

## ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر یک سر گیردار تحت تحریک تصادفی

سعید ایرانی<sup>۱\*</sup>، سعید سازش<sup>۲</sup>

۱- استادیار مهندسی هواپیما، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- دانش آموخته کارشناسی ارشد هواپیما، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۳۳۸۱-۱۶۷۶۵ irani@kntu.ac.ir

**چکیده-** در این مطالعه به بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی گستردگی احتمال گوسین پرداخته می‌شود. به این منظور با تحلیل ارتعاشات آزاد ابتدا شکل مودهای سیستم بر حسب توابع بسل بدست می‌آید، سپس پاسخ و تحریک سیستم بر حسب شکل مودهای سیستم بیان می‌شود. در مرحله بعد با گرفتن انتگرال فوریه از خودهمبستگی پاسخ، تابع چگالی طیفی پاسخ بدست می‌آید و از روی آن واریانس جابجایی نقاط مختلف تیر محاسبه می‌شود. در نهایت با استفاده از روابط الاستیسیته و محاسبه واریانس تنش و کرنش اتفاقی و مقایسه آن با تنش تسلیم تیر، احتمال تسلیم سیستم تحت تحریک تصادفی در نظر گرفته شده، بدست می‌آید.

**کلیدواژگان:** ارتعاشات اتفاقی، تیر مقطع متغیر، چگالی طیفی، احتمال تسلیم.

## Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation

S. Irani<sup>1\*</sup>, S. Sazesh<sup>2</sup>

1- Assist. Prof., Aero. Eng., Khaje Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

2- Graduated MSc in Aero. Eng., Khaje Nasir Toosi Univ., Tehran, Iran.

\* P. O. B. 16765-3381, Tehran, Iran. irani@kntu.ac.ir

**Abstract-** In this study random vibration of a cantilever tapered beam under distributed stationary stochastic excitation with Gaussian probability density function is investigated. early free vibration analysis is performed to obtain the mode shapes of beam in form of Bessel functions, then the response is described in summation of mode shapes, and auto correlation of response is shaped by considering the mode shapes of tapered beam, also spectral density matrix of excitation is derived with cooperation of mode shapes and two dummy variables. in next step by means of frequency response and taking Fourier integral of autocorrelation of response, spectral density of displacement is computed and by using spectral density of displacement, variance of random displacements for various positions along the beam are achieved. Finally elasticity equation is applied to derive random strain and stress of beam. Comparing the variance of random stress with yield stress of beam leads to obtain probability of beam failure.

**Keywords:** Random Vibration, Tapered Beam, Spectral Density, Probability of Yield.

این نوع تیرهای دارای خواص متغیر همواره از موضوعات مورد

بررسی بوده است [۱-۳].

در تحلیل این نوع تیرها باید توجه داشت که ضرایب معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم متغیر می‌باشد و از این‌رو روش‌های

### ۱- مقدمه

در سازه‌های پیچیده تیرهای غیر یکنواخت به علت توزیع بهتر سختی و وزن نسبت به تیرهای یکنواخت به طور گستردگی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بنابراین مسئله ارتعاشات خمشی

با در نظر گرفتن شکل تیر به صورت شکل ۱ برای ممان اینرسی خمثی و سطح مقطع روابط زیر بدست می‌آید.

$$A(x) = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right) A_i = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right) b h_i \quad (2)$$

$$I(x) = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right)^3 I_i = \left(1 + r \frac{x}{\ell}\right)^3 \frac{b h_i^3}{12} \quad (3)$$

$$r = \frac{h_j - h_i}{h_i} \quad (4)$$

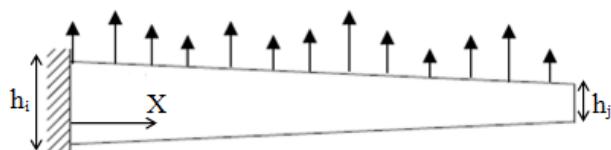
در روابط بالا  $\ell$  طول تیر،  $A_i$  سطح مقطع تیر در تکیه‌گاه و  $I_i$  ممان خمثی تیر در تکیه‌گاه می‌باشد.

### ۳- حل ارتعاشات آزاد

برای حل ارتعاشات آزاد تیر، ابتداتابع تحريك صفر در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از رابطه  $w(x,t) = W(x)q(t)$  و جداسازی متغیرها و همچنین تغییر متغیر  $\eta = \frac{x}{\ell}$ ، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left( (1+r\eta)^3 \frac{d^2}{d\eta^2} W(\eta) \right) - \beta^4 (1+r\eta) W(\eta) = 0 \quad (5)$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A_i \ell^4}{EI_i} \omega^2 \quad (6)$$



شکل ۱ تیر مقطع متغیر یکسرگیردار تحت تحريك گستردگی تصادفی از حل معادله (۵) رابطه (۶) بدست می‌آید.

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+r\eta}} \left( C_1 J_1 \left( 2\beta \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_2 Y_1 \left( 2\beta \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_3 J_1 \left( 2\sqrt{-\beta^2} \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) + C_4 Y_1 \left( 2\sqrt{-\beta^2} \sqrt{\frac{1+r\eta}{r^2}} \right) \right) \quad (7)$$

در رابطه (۷)  $J_1$  و  $Y_1$  توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه یک و

مختلفی برای بررسی این نوع مسائل ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به حل بسته معادله حاکم بر یک تیر مقطع متغیر با تکیه‌گاه‌های ساده اشاره نمود [۷-۴]. روش‌های دیگری نیز از جمله باقی‌مانده وزنی [۸]، روش تغییرات [۹-۱۰]، المان محدود [۱۱]، تفاضل محدود [۱۲]، روش المان مرزی [۱۳]، روش ماتریس انتقال [۱۴]، روش سختی دینامیکی [۱۵]، روش سختی دینامیکی همراه با آنالیز مودال [۱۶-۱۷]، و تبدیل لاپلاس [۱۸] برای حل معادله حاکم بر اینگونه مسائل به کار رفته است. در بعضی از بررسی‌های دیگر نیز از توابع گرین در فضای لاپلاس [۱۹] استفاده شده است.

در ادامه مطالعه بر روی تیرهایی با مقطع متغیر، اثرات وجود فنر متمرکز [۲۰]، دمپر و جرم متمرکز [۲۱] و تکیه‌گاه‌های الاستیک همراه با دمپر ویسکوز و جرم متمرکز [۲۳] در نظر گرفته شده است. در جدیدترین مطالعات بر روی این‌گونه از تیرها نیز یک تابع شکلی جدید برای بررسی ارتعاشات عرضی آنها معرفی شده است [۲۴].

از طرف دیگر از آنجا که بخشی از بارهای وارد بر انواع سازه‌ها در حالت واقعی به صورت تصادفی هستند ارتعاشات اتفاقی تیرها نیز از موضوعاتی بوده است که در سالهای متتمدی به آن پرداخته شده است، در حالی که تیر در نظر گرفته شده در این مطالعات به صورت مقطع ثابت می‌باشد [۲۵-۲۷]. آنچه در این مطالعه به آن پرداخته به آن پرداخته می‌شود بررسی ارتعاشات اتفاقی یک تیر مقطع متغیر تحت تحريك تصادفی است و احتمال تسلیم آن نیز تحلیل خواهد شد.

### ۲- معادلات حرکت حاکم

معادله حرکت تیر اولبرنولی مقطع متغیر را که تحت تحريك تصادفی قرار گرفته باشد را می‌توان به صورت (۱) نوشت [۲۸].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (1)$$

که در آن  $E$  مدول یانگ،  $I(x)$  ممان خمثی سطح مقطع تیر،  $\rho$  چگالی تیر،  $A(x)$  سطح مقطع تیر،  $w(x,t)$  جابجایی عمودی تیر در زمان  $t$  و مکان  $x$  و  $p(x,t)$  نیروی تصادفی گستردگی ایستا<sup>۱</sup> وارد بر تیر می‌باشد.

1. Stationary

که در آن  $\mu_i$  جرم تعیین یافته و  $K_i$  سختی تعیین یافته برای نامین مود و  $\delta$ تابع دلتای کرونیکر می‌باشد.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) q_i(t)$$

با بسط پاسخ بر اساس رابطه (۱۰) و ضرب طرفین معادله و قرار دادن این معادله در رابطه (۱) و ضرب طرفین معادله حاصل در  $W_j(x)$  و انتگرال گیری از صفر تا  $\ell$ ، با توجه به خاصیت تعامد شکل مودها، معادله زیر بدست می‌آید.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{\mu_i} \int_0^\ell p(x,t) W_i(x) dx = Q_i(t) \quad (10)$$

در صورتی که تابع پاسخ فرکانسی سیستم به صورت رابطه (۱۱) تعریف شود، و با فرض صفر بودن شرایط اولیه سیستم، پاسخ مختصات تعیین یافته  $q_i(t)$  به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود.

$$H_i(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_i^2} \quad (11)$$

$$q_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_i(\omega) Q_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12)$$

## ۵- ارتعاشات اتفاقی

در این بخش به تحلیل ارتعاشات اتفاقی سیستم مورد نظر که تحت یک تحریک تصادفی ایستا با مقدار میانگین صفر قرار گرفته است، پرداخته می‌شود. توجه شود که فرض شرایط اولیه صفر کماکان برقرار است.

چون تابع تحريك  $P(x,t)$  به صورت ایستا در نظر گرفته شده است، بنابراین نیروهای تعیین یافته  $Q_i(t)$  نیز ایستا هستند. رابطه دیگر همبستگی<sup>۱</sup> نیروهای  $Q_i(t)$  و  $Q_j(t)$  به صورت رابطه (۱۳) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} R_{Q_i Q_j}(\tau) &= E \{ Q_i(t) Q_j(t + \tau) \} \\ &= E \left\{ \frac{1}{\mu_i} \int_0^\ell p(x_1, t) W_i(x_1) dx_1 \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\mu_j} \int_0^\ell p(x_2, t) W_j(x_2) dx_2 \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\mu_j} \int_0^\ell \int_0^\ell W_i(x_1) W_j(x_2) \right. \\ &\quad \times \left. R_{P_{x_1} P_{x_2}}(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

### 1.Cross-Correlation

$C_1$  تا  $C_4$  اعداد ثابت می‌باشند. با اعمال شرایط مرزی نشان داده شده در جدول ۱ یک دستگاه ۴ معادله ۴ مجھول بر حسب ثوابت  $C_1$  تا  $C_4$  بدست می‌آید.

از حل غیر بدیهی این دستگاه مقادیر مختلف  $\beta$  حاصل می‌شود. حل غیر بدیهی منجر به ایجاد یک منحنی مشکل از توابع بسل معرفی شده، می‌شود که محل برخورد این منحنی با محور  $\beta$ ، پاسخ‌های حل غیر بدیهی خواهد بود، این محل‌های برخورد در شکل ۲ نشان داده شده است.

از روی مقادیر مختلف  $\beta$  با توجه به رابطه (۶) فرکانس‌های طبیعی تیر و با توجه به رابطه (۷) شکل مودهای سیستم محاسبه می‌شود.

## ۴- تحلیل مودال

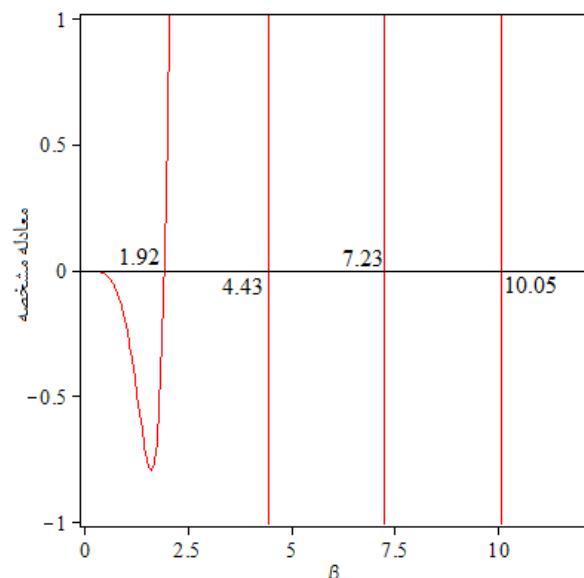
با توجه به خاصیت تعامد شکل مودها برای ماتریس جرم و سختی سیستم روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$\int_0^\ell \rho A(x) W_i(x) W_j(x) dx = \mu_i \delta_{ij} \quad (8)$$

$$\int_0^\ell EI(x) W_i''(x) W_j''(x) dx = K_i \delta_{ij} \quad (9)$$

جدول ۱ شرایط مرزی تیر مقطع متغیر یکسرگیردار

$$\frac{d}{d\eta} \left( I(\eta) \frac{d^2 W}{d\eta^2} \right)_{\eta=1} = 0 \quad \frac{d^2 W}{d\eta^2}_{\eta=1} = 0 \quad \frac{dW}{d\eta}_{\eta=0} = 0 \quad W(0) = 0$$



شکل ۲ شکل مودهای تیر یکسرگیردار مقطع متغیر

با قرار دادن  $\tau = 0$ ، در رابطه (۱۸) میانگین مجذور<sup>۳</sup> جابجایی در نقطه  $x$  از تیر حاصل می‌شود.

$$E\{w^2(x)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x)W_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega)H_j^*(\omega)S_{Q_iQ_j}(\omega)d\omega \quad (19)$$

حال با توجه به روابط الاستیسیته دیگر خواص آماری مربوط به ممان خمثی و کرنش تیر محاسبه می‌شود. رابطه ممان خمثی تیر به صورت رابطه (۲۰) است.

$$M_b = -EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (20)$$

بنابراین میانگین مجذور ممان خمثی در نقطه  $x$  از تیر از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E\{M_b^2\} = (EI(x))^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i''(x)W_j''(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega)H_j^*(\omega)S_{Q_iQ_j}(\omega)d\omega \quad (21)$$

بیشینه کرنش در راستای طولی تیر از رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود. در این معادله  $h(x)$  ارتفاع مقطع تیر و برابر می‌باشد.

$$\varepsilon = -\frac{h(x)}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (22)$$

میانگین مجذور کرنش بیشینه در نقطه  $x$  تیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$E\{\varepsilon^2(x)\} = \left(\frac{h(x)}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i''(x)W_j''(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega)H_j^*(\omega)S_{Q_iQ_j}(\omega)d\omega \quad (23)$$

با توجه به رابطه بین تنفس و کرنش در طول تیر از رابطه (۲۴)، برای میانگین مجذور تنفس بیشینه در تیر، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

$$S = E\varepsilon \quad (24)$$

$$E\{S^2(x)\} = E^2 E\{\varepsilon^2(x)\} \quad (25)$$

## ۶- احتمال تسلیم

از آنجا که توزیع احتمال تحریک گوسین<sup>۴</sup> است و ایستا نیز

در این رابطه  $E\{.\}$  نمایانگرتابع میانگین‌گیری است و  $x_1$  و  $x_2$  دو متغیر کاذباند و دو نقطه مجزا را در فاصله  $\ell < x_2 - x_1$  مشخص می‌نمایند.  $R_{P_{x_1}P_{x_2}}(x_1, x_2, \tau)$  تابع دیگر همبستگی بین تحریک تصادفی گسترد  $w(x_1, t)$  و  $p(x_2, t)$  می‌باشد.

دیگر چگالی طیفی<sup>۱</sup>  $S_{Q_iQ_j}(\omega)$  بین نیروهای تعییم یافته  $Q_i(t)$  و  $Q_j(t)$  با انتگرال فوریه از  $R_{Q_iQ_j}(\tau)$  بدست می‌آید.

$$S_{Q_iQ_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{Q_iQ_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

اکنون رابطه (۱۳) در داخل رابطه (۱۴) جایگذاری می‌شود.

$$S_{Q_iQ_j}(\omega) = \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\mu_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_i(x_1)W_j(x_2) \times S_{p_{x_1}p_{x_2}}(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (15)$$

که در این رابطه  $S_{p_{x_1}p_{x_2}}(x_1, x_2, \omega)$  انتگرال فوریه تابع  $R_{P_{x_1}P_{x_2}}(x_1, x_2, \tau)$  می‌باشد.

تابع دیگر همبستگی پاسخ بین دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  به صورت رابطه (۱۶) نوشته می‌شود.

$$R_{w_{x_1}w_{x_2}}(x_1, x_2, \tau) = E\{w(x_1, t)w(x_2, t + \tau)\} = E\left\{\sum_{i=1}^{\infty} W_i(x_1)q_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x_2)q_j(t + \tau)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x_1)W_j(x_2)R_{q_iq_j}(\tau) \quad (16)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱۲) و رابطه (۱۶)، عبارت داده شده در رابطه (۱۷) برای دیگر همبستگی پاسخ بر حسب چگالی طیفی نیروی تعییم یافته بدست می‌آید.

$$R_{w_{x_1}w_{x_2}}(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x_1)W_j(x_2) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega)H_j^*(\omega)S_{Q_iQ_j}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (17)$$

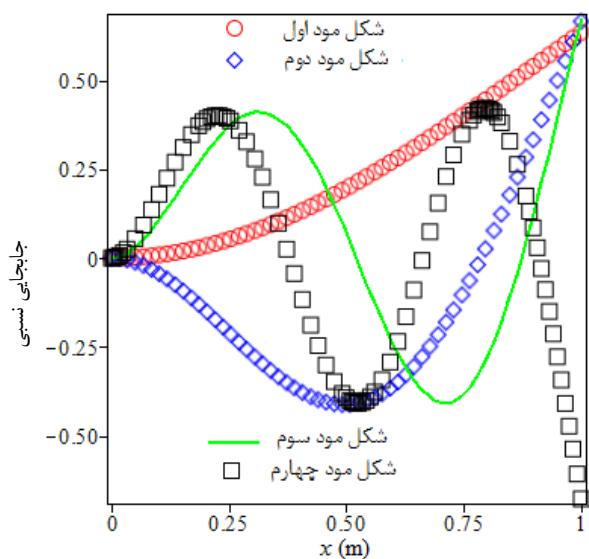
در این رابطه،  $S_{Q_iQ_j}(\omega)$  از معادله (۱۵) محاسبه می‌شود. تابع  $H_j^*(\omega)$  مزدوج مختلط تابع  $(H_j(\omega))$  می‌باشد.

در صورتی که  $x_1 = x_2$  باشد تابع خودهمبستگی<sup>۲</sup> پاسخ به صورت زیر حاصل می‌شود.

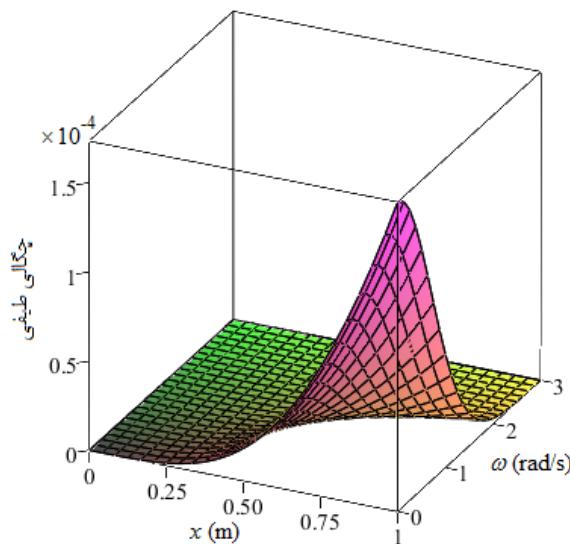
$$R_w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_i(x)W_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega)H_j^*(\omega)S_{Q_iQ_j}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (18)$$

1. Cross-Spectral Density

2. Auto-Correlation



شکل ۳ شکل مودهای تیر یکسرگیردار مقطع متغیر



شکل ۴ چگالی طیفی پاسخ در طول تیر

جدول ۳ فرکانس طبیعی تیر مقطع متغیر یکسرگیردار

فرکانس طبیعی مقدار (رادیان بر ثانیه)	فرکانس طبیعی $\omega_1$
۳۱۹/۴۵	$\omega_1$
۱۶۹۹/۸۴	$\omega_2$
۴۵۳۳/۱۷	$\omega_3$
۸۷۶۴/۴۵	$\omega_4$

تابع چگالی طیفی تیر به ازای نقاط مختلف در طول تیر در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۴

می‌باشد، پاسخ سیستم نیز گوسین خواهد بود. بنابراین با بدست آوردن واریانس<sup>۱</sup> و انحراف معیار<sup>۲</sup> پاسخ می‌توان احتمال تسلیم سازه را مشخص کرد. لذا با محاسبه تنش اتفاقی سیستم، از رابطه (۲۶) احتمال وجود بیشینه تنش بالاتر از تنش تسلیم مشخص می‌شود [۲۹].

$$P_y = e^{-\frac{\sigma_y^2}{2\sigma_{S(x)}^2}} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶)  $\sigma_y$  نمایانگر تنش تسلیم و  $\sigma_{S(x)}^2$  نمایانگر واریانس تنش در نقطه  $x$  از تیر می‌باشد.

## ۷- حل مثال عددی

در این قسمت یک تیر نمونه که تحت تحریک تصادفی با چگالی طیفی  $S_0 e^{-\alpha|x_1-x_2|} e^{-\gamma\omega^2}$  قرار می‌گیرد [۳۰]، و خواص آن در جدول ۲ آمده است، مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. در ابتدا چهار فرکانس طبیعی و چهار شکل مود اول سیستم محاسبه می‌گردد، سپس به ترتیب چگالی طیفی تیر، واریانس پاسخ نقاط مختلف تیر، واریانس تنش در طول تیر،تابع چگالی احتمال پاسخ تیر و در نهایت احتمال تسلیم تیر تحت بارگذاری مشخص شده بدست می‌آید.

چهار شکل مود اول تیر در شکل ۳ و ۴ فرکانس طبیعی اول در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۲ مشخصات تیر مورد بررسی

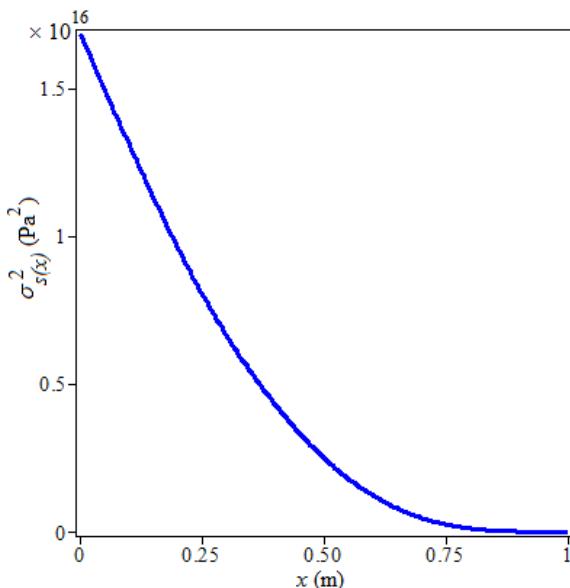
پارامتر	مقدار
$\alpha$	۱
$\gamma$	۱
E	۲۰۰ گیگاپاسکال
$\rho$	۸۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب
$\ell$	۱ متر
$h_i$	۰/۰۶ متر
$h_j$	۰/۰۴ متر
b	۰/۰۲ متر
$S_0$	$1 \times 10^8$ نیوتن ثانیه بر مترمربع
$\sigma_y$	۰/۲۵ گیگاپاسکال

1 . Variance

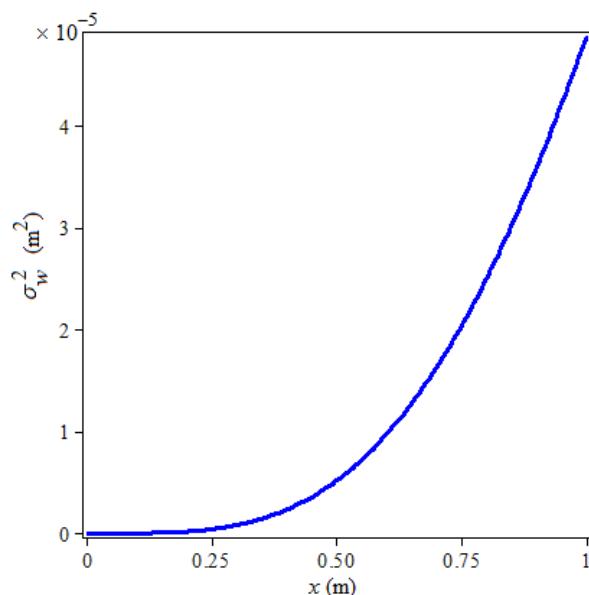
2 . Standard Deviation

در تکیه‌گاه دارای مقدار بیشینه می‌باشد به طوری که در تکیه‌گاه بیشینه پراکندگی داده‌های تصادفی پاسخ رخ می‌دهد. بعد از محاسبه واریانس تنش اتفاقی در تکیه‌گاه با توجه به شکل ۶ که نمایانگر توزیع نرمال پاسخ می‌باشد، می‌توان نمودار تنش اتفاقی در تکیه‌گاه را به صورت شکل ۸ داشت.

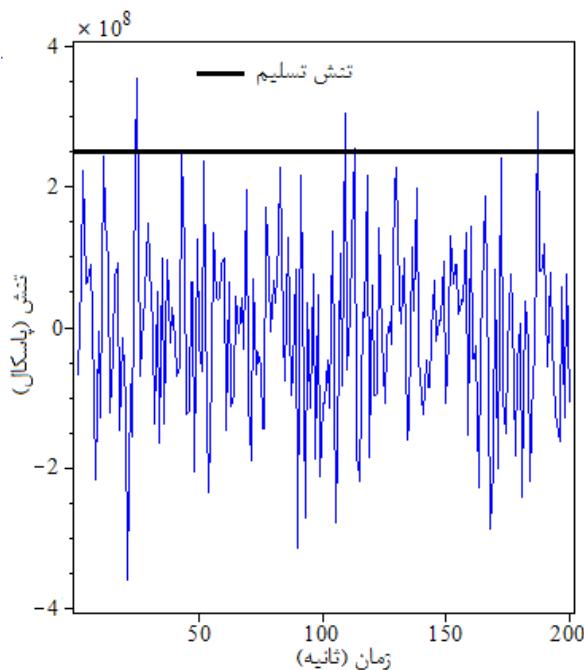
مشخص است، مقدارتابع چگالی طیفی پاسخ در نوک تیر مقدار ماکزیمم خود را دارد، بنابراین با توجه به رابطه (۱۹) واریانس پاسخ نیز در نوک تیر بیشینه خواهد شد (شکل ۵). تابع چگالی احتمال تنش اتفاقی در مقطع تکیه‌گاه تیر به صورت نمودار میله‌ای، در شکل ۶ نشان داده شده است.



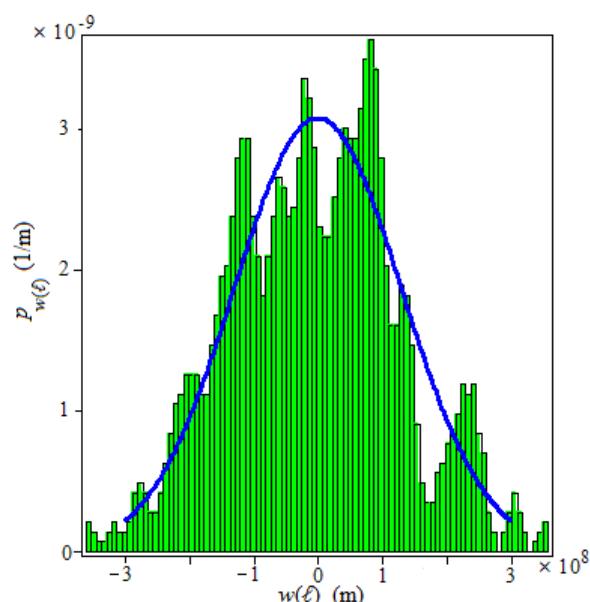
شکل ۷ واریانس تنش در طول تیر



شکل ۵ واریانس جابجایی در طول تیر



شکل ۸ تنش اتفاقی تیر مقطع متغیر در تکیه‌گاه



شکل ۶ تابع چگالی احتمال تنش اتفاقی در تیر

همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است، واریانس تنش اتفاقی

آنالیزهای آماری یک بارگذاری تصادفی، چگالی طیفی آنرا مشخص کرده و از روی آن با انجام تحلیل ارتعاشات اتفاقی و بدست آوردن احتمال تسلیم می‌توان قابلیت اطمینان یک سازه را نسبت به آن تحریک مشخص نمود و معیار لازم برای طراحی سازه را مشخص کرد.

همان‌طور که در شکل ۸ مشخص است به ازای تحریک با مشخصات داده شده تنش در تکیه‌گاه از تنش تسلیم فراتر رفته است، لذا می‌توان احتمال وجود تنش ماقزیم بالای خط تنش تسلیم را از رابطه (۲۶) مشخص نمود، که احتمال تسلیم در این شدت از تحریک، ۱۵/۶۴٪ می‌باشد.

## ۹- مراجع

- [1] Taleb N. J. and Suppiger E. W., "Vibration of Stepped Beams", *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 28, 1961, pp. 295-298
- [2] Lindberg G. M., "Vibrations of Nonuniform Beams", *The Aeronautica Quarterly*, Vol. 14, 1963, pp. 387-395.
- [3] Wang H. C., "Generalized Hypergeometric Function Solutions on Transverse Vibrations of a Class of Nonuniform Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, 1968, pp. 702-708.
- [4] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Tapered Cantilever Beams with End Supports", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 44, 1968, pp. 1739-1741.
- [5] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Double-Tapered Cantilever Beams", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 57, 1972, pp. 1771-1774.
- [6] Mabie H. H. and Rogers C. B., "Transverse Vibrations of Double-Tapered Cantilever Beams with End Support and with End Mass", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 55, 1974, pp. 986-991.
- [7] Ganga Rao H. V. S. and Spyros C. C., "Closed form Series Solutions of Boundary Value Problems with Variable Properties", *Computers and Structures*, Vol. 23, 1986, pp. 211-215.
- [8] Finlayson B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, New York Academic Press, 1972.
- [9] Mikhlin S. G., *Variational Methods in Mathematical Physics*, New York Macmillan, 1964.
- [10] Laura P. A. A., Valerga De Greco B., Utjes J. C. and Carnicer R., "Numerical Experiments on Free and Forced Vibrations of beams of nonuniform cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 120, 1988, pp. 587-596.
- [11] Bathe K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1982.
- [12] Ghali A. And Neville A. M., *Structural Analysis*, Pennsylvania: Intext Educational Publishers, 1972.
- [13] Beskos D. E., "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis" *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 40, 1987, pp. 1-23.

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی پرداخته شد و با توجه به خواص آماری پاسخ اتفاقی احتمال تسلیم تیر در نتیجه بار تصادفی نیز تحلیل شد. به منظور صحه‌گذاری بر پاسخ بدست آمده کافی است شکل مودهای تیر و یا بطور کلی‌تر، حل معادله مشخصه سیستم در شرایط خاصی که تفاوت دو مقطع زیاد نباشد با مقادیر حل معادله مشخصه یک تیر مقطع ثابت یکسرگیردار مقایسه شود. برای این منظور مقدار پارامتر  $h_i$  و مقدار پارامتر  $h_j$  در نظر گرفته می‌شود تا تیر مورد مطالعه تقریباً تبدیل به تیر مقطع ثابت شود، حال نتایج بدست آمده از حل غیر بدیهی معادله (۷) با نتایج مربوط به تیر یکسرگیردار مقطع ثابت [۲۸] مقایسه می‌شود (جدول ۴).

در این مطالعه احتمال وجود نقطه ماقزیم بالاتر از تنش تسلیم محاسبه شد. آنچه مسلم است افزایش شدت تحریک احتمال تسلیم را افزایش خواهد داد به طور مثال با ۵ برابر کردن شدت تحریک احتمال تسلیم به ۶۹٪ افزایش پیدا می‌کند. عوامل دیگر تأثیرگذار بر روی احتمال تسلیم تیر، ابعاد و مشخصات تیر می‌باشد که با توجه به حل ارائه شده می‌توان با تغییر هر کدام به بررسی میزان تأثیر بر روی احتمال تسلیم تیر پرداخت به عنوان مثال با افزایش طول تیر احتمال تسلیم افزایش یافته و افزایش پهنانی تیر موجب کاهش احتمال تسلیم می‌شود.

جدول ۴ صحه‌گذاری بر پاسخ‌ها با مقایسه حل معادله مشخصه

حل معادله مشخصه	مطالعه ارائه شده	مرجع [۲۸]
۱/۸۷۵۱	۱/۸۷۵۲	$\beta_1$
۴/۶۹۴۱	۴/۶۹۲۸	$\beta_2$
۷/۸۵۴۷	۷/۸۵۱۹	$\beta_3$
۱۰/۹۹۵۶	۱۰/۹۹۱۲	$\beta_4$

- [22] De Rosaa M.A., Maurizi M.J., "Damping in Exact Analysis of Tapered Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 286, 2005, pp. 1041-1047.
- [23] De Rosa M.A., Lippiello M., Maurizi M.J., Martin H.D., "Free Vibration of Elastically Restrained Cantilever Tapered Beams with Concentrated Viscous Damping and Mass", *Journal of Mechanics Research Communications*, Vol. 37, 2010, pp. 261-264.
- [24] Valipour Hamid R., Bradford Mark A., "A New Shape Function for Tapered Three-Dimensional Beams with Flexible Connections", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 70, 2012, pp. 43-50.
- [25] Rzhanitsyn A.R., *Probabilistic Calculation of Beams on a Random Load*, Stroizdat Publ. House, Moscow, Vol. 12, 1977.
- [26] Elishakoff, I., *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [27] Waleed F., Faris J., DaoudI. and Sutjipto A.G.E., "Random Vibrations of a Beam on Elastic Foundation", *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, Vol. 5(6), 2011, pp. 456-460.
- [28] Singiresu S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, New York, 2007.
- [29] Newland, D.E., *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, Dover publication, Mineola New York, 3th Edition, 2005.
- [30] Chang, T.P. and Chang, C.Y., "Vibration Analysis of Beams with a Two Degree-of-Freedom Spring-mass System", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, No. 5, 1998, pp. 383-401.
- [14] Chu F. H. and Pilkeyw. D., "Transient Analysis of Structural Members by the CSDT Riccati Transfer Matrix Method", *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp. 599-611.
- [15] JUST D. J., "Plane Frameworks of Tapered Box and I-Section", *Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 103, 1977, pp. 71-86.
- [16] Ovunk B. A., "Dynamics of Frameworks by Continuous Mass Method", *Computers and Structures*, Vol. 4, 1974, pp. 1061-1089.
- [17] Beskosd. E., "Dynamics and Stability of Plane Trusses with Gusset Plate" *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp. 785-795.
- [18] Beskos D. E. and Narayanan G. V., "Dynamic Response of Frameworks by Numerical Laplace Transform", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 1983, pp. 289-307.
- [19] Lee S. Y., Ke H. Y. and Kuo Y. H., "Analysis of Non-Uniform Beam Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142(1), 1990, pp. 15-29.
- [20] Craver W. L., Jampala J.R. and P., "Transverse Vibration of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Constraining Springs", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166(3), 1993, pp. 521-529.
- [21] De Rosa M.A., Auciello N.M., Maurizi M.J., "The use of Mathematical in the Dynamic Analysis of a Beam with a Concentrated Mass and Dashpot", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263, 2003, pp. 219-226.