابطه (6) تعریف می‌گردد:

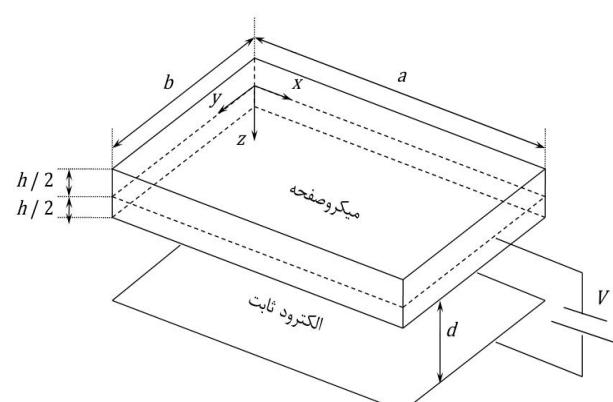
$$\bar{\theta} = \frac{1}{2} \text{curl}(\bar{u}) \quad (6)$$

قابل توجه است که طبق روابط (4) و (5)، تانسور \bar{m} به دلیل تقارن تانسور $\bar{\chi}$ ، متقارن است.

۳- مدل الکترومکانیکی وابسته به بعد برای یک میکروصفحه مستطیل شکل

شکل ۱ شماتیکی از یک میکروصفحه الکترومکانیکی مستطیل شکل را با چگالی ρ ، طول a ، عرض b و ضخامت h نشان می‌دهد. فاصله بین میکروصفحه خیز برداشته و الکترود ثابت نیز d می‌باشد.

با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی ($V_0 + \Delta V(t)$) که در آن V_0 و $\Delta V(t)$ به ترتیب به بخش‌های DC و AC اختلاف پتانسیل اعمالی اشاره دارند) میکروصفحه به سمت الکترود ثابت خیز برمی‌دارد و حول نقطه‌ی تعادلش نوسان می‌کند. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد، در اکثر حسگرهای تشیدی اختلاف پتانسیل اعمال شده AC بسیار کوچک‌تر از ولتاژ اعمالی DC می‌باشد. به همین دلیل فرکانس تشیدی سیستم، همان کوچکترین فرکانس طبیعی میکروصفحه خیز برداشته می‌باشد [5]. نیروی الکترواستاتیک وارد شده بر میکروصفحه در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی V بر واحد سطح، بدون در نظر گرفتن اثرات لبه بصورت رابطه (7) است [35]:



شکل ۱ شماتیکی از یک میکروصفحه الکترومکانیکی مستطیل شکل

10 باشد، قابل صرف نظر کردن است. تای و چوی [22] مدل‌های خطی و غیرخطی وابسته به بعدی برای میکروصفحات مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی مدرج بر اساس فرضیات کیرشهف و میندلین با استفاده از تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل ارائه نمودند. آن‌ها خم استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد این مدل‌ها را برای صفحاتی با تکیه‌گاه ساده بصورت تحلیلی بررسی نمودند. تای و کیم [23] نیز با انجام پژوهشی مشابه مدل وابسته به بعدی بر اساس فرضیات رُدی برای میکروصفحات مستطیلی ارائه نمودند. ارتعاشات آزاد میکروتیرها [24,6] و میکروصفحات الکترومکانیکی خازنی [27-25] تاکنون در مطالعات بسیاری بررسی شده است. ولی تاکنون اثرات هم‌زمان ابعاد و اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی بر فرکانس تشیدی این اجزارها مورد بررسی قرار نگرفته است. شایان ذکر است که مطابق جستجوهای انجام گرفته توسط نویسنده‌گان، اکثر پژوهش‌های موجود در ادبیات به بررسی اثرات اندازه بر ارتعاشات میکروتیرها و میکروصفحات تخت محدود می‌شود و بررسی اثرات ابعاد بر رفتار نوسانی میکروساخترهای خازنی تغییر شکل داده در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی تا کنون بررسی نشده است. همچنین اکثر پژوهش‌های مرتبط با رفتار وابسته به بعد میکروابزارهای خازنی به مطالعه اثرات اندازه بر پاسخ پایدار و ناپایدار استاتیکی در این سیستم‌ها پرداخته‌اند [33-28]. هدف پژوهش پیش‌رو بررسی اثرات اندازه بر فرکانس تشیدی میکروصفحات مستطیل شکل خازنی تشیدی می‌باشد. همچنین با توجه به فرایند ساخت ساده‌تر و کاربرد بیشتر میکروصفحات گیردار در حسگرهای تشیدی [34]، نتایج پژوهش حاضر به این نوع شرط مرزی محدود گردیده است.

بخش‌های بعدی مقاله‌ی پیش‌رو به ترتیب زیر سازماندهی گردیده‌اند. در بخش 2، تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل به طور خلاصه بیان گردیده است. بخش 3 به توصیف مدل الکترومکانیکی وابسته به بعد برای میکروصفحات مستطیل شکل اختصاص یافته است. همچنین معادله‌ی حرکت حاکم بر سیستم در این قسمت استخراج گردیده و سپس بی بعد شده است. در بخش 4 مدل کاهش مرتبه داده شده تک جمله‌ای بر اساس روش باقیمانده‌ی وزن‌دار گالرکین ارائه شده است. نتایج مدل کاهش مرتبه داده شده تک جمله‌ای حاضر با نتایج تحلیلی موجود برای فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تخت (هنگامی که هنوز ولتاژی به سیستم اعمال نشده است) و همچنین مشاهدات آزمایشگاهی موجود برای ولتاژ کشیدگی این سیستم‌ها در بخش 5 مقایسه شده‌اند. ادامه‌ی بخش 5 نیز به بررسی اثرات اندازه و نیروی الکترواستاتیک بر فرکانس طبیعی پایه‌ی سیستم اختصاص یافته است. بر اساس نتایج بدست آمده در این قسمت، اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی صفحات تخت و تحریک شده با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی که نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی در آن‌ها به ترتیب بزرگ‌تر از 10 و 20 باشد، عموماً قابل صرف نظر کردن است. نتایج اصلی مستخرج از پژوهش حاضر نیز در بخش 6 خلاصه گردیده‌اند.

۲- موردی بر تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل

طبق تئوری بهبود یافته‌ی تنش کوپل [12]، علاوه بر تانسور کرنش (مزدوج با تانسور تنش)، تانسور انحنا^۱ (مزدوج با بخش انحرافی تانسور تنش کوپل) نیز در چگالی انرژی کرنشی دخیل است. بنابراین انرژی کرنشی ایجاد شده بر روی دامنه Π در یک ماده‌ی الاستیک خطی تغییر شکل داده بصورت رابطه (1) است [12]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Pi} (\bar{\sigma} : \bar{e} + \bar{m} : \bar{\chi}) d\Pi \quad (1)$$

1- Curvature tensor

که در آن Ω سطح زیرین میکروصفحه است. قابل توجه است که با توجه به عدم تغییر خامت میکروصفحه در حین تغییر شکل بر اساس فرضیه کیرشف، جایجایی این سطح با سطح میانی میکروصفحه یکسان است. بنابراین می‌توان در رابطه (16) سطح زیرین Ω را با سطح میانی A جایگزین نمود. قابل توجه است که کار خارجی کل انجام شده روی میکروصفحه برابر با مجموع کارهای انجام شده توسط نیروهای محوری و الکترواستاتیک می‌باشد.

انرژی جنبشی میکروصفحه را نیز می‌توان طبق رابطه (17) محاسبه نمود:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dz dA \quad (17)$$

که با جایگذاری از رابطه (8). رابطه (17) می‌تواند بصورت رابطه (18) ساده شود:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \rho h (\dot{w})^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (18)$$

با توجه به نازکی میکروصفحات الکترومکانیکی، بخش دورانی انرژی جنبشی در مقابله با خش انتقالی آن قابل صرف نظر کردن می‌باشد [38]. بنابراین عبارت انرژی جنبشی بصورت رابطه (19) ساده می‌شود:

$$K = \frac{\rho h}{2} \int_A (\dot{w})^2 dA \quad (19)$$

قابل توجه است که انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار خارجی انجام شده روی میکروصفحه طبق روابط (1)، (14)، (16) و (18) بر حسب جایجایی‌ها بدست می‌آیند. بنابراین معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه به‌سادگی می‌تواند طبق اصل همیلتون بدست بیاید. طبق این اصل می‌توان رابطه (20) را نوشت:

$$\int_{t_i}^{t_f} (\delta K - \delta U + \delta W_{ext,1} + \delta W_{ext,2}) dt = 0 \quad (20)$$

با جایگذاری از عبارات انرژی‌های کرنشی و جنبشی و کار خارجی انجام شده روی میکروصفحه توسط نیروهای محوری و جاذبه‌ی الکترواستاتیک در رابطه (20)، پس از ساده سازی معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه طبق رابطه (21) بدست خواهد آمد:

$$\left(\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} + \frac{Ehl^2}{2(1+v)} \right) \nabla^4 W + \rho h \ddot{w} = \frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} + N_x^r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (21)$$

که در آن $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$ است. همچنین علامت نقطه، نشان دهنده مشتق نسبت به زمان می‌باشد. شرایط مرزی مساله نیز برای یک میکروصفحه‌ی گردان می‌تواند بصورت رابطه (22) ساده شود:

$$w(x, 0) = w(x, a) = w(0, y) = w(b, y) = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0, a} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0, b} = 0 \quad (22)$$

در این قسمت معادله‌ی حاکم بر حرکت میکروصفحه برای سادگی و جلوگیری از ایجاد خطاهای محاسباتی در پاسخ، بی‌بعد شده است. بدین

$$F_{es} = \frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} \quad (7)$$

که در آن ε و V به ترتیب ضریب گذردهی الکتریکی ماده‌ی دیالکتریک بین دو الکترود و خیز میکروصفحه می‌باشند. شایان ذکر است که اثرات لبه در سیستم‌های میکرومکانیکی که الکترود متحرک آن‌ها پهن باشد (مانند اکثر میکروصفحات)، قابل صرف نظر کردن است [36، 37].

طبق فرضیات کربیشف برای صفحات نازک و متناظر، مؤلفه‌های میدان جایجایی در یک نقطه‌ی دلخواه از میکروصفحه بصورت روابط (8) است [38]:

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, t) \quad (8\text{الف})$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, t) \quad (8\text{ب})$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (8\text{ج})$$

که در آن (U, V, W) به ترتیب به مؤلفه‌های میدان جایجایی در امتداد مختصات (x, y, z) و زمان اشاره می‌کنند. درایه‌های غیر صفر تansورهای کرنش و احننا با توجه به روابط (3) و (5) برای میدان جایجایی ارائه شده در رابطه (8) بصورت روابط (9) و (10) می‌باشند:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = -1/2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

همچنین درایه‌های غیر صفر تansورهای کرنش و بخش انحرافی تنش نیز به ترتیب بصورت روابط (11) و (12) می‌باشند:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-v^2} \varepsilon_x + \frac{vE}{1-v^2} \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \frac{E}{1-v^2} \varepsilon_y + \frac{vE}{1-v^2} \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+v)} \gamma_{xy} \quad (11)$$

$$m_x = 2l^2 \mu \chi_x, \quad m_y = 2l^2 \mu \chi_y, \quad m_{xy} = 2l^2 \mu \chi_{xy} \quad (12)$$

به طوری که E و v به ترتیب مدول الائیتیستیه و ضریب پواسون میکروصفحه می‌باشند و طبق رابطه (13) با ثابت لامه مرتبط می‌گردد [39]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (13)$$

واضح است که با جایگذاری روابط (9) تا (12) در رابطه (1)، انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروصفحه بر حسب مؤلفه‌های میدان جایجایی بدست می‌آید.

با توجه به نحوه تولید میکروحسگرهای تشیدی، معمولاً تنش پسماندی در میکروصفحه باقی می‌ماند که اجتناب از آن غیر ممکن است [40]. کار خارجی انجام شده توسط این تنش‌های پسماند بصورت رابطه (14) قابل محاسبه است [41]:

$$W_{ext,1} = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^r \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (14)$$

که در آن A سطح میانی میکروصفحه می‌باشد. همچنین N_x^r و N_y^r به ترتیب نیروهای محوری بر واحد طول در جهات x و y هستند که طبق رابطه (15) به تنش‌های پسماند σ_x^r و σ_y^r مرتبط می‌گردد:

$$N_x^r = \sigma_x^r h, \quad N_y^r = \sigma_y^r h \quad (15)$$

کار خارجی نیروی الکترواستاتیک نیز طبق رابطه (16) قابل محاسبه می‌باشد:

$$\gamma = 4.7300, \quad \vartheta = 0.9825 \quad (29)$$

قابل توجه است که متغیرهای x و y که در روابط (26) تا (28) استفاده شده‌اند بی بعد هستند و محدوده‌ی تغییرات آن‌ها طبق شکل ۱ و رابطه (23) از صفر تا یک می‌باشد. همچنین ثابت Δ که برای نرمال کردن شکل مود از آن استفاده شده است، بصورت رابطه (30) قابل محاسبه می‌باشد [44].

$$\Delta = 0.3965 \quad (30)$$

مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی یک جمله‌ای نیز بر اساس روش باقیمانده‌ی وزن دار گالرکین با جایگذاری از رابطه (26) در رابطه (24) و ضرب کردن طرفین این رابطه در (φ, φ) و سپس انگرال‌گیری از آن روی دامنه A بصورت رابطه (31) بدست می‌آید.

$$\zeta + K_1 \zeta = \bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta \varphi)^2 dA \quad (31)$$

به‌طوری‌که طبق رابطه (32) :

$$K_1 = \frac{\int_A \left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \varphi \hat{\nabla}^4 \varphi - N_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dA}{\int_A \varphi^2 dA}, \quad (32)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\int_A \varphi^2 dA}$$

$$\text{که در آن } \hat{\nabla}^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_1^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right).$$

در این جا برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی میکروصفحه‌ی خیز برداشته در اثر اعمال ولتاژ‌هایی کوچکتر از ولتاژ کشیدگی سیستم، از مدل ارائه شده توسط باترا و همکارانش [6] استفاده شده است. بر اساس این مدل، برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی سیستم به ترتیبی که در ادامه ذکر شده است عمل خواهیم کرد. ابتدا با صرف نظر کردن از جمله‌ی اینرسی در رابطه (31) (یعنی $\zeta = 0$) و برابر گرفتن اختلاف پتانسیل کل اعمال شده به سیستم با ولتاژ DC اعمالی، خیز استاتیکی میکروصفحه (ζ_s) را بدست می‌آوریم. سپس با توجه به فیزیک مسئله، فرض می‌شود که ابتدا میکروصفحه با اعمال اختلاف پتانسیل DC خیز بردارد و سپس حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی اش نوسان نماید [6]. بر اساس این فرضیه خیز میکروصفحه را می‌توان بصورت $\zeta_s(t) + \Delta\zeta_s(t)$ نوشت. با جایگذاری از این عبارت در رابطه (31) و استفاده از بسط تیلور عبارت $\int_A \varphi^2 / (1 - \zeta \varphi)^2 dA$ ، معادله‌ی ارتعاشات آزاد میکروصفحه‌ی خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی با صرف نظر کردن از جملات غیرخطی بصورت رابطه (33) بدست می‌آید.

$$\Delta\zeta_s + \bar{K}_1 \Delta\zeta_s = 0 \quad (33)$$

که در آن طبق رابطه (34) :

$$\bar{K}_1 = K_1 - 2\bar{\beta} \int_A \varphi^2 / (1 - \zeta_s \varphi)^3 dA \quad (34)$$

اکنون برای بدست آوردن فرکانس پایه‌ی میکروصفحه‌ی خیز برداشته، فرض می‌کنیم $(\zeta_s(t) + \Delta\zeta_s(t)) = \Delta\zeta_0 \exp(i\omega t)$ باشد، که در آن $i = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس پایه‌ی میکروصفحه است. با جایگذاری از $(\zeta_s(t) + \Delta\zeta_s(t))$ در رابطه (33)، فرکانس پایه‌ی میکروصفحه بصورت $\omega = \sqrt{\bar{K}_1}$ بدست خواهد آمد.

واضح است که به ازای هر ولتاژ اعمالی به صفحه، ابتدا باید خیز استاتیکی بدست بیاید و سپس با استفاده از مقدار آن، فرکانس پایه‌ی سیستم محاسبه شود. در اینجا برای محاسبه خیز استاتیکی میکروصفحه، از روش

منظور پارامترهای بی بعد مسائله مانند آن‌چه در رابطه (23) نشان داده شده است، در نظر گرفته شده‌اند.

$$\hat{x} = \frac{x}{a}, \quad \hat{y} = \frac{y}{b}, \quad \hat{w} = \frac{w}{d}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (23)$$

با جایگذاری از پارامترهای بی بعد داده شده در رابطه (23) در معادله‌ی حرکت، معادله‌ی حاکم بر حرکت بی بعد بصورت رابطه (24) بدست خواهد آمد. قابل توجه است که به منظور سادگی بیشتر، پارامترهای بی بعد در رابطه (24) بدون هست، نوشته شده‌اند. همچنین لازم به ذکر است که از این پس تمام روابط بدست آمده بر پایه‌ی پارامترهای بدون بعد خواهند بود.

$$\left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_1^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \ddot{w} = \frac{\beta}{(1-w)^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (24)$$

به‌طوری‌که طبق رابطه (25) :

$$T = \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho(1-v^2)/E}, \quad \alpha_1 = \frac{a}{b}, \quad \alpha_2 = \frac{1-v}{(h/l)^2},$$

$$\beta = \frac{\varepsilon a^4 (1-v^2) V^2}{2Eh^3 d^3}, \quad N_1 = \frac{a^2 (1-v^2)}{Eh^3} N_x^r,$$

$$N_2 = \frac{a^4 (1-v^2)}{Eh^3 b^2} N_y^r \quad (25)$$

۴- مدل کاهش مرتبه داده شده تک جمله‌ای

تا کنون حل دقیقی برای معادله (24) ارائه نشده است. این معادله در اینجا با استفاده از روش باقیمانده‌ی وزن دار گالرکین بصورت تقریبی حل خواهد شد. بر اساس این روش، خیز میکروصفحه بعنوان متغیر وابسته در رابطه (24) می‌تواند بصورت ترکیبی از یک مجموعه‌ی کامل از توابع پایه‌ی مستقل خطی نوشته شود، به‌طوری‌که این توابع تمام شرایط مرزی جابجایی و نیرویی مسائله را ارضاء نمایند [42]. ثابت شده است که اگر از شکل مدهای خطی و نامیرا بعنوان این توابع پایه استفاده شود، علاوه بر افزایش دقت تقریب، تنها یک جمله برای همگرایش پاسخ کافی است [45-43, 26]. از آنجایی که برای شکل مدهای خطی و نامیرای صفحات با شرایط مرزی چهار طرف گیردار حل دقیقی وجود ندارد، می‌توان از حاصلضرب شکل مدهای خطی و نامیرای دو تیر دوسر گیردار بعنوان توابع پایه در این حالات استفاده نمود [26]. بنابراین خیز میکروصفحه را می‌توان بر اساس تقریب یک جمله‌ای بصورت رابطه (26) نوشت.

$$w(x, y, t) = \zeta(t) \varphi(x, y) \quad (26)$$

که در آن $\varphi(x, y)$ تابع پایه‌ی تقریب زننده‌ی میدان جابجایی بوده و $\zeta(t)$ پارامتر مجهولی است که باید بدست بیاید. بنابراین بر اساس توضیحات ارائه شده، $\zeta(t)$ را می‌توان بصورت رابطه (27) نوشت.

$$\varphi(x, y) = \Lambda \psi(x) \psi(y) \quad (27)$$

به‌طوری‌که در آن ψ شکل مود اول خطی و نامیرای تیر دوسر گیردار بوده و ثابت Δ نیز به منظور نرمال کردن $\varphi(x, y)$ نسبت به خیز حدکثر میکروصفحه، که در نقطه مرکزی آن رخ می‌دهد، در آن ضرب شده است. شکل مود خطی و نامیرای تیر دوسر گیردار که در رابطه (27) استفاده شده است نیز بصورت رابطه (28) داده شده است.

$$\psi(x) = \cosh(\gamma x) - \cos(\gamma x) - \theta [\sinh(\gamma x) - \sin(\gamma x)] \quad (28)$$

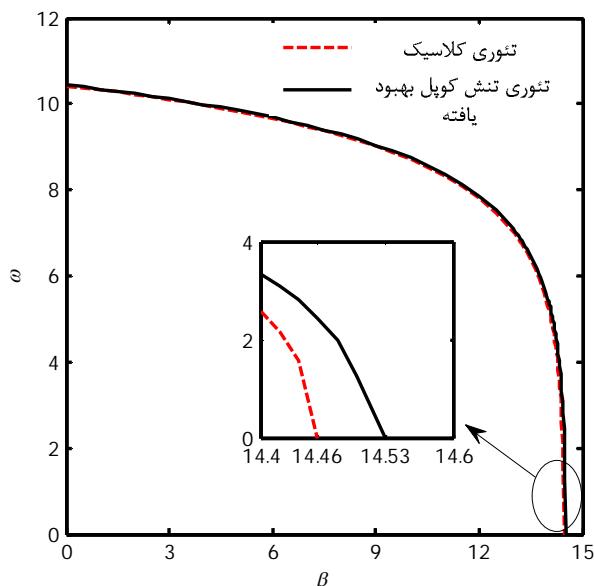
نتایج دقیقی را برای فرکانس پایه‌ی صفحات تخت ارائه می‌کند. قابل توجه است که برای مقایسه نتایج بدست آمده توسط آریناس [47] با نتایج این پژوهش، نتایج آریناس در ضرب $1/\sqrt{12}$ ضرب شده‌اند. این اختلاف بین فرکانس‌های بی‌بعد محاسبه شده در پژوهش حاضر و نتایج منتشر شده توسط آریناس [47]، بدلیل تفاوت در مقیاس بی‌بعد سازی زمان ایجاد شده است. قابل توجه است که فرکانس بُعددار (بر حسب Hz) بصورت $f = \omega/2\pi T$ قابل محاسبه می‌باشد. از آنجایی که مقیاس بی‌بعد سازی زمان در مقاله‌ی پیش‌رو [47] برابر مقیاس استفاده شده توسط آریناس [47] بوده است، فرکانس بی‌بعد محاسبه شده در این مقاله نیز $1/\sqrt{12}$ برابر مقدار ارائه شده توسط آریناس خواهد بود. بر اساس رابطه (34)، با افزایش اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمال شده، فرکانس پایه‌ی سیستم کاهش می‌یابد. با ترا و همکارانش [6] با تحلیل پایداری سیستم و مشابهت دادن ناپایداری کشیدگی با کمانش، نشان دادند که اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمال شده بر سیستم به ولتاژ کشیدگی آن برسد، فرکانس پایه‌ی سیستم صفر می‌شود. در این قسمت برای صحه‌گذاری نتایج، تغییرات فرکانس پایه‌ی سیستم بر حسب اختلاف پتانسیل بی‌بعد اعمال شده بر آن در شکل 2 برای میکروصفحه مربعی شکلی از جنس سیلیکون با خواص داده در جدول 2 ترسیم شده است. بر اساس نتایج شکل 2، ولتاژ کشیدگی بی‌بعد بر اساس $\beta_{\text{MCST}}^{\text{P1}} = 14.53$ تئوری بیبود یافته‌ی تنش کوپل برای این میکروصفحه محاسبه شده است. لازم به ذکر است که این مقدار با مشاهدات آزمایشگاهی فرانسیس و دیفور [34] بخوبی مطابقت دارد.

جدول 1 مقایسه‌ی بین فرکانس پایه‌ی بی‌بعد در میکروصفحات تخت با ضربه‌های منظری متفاوت بدون در نظر گرفتن اثرات اندازه

$a/b=0.1$	$a/b=0.5$	$a/b=1$	روش حل
6/4783	7/1151	10/4234	پژوهش حاضر
6/4784	7/1153	10/4237	آریناس [47]

جدول 2 خواص هندسی و مکانیکی میکروصفحه‌ای از جنس سیلیکون

$/ [28]$	ρ	E	v	h	d
$0/592 \mu\text{m}$	2320 kg/m^3	169 GPa	$0/3$	$20 \mu\text{m}$	$5 \mu\text{m}$



شکل 2 تغییرات فرکانس پایه‌ی بی‌بعد میکروصفحه مربعی با خواص داده در جدول 2 بر حسب تغییرات اختلاف پتانسیل بی‌بعد اعمال شده بر سیستم

تکراری¹ ارائه شده توسط عسکری و طهانی [46,44] استفاده خواهیم نمود. بدین منظور ابتدا معادله‌ی حاکم بر تعادل میکروصفحه را بصورت رابطه (35) در نظر می‌گیریم.

$$K_1 \zeta_s - \bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_s \varphi)^2 dA = 0 \quad (35)$$

این معادله را می‌توان بصورت رابطه (36) بازنویسی نمود:

$$K_1 \zeta_s + N(\zeta_s) = 0 \quad (36)$$

که در آن طبق رابطه (36):

$$N(\zeta_s) = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_s \varphi)^2 dA \quad (37)$$

در اولین مرحله از این روش تکراری، جمله‌ی غیرخطی رابطه (35) (یعنی $N(\zeta_s)$) هنگامی که خیز میکروصفحه صفر است (یعنی $\zeta_{s,0} = 0$)، محاسبه می‌شود. طبق رابطه (38) داریم:

$$N_0 = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_{s,0} \varphi)^2 dA = -\bar{\beta} \int_A \varphi dA \quad (38)$$

با جایگذاری N_0 از رابطه (38) در رابطه (36)، اولین تقریب از خیز حداکثر صفحه (یعنی $\zeta_{s,1}$) بصورت رابطه (39) بدست می‌آید:

$$\zeta_{s,1} = \frac{-N_0}{K_1} \quad (39)$$

تقریب بعدی از (ζ_s) (یعنی N_1) با جایگذاری $\zeta_{s,1}$ از رابطه (39) در معادله (37) بصورت رابطه (40) بدست خواهد آمد:

$$N_1 = -\bar{\beta} \int_A \varphi / (1 - \zeta_{s,1} \varphi)^2 dA \quad (40)$$

با جایگذاری N_1 از رابطه (40) در معادله (36)، تقریب دوم از خیز حداکثر میکروصفحه (یعنی $\zeta_{s,2}$) نیز بدست می‌آید. طبق رابطه (41) داریم:

$$\zeta_{s,2} = \frac{-N_1}{K_1} \quad (41)$$

این روند تا زمانی که پاسخ بدست آمده برای خیز حداکثر همگرا شود یا اینکه ناپایداری کشیدگی رخ دهد، ادامه خواهد یافت. معیار همگرایی مورد استفاده در این پژوهش بصورت رابطه (42) می‌باشد:

$$|(\zeta_{s,i} - \zeta_{s,i-1}) / \zeta_{s,i}| \leq 10^{-6} \quad (42)$$

همچنین ناپایداری کشیدگی هنگامی رخ خواهد داد که طبق رابطه (43) $\zeta_{s,i} > 1$

شایان ذکر است که انتگرال‌های $\int_A \varphi / (1 - \zeta_s \varphi)^2 dA$ در هر مرحله بصورت عددی با استفاده از روش انتگرال‌گیری سیمپسون محاسبه و تکرار خواهد شد.

5- نتایج

5-1- مقایسه و صحه‌گذاری

با توجه به اینکه تاکنون نتایجی از تحلیل ارتعاش آزاد وابسته به بعد برای میکروصفحات نازک چهار طرف گیردار با و بدون در نظر گرفتن اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی منتشر نشده است، در اولین مرحله فرکانس بی‌بعد بدست آمده برای صفحات تخت بدون در نظر گرفتن اثر اندازه (یعنی $\alpha_2 = \beta = 0$) با نتایج تحلیلی آریناس [47] مقایسه می‌شوند. جدول 1 این مقایسه را برای صفحات تخت با ضربه‌های مختلف بدون در نظر گرفتن اثر نیروهای محوری، نشان می‌دهد.

همانطور که جدول 1 نشان می‌دهد، مدل کاهش مرتبه داده شده‌ی حاضر

1- Iterative method
2- Aspect ratios

بهبود یافته‌ی تنش کوپل به مقدار تعیین شده از نیروی کلاسیک، از ضریب منظری میکروصفحه قبلًا نیز توسط تسبیاتاس [14] با رسم نمودارهای متعدد گزارش شده بود.

همانطور که از رابطه‌ی (44) نیز مشاهده می‌شود، هنگامی که نیروی محوری به سیستم وارد شده باشد، این نسبت (یعنی $\omega_0^{\text{MCST}} / \omega_0^{\text{CT}}$) از ضریب منظری میکروصفحه مستقل نخواهد بود. اثر نیروی محوری بر تغییرات این نسبت برای میکروصفحات مربعی با ضریب پواسون $\nu = 0.3$ در شکل ۳ بررسی شده است.

بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۳، مشاهده می‌گردد که اثر نیروهای محوری فشاری از کششی بیشتر است. بنابراین اگر میکروصفحه تحت اثر تنش‌های پسمند فشاری قرار بگیرد، در نظر گرفتن اثرات اندازه برای تحلیل ارتعاشات آزاد آن ضروری تر خواهد بود. البته قابل ذکر است که میکروصفحات به کار رفته در حسگرهای تشیدی معمولًا تحت تنش‌های کوچک کششی قرار دارند [48]. بنابراین در چنین حالاتی که نیروهای محوری اعمال شده به سیستم کششی و کوچک باشند، بر اساس نتایج شکل ۳ و استقلال نسبت $\omega_0^{\text{MCST}} / \omega_0^{\text{CT}}$ از ضریب منظری برای صفحات بدون تنش پسمند، می‌توان گفت که این نسبت از ضریب منظری تقریباً مستقل خواهد بود.

شکل‌های ۴(الف) و ۴(ب) اثر ضریب منظری بر نسبت $\omega_0^{\text{MCST}} / \omega_0^{\text{CT}}$ را برای میکروصفحه‌ای با ضریب پواسون $\nu = 0.3$ تحت نیروهای محوری به ترتیب فشاری و کششی را نشان می‌دهند. بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۴، دیده می‌شود که اثر ضریب منظری بر نسبت $\omega_0^{\text{MCST}} / \omega_0^{\text{CT}}$ در نیروهای محوری فشاری از کششی بیشتر است.

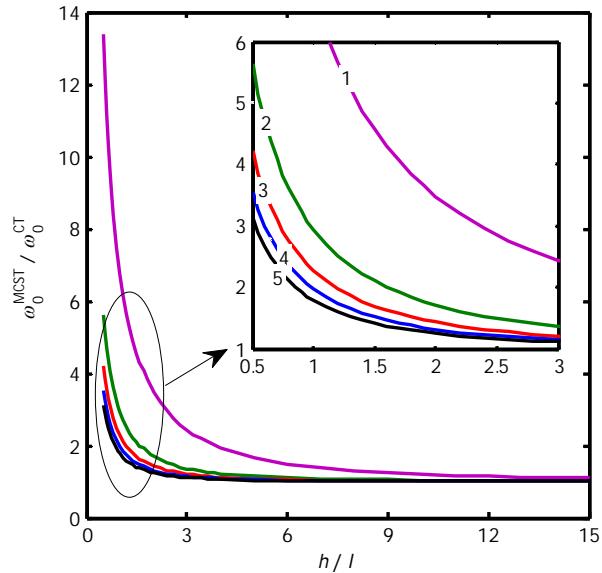
شایان ذکر است که اعمال نیروهای محوری فشاری بیشتر از بار بحرانی کمانش میکروصفحه، باعث کمانش آن و صفر شدن فرکانس پایه‌ی سیستم می‌گردد. قابل توجه است که این محدوده در اعمال بار فشاری محوری در شکل ۴(ب) رعایت شده است (بار بحرانی کمانش میکروصفحه با ضریب منظری $a/b = 0.1$ بعنوان محدود کننده در اعمال نیروی محوری فشاری در این شکل می‌باشد). لازم به ذکر است که بار بحرانی کمانش برای میکروصفحات تخت طبق رابطه (34) با برابر صفر قرار دادن K_1 بدست خواهد آمد. همچنین این بار بحرانی برای حالاتی که $N_1 = N_2 = N$ باشد، می‌تواند بصورت رابطه‌ی (46) ساده شود:

$$N = \left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \right) \frac{\int_A \phi \hat{V}^4 \varphi dA}{\int_A \phi \left(\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 \right) dA} \quad (46)$$

با توجه به شکل‌های ۳ و ۴، دیده می‌شود که اثرات اندازه در میکروصفحات تختی که در آن‌ها نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی بزرگ‌تر از ۱۰ است، معمولًا قابل صرف نظر کردن می‌باشد. البته این نتیجه برای میکروصفحاتی که تحت نیروهای محوری کششی و یا فشاری نه‌چندان بزرگ قرار دارند، درست می‌باشد. همچنین همانطور که در شکل ۳ نیز نشان داده شده است، با اعمال نیروهای محوری فشاری نسبتاً بزرگ ($N_1 = N_2 = -4$)، این محدوده افزایش یافته و اثرات اندازه برای گستره‌ی بزرگ‌تری از میکروصفحات باید در نظر گرفته شود.

۵-۳- بررسی اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی

در این قسمت برای مطالعه اثرات اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات الکترومکانیکی، میکروصفحه‌ای با نسبت پواسون $\nu = 0.3$ بدون اعمال نیروهای محوری در نظر گرفته شده است.



شکل ۳ اثر نیروی محوری بر روی نسبت $\omega_0^{\text{MCST}} / \omega_0^{\text{CT}}$ برای یک میکروصفحه مربعی با نسبت پواسون $\nu = 0.3$ ، نیروهای محوری اعمال شده در دو جهت x و y برای خطوط با شماره‌های ۱ تا ۵ به ترتیب مساوی هستند با $-4, -2, 0, 2, 4$.

شایان ذکر است که فرانسیس و دیفور نتایج آزمایش‌های خود را برای میکروصفحات مربعی با مساحت‌های مختلفی انجام داده‌اند و نتیجه‌ی مشترک نهایی را بصورت بی‌بعد گزارش کرده‌اند [34]. همچنین اختلاف پتانسیل کشیدگی بی‌بعدی که توسط آنها گزارش شده است، ۱۰.۹ می‌باشد که با توجه به تفاوت روند بی‌بعد سازی آن‌ها با روند به کار رفته در پژوهش حاضر در ضرب $12/16$ ضرب گردیده است. همانگونه که از شکل ۲ مشاهده شود، استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته، شکاف موجود بین نتایج تئوری کلاسیک^۱ و آزمایشگاهی را از بین می‌برد.

۵-۲- بررسی اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات تخت

نسبت فرکانس پایه‌ی میکروصفحه تخت محاسبه شده با تئوری بهبود یافته تنش کوپل به مقدار آن از تئوری کلاسیک طبق روابط (32) و (34) (بصورت رابطه (44) خواهد بود):

$$\frac{\omega_0^{\text{MCST}}}{\omega_0^{\text{CT}}} = \sqrt{\frac{\int_A \left(\frac{1+6\alpha_2}{12} \varphi \hat{V}^4 \varphi - N_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dA}{\int_A \left(\frac{1}{12} \varphi \hat{V}^4 \varphi - N_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dA}} \quad (44)$$

واضح است که برای میکروصفحات بدون نیروی محوری، این رابطه می‌تواند بصورت رابطه (45) ساده شود:

$$\frac{\omega_0^{\text{MCST}}}{\omega_0^{\text{CT}}} = \sqrt{1 + 6 \frac{1-\nu}{(h/l)^2}} \quad (45)$$

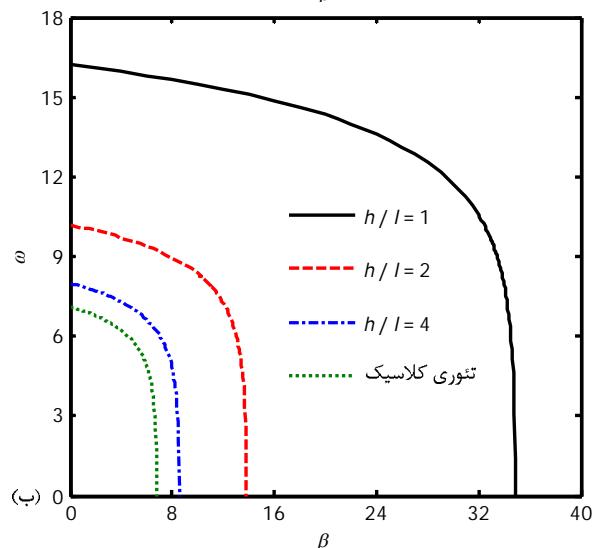
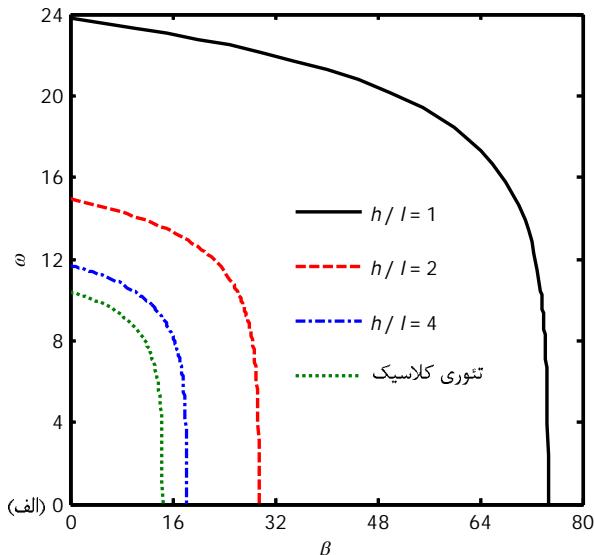
بنابراین همانطوری که دیده می‌شود، این نسبت تنها به پارامتر اندازه‌ی میکروصفحه (یعنی h/l) و نسبت پواسون آن بستگی دارد. به عبارت دیگر این نسبت هنگامی که نیروی محوری به سیستم وارد نشده باشد، کاملاً از ضریب منظری میکروصفحه مستقل است. شایان ذکر است که نتیجه‌ی مشابهی برای استقلال نسبت خیز استاتیکی محاسبه شده با استفاده از تئوری

۱- Classical theory (CT)

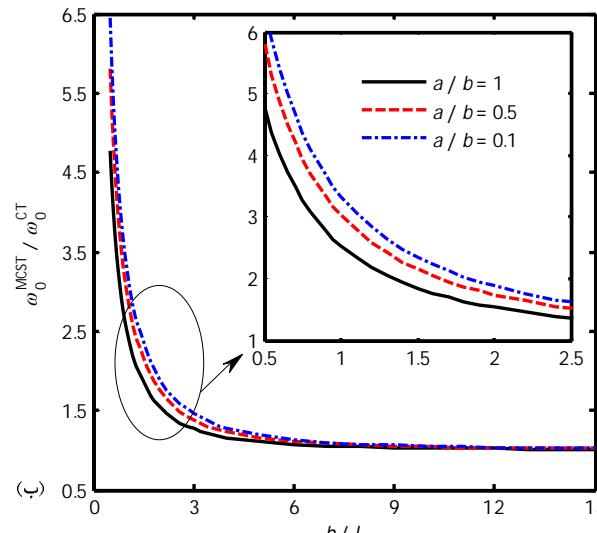
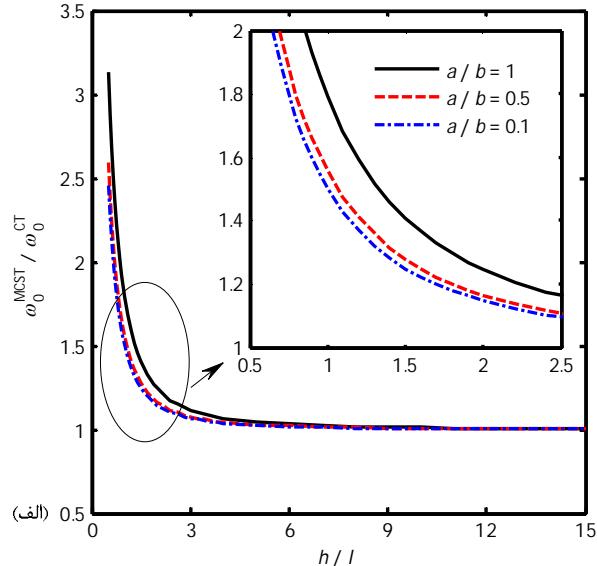
الکتریکی، این نسبت دیگر از ضریب منظری مستقل نخواهد بود. این وابستگی از رابطه‌ی (34) نیز بدليل وابستگی خیز استاتیکی (ζ_0) به ضریب منظری، قابل استنباط است. همان‌طور که جدول‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهند، در نظر گرفتن اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات خیز برداشته در اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی، از صفحات تخت ضروری‌تر است.

جدول ۳ اثر اندازه بر نسبت $\omega^{MCST}/\omega^{CT}$ برای میکروصفحات الکترومکانیکی خیز
برداشته تحت اختلاف پتانسیل‌های مختلف با ضریب منظری ۱

$\beta = 12$	$\beta = 9$	$\beta = 6$	$\beta = 3$	$\beta = 0$	پارامتر اندازه
5/5918	4/8548	4/5378	4/3486	4/2190	$h/l = 0.5$
2/9707	2/5915	2/4331	2/3413	2/2804	$h/l = 1$
1/7746	1/5742	1/4978	2/4570	1/4318	$h/l = 2$
1/1918	1/1186	1/0965	1/0863	1/0807	$h/l = 5$
1/0563	1/0316	1/0251	1/0223	1/0208	$h/l = 10$
1/0260	1/0142	1/0113	1/0100	1/0093	$h/l = 15$
1/0149	1/0081	1/0063	1/0056	1/0052	$h/l = 20$
1/0096	1/0052	1/0041	1/0036	1/0034	$h/l = 25$
1/0067	1/0036	1/0028	1/0025	1/0023	$h/l = 30$



شکل ۵ اثر اندازه بر فرکانس پایه‌ی میکروصفحات الکترومکانیکی با ضریب‌های
 $a/b = 0.5$ و (ب) $a/b = 1$ و (الف)



شکل ۴ اثر ضریب منظری بر روی نسبت $\omega_0^{MCST}/\omega_0^{CT}$ برای یک میکروصفحه با نسبت
پواسون $\nu = 0.3$ تحت نیروهای محوری (الف) و (ب) $N_1 = N_2 = -1$

شکل ۵ تغییرات فرکانس پایه‌ی این میکروصفحه را بر حسب تغییرات
اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی بی‌بعد اعمال شده بر آن از صفر تا ولتاژ
کشیدگی سیستم، در چند پارامتر اندازه مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که
دیده می‌شود این فرکانس با افزایش اختلاف پتانسیل الکتریکی کاهش پیدا
می‌کند و زمانی که اختلاف پتانسیل اعمالی به ولتاژ کشیدگی سیستم می‌
رسد، صفر می‌شود. بر اساس نتایج شکل ۵ دیده می‌شود که در نظر گرفتن
اثرات اندازه در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات الکترومکانیکی که تحت اعمال
ولتاژ الکتریکی خیز برداشته‌اند از صفحات تخت مهم‌تر است، چراکه با اعمال
اختلاف پتانسیل الکتریکی فاصله‌ی بین نتایج تئوری کلاسیک و تئوری بهبود
یافته‌ی تنش کوبیل افزایش می‌یابد.

جدول‌های ۳ و ۴ اثرات اندازه بر نسبت $\omega^{MCST}/\omega^{CT}$ را در چند ولتاژ
اعمال شده مختلف به ترتیب برای میکروصفحاتی با نسبت پواسون
 $\nu = 0.3$ و ضریب‌های منظری $a/b = 1$ و $a/b = 0.5$ بدون اعمال
نیروهای محوری نشان می‌دهند. همان‌طور که قبل نیز نشان داده شد، دیده
می‌شود که این نسبت هنگامی که اختلاف پتانسیلی به سیستم وارد نشده
باشد، از ضریب منظری کاملاً مستقل است. ولی با اعمال اختلاف پتانسیل

- [37] P. C. P. Chao, C. W. Chiu, T. H. Liu, DC dynamic pull-In predictions for a generalized clamped-clamped microbeam based on a continuous model and bifurcation analysis, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 18, pp. 115008, 2008.
- [38] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. 2nd ed., Philadelphia: Taylor & Francis, 2007.
- [39] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, 2nd ed., Berlinton, MA 01803, USA: Academic Press, 2009.
- [40] J. Qian, C. Liu, D. C. Zhang, Y. P. Zhao, Residual stresses in micro-electro-mechanical system, *J. Mech. Strength*, Vol. 23, pp. 393-401, 2001.
- [41] E. B. Magrab, *Vibrations of Elastic Systems with Applications to MEMS and NEMS*, New York: Springer, 2012.
- [42] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [43] A. R. Askari, M. Tahani, Analytical Approximations to Nonlinear Vibration of a Clamped Nanobeam in Presence of the Casimir Force, *Int. J. Aerosp. Lightweight Struct.*, Vol. 2, No. 3, pp. 317-334, 2012.
- [44] A. R. Askari, M. Tahani, An alternative reduced order model for electrically actuated micro-beams under mechanical shock, *Mech. Res. Commun.*, 2014.
- [45] A. R. Askari, M. Tahani, Investigating nonlinear vibration of a fully clamped nanobeam in presence of the van der Waals attraction, *Appl. Mech. Mater.*, Vol. 226-228, pp. 181-185, 2012.
- [46] A. R. Askari, *Static and Dynamic Analysis of Nano/Micro Beams Actuated by DC Voltage in presence of the van der Waals Force* MS Thesis, Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, 2013. (in Persian)
- [47] J. P. Arenas, On the vibration analysis of rectangular clamped plates using the virtual work principle, *J. Sound Vib.*, Vol. 266, pp. 912-918, 2003.
- [48] H. A. C. Tilmans, R. Legtenberg, Electrostatically driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators - part II: theory and performance, *Sensor Actuat. A-Phys.*, Vol. 45, No. 1, pp. 67-84, 1994.
- [49] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the Casimir force, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 45, pp. 3558-3583, 2008.
- [50] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Kármán elliptic plates incorporating the Casimir force, *J. Sound Vib.*, Vol. 315, No. 4-5, pp. 939-960, 2008.
- [51] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. T. Ahmadian, Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory, *Sensor Actuat. A-Phys.*, Vol. 171, pp. 370-374, 2011.
- [52] M. Rahaeifard, M. H. Kahrobaiyan, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, Size-dependent pull-in phenomena in nonlinear microbridges, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 54, pp. 306-310, 2012.
- [53] S. Kong, Size effect on pull-in behavior of electrostatically actuated microbeams based on a modified couple stress theory, *Appl. Math. Model.*, pp. In press, 2013.
- [54] J. Zhang, Y. Fu, Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory, *Meccanica*, Vol. 47, pp. 1649-1658, 2012.
- [55] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *J. Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (in Persian)
- [56] M. Baghani, Analytical study on size-dependent static pull-in voltage of microcantilevers using the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 54, No. 0, pp. 99-105, 2012.
- [57] O. Français, I. Dufour, Normalized abacus for the global behavior of diaphragms: pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation, *J. Model. Simul. Microsyst.*, Vol. 1, No. 2, pp. 149-60, 1999.
- [58] R. C. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems, *Smart Mater. Struct.*, Vol. 16, pp. R23-31, 2007.
- [59] P. C. P. Chao, C. W. C. hiu, C. Y. Tsai, A novel method to predict the pull-in voltage in a closed form for micro-plates actuated by a distributed electrostatic force, *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 16, pp. 986-998, 2006.