



# تحلیل ارتعاشی تیر تیموشنکوی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر و استفاده از الگوریتم ژنتیک برای تشخیص ترک در این تیرها

سعید طالبی<sup>۱</sup>، علیرضا آریایی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی ۷۳۴۴۱-۸۱۷۴۶، ariaei@eng.ui.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشنکوی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل مطالعه می‌شود. اثر موقعیت و اندازه ترک در محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل جهت اعتبارسنجی برای تیر بدون ترک و ترک‌دار با مقادیر تجربی به دست آمده از آزمایش مودال، نرم‌افزار آباکوس و روش‌های دیگر مورد استفاده در سایر مقالات مقایسه می‌شود که تطابق خوبی بین آنها مشاهده می‌شود. در ادامه مسأله معکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ بدین منظور با به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک و استفاده از فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار که از آزمایش مودال حاصل شده اند موقعیت و عمق ترک در تیر با سطح مقطع متغیر تعیین می‌شود. مشاهده می‌شود که نتایج عددی به دست آمده تطابق قابل قبولی با موقعیت و عمق واقعی ترک دارد که نشان‌دهنده کارایی این روش در تعیین پارامترهای ترک در تیر تیموشنکو است.

**کلید واژگان:** تیر تیموشنکوی ترک‌دار، روش انتقال دیفرانسیل، آزمایش مودال، الگوریتم ژنتیک، فرکانس طبیعی.

## Vibration analysis of a variable cross-section cracked Timoshenko beam and their crack detection using genetic algorithm

S. Talebi<sup>1</sup>, A. Ariaei<sup>2\*</sup>

1- MSc Student, Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Isfahan Univ., Isfahan Iran.

2- Assist Prof., Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Isfahan Univ., Isfahan Iran.

\* P.O.B. 81746-73441 Isfahan, Iran. ariaei@eng.ui.ac.ir

**Abstract-**This paper studies the vibration characteristics of a cracked Timoshenko beam with a varying transverse cross-section using Differential Transform Method (DTM). The effects of the crack location and the crack size in calculating the natural frequencies and mode shapes are investigated. The results have been validated for a beam with and without the crack against those obtained from experimental modal test, Abaqus software and other methods reported in the literature and a good agreement between the results is observed. Then, the inverse problem is investigated. For this purpose the position and depth of the crack of the beam with a varying transverse cross-section are estimated using the genetic algorithm and then, the natural frequencies are obtained from the modal test. It is seen that the numerical results have a suitable agreement with the actual position and depth of the crack which indicates the effectiveness of this method in determining the parameters of the crack in the Timoshenko beam.

**Keywords:** Cracked Timoshenko Beam, Differential Transform Method, Genetic Algorithms, Modal Analysis, Natural Frequency.

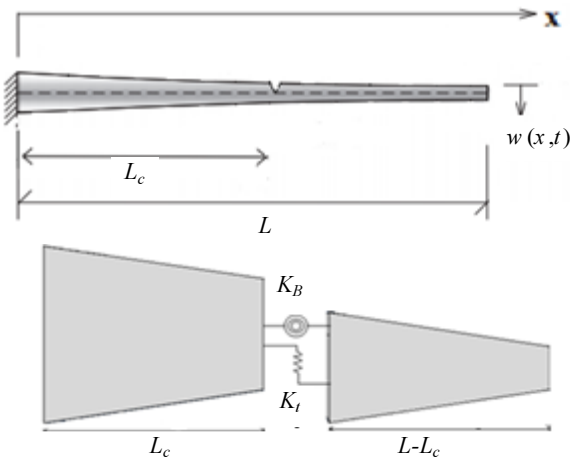
## ۱- مقدمه

تیرها دارای کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله در مکانیک، هوافضا و مهندسی عمران هستند. به‌طور معمول دو مدل برای تیرها در نظر گرفته می‌شود، مدل تیر اویلر-برنولی و مدل تیر تیموشنکو. در مدل تیر اویلر-برنولی، نسبت ضخامت تیر به طول آن کوچک است، از این‌رو از تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر می‌شود در حالی‌که در مدل تیر تیموشنکو که برای تیرهای با ضخامت بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، دو کمیت تغییر شکل برشیو اینرسی دورانی در نظر گرفته می‌شود. مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل تیرهای ترک‌دار بسیار مهم بوده و اخیراً محبوبیت زیادی پیدا کرده است [۱]. روش‌های تقریبی متفاوتی برای تحلیل ارتعاشی تیرها مطرح شده است. یوکویاما [۲] از روش المان محدود برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر یکنواخت تیموشنکو استفاده کرد. خولیف و بازون [۳] روش المان محدود را برای تیرهای تیموشنکو با شرایط مرزی مختلف توسعه دادند. ارتعاشات تیر باریک‌شونده تیموشنکو با روش‌های دیگری مثل روش تفاضلات اصلاح‌شده مربعی [۴]، تفکیک دینامیکی [۵]، درون‌یابی [۶]، ماتریس انتقال [۷] و روش فروبینوس [۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. سوریس [۹] یک روش تخمینی برای تحلیل دینامیکی تیرهای غیریکنواخت برای مودهای مختلف ارتعاشی معرفی کرد.

مسعود و آل‌سعید [۱۰] یک مدل ریاضی را از معادلات لاگرانژ به کمک روش مودهایفرضی استخراج کردند و برای توصیف ارتعاش جانبی تیر تیموشنکوی ترک‌دار به‌کار بردند. لورا و گوئیرز [۱۱] روش مربعی دیفرانسیلی را برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای غیریکنواخت تیموشنکو به‌کار گرفتند. کار و نیوجی [۱۲] از روش ریتز برای بررسی پایداری تیر باریک-شونده استفاده کردند. مطالعات گسترده در این زمینه نشان-دهنده اهمیت زیاد تحلیل ارتعاشی تیرهای غیریکنواخت است. زو [۱۳] اولین کسی بود که از روش انتقال دیفرانسیل در مسائل مهندسی استفاده کرد. اولین کاربرد روش انتقال دیفرانسیل در حل مسائل مقدار مرزی در تحلیل مدارهای الکتریکی بود. اوزدمیر و کایا [۱۴] از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای غیریکنواخت استفاده کردند. می [۱۵] روش انتقال دیفرانسیل را برای تحلیل تیرهای

چرخشیبه‌کار برد. چن و هو [۱۶] از روش مقادیر ویژه اشتورم لیوویل در جهت تحلیل ارتعاش عرضی تیرهای دورانی تحت بار محوری استفاده کردند. یکی از محاسن روش انتقال دیفرانسیل دقت بالای آن در تحلیل مسائل غیرخطی است. این روش به دلیل سادگی و دقت آن در محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها نسبت به روش‌های دیگر از قبیل روش مودهای فرضی و المان محدودکارایی بهتری دارد. از آنجا که روش انتقال دیفرانسیل ابزاری کارآمد برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی و یا سیستم‌ها با پارامترهای متغیر است، چن و جو [۱۷]، آریکوگلو و ازکول [۱۸] و برت و زنگ [۱۹] توجه زیادی به این روش نموده‌اند. برت و زنگ [۱۹] از روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشات محوری تیرهای مرکب استفاده کردند. چن و جو [۱۷] مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای خطی و غیرخطی مرتبه اول را با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل در نظر گرفتند. مالک و دانگ [۲۰] روش انتقال دیفرانسیل را جهت تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی به‌کار بردند.

ارتوک و مومانی [۲۱] یک مقایسه عددی بین روش انتقال دیفرانسیل و روش تجزیه دامنه‌ها برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه چهار معرفی کردند. همچنین، تشخیص ترک در تیرها به‌طور گسترده‌ای در مقالات مطرح شده است. رایوز و همکارانش [۲۲] ترک را با فنر پیچشی جایگزین کردند و پاسخ ارتعاشی تیر با دو ترک را به‌دست آوردند و سپس با استفاده از آن محل و عمق ترک را پیش‌بینی نمودند. لیل و مایتی [۲۳] روشی را برای شناسایی ترک با استفاده از فرکانس‌های اندازه‌گیری شده در تیرهای کوتاه گسترش دادند. کیان و همکارانش [۲۴] یک ماتریس سختی انتقال یافته از یک دسته تیر با ترک یک طرف باز با انتگرال‌گیری از فاکتورهای شدت تنش معرفی کردند. براساس این کار، نحوی و جباری [۲۵] موقعیت و اندازه ترک را در تیرها تخمین زدند. کیم و استابز [۲۶] محل ترک در تیرهای ترک‌دار نازک را توسط یک الگوریتم بر اساس مفهوم حساسیت مودال پیش‌بینی کردند. علاوه براین، آنها از روش گودمانسان [۲۷] برای تخمین اندازه ترک‌ها استفاده کردند. طالبی و آریابی [۲۸] روش انتقال دیفرانسیل را برای تحلیل تیر اویلر-برنولی دارای ترک به‌کار بردند. آنها با صرف‌نظر از تغییر شکل برشی تنها از یک فنر پیچشی جهت مدل کردن ترک استفاده کردند.



شکل ۱ تیر ترک‌دار تیموشنکو با سطح مقطع متغیر

$c$  ثابتی به نام نرخ باریک‌شدگی است که باید از یک کوچک‌تر باشد، زیرا در غیر این صورت ارتفاع تیر قبل از رسیدن به انتهای آن به صفر می‌رسد. بر طبق تئوری تیموشنکو معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر عبارت است از [۲۲]:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k'GA(x) \left( \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x} - \theta_i(x,t) \right) \right) = 0 \quad (3)$$

$$\rho I(x) \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} - GA(x) k' \left( \frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x} - \theta_i(x,t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

در معادله‌های (۳) و (۴)،  $w_i(x,t)$  جابجایی عرضی،  $\theta_i(x,t)$  چرخش تیر ناشی از خمش و  $k'$  ضریب تصحیح برش است. مقدار  $k'$  به ضریب پواسون و هندسه سطح مقطع بستگی دارد. در روابط بالا مدول یانگ،  $E$ ، مدول برش،  $G$  و چگالی ماده،  $\rho$ ، ثابت فرض می‌شود. در روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت [۲۹]:

$$w_i(x,t) = \bar{W}_i(x) e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\theta_i(x,t) = \bar{\theta}_i(x) e^{i\omega t} \quad (6)$$

با جایگذاری روابط (۵) و (۶) در معادلات (۳) و (۴)، روابط (۷) و (۸) به دست می‌آیند.

$$\rho A(x) \omega^2 \bar{W}_i + \frac{d}{dx} \left( k'GA(x) \left( \frac{d\bar{W}_i}{dx} - \bar{\theta}_i \right) \right) = 0 \quad (7)$$

در کارهای قبلی روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل تیر اویلر-برنولی دارای ترک و یا تیر تیموشنکوی بدون ترک به کار رفته است. در این مقاله این روش جهت تحلیل تیر تیموشنکوی دارای ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تحلیل این نوع تیر باید در محل ترک دو فنر یکی پیچشی و دیگری خطی جایگزین شود. معادلات پیوستگی در محل ترک با توجه به فرمول‌بندی تئوری تیر تیموشنکو بسط داده می‌شوند و ضمن مطالعه تیر دارای ترک، کارایی روش انتقال دیفرانسیل و دقت آن در مطالعه این نوع تیرها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج به دست آمده با استفاده از این روش با نتایج به دست آمده از آزمایش مودال، مقالات دیگر و همچنین نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده دقت قابل قبول این روش جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها است. در ادامه با استفاده از فرکانس‌های طبیعی تیر که از آزمایش مودال به دست آمده‌اند محل و عمق ترک تعیین می‌شود (مسئله معکوس). بدین منظور از الگوریتم ژنتیک که یکی از روش‌های جستجوی تصادفی است استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده تخمین قابل قبول جهت تعیین محل و عمق ترک است.

## ۲- فرمول‌بندی

### ۲-۱- معادلات حاکم بر تیر دارای ترک

یک تیر تیموشنکوی دارای ترک با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود ارتفاع تیر در طول آن تغییر می‌کند. ترک با یک فنر پیچشی و همچنین یک فنر خطی جایگزین می‌شود. فرض بر آن است که وجود ترک تغییری در توزیع جرم در امتداد تیر به وجود نمی‌آورد. همچنین می‌توان نوشت:

$$A(x) = A_g \left( 1 - \frac{cx}{L} \right)^n \quad (1)$$

$$I(x) = I_g \left( 1 - \frac{cx}{L} \right)^{n+2} \quad (2)$$

در روابط (۱) و (۲)،  $A$  و  $I$  به ترتیب سطح مقطع عرضی و گشتاور دوم سطح هستند. زیرنویس  $g$  متناظر با انتهای چپ تیر است که در شکل ۱ نشان داده شده است.

### ۳- بی‌بعدسازی پارامترها

در این بخش پارامترهای بی‌بعد زیر برای جایگذاری در روابط تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad W = \frac{\bar{W}}{L}, \quad s^2 = \frac{EI_g}{k'A_gGL^2}$$

$$r^2 = \frac{I_g}{A_gL^2}, \quad \mu^2 = \frac{\rho A_g \omega^2 L^4}{EI_g} \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادلات (۵) و (۶) و انتخاب  $n=1$  معادلات (۱۸) و (۱۹) به دست می‌آیند.

$$\frac{d^2 W_i}{d\xi^2} - \left[ c \frac{dW_i}{d\xi} + c\xi \frac{d^2 W_i}{d\xi^2} \right] + s^2 \mu^2 W_i - cs^2 \mu^2 \xi W_i - \frac{d\theta_i}{d\xi} + c \left( \theta_i + \xi \frac{d\theta_i}{d\xi} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{d\xi^2} - \left( 3c \frac{d\theta_i}{d\xi} + 3c\xi \frac{d^2 \theta_i}{d\xi^2} \right) + \left[ \mu^2 r^2 \theta_i - \frac{1}{s^2} \theta_i + 6c^2 \xi \frac{d\theta_i}{d\xi} + 3c^2 \xi^2 \frac{d^2 \theta_i}{d\xi^2} \right] - \left[ 3c \mu^2 r^2 \xi \theta_i + 3c^3 \xi^2 \frac{d\theta_i}{d\xi} + c^3 \xi^3 \frac{d^2 \theta_i}{d\xi^2} - \frac{c}{s^2} \xi \theta_i \right] + 3\mu^2 r^2 c^2 \xi^2 \theta_i - \mu^2 r^2 c^3 \xi^3 \theta_i + \frac{1}{s^2} \frac{dW_i}{d\xi} - \frac{c}{s^2} \xi \frac{dW_i}{d\xi} = 0 \quad (19)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد شده معادله (۱۷)، شرایط مرزی (۹-۱۱)، عبارتند از:

$$W_1(0) = \theta_1(0) = 0, \quad \xi = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d\theta_2}{d\xi} = 0, \quad \xi = 1 \quad (21)$$

$$\left( \frac{dW_2}{d\xi} - \theta_2 \right) = 0, \quad \xi = 1 \quad (22)$$

همچنین با جایگذاری معادله (۱۷) در شرایط پیوستگی (۱۲-۱۵) در محل ترک، معادلات (۲۳-۲۶) به دست می‌آیند.

$$\frac{d\theta_{(i+1)}}{d\xi} = \frac{d\theta_{(i)}}{d\xi}, \quad \xi = \xi_c \quad (23)$$

$$\left[ \frac{dW_{(i+1)}}{d\xi} - \theta_{(i+1)} \right] = \left[ \frac{dW_{(i)}}{d\xi} - \theta_{(i)} \right], \quad \xi = \xi_c \quad (24)$$

$$\rho I(x) \omega^2 \bar{\theta}_i + \frac{d}{dx} \left( EI(x) \frac{d\bar{\theta}_i}{dx} \right) + GAk' \left( \frac{d\bar{W}_i}{dx} - \bar{\theta}_i \right) = 0 \quad (8)$$

همان گونه که دیده می‌شود تیر شکل ۱ دارای چهار شرط مرزی در ابتدا و انتهای آن است که عبارتند از:

$$\bar{W}_1(0) = \bar{\theta}_1(0) = 0, \quad x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_2}{dx} = 0, \quad x = L \quad (10)$$

$$\left( \frac{d\bar{W}_2}{dx} - \bar{\theta}_2 \right) = 0, \quad x = L \quad (11)$$

همچنین شرایط پیوستگی در محل ترک عبارتند از [۳۰]:

$$\frac{d\bar{\theta}_{(i+1)}}{dx} = \frac{d\bar{\theta}_{(i)}}{dx}, \quad x = L_c \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{W}_{(i+1)}}{dx} - \bar{\theta}_{(i+1)} = \frac{d\bar{W}_{(i)}}{dx} - \bar{\theta}_{(i)}, \quad x = L_c \quad (13)$$

$$\bar{W}_{(i+1)} - \bar{W}_{(i)} = \frac{1}{k_i} k A_g G \left[ \frac{d\bar{W}_{(i+1)}}{dx} - \bar{\theta}_{(i+1)} \right], \quad x = L_c \quad (14)$$

$$\bar{\theta}_{(i+1)} - \bar{\theta}_{(i)} = \frac{1}{k_{\theta_i}} EI_g \left( \frac{d\bar{\theta}_{(i+1)}}{dx} \right), \quad x = L_c \quad (15)$$

در روابط (۱۲-۱۵)،  $L_c$  بیانگر موقعیت ترک می‌باشد. در روابط (۱۴) و (۱۵) مقادیر  $k_{\theta_i}$  و  $k_i$  عبارتند از [۳۰]:

$$k_i = \frac{1}{C_V} \frac{EA}{h} \quad (16-الف)$$

$$k_{\theta_i} = \frac{1}{C_{\theta}} \frac{EI}{h} \quad (16-ب)$$

در روابط (۱۶-الف) و (۱۶-ب)،  $C_V$  و  $C_{\theta}$  توابعی وابسته به مقدار  $\gamma = a_c/h$  و شکل هندسی تیر است و برای سطح مقطع مستطیلی عبارتند از [۳۰]:

$$C_V = \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 (-0.22 + 3.82\gamma + 1.54\gamma^2 - 14.64\gamma^3 + 9.60\gamma^4) \quad (16-ج)$$

$$C_{\theta} = 2 \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 (5.93 - 19.69\gamma + 37.14\gamma - 35.84\gamma^3 + 13.12\gamma^4) \quad (16-د)$$

$$(k+1)(k+2)W_i(k+2) - c(k+1)^2 W_i(k+1) + s^2 \mu^2 W_i(k) - cs^2 \mu^2 W_i(k-1) - (k+1)\theta_i(k+1) + c(k+1)\theta_i(k) = 0 \quad (31)$$

$$(k+1)(k+2)\theta_i(k+2) - 3c(k+1)^2 \theta_i(k+1) + [\mu^2 r^2 - \frac{1}{s^2} + 3c^2 k(k+1)]\theta_i(k) - [3\mu^2 r^2 + 3c^3(k-1) + c^3(k-1)(k-2) - \frac{c}{s^2}]\theta_i(k-1) + 3c^2 \mu^2 r^2 \theta_i(k-2) - c^3 \mu^2 r^2 (k-3)\theta_i(k-3) + \frac{(k+1)}{s^2} W_i(k+1) - \frac{c}{s^2} kW_i(k) = 0 \quad (32)$$

$$W_i[0] = \theta_i[1] = 0 \quad (33)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\theta_2[k] = 0 \quad (34)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (kW_2[k] - \theta_2[k]) = 0 \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\theta_1[k] = \sum_{k=1}^{\infty} k\theta_2[k] \quad (36)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(W_2[k] - W_1[k]) = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta_2[k] - \theta_1[k]) \quad (37)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (W_2[k] - W_1[k]) = \phi \left( \sum_{k=1}^{\infty} kW_2[k] - \sum_{k=0}^{\infty} \theta_2[k] \right) \quad (38)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\theta_2[k] - \theta_1[k]) = \psi \sum_{k=1}^{\infty} k\theta_2[k] \quad (39)$$

در روابط (۳۱-۳۹)،  $W_i[k]$  و  $\theta_i[k]$  به ترتیب تبدیل یافته  $W_i(\xi)$  و  $\theta_i(\xi)$  و  $i=1,2$  است. همچنین در روابط (۳۸) و (۳۹) می‌توان نوشت:

$$\phi = \frac{1}{k_{ii}} k' A_g G, \quad \psi = \frac{1}{k_{\theta i}} EI_g \quad (40)$$

از طرفی فرض می‌شود:

$$W_1(0) = \theta_1(0) = 0 \quad (41)$$

$$W_1(1) = C_{21} \quad (42)$$

$$\theta_1(1) = C_{31} \quad (43)$$

$$W_2(1) = C_{02} \quad (44)$$

$$\theta_2(1) = C_{12} \quad (45)$$

$$W_{(i+1)} - W_{(i)} = \frac{1}{k_{ii}} k A_g G \left[ \frac{dW_{(i+1)}}{d\xi} - \theta_{(i+1)} \right], \quad \xi = \xi_c \quad (25)$$

$$\theta_{(i+1)} - \theta_{(i)} = \frac{1}{k_{\theta i}} EI_g \left( \frac{d\theta_{(i+1)}}{d\xi} \right), \quad \xi = \xi_c \quad (26)$$

در روابط (۲۳-۲۶)،  $\xi_c$  معرف مکان ترک است و با رابطه (۲۷) بیان می‌شود.

$$\xi_c = \frac{L_C}{L} \quad (27)$$

### ۳-۱- روش انتقال دیفرانسیل

در این بخش از روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین پاسخ یک تیر تیموشنکوی دارای ترک استفاده می‌شود. یک تابع  $f(x)$  در نظر گرفته می‌شود که در ناحیه  $D$  تعریف شده است. نقطه  $x=x_0$  می‌تواند معرف هر نقطه در  $D$  باشد. انتقال دیفرانسیل تابع  $f(x)$  حول نقطه  $x_0$  به صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شود.

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (28)$$

که در آن تابع  $f(x)$  تابع اصلی و  $F[k]$  تابع انتقال است. تابع انتقال معکوس به صورت رابطه (۲۹) بیان می‌شود.

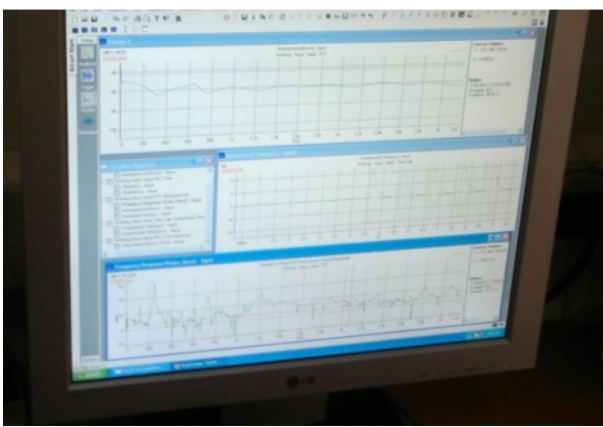
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k F[k] \quad (29)$$

با در نظر گرفتن معادله (۲۸) می‌توان نشان داد که مفهوم انتقال دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج می‌شود. در کاربردهای واقعی، تابع  $f(x)$  در معادله (۲۹) با تعداد جملات محدود بیان و این معادله پس از جایگزینی رابطه (۲۸) در آن به صورت معادله (۳۰) بازنویسی می‌شود.

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (30)$$

در رابطه فوق  $m$  به همگرایی فرکانس‌های طبیعی بستگی دارد. قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی که در این مقاله از آنها استفاده می‌شود توسط طالبی و آریایی [۲۸] معرفی شده‌اند.

حال با به‌کارگیری روش انتقال دیفرانسیل و اعمال روابط مربوط [۲۹] در معادلات (۱۸-۲۶)، این معادلات به ازای  $x_0=0$  به شکل معادلات (۳۱-۳۹) در می‌آیند.



شکل ۲ تیر ترک‌دار با سطح مقطع متغیر

$$W_2(2) = C_{22} \quad (46)$$

$$\theta_2(2) = C_{32} \quad (47)$$

با جایگذاری روابط (۴۱-۴۷) در شرایط مرزی (۳۴-۳۹) برای مقادیر مختلف  $k$ ، معادله بر حسب مقادیر مجهول  $C_{32}$ ،  $C_{21}$ ،  $C_{12}$ ،  $C_{02}$ ،  $C_{31}$  تعیین می‌شود که با استفاده از این معادلات یک ماتریس  $6 \times 6$  از ضرایب مجهول به دست می‌آید. حال برای داشتن جواب غیرصفر، باید دترمینان این ماتریس ضرایب برابر صفر باشد که در این صورت یک معادله بر حسب  $C$ ،  $s$ ،  $r$  و اندازه ترک به دست می‌آید؛ حال می‌توان برای مقادیر مختلف  $C$ ،  $r$ ،  $s$  و اندازه ترک، فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرد.

#### ۴- مطالعات تجربی

به منظور اعتبارسنجی کارهای انجام شده، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با سطح مقطع متغیر را به کمک آزمایش مودال تعیین و با مقادیر عددی به دست آمده مقایسه می‌شود. در شکل ۲ تیر ترک‌دار تیموشنکو با سطح مقطع متغیر نشان داده شده است. در اینجا برای اندازه و موقعیت‌های متفاوت ترک سه فرکانس طبیعی اول به دست آمده است که در بخش ۶ آمده است. در هر مورد با چکش در انتهای آزاد به تیر ضربه زده (شکل ۲) و پاسخ با استفاده از یک شتاب‌سنج که در انتهای ثابت تیر قرار دارد، اندازه‌گیری شده است.

#### ۵- تشخیص ترک به عنوان مسأله معکوس

همان گونه که قبلاً نیز بیان شد، با معلوم بودن عمق و مکان ترک می‌توان فرکانس‌های طبیعی تیر را به دست آورد (مسأله مستقیم). در طرف مقابل، با داشتن فرکانس‌های طبیعی تیر که می‌توان آنها را از آزمایش مودال به دست آورد محل و عمق ترک تعیین می‌شود (مسأله معکوس) که هدف این بخش است. بدین منظور در اینجا یک الگوریتم بهینه‌سازی به کار برده می‌شود که برای تخمین پارامترهای ترک، مقادیر بهینه را در یک تابع هدف جستجو می‌کند. به طور کلی روش‌های بهینه‌سازی جواب‌های ممکن بسیاری را با روشی کارآمد تعیین و به مسأله اعمال می‌کنند تا بهترین پاسخ را بیابند. در این مقاله از روش الگوریتم ژنتیک که یکی از الگوریتم‌های جستجوی تصادفی است استفاده می‌شود.

#### ۵-۱- الگوریتم ژنتیک

ایده روش الگوریتم ژنتیک برگرفته از طبیعت است. الگوریتم‌های ژنتیک برای روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی در حل مسائل خطی، محدب و برخی مسائل مشابه و همچنین جهت حل مسائل گسسته و غیر خطی بسیار پرکاربرد می‌باشند. در دهه هفتاد میلادی هلند [۳۱] ایده استفاده از الگوریتم ژنتیک را در بهینه‌سازی‌های مهندسی مطرح کرد. برای الگوریتم ژنتیک ابتدا یک تابع هدف تعریف می‌شود و سپس با استفاده از این تابع با جایگذاری اعداد تصادفی بهترین موقعیت و اندازه ترک برای سه فرکانس داده شده به دست می‌آید. نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک دارای درصد خطای قابل قبولی است که در قسمت‌های بعدی نشان داده می‌شود.

#### ۵-۲- فرمول‌بندی مسأله معکوس

همان گونه که در بخش ۳-۱ بیان شد با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب و با معلوم بودن مقادیر موقعیت و

به‌منظور مقایسه نتایج با مقاله ژو [۳۲] تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه با حل یک مثال عددی برای تیر تیموشنکوی دارای ترک و با سطح مقطع متغیر و مقایسه آن با نتایج حاصل از آزمایش مودال و همچنین نرم‌افزار آباکوس دقت و کارایی این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۶-۱- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبارسنجی فرمول‌بندی کار حاضر، در ابتدا تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج با مقادیر ارائه شده در مقاله ژو [۳۲] مقایسه می‌شود. در جدول ۱، سه فرکانس طبیعی اول برای تیر تیموشنکو به ازای  $0.08$ ،  $r = 31.059$  و  $E/k'G$ ، برای نسبت‌های باریک‌شوندگی متفاوت نشان داده شده و با مقادیر موجود در مقاله ژو [۳۲] مقایسه می‌شود. نتایج به‌دست آمده تطابق بالایی روش انتقال دیفرانسیل و روش مودهای فرضی در آن مقاله را نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش  $c$  فرکانس اول افزایش ولی فرکانس‌های بالاتر کاهش می‌یابد که این موضوع در شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود. این نشان می‌دهد که با افزایش  $c$  با وجود کاهش در جرم و سختی سیستم، اگر تیر باریک‌شونده در مود اول خود ارتعاش کند سختی آن با سرعت کمتری نسبت به جرم کاهش می‌یابد و در نتیجه فرکانس اول افزایشی است؛ این در حالی است که در ارتعاش سیستم در مودهای بالاتر این روند عکس می‌شود و سختی سیستم با سرعت بیشتری نسبت به جرم کاهش می‌یابد. در شکل ۳ محور افقی نسبت باریک‌شوندگی و محور قائم نسبت فرکانس طبیعی تیر با سطح مقطع متغیر به فرکانس طبیعی تیر با سطح مقطع ثابت است.

#### ۶-۲- تیر تیموشنکوی دارای ترک با سطح مقطع متغیر

در این بخش نتایج حاصل از فرمول‌بندی تیر تیموشنکو که در کار حاضر ارائه شده است با نتایج به‌دست آمده از آزمایش مودال و همچنین مقادیر به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. بدین منظور یک تیر دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد که از سمت با مقطع بزرگ‌تر، ثابت (گیردار) است. جرم و سختی فنر در امتداد طول تیر به ترتیب به‌صورت  $m(x) = \rho A_g (1 - cx/L)$  و  $EI(x) = EI_g (1 - cx/L)^3$  در نظر گرفته می‌شود.

عمق ترک، معادله‌ای جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی به‌دست می‌آید. حال بالعکس، با داشتن مقادیر فرکانس‌های طبیعی که می‌توان به عنوان مثال آنها را از آزمایش مودال تعیین کرد، موقعیت و عمق ترک به گونه‌ای انتخاب می‌شود که پس از جایگذاری آن در دترمینان ماتریس ضرایب، فرکانس‌های طبیعی حاصل از صفر قرار دادن این دترمینان، دارای کمترین اختلاف با مقادیر معلوم فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش باشند. در این صورت می‌توان گفت مقادیر موقعیت و عمق انتخاب شده دارای دقت قابل قبولی هستند. این موضوع ایده اصلی در حل مسأله معکوس جهت تعیین پارامترهای ترک است. ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب به‌صورت تابعی از مقادیر موقعیت و عمق ترک و نیز فرکانس طبیعی به‌صورت معادله (۴۸) نوشته می‌شود

$$D(\omega, L_c, a_c) = 0 \quad (48)$$

در رابطه (۴۸)،  $L_c$  و  $a_c$  به‌ترتیب بیانگر موقعیت و عمق ترک است. در مسأله مستقیم با داشتن موقعیت و عمق ترک، فرکانس‌های طبیعی تیر تعیین می‌شود که به‌صورت  $\omega_j = \omega_j(L_c, a_c)$ ،  $j = 1, 2, 3, \dots$  قابل بیان است. در مسأله معکوس فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده از آزمایش مودال که شامل  $p$  فرکانس طبیعی اول سیستم هستند به‌صورت  $\bar{\omega}^* = \{\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_p^*\}^T$  معلوم و هدف تعیین مقادیر  $L_c$  و  $a_c$  است. تابع هدف را می‌توان با معادله (۴۹) تعریف کرد.

$$f(L_c, a_c) = \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\omega_j(L_c, a_c)}{\omega_j^*} - 1 \right]^2 \quad (49)$$

تعریف مسأله در روش الگوریتم ژنتیک به‌صورت معادله (۵۰) خواهد بود.

$$f(L_c, a_c) \rightarrow \text{مینیمم}$$

$$0 \leq L_c \leq 1,$$

$$0 \leq a_c \leq 1$$

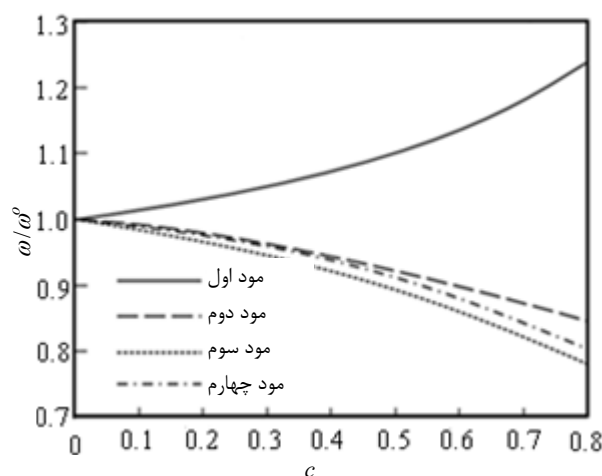
(۵۰)

#### ۶-۳ نتایج عددی

در این بخش ابتدا به‌منظور اعتبارسنجی فرمول‌بندی کار حاضر، مثال‌های عددی ارائه شده در مراجع [۳۲] یک بار دیگر با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل حل و نتایج به‌دست آمده در این مقاله با نتایج ارائه شده در مقاله ژو [۳۲] مقایسه می‌شود.

جدول ۱ سه فرکانس طبیعی اول تیر تیموشنکو بدون ترک برای نسبت‌های باریک‌شوندگی مختلف ( $E/k'G = 3/0.59$ ,  $r = 0/0.8$ )

c	روش	فرکانس‌های بی‌بعد ( $\mu$ )		
		فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
0	انتقال	3/2230	16/2887	36/7071
	دیفرانسیل ژو [32]	3/2273	16/3052	36/7440
0/2	انتقال	3/4242	15/8904	35/4300
	دیفرانسیل ژو [32]	3/4314	15/9223	35/5010
0/4	انتقال	3/5599	15/3521	33/7875
	دیفرانسیل ژو [32]	3/5712	15/3989	33/8890
0/6	انتقال	3/7618	14/6441	31/6237
	دیفرانسیل ژو [32]	3/7698	14/6741	31/6871
0/8	انتقال	4/1172	13/7566	28/6356
	دیفرانسیل ژو [32]	4/1259	13/7849	28/6933



شکل ۳ اثر نرخ باریک‌شوندگی روی فرکانس‌های طبیعی

نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. نتایج به‌دست آمده برای حالت تیر تیموشنکو اختلاف کمتر از ۲٪ و برای حالت تیر اویلر-برنولی کمتر از ۱۸٪ را نسبت به مقادیر تجربی نشان می‌دهند. این نتایج نشان می‌دهند که به‌خصوص برای تیرهای ضخیم استفاده از تئوری اویلر-برنولی می‌تواند منجر به خطای زیادی در محاسبات شود. در این جدول مشاهده می‌شود که برای موقعیت ترک ثابت، با افزایش عمق ترک فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد که به دلیل کاهش سختی تیر است.

نسبت چهار فرکانس اول تیر باریک‌شونده ترک‌دار به فرکانس‌های تیر باریک‌شونده بدون ترک برای موقعیت‌های مختلف ترک محاسبه و اثر آن روی چهار فرکانس اول در شکل ۴ مشاهده می‌شود. می‌توان دید با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد، فرکانس اول به طور یکنواخت افزایش می‌یابد، ولی فرکانس‌های بعدی با نزدیک شدن به گره ارتعاشی افزایش و پس از آن کاهش می‌یابند. همان‌طور که از جدول ۲ مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده براساس تئوری تیر اویلر-برنولیبیش از مقادیر حاصل از تئوری تیر تیموشنکو است. علت این امر صرف‌نظر از تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در تئوری تیر اویلر-برنولیاست. در نظر نگرفتن تغییر شکل برشی منجر به سخت‌تر فرض شدن تیر در تئوری تیر اویلر-برنولی و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. چهار شکل مود اول این نوع تیر برای حالت  $L_c/L = 0/45$  در شکل ۵ نشان داده شده است. در اینجا شکل مودها از روش انتقال دیفرانسیل به‌دست آمده است. با افزایش اندازه ترک شکل مود تیر تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر یک اغتشاش محلی به تدریج روی شکل مود در محل ترک اتفاق می‌افتد. هنگامی که اندازه ترک خیلی کوچک است، اغتشاش روی شکل مود قابل تشخیص نیست. در شکل‌های ۴ و ۵، اعداد ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب بیانگر حالات  $a/h$  برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳ و در شکل ۵ صفر بیانگر حالت بدون ترک است.

### ۳-۶- استفاده از الگوریتم ژنتیک در مسأله معکوس تیرهای دارای ترک

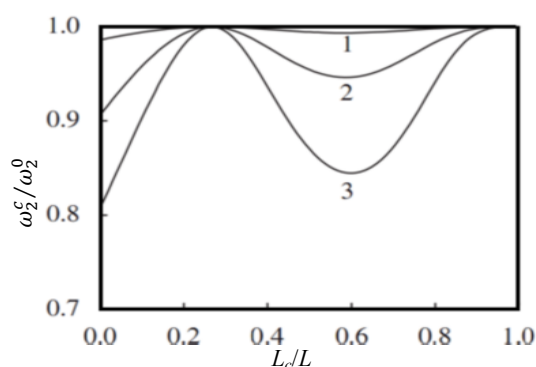
در این بخش به تحلیل مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر دارای ترک با سطح مقطع متغیر پرداخته می‌شود. مقدار نسبت باریک‌شوندگی تیر  $c = 0/5$  در نظر گرفته می‌شود.

همچنین پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر عبارت از طول تیر  $L = 240 \text{ mm}$ ، ضخامت تیر در انتهای ثابت  $h_1 = 37 \text{ mm}$ ، عمق تیر  $b = 37 \text{ mm}$ ، مدول یانگ  $E = 210 \text{ GPa}$ ، چگالی  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$  و نسبت باریک‌شوندگی  $c = 0/5$  می‌باشند. در جدول ۲ برای موقعیت ترک  $L_c/L = 0/5$ ، فرکانس‌های طبیعی تیر برای مقادیر مختلف اندازه ترک با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل برای حالت تیر تیموشنکو و تیر اویلر-برنولی به‌دست آمده و با مقادیر حاصل از آزمایش مودال و همچنین

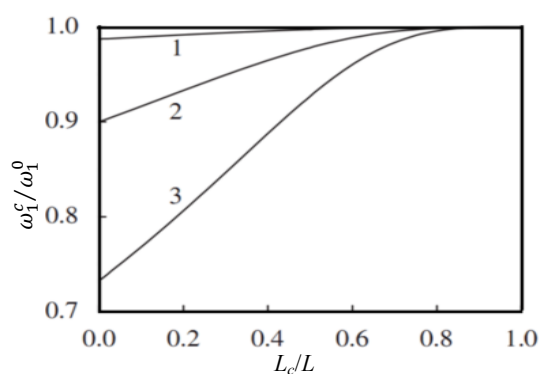


جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی بعد تیر ترک‌دار با سطح مقطع متغیر برای مقادیر مختلف عمق ترک ( $E/kG = 3/0.59$ ).

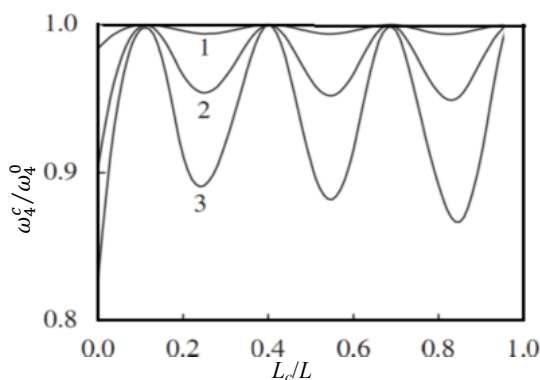
$a_c/h$	روش	فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ( $\mu$ )			درصد خطا (%)		
		فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
۰/۰	تجربی	۳/۷۴۹۹	۱۶/۸۸۲۹	۴۰/۱۶۹۳	-	-	-
	تیموشنکو	۳/۷۶۶۵	۱۷/۰۶۱۷	۴۰/۷۱۱۸	۰/۴۴	۱/۰۶	۱/۳۵
	اولر- برنولی	۳/۸۱۹۹	۱۸/۰۱۲۹	۴۶/۸۶۹۳	۱/۸۶	۶/۶۹	۱۶/۶۷
۰/۱	آباکوس	۳/۸۰۲۸	۱۷/۳۱۶۹	۴۱/۲۶۴۴	۱/۴۰	۲/۵۷	۲/۶۵
	تجربی	۳/۷۲۶۳	۱۶/۶۸۶۹	۴۰/۲۹۲۳	-	-	-
	تیموشنکو	۳/۷۴۹۸	۱۶/۸۹۹۶	۴۰/۶۸۶۷	۰/۶۳	۱/۲۶	۰/۹۸
۰/۳	اولر- برنولی	۳/۸۰۶۴	۱۸/۱۳۰۲	۴۷/۱۸۵۹	۲/۱۵	۸/۶۵	۱۷/۱۰
	آباکوس	۳/۷۸۱۲	۱۷/۱۲۳۶	۴۱/۱۴۵۶	۱/۴۷	۲/۶۲	۲/۱۲
	تجربی	۳/۶۰۰۳	۱۵/۵۹۹۷	۴۰/۰۷۸۹	-	-	-
۰/۵	تیموشنکو	۳/۶۲۳۱	۱۵/۸۱۴۷	۴۰/۴۹۴۶	۰/۶۳	۱/۳۸	۱/۰۴
	اولر- برنولی	۳/۶۷۳۷	۱۶/۸۹۵۸	۴۶/۶۷۷۲	۲/۰۳	۸/۳۷	۱۶/۴۶
	آباکوس	۳/۶۴۷۵	۱۶/۰۰۱۲	۴۰/۸۹۶۳	۱/۳۱	۲/۵۷	۲/۰۴
۰/۵	تجربی	۳/۲۸۹۴	۱۳/۷۸۹۶	۳۹/۶۵۱۲	-	-	-
	تیموشنکو	۳/۳۰۶۸	۱۳/۹۴۴۲	۴۰/۰۷۵۲	۰/۵۳	۱/۲۱	۱/۰۷
	اولر- برنولی	۳/۳۳۸۳	۱۴/۱۸۳۶	۴۵/۸۸۱۶	۱/۴۸	۲/۸۵	۱۵/۷۱
آباکوس	۳/۳۲۸۶	۱۴/۱۸۹۶	۴۰/۵۶۹۰	۱/۱۹	۲/۹۰	۲/۳۱	



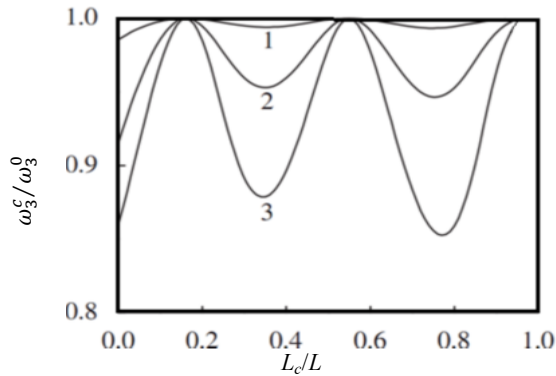
ب- نسبت فرکانس طبیعی دوم تیر ترک‌دار به بدون ترک



الف- نسبت فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار به بدون ترک

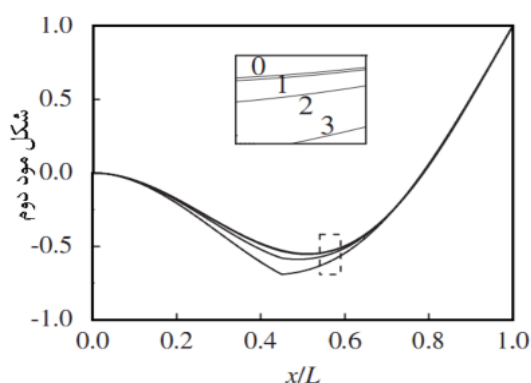


د- نسبت فرکانس طبیعی چهارم تیر ترک‌دار به بدون ترک

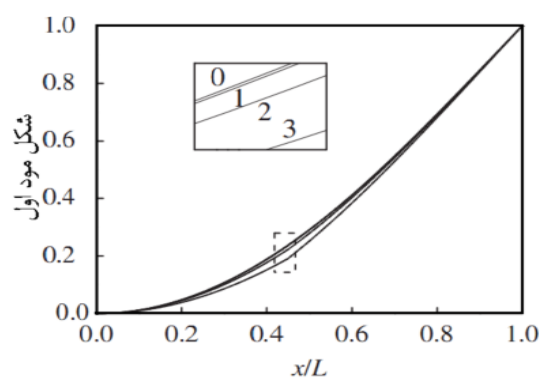


ج- نسبت فرکانس طبیعی سوم تیر ترک‌دار به بدون ترک

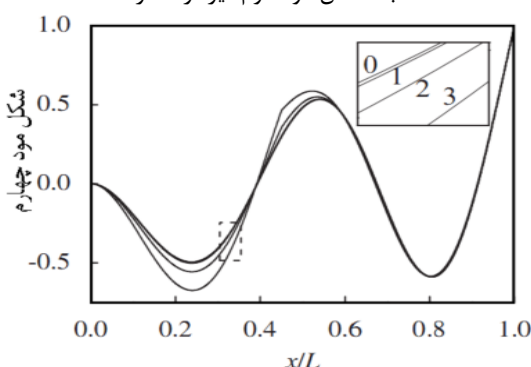
شکل ۴ اثر موقعیت و اندازه ترک روی فرکانس‌های طبیعی (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳)



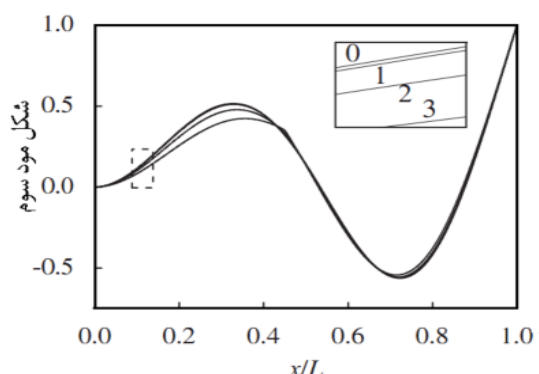
ب- شکل مود دوم تیر ترک‌دار



الف- شکل مود اول تیر ترک‌دار



د- شکل مود چهارم تیر ترک‌دار



ج- شکل مود سوم تیر ترک‌دار

شکل ۵ شکل مودهای تیر ترک‌دار در موقعیت  $L_c/L=0/45$  (۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با ۰، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳).

جدول ۳ مقادیر نسبت‌های عمق و موقعیت ترک با استفاده از الگوریتم ژنتیک

تیر اویلر- برنولی		تیر تیموشنکو		مقدار تجربی		فرکانس‌های طبیعی (بی‌بعد)
خطا/ $a_c/h$	مقدار عددی $L_c/L$	خطا/ $a_c/h$	مقدار عددی $L_c/L$	$a_c/h$	$L_c/L$	
۸/۹۰	۷/۸۰	۰/۱۰۸۹	۰/۴۶۱۰	۰/۱	۰/۵	$\omega_1 = 3/7263$ $\omega_2 = 16/6869$ $\omega_3 = 40/2923$
۱۰/۶۷	۵/۳۴	۰/۲۶۸	۰/۵۲۶۷	۰/۳	۰/۵	$\omega_1 = 3/6003$ $\omega_2 = 15/5997$ $\omega_3 = 40/789$
۱۱/۶۰	۵/۷۴	۰/۴۴۲	۰/۵۲۸۷	۰/۵	۰/۵	$\omega_1 = 3/2894$ $\omega_2 = 13/7896$ $\omega_3 = 39/6512$

قبول محل و عمق ترک به‌خصوص برای تیر تیموشنکو با استفاده از الگوریتم ژنتیک است.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی

با داشتن سه فرکانس طبیعی اول که از آزمایش مودال به‌دست آمده‌اند نسبت‌های عمق و موقعیت ترک با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حالت تیر تیموشنکو و حالت تیر اویلر- برنولی محاسبه و سپس با مقادیر تجربی مقایسه می‌شود. درصد خطای به‌دست آمده در جدول ۳ نشان‌دهنده تخمین قابل

- Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS, 2003.
- [2] Yokoyama T., "Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beam", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 30, 1988, pp.743–755.
- [3] Khulief Y.A., Bazoune A., "Frequencies of rotating tapered Timoshenko beams with different boundary conditions", *Computers and Structures*, Vol. 42, 1992, pp.781–795.
- [4] Choi S.T., Chou Y.T., "Vibration analysis of elastically supported turbo machinery blades by the modified differential quadrature methods", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, 2001, pp. 937–953.
- [5] Downs B., "Transverse vibration of cantilever beam having unequal breadth and depth tapers", *Journal of applied soft computing*, Vol. 44, 1977, pp. 737–742.
- [6] Irie T., Yamada G., Takahashi I., "Determination of the steady state response of a Timoshenko beam of varying section by the use of the spline interpolation technique", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 63, 1979, pp.287–295.
- [7] Irie T., Yamada G., Takahashi I., "Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to follower force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.70, 1980, pp. 503–512.
- [8] Lee S.Y., Lin S.M., "Exact vibration solutions for non-uniform Timoshenko beams with attachments", *AIAA Journal*, Vol. 30, 1992, pp. 2930–2934.
- [9] Surace G., Anghel V., Mares C., "Coupled bending–bending–torsion vibration analysis of rotating pre-twisted blades: an integral formulation and numerical examples", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 206, 1997, pp. 473–86.
- [10] Masoud A.A., Al-Said S., "A new algorithm for crack localization in a rotating Timoshenko beam", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, 2009, pp. 1541–1561.
- [11] Laura PAA., Gutierrez RH., "Analysis of vibrating Timoshenko beams using the method of differential quadrature", *Shock and Vibration*, Vol. 1, No. 1, 1993, pp. 89–93.
- [12] Kar RC., Neogy S., "Stability of a rotating, pre-twisted, non-uniform cantilever beam with tip mass and thermal gradient subjected to a non-conservative force", *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 2, 1989, pp. 499–507.
- [13] Zhou J.K., "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits", Wuhan, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [14] Ozdemir O.O., Kaya M.O., "Flap wise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, 2006, pp.413–420.
- [15] Mei C., "Application of differential transformation

تیر تیموشنکوی دارای ترک با سطح مقطع متغیر توسعه و نشان داده شد که با افزایش تعداد جمله‌های به کار رفته در روش انتقال دیفرانسیل دقت برای مودهای بالاتر افزایش می‌یابد. همچنین فرکانس‌های طبیعی تیر با سطح مقطع متغیر برای موقعیت‌ها و عمق‌های گوناگون ترک به دست آمد. مشاهده شد که با افزایش عمق ترک و نیز افزایش نسبت پهنای تیر، مقادیر فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. نتایج به دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل با مقادیر به دست آمده از آنالیز مودال، نتایج ارائه شده در سایر مراجع و نیز مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه و تطابق خوبی بین نتایج دیده شد. مشاهده گردید که این روش دقت خوبی برای تحلیل تیر تیموشنکوی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر دارد.

## ۸- فهرست علائم

$A$	مساحت ( $m^2$ )
$a_c$	عمق ترک (m)
$b$	عرض تیر (m)
$c$	نسبت باریک‌شوندگی
$C_V$	ضریب شکل هندسی
$C_\theta$	ضریب شکل هندسی
$E$	مدول یانگ (pa)
$G$	مدول برشی (pa)
$h$	ارتفاع متغیر تیر (m)
$I$	گشتاور دوم سطح ( $m^4$ )
$k'$	ضریب تصحیح برش
$L$	طول تیر (m)
$L_C$	فاصله ترک تا انتهای ثابت (m)
$r$	نسبت پهنای تیر
$\mu$	فرکانس طبیعی‌تیر
$\omega^o$	فرکانس طبیعی تیر بدون ترک
$\omega^f$	فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار
$\rho$	چگالی ( $kg/m^3$ )

## ۹- مراجع

- [1] Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M., Shunk D.D., Stinemates D.W., Nadler B.R., "A review of structural health monitor in literature", 1996–2001,

- [24] Qian GL., Gu SN., Jiang JS., "The dynamic behavior and crack detection of a beam with a crack" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 2, 1990, pp. 233–43.
- [25] Nahvi H., Jabbari M., "Crack detection in beams using experimental modal data and finite element method", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, 2005, pp. 1477-97.
- [26] Kim JT., Stubbs N., "Crack detection in beam-type structures using frequency data", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, 2003, pp. 145–60.
- [27] Gudmundsun P., "Eigen frequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 30, No. 5, 1982, pp. 339-353.
- [28] Talebi S., Ariaei A., "Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and their crack detection using genetic algorithm", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 1-13, 2013. (In Persian)
- [29] Lin, HP., "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack", *Engineering Structures*, Vol. 26, 2004, pp. 427–436.
- [30] Ariaei A., Ziaei-Rad S., Malekzadeh M., "Dynamic response of a multi-span Timoshenko beam with internal and external flexible constraints subject to a moving mass", *Archive of Applied Mechanics*, DOI: 10.1007/s00419-013-0745-6.
- [31] Holland J.H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, 1975.
- [32] Zhu T.L., "Free flapwise vibration analysis of rotating double-tapered Timoshenko beams", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, 2012, pp. 479-494.
- technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam", *Computers and Structures*, Vol. 86, 2008, pp. 1280-1284.
- [16] Chen C.K., Ho S.H., "Application of differential transformation to Eigen value problem", *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 79, 1996, pp. 173-188.
- [17] Chen C.K., Ju S.P., "Application of differential transformation to transient advective – dispersive transport equation", *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 155, 2004, pp. 25-38.
- [18] Arikoglu A., Ozkol I., "Solution of Boundary value problems for Integro-differential equations by using differential transformation method", *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 168, 2004, pp. 1145–1158.
- [19] Bert C.W., Zeng H., "Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 275, 2004, pp. 641-647.
- [20] Malik M., Dang HH., "Vibration Analysis of Continuous systems by Differential Transformation", *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 96, 1998, pp. 17–26.
- [21] Ertürk VS., Momani S., "Comparing numerical methods for solving fourth-order boundary value problems", *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 188, 2007, pp. 1963-8.
- [22] Rizos PF., Aspragathos N., Dimargonas AD., "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3, 1990, pp. 381–8.
- [23] Lele SP., Maiti SK., "Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3, 2002, pp. 559-83.