



ضرایب شدت تنش مود ترکیبی در ترک موازی با لبه یک نیم صفحه تحت بارگذاری یکنواخت

جواد علیزاده‌کاکلر^{۱*}، جمال خضری^۲، علی عبدالی^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه

* ارومیه، صندوق پستی ۱۵۳۱۱۵۷۵۶۱

j.alizadeh@urmia.ac.ir

چکیده

اگر ترک مرکزی در یک صفحه بی‌نهایت بزرگ تحت بارگذاری یکنواخت (ترک گریفیث) به یکی از لبه‌های اعمال بار نزدیک شود، تبدیل به ترک زیرسطحی می‌شود. ترک‌های زیرسطحی در سازه‌های ایجاد می‌شوند که در معرض پدیده خستگی تماس غلتشی قرار دارند. در این مطالعه ابتدا ضرایب شدت تنش ترک گریفیث تحت کشش و برش یکنواخت با استفاده از مدل‌سازی اجزا محدود محاسبه و با خطای کمتر از ۰.۱٪ صحة‌گذاری گردیده است. سپس ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک زیرسطحی به ازای عمق‌های مختلف با نزدیک نمونه ترک به یکی از لبه‌های موازی صفحه تعیین شده است. عدم تقارن هندسی نسبت به سطح ترک و کوپلینگ مودهای شکست موجب بروز مودهای برشی و کششی قابل ملاحظه برای ترک زیرسطحی به ترتیب تحت بارهای کششی و برشی می‌گردد. کوپلینگ مودهای شکست با کاهش عمق ترک افزایش می‌یابد تا جایی که در نسبت طول به عمق ۲۰ برابر ترک، ضرایب شدت تنش ناشی از این پدیده، ۶۹٪ ضرایب شدت تنش مودهای اصلی می‌شوند، با برازش دقت بالای تابع درجه سه بر ضرایب شدت تنش مود ترکیبی محاسبه شده، چهار ضریب شکل برای مودهای کششی و برشی ناشی از کشش و برش یکنواخت ترک زیرسطحی ارائه شده است. روابط صریح ارائه شده برای ضریب شدت تنش، برای استفاده سریع و راحت توسط مهندسان بسیار مفید خواهد بود. مقادیر به دست آمده از این روابط حتی برای بارگذاری‌های غیریکنواخت نیز می‌تواند تقریب خوبی از ضرایب شدت تنش باشد (به خصوص برای طول ترک‌های کوتاه که تعییرات بار روی آن‌ها نمی‌تواند چندان زیاد باشد).

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۱ آذر ۱۳۹۶

پذیرش: ۱۸ دی ۱۳۹۶

ارائه در سایت: ۰۵ بهمن ۱۳۹۶

کلید واژگان:

ضریب شدت تنش

ترک گریفیث

ترک زیرسطحی

کوپلینگ مودهای شکست

ضریب شکل

Mixed mode stress intensity factors for a crack parallel to the free surface of a half-plane under uniform loading

Javad Alizadeh Kaklar^{*}, Jamal Khezri, Ali Abdoli

Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran.

*P.O.B. 1531157561Urmia, Iran, j.alizadeh@urmia.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 02 December 2017

Accepted 08 January 2018

Available Online 25 January 2018

Keywords:

Stress intensity factor

Griffith crack

Subsurface crack

Coupling of the fracture modes

Geometry correction factor

ABSTRACT

The Griffith crack, a central crack in an infinite plane under uniform loading, is converted to a subsurface one by moving close to a loaded edge of the plane. Subsurface cracks initiate under rolling contact fatigue conditions. In this paper, first, finite element model of the Griffith crack has been developed and validated by calculating stress intensity factors (SIFs) under uniform tension and shear loadings. Then, by moving the crack close to a parallel edge of the plane, mixed mode SIFs of the subsurface crack have been determined for a wide range of the cracks depths. Non-symmetrical geometry with respect to the crack edge causes coupling between fracture modes and so, considerable shear and tension fracture modes under tension and shear loadings, respectively. The ratio of SIF for the coupling mode to the direct mode is increased up to 69% for the length to depth ratio of 20. Also, by fitting third-degree polynomials to the mixed mode SIFs, four geometry correction factors have been obtained for SIFs of subsurface cracks under uniform loadings. These approximate equations can be used easily and efficiently by engineers. Also, the relations can be utilized as a primary estimation for non-uniform loadings, especially when the crack length as well as the load variation along it is small.

-۱- مقدمه

زیرسطحی از جمله عیوبی هستند که اغلب در سازه‌های مبتلا به پدیده خستگی تماس غلتشی مشاهده می‌شوند. این ترک‌ها در یاتاقان‌های غلتشی، چرخ‌دنده‌ها، ریل‌ها و چرخ‌های فولادی در اثر بروز بیشینه تنش برشی در زیر سطح تماس می‌توانند جوانه بزنند. علاوه‌بر این وجود عیوب مادی زیرسطحی و تمرکز تنش ناشی از آن‌ها نیز می‌تواند عامل ایجاد ترک‌های زیرسطحی

نخستین گام در تعیین استحکام سازه‌های ترک‌دار و همچنین مطالعه رشد ترک خستگی، محاسبه ضریب شدت تنش ترک است. به جز موارد محدودی که روابط صریح تحلیلی و تقریبی برای آن‌ها وجود دارد، عموماً ضریب شدت تنش ترک با استفاده از حل اجزا محدود مسئله تعیین می‌گردد. ترک‌های

Please cite this article using:

J. Alizadeh Kaklar, J. Khezri, A. Abdoli, Mixed mode stress intensity factors for a crack parallel to the free surface of a half-plane under uniform loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 219-224, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در این مقاله ابتدا مدل اجزا محدود ترک مرکزی در صفحه بی‌نهایت بزرگ (به ترک گریفیت مشهور است) ایجاد و صحه‌گذاری می‌شود و سپس ترک مرکزی به یکی از لبه‌های موازی با ترک صفحه بی‌نهایت نزدیک می‌گردد. با حل اجرا محدود، ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی برای عمق‌های متفاوت ترک تحت کشش و برش یکنواخت به دست می‌آید. ضمن صحه‌گذاری مقادیر محاسبه شده، با برازش دقیق، ضریب شکل ترک زیرسطحی تعیین خواهد شد. روابط به دست آمده علاوه‌بر استفاده سریع و کاربردی توسعه طراحان و مهندسان می‌تواند به عنوان ضرایب شدت تنش مرجع برای استخراج تابع وزن مورد استفاده قرار گیرد. همچنین پدیده کوپلینگ مودهای شکست تحت بارگذاری یکنواخت نیز مورد ارزیابی و مطالعه قرار می‌گیرد.

2- مدل سازی اجزا محدود

2-1- ترک گریفیت

اولین مطالعات برای ارائه مفهوم ضریب شدت تنش بیش از نود سال پیش توسط گریفیت انجام شد. او نشان داد که در یک ماده ترد مانند شیشه رشد ترک توسط حاصل ضرب تنش دوردست در ریشه دوم طول ترک کنترل می‌شود. ضریب شدت تنش برای سازه‌های ترکدار مختلف و تحت بارگذاری‌های متفاوت با استفاده از تئوری الاستیسیته قابل تعیین است. رابطه بین رابطه برای ضریب شدت تنش ترک مربوط به یک ترک مرکزی به طول $2a$ در یک ورق بی‌نهایت بزرگ تحت کشش یا برش یکنواخت و به صورت رابطه (1) است (که به عنوان ترک گریفیت شناخته می‌شود) [14].

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \tau \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش مود I و II ترک، σ و τ به ترتیب تنش‌های یکنواخت عمودی و برشی هستند که به لبه‌های ورق اعمال می‌شوند (شکل 2).

برای سازه‌هایی با هندسه‌های مشابه، روابط (1) برای ضریب شدت تنش به صورت رابطه (2) قابل اصلاح است.

$$\begin{aligned} K_I &= Y_I \sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= Y_{II} \tau \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن Y_I و Y_{II} به ترتیب ضریب شکل بدون بعد مود I و II سازه ترکدار می‌باشند. در واقع ضرایب شکل برای ترک گریفیت برابر یک می‌باشند. ضریب شکل مود I ترک لبه‌ای به طول a در ورق نیمه بی‌نهایت، مقدار ثابت 1.12 است. این ضریب بیانگر اثر لبه آزاد ورق بر ضریب شدت تنش ترک است.

مدل سازی اجزا محدود در این مطالعه با استفاده از نسخه 6.13 نرمافزار اجزا محدود آباکوس انجام شده است. همچنین ورق ترکدار همواره به صورت مربعی به طول $2A$ در نظر گرفته شده است. برای اطمینان از بی‌نهایت بزرگ بودن ابعاد ورق نسبت به طول ترک، ضریب شدت تنش مود I و II ترک برای نسبت‌های مختلف طول ورق مربعی به طول ترک (A/a) محاسبه گردید. شکل 3 ضرایب شکل محاسبه شده برای ترک گریفیت به ازای ابعاد مختلف ورق را نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشهود است اگر طول ورق 40 برابر طول ترک باشد با دقت بسیار خوبی می‌توان ورق را بی‌نهایت فرض کرد. به عبارت دیگر اگر طول ورق 40 برابر ترک باشد، خطای ضریب شدت تنش به دست آمده از روش اجزا محدود نسبت به مقادیر تحلیلی برای بارگذاری کششی و برشی به ترتیب برابر با 0.02% و 0.06% است. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که مدل

باشد. رشد ترک زیرسطحی در اثر خستگی تماس غلتی می‌تواند منجر به جدا شدن تکه‌ای از ماده سطح قطعه و شکست خطرناک گردد (شکل 1).

پژوهش‌های متعددی به تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی پرداخته اند [4-2]. مطالعه ترک‌های زیرسطحی نیز جایگاه خاصی در میان مقالات مرتبط با مباحث شکست و خستگی دارد. بقینی و همکاران [5] تابع وزن آن را با تحلیل ترک زیرسطحی در نیم‌صفحه ارائه نمودند. پیچیدگی و تعداد زیاد ضرایب، استفاده از تابع وزن ارائه شده توسط آنها را مشکل می‌کند. در سال 2013 چن و همکاران [6] اندرکنیش ترک زیرسطحی موازی با سطح یک نیم‌صفحه را با یک نابه‌جایی مفروض در نزدیکی نوک ترک تحت نیروی تتماسی عمودی مورد بررسی قرار دادند. محاسبه ضرایب شدت تنش ترک تحت شرایط مختلف نشان داد که وجود نابه‌جایی لغزش نسبی سطح ترک و رشد آن را مهار نماید. مازو [8,7] در مطالعات خود، رشد ترک زیرسطحی در نیم‌صفحه را تحت فشار و برش ناشی از تماس غلتی بررسی نمود. در این بررسی‌ها ضمن ارائه تابع وزن به نسبت ساده‌تر از تابع وزن بقینی و همکاران [5] از اثر کوپلینگ مودهای شکست در میکرو ترک‌ها صرف‌نظر شد. علیزاده و قاجار [9] ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی تحت بارهای یکنواخت کششی و برشی را با استفاده از روش اجزا محدود محاسبه کرده و اثرات نزدیک شدن به سطح نیم‌فضا را مهمن ارزیابی نمودند. دانزلو و همکاران [11] در سال 2015 مکانیزم رشد ترک زیرسطحی در چرخ‌دنده و جدا شدن قسمتی از ماده سطح را به صورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. لزوم لحاظ نمودن پدیده قفل شدن برشی سطح ترک در تعیین آستانه رشد ترک تحت مود برشی از نتایج مهم این پژوهش بود. همچنین یین و همکاران [12] عمر رشد ترک زیرسطحی در یک چرخ‌دنده را با استفاده از تحلیل در یک نرم‌افزار اجزا محدود و به کارگیری روش کرنش پلاستیک انبیا شته تعیین نمودند.

یکی از ابعاد اهمیت ترک‌های زیرسطحی بروز پدیده کوپلینگ مودهای شکست است. در اثر این پدیده اعمال بارگذاری مود I یا مود II به ترک زیرسطحی می‌تواند موجب بروز مود ترکیبی I و II در آن شود. به عبارت دیگر هرگونه میدان جابه‌جایی نامتقارن (غیرمتقارن برای مود I و غیرپادمتقارن برای مود II) نسبت به سطح ترک، مودهای شکست ترکیبی را تحت یک مود بارگذاری نتیجه خواهد داد. عامل نامتقارنی میدان جابه‌جایی می‌تواند عدم تقارن در هندسه، بارگذاری و یا جنس باشد. در مورد ترک زیرسطحی با توجه به نامتقارنی هندسه سازه نسبت به سطح ترک، پدیده کوپلینگ مودهای شکست و ایجاد مود ترکیبی I و II همواره مشاهده می‌گردد [5,9]. این پدیده باعث می‌شود، ترک‌های زیرسطحی حتی تحت بارگذاری فشاری تماس غلتی که موجب بسته شدن سطح ترک می‌شود نیز رشد نمایند. به عبارت دیگر، رشد ترک‌های زیرسطحی تحت شرایط خستگی تماس غلتی متفاوت از رشد ترک‌های زیرسطحی است که عموماً تحت مود I اتفاق می‌افتد [13].

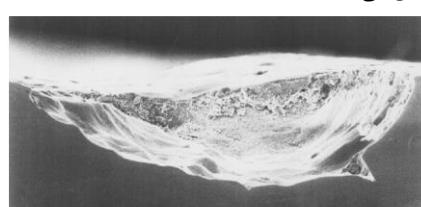


Fig. 1 Pitting of the contact surface due to a subsurface crack growth
شکل 1 کندگی سطح تماس در اثر رشد ترک زیرسطحی [1]

هم را فراهم می‌آورد. حول نوک ترک 4 کانتور انتگرال‌گیر به ترتیب با شعاع‌های کوچک برای کانتورهای انتگرال‌گیر با این هدف بوده است که انتخاب شعاع کوچک برای کانتورهای انتگرال‌گیر با سطح ورق بسیار نزدیک نمود. بتوان ترک را در مدل سازی ترک زیرسطحی به صفحه‌ای مرتبه 2 المان‌بندی شده کل ورق با استفاده از المان‌های تنش صفحه‌ای مرتبه 2 المان‌بندی شده CPS6M است. برای کانتور اول حول نوک ترک از المان‌های مثنی متعدد منفرد استفاده شده است تا تکینگی نوک ترک را بطرف سازد [15]. بی‌نهایت بودن استفاده شده است تا تکینگی نوک ترک را بطرف سازد [15]. بی‌نهایت بودن تنش در نوک ترک در این المان‌ها با انتقال گره روی نوک ترک به وسط ضلع شعاعی المان منفرد رفع می‌شود. سایر قسمت‌ها نیز با استفاده از المان‌های مربعی CPS8R مشبندی شده است. پس از بررسی همکرایی پاسخ به ازای طول‌های مختلف المان، ورق با استفاده از 23035 المان به اجزای محدود تقسیم شد (شکل 4).

2- ترک زیرسطحی

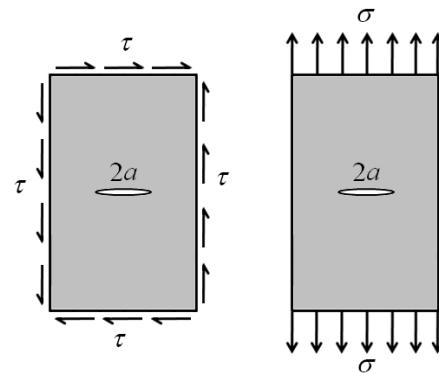
ترک گریفیث با نزدیک شدن به یکی از لبه‌های ورق که با ترک موازی است، تبدیل به ترک زیرسطحی می‌شود (شکل 5). در واقع ترک زیرسطحی با عمق بی‌نهایت همان ترک گریفیث خواهد بود. پس از مدل‌سازی و صحه‌گذاری ترک گریفیث تحت بارهای عمودی و برشی با راهبرد مشابه، ترک زیرسطحی با عمق h در ورق نیمه بی‌نهایت مدل‌سازی می‌شود (شکل 5). از آن جا که در مدل‌سازی اجزا محدود ترک زیرسطحی عیناً همانند ترک گریفیث عمل شده و تنها عمق ترک تغییر نموده است؛ بنابراین می‌توان از صحت نتایج حل اطمینان داشت. پارامتر بی‌بعد $\gamma = a/h$ به عنوان شاخص عمق ترک زیرسطحی تعریف می‌گردد. در این مطالعه اثر سطح آزاد نیم‌صفحه بر ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی و پدیده کوپلینگ مودهای شکست تحت بارهای عمودی و برشی یکنواخت با مدل‌سازی و حل ترک زیرسطحی به ازای $\gamma = 0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 1, 1.25, 1.66, 2, 2.5, 3.33, 5, 6.66, 10, 12.5, 16.66, 20$ مربوط به 6 ترک از 16 ترک مورد بررسی را با مقیاس واقعی نشان می‌دهد. برای وضوح شکل و قابل تشخیص بودن ترک‌ها، γ مربوط به 10 ترک نشان داده نشده است. بررسی این گستره وسیع از ترک‌های زیرسطحی باعث خواهد شد که اولاً نتایج به دست آمده جامع و دقیق باشد. دوم ترک به قدری به سطح نزدیک شده باشد (تا 5% طول خود) که از نتایج حاصل بتوان برای ارزیابی انواع عیوب بسیار نزدیک به سطح در خستگی تماس غلتشی استفاده نمود.

3- ارائه نتایج و بحث پیرامون آن‌ها

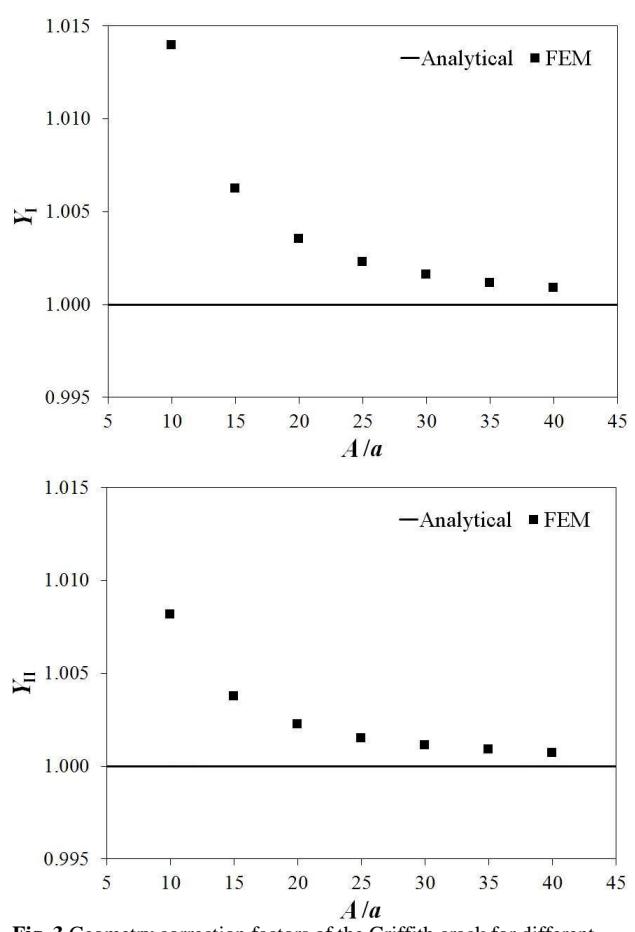
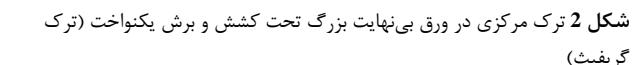
3-1- ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی

نتایج حل اجزا محدود ترک زیرسطحی برای 16 نسبت مختلف طول به عمق ترک ($\gamma = 0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 1, 1.25, 1.66, 2, 2.5, 3.33, 5, 6.66, 10, 12.5, 16.66, 20$)، تحت کشش و برش یکنواخت در شکل 7 نشان داده شده است. برای صحه‌گذاری نتایج به دست آمده از مقادیر ارائه شده در مرجع [5] برای بارگذاری یکنواخت استفاده شده است. مقایسه مقادیر حل حاضر و مرجع [5] در شکل 7 درستی نتایج را تأیید می‌نماید. به لحاظ کمی نیز میانگین خطای نسبی بین این مقادیر زیر 3% محاسبه شده است.

همان‌طورکه شکل 7 نشان می‌دهد، اعمال کشش منجر به بروز مود ترکیبی I و II برای ترک زیرسطحی می‌شود. همچنین برشی یکنواخت نیز باعث ایجاد مودهای I و II در ترک زیرسطحی می‌گردد؛ بنابراین مودهای



شکل 2 ترک مرکزی در ورق بی‌نهایت بزرگ تحت کشش و برش یکنواخت (ترک گریفیث)



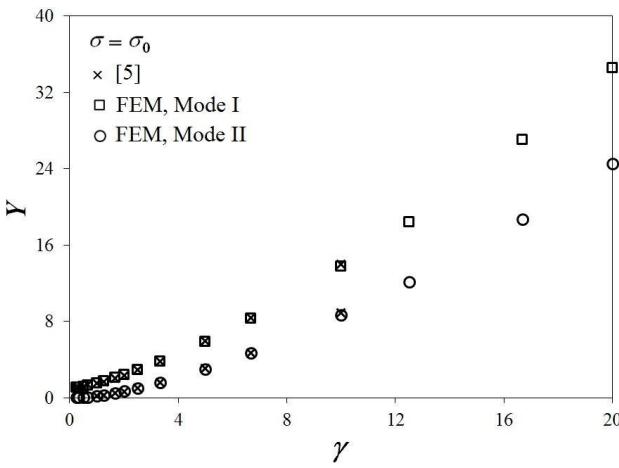
شکل 3 ضریب شکل ترک گریفیث برای مقادیر مختلف نسبت طول ورق مربعی به طول ترک

اجزا محدود برای ترک گریفیث با خطای نسبی کمتر از 0.1% صحه‌گذاری گردید.

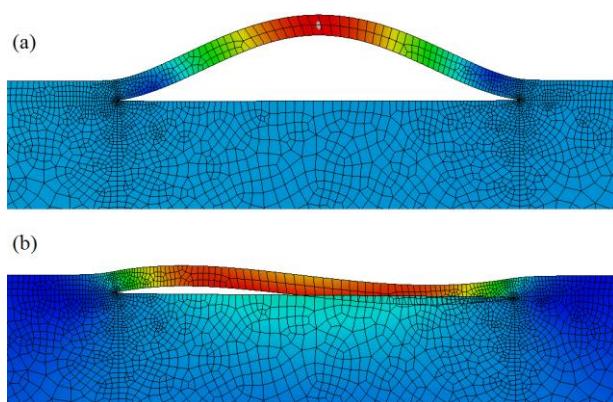
در مدل اجزا محدود جنس ورق به صورت همگن، همسان‌گرد و با مدول الاستیک و ضریب پواسون $E = 200 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.3$ لحاظ شده است. مدل‌سازی ترک با استفاده از ابزار شکاف¹ انجام شده است. این ابزار در محل مورد نظر یک جفت گره روی هم تعییه نموده و امکان فاصله گرفتن آن‌ها از

¹ Seem

همان طور که در شکل 8-*b* مشاهده می شود، اعمال برش یکنواخت منجر به باز شدن نیمی از ترک و بسته شدن نیم دیگر آن می شود. به عبارت دیگر تماس سطوح ترک در حالت برش یکنواخت اتفاق می افتد که لازم است لحاظ شود؛ بنابراین نتایج این مقاله برای برش یکنواخت زمانی معتبر است که کشش

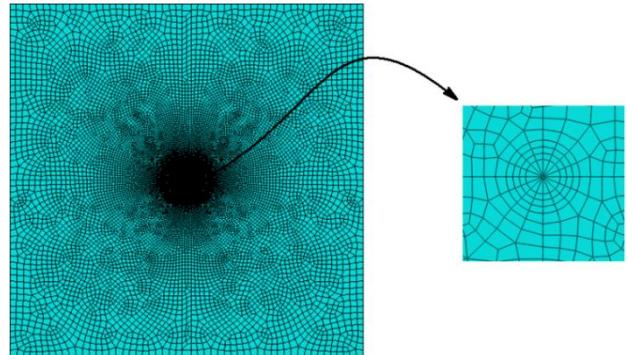


شکل 7 مقایسه ضرایب شکل به دست آمده از حل اجزامحدود با مقادیر مرجع [5] برای ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

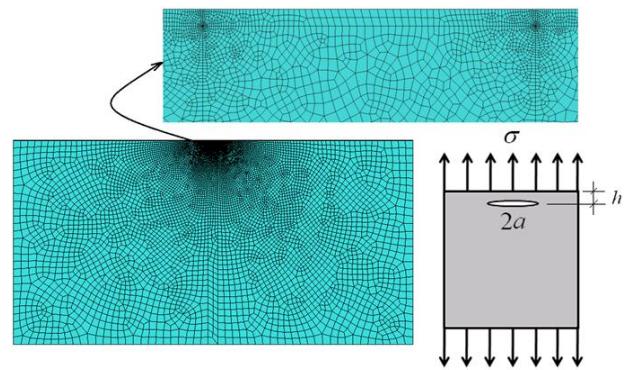


شکل 8 نمایش تفاوت میدان جابه جایی دو طرف سطوح ترک زیرسطحی ($\gamma=10$) و یکنواخت

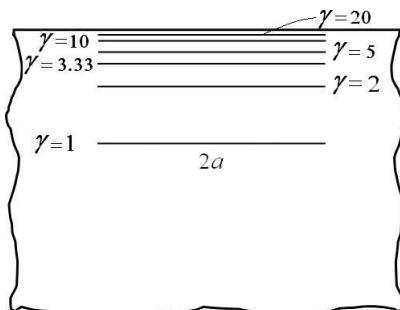
بروز پدیده کوپلینگ مودهای شکست تحت: *a*-کشش یکنواخت، *b*-برش یکنواخت



شکل 4 مدل اجزامحدود ترک گریفیت، نمایش المان بندی نوک ترک



شکل 5 ترک زیرسطحی تحت کشش و مدل اجزامحدود آن



شکل 6 نمایش نزدیکی ترک های زیرسطحی مورد مطالعه به سطح با مقیاس واقعی

شکست ترک زیرسطحی به هم وابسته (کوپله) بوده و اعمال هر نوع بارگذاری موجب ایجاد مود ترکیبی در ترک می شود [16]. با نزدیکتر شدن ترک به لبه نیم صفحه (افزایش γ) اثر کوپلینگ مودهای کششی و لغزشی افزایش می باید. افزایش اثر پدیده کوپلینگ مودهای شکست در اثر افزایش نسبت γ به دلیل بیشتر شدن نامتقارنی هندسی سازه نسبت به سطوح ترک است. به عبارت دیگر با کاهش h (عمق ترک) سفتی قسمت بالای ترک کاهش می باید، در حالی که سفتی ورق در ناحیه زیر ترک بی نهایت باقی می ماند. تفاوت در سفتی ورق دو طرف ترک منجر به اختلاف مؤلفه های میدان جابه جایی در دو طرف سطح ترک می شود؛ بنابراین با اعمال کشش به ورق، سطح بالایی ترک همزمان با باز شدن، روی سطح پایینی می لغزد. تحت بار برشی، سطح بالایی ترک همزمان با لغزش بر سطح پایینی از آن فاصله می گیرد (شکل 8).

جدول 1 ثوابت تابع ارائه شده برای ضریب شکل ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

Table 1 Constants of Eq. (3) for geometry correction factors of subsurface crack under uniform tension and shear

	کشش یکنواخت	برش یکنواخت	کشش یکنواخت	برش یکنواخت
	مود I	مود II	مود I	مود II
B_0	0.7201	-0.3173	0.0083	1.0654
B_1	0.7248	0.3968	0.1658	0.0243
B_2	0.0664	0.0580	-0.0102	0.00097
B_3	-0.0009	-0.0008	0.00024	-0.00003

$$\sigma = 5 \text{ MPa}$$

- کشش و برش یکنواخت همزمان $\sigma = 2 \text{ MPa}$ و $\tau = 10 \text{ MPa}$

- کشش خطی $\sigma = x + 5 \text{ MPa}$ با تنش میانگین 5 MPa

- کشش سهموی $\sigma = 3x^2 + 4 \text{ MPa}$ با تنش میانگین 5 MPa

روی سطوح ترک زیرسطحی اعمال و ضرایب شدت تنش مربوطه با استفاده از روش اجزامحدود محاسبه شده است. با توجه به اصل جمع آثار بار اعمالی روی سطوح ترک، همان میدان تنش ناشی از بارگذاری روی مرزهای نیمصفحه‌ی بدون ترک در محل ترک است [17]. مقایسه ضرایب شدت تنش محاسبه شده با استفاده از روش اجزامحدود و تابع ضریب شکل رابطه (3) در جدول 2 آورده شده است. در واقع برای موادی که بار اعمالی به ترک یکنواخت نیست، از تنش میانگین برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه (3) استفاده شده است. همچنین، در اثر اعمال بارهای نامتران (کشش و برش همزمان و کشش خطی)، ضرایب شدت تنش در هر دو نوک ترک زیرسطحی توسط اجزامحدود متفاوت محاسبه می‌شود که در جدول 2 ارائه شده است.

همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد برای بارگذاری یکنواخت، خطای نسبی رابطه (3) زیر 3% است. بنابراین، برای بارگذاری یکنواخت، با دقت بسیار خوبی می‌توان از ضرایب شکل ارائه شده استفاده نمود. همچنین استفاده از تنش میانگین برای محاسبه ضرایب شدت تنش برای بارگذاری متغیر خطی و غیرخطی مورد نظر نیز دقت مهندسی مناسبی را به خصوص برای ارزیابی اولیه نتیجه می‌دهد؛ بنابراین ضرایب شکل ارائه شده ابزاری ساده و کارا برای استفاده مهندسان و محققان خواهد بود.

4- نتیجه‌گیری

در این مطالعه ترک زیرسطحی موازی سطح یک نیمصفحه با استفاده از مدل اجزا محدود صحه‌گذاری شده مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. ضمن ارزیابی کوپلینگ مودهای کششی و برشی شکست تحت بارگذاری یکنواخت، ضرایب شکل ضرایب شدت تنش به صورت تابعی از نسبت طول به عمق ترک ارائه شد. نشان داده شد که قابلیت ضرایب شکل ارائه شده برای محاسبه ضرایب شدت تنش ترک تحت بارهای یکنواخت بسیار خوب و برای بارهای غیریکنواخت مناسب است. روابط ارائه شده برای ضرایب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت، ابزار ساده‌ای برای تعیین ضرایب شدت تنش با دقت مناسب در اختیار قرار می‌دهد (حتی تحت بارگذاری‌های غیریکنواخت به خصوص برای ترک‌های کوچک). علاوه‌بر این نتایج این مطالعه می‌تواند به عنوان ضرایب شدت تنش مرجع برای استخراج توابع وزن ترک زیرسطحی مورد استفاده قرار گیرد.

اثر کوپلینگ مودهای شکست تحت بارگذاری یکنواخت برای عمق‌های کمتر از $1.33a$ ، بیش از 10% تعیین شد؛ بنابراین در عمق‌هایی کمتر از این مقدار، بایستی اثر این پدیده در محاسبات لحاظ گردد. با کاهش عمق ترک،

لازم برای باز شدن تمام سطح ترک نیز همزمان با برش یکنواخت اعمال شود. البته با توجه به این که مود I ناشی از کشش یکنواخت بیش از 20 برابر مود I ناشی از کوپلینگ برش یکنواخت است، با کشش بسیار کمی سطح ترک در برش یکنواخت باز شده و تماس نخواهد داشت.

برای ترک زیرسطحی با $\gamma = 2$ ، ضرایب شدت تنش مود I ناشی از کشش یکنواخت، 25.8 برابر ضریب شدت تنش ترک گریفیت است. ضریب شدت تنش مود II ناشی از برش یکنواخت، 73% بیشتر از ضریب شدت تنش ترک گریفیت معادل آن است. علاوه‌بر این برای هر دو بارگذاری کششی و برشی یکنواخت، ضریب شدت تنش ناشی از پدیده کوپلینگ مودهای شکست 69% ضریب شدت تنش مود بارگذاری است. این سهم از ضرایب شدت تنش ناشی از کوپلینگ که می‌تواند برای سایر بارگذاری‌ها بیشتر هم شود، ضرورت در نظر گرفتن این پدیده در طراحی و مطالعات خستگی را نشان می‌دهد.

با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان بیان داشت پدیده کوپلینگ در ترک‌های زیرسطحی تحت بار کششی و برشی یکنواخت به ترتیب برای $\gamma \geq 0.75$ و $\gamma \geq 0.85$ منجر به ضریب شدت تنش مود کوپلینگ بیشتر از 10% ضریب شدت تنش ترک گریفیت می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان از کوپلینگ مودهای شکست برای ترکی با عمق بیشتر از 1.3 برابر طولش صرف نظر کرد. البته در این حالت نیز تقریب ترک زیرسطحی با ترک گریفیت می‌تواند کاملاً نادرست باشد. ضریب شدت تنش مود I ترک زیرسطحی تحت کشش یکنواخت به ازای $0.38 \leq \gamma \leq 0.48$ بیش از 1.1 برابر ضریب شدت تنش ترک گریفیت است؛ بنابراین روابط مربوط به ترک گریفیت تنها برای $\gamma < 0.38$ خطای کمتر از 10% قابل استفاده خواهد بود.

3- ضرایب شکل ترک زیرسطحی

در این بخش با توجه به جامعیت حل‌های انجام شده و دقت بالای آن‌ها، هدف ارائه ضرایب شکل مودهای ترکیبی ترک زیرسطحی تحت بارگذاری یکنواخت است. ضرایب شکل ترک زیرسطحی با استیضاح پارامتر عمق ترک، γ باشد تا بتوان برای تمامی ترک‌های زیرسطحی از آن استفاده نمود. پس از انجام بررسی‌های اولیه و سعی و خطای لازم، تابع مناسب برای ضرایب شکل ترک به صورت رابطه (3) نتیجه شد.

$$Y_{I(II)}^{\sigma_0(\tau_0)} = \sum_{i=0}^3 B_i \gamma^i \quad (3)$$

که در آن $Y_I^{\sigma_0}$ و $Y_{II}^{\sigma_0}$ به ترتیب ضرایب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت کشش یکنواخت σ_0 ، $Y_I^{\tau_0}$ و $Y_{II}^{\tau_0}$ به ترتیب ضرایب شکل مود I و II ترک زیرسطحی تحت برش یکنواخت τ_0 ، B_i ها ضرایب ثابت و γ نسبت طول به عمق ترک زیرسطحی است.

ضرایب B_i برای هر دسته از ضرایب شدت تنش با استفاده از برازش در نسخه 2.3.0 نرم‌افزار کروکسپیرت پروفشنال^۱ تعیین و در جدول 1 ارائه شده است. شکل 9 دقت تابع برازش به دست آمده را در مقایسه با ضرایب شکل ترک زیرسطحی نشان می‌دهد. با توجه به شکل 9 چندجمله‌ای درجه 3 (رابطه (3)) با دقت بالایی ضرایب شکل ترک را نتیجه می‌دهد.

برای ارزیابی میزان کارایی رابطه (3) در تعیین ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی، ترکی به طول $a = 1 \text{ mm}$ و نسبت طول به عمق $\gamma = 8$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. نسبت $\gamma = 8$ در برازش تابع ضرایب شکل ترک زیرسطحی و استخراج ضرایب B_i استفاده نشده است. چهار بارگذاری متفاوت:

¹ Curve Expert Professional

طول ترک زیرسطحی	a
ثوابت چندجمله‌ای درجه 3	B
مدول الاستیک (GPa)	E
عمق ترک زیرسطحی	h
ضریب شدت تنش ترک ($\text{MPa mm}^{1/2}$)	K
ضریب شکل	Y
علایم یونانی	
نسبت طول به عمق ترک زیرسطحی	γ
ضریب پوآسون	ν
تشع عمودی (MPa)	σ
تشع عمودی یکنواخت (MPa)	σ_0
تشع برشی (MPa)	τ
تشع برشی یکنواخت (MPa)	τ_0
زیرنویس‌ها	
مقدار متوسط	ave
I مود	I
II مود	II

6- مراجع

- [1] S. Glodež, Z. Ren, Modelling of crack growth under cyclic contact loading, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 30, No. 2, pp. 159-173, 1998.
- [2] S. Chapuliot, Stress intensity factor calculation in sharp and beveled edge nozzle corners, *Pressure Vessels and Piping*, Vol. 141, No. 1, pp. 11-18, 2016.
- [3] P. Livieri, F. Segala, Stress intensity factors for embedded elliptical cracks in cylindrical and spherical vessels, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 86, No. 1, pp. 260-266, 2016.
- [4] D. Chakraborty, K. S. R. K. Murthy, D. Chakraborty, Experimental determination of mode I stress intensity factor in orthotropic materials using a single strain gage, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 173, No. 1, pp. 130-145, 2017.
- [5] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, A weight function for 2D subsurface cracks under general loading conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 3, pp. 427-439, 2008.
- [6] J. Chen, Q. Fang, Y. Liu, Interaction between dislocation and subsurface crack under condition of slip caused by half-plane contact surface normal force, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 114, No. 1, pp. 115-126, 2013.
- [7] A. Mazzù, A mode II weight function for subsurface cracks in a two-dimensional half-space, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 25, No. 10, pp. 911-916, 2002.
- [8] A. Mazzù, A numerical approach to subsurface crack propagation assessment in rolling contact, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 548-564, 2013.
- [9] J. Alizadeh K., R. Ghajar, Calculation of mixed mode stress intensity factors for an elliptical subsurface crack under arbitrary normal loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 38, No. 6, pp. 700-713, 2015.
- [10] J. Alizadeh, K. R. Ghajar, Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 1-10, 2014. (in Persian) (فارسی)
- [11] G. Donzella, A. Mazzù, C. Petrogalli, Experimental and numerical investigation on shear propagation of subsurface cracks under rolling contact fatigue, *Procedia Engineering*, Vol. 109, No. 1, pp. 181-188, 2015.
- [12] Y. Yin, Y. X. Chen, L. Liu, Lifetime prediction for the subsurface crack propagation using three-dimensional dynamic FEA model, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 87, No. 1, pp. 54-70, 2017.
- [13] A. Ekberg, E. Kabo, Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading—an overview, *Wear*, Vol. 258, No. 7, pp. 1288-1300, 2005.
- [14] R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, H. O. Fuchs, *Metal Fatigue in Engineering*, Second Edition, pp. 122-132, New York: Wiley, 2000.
- [15] A. S. Fayed, Numerical analysis of mixed mode I/II stress intensity factors of edge slant cracked plates, *Engineering Solid Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 61-70, 2017.
- [16] T. Fett, *Stress Intensity Factors- T-Stresses- Weight Functions*, Second Edition, pp. 30-33, Boston, Computational Mechanics Publications, 2008.
- [17] X. Wang, G. Glinka, Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks, *Fatigue*, Vol. 31, No. 11-12, pp. 1816-1827, 2009.

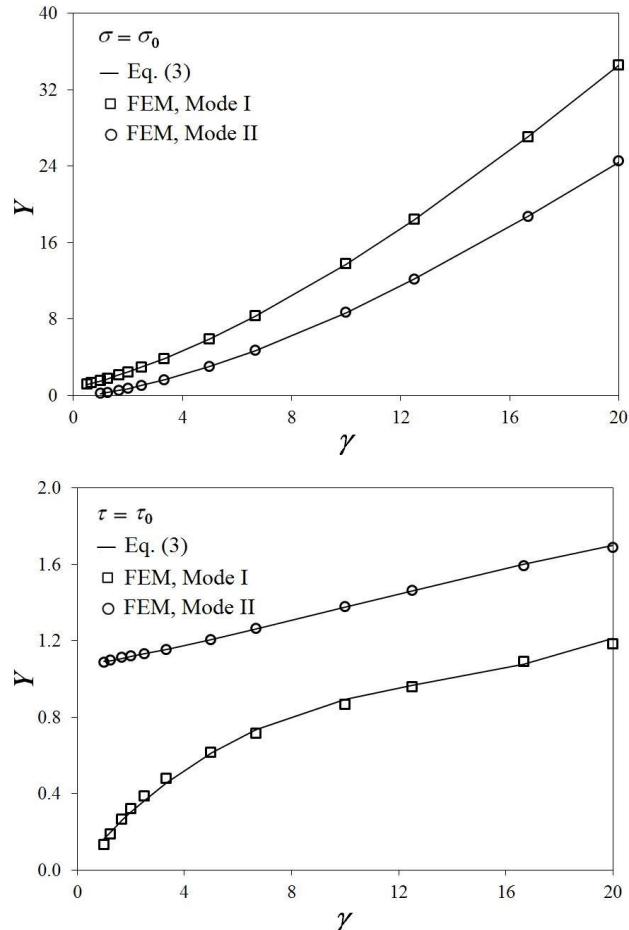


Fig. 9 Fitting of third-degree of polynomial on the geometry correction factors of subsurface crack under uniform tension and shear

شکل 9 برازش چندجمله‌ای درجه 3 روی ضرایب شکل ترک زیرسطحی تحت کشش و برش یکنواخت

جدول 2 ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی، $\gamma=8$ و $a=1\text{mm}$

Table 2 SIFs for a subsurface crack, $a = 1 \text{ mm}$ and $\gamma = 8$

	خطای نسی (MPa)	بارگذاری بر اساس Eq. (3) (%)	اجزامحدود (%)
K_I	$\sigma = 5$	91.6	91.3
	$\tau = 10, \sigma = 2$	50.5, 22.8	50.8, 22.2
$(\text{MPa mm}^{1/2})$	$\sigma = x+5, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	87.5, 96.1	91.3
	$\sigma = 3x^2+4, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	86.9	91.3
K_{II}	$\sigma = 5$	55.0	54.6
	$\tau = 10, \sigma = 2$	44.9, 1.0	45.5, 1.3
$(\text{MPa mm}^{1/2})$	$\sigma = x+5, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	53.3, 56.6	54.6
	$\sigma = 3x^2+4, (\sigma_{\text{ave}} = 5)$	50.5	54.6
			8.1

اثر کوپلینگ مدهای شکست تشدید شده و تا 69% مود اصلی برای عمق 0.05a افزایش می‌یابد. تحت بار کششی یکنواخت، اثر سطح آزاد نیم فضا باعث می‌شود که ضریب شدت تنش مود I ترک زیرسطحی تا 25 برابر ترک گرفیت افزایش یابد. لذا، تخمین ترک زیرسطحی با استفاده از روابط ترک گرفیت صحیح نخواهد بود.

5- فهرست علایم

نصف طول صفحه بی‌نهایت بزرگ

A