



## بررسی سیکل یک-تناوبی پایدار حرکت ربات دوپای غیرفعال صفحه‌ای الاستیک

محمد یوسفوند<sup>1</sup>، برهان بیگزاده<sup>2\*</sup>، امیرحسین دوائی مرکزی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 16846-13114، b\_beigzadeh@iust.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 فروردین 1395

پذیرش: 05 خرداد 1395

ارائه در سایت: 15 تیر 1395

کلیدواژگان:

ربات دوپای غیرفعال

لینک الاستیک

پایداری راه رفتن

ارتعاشات ربات

حرکت یک‌تناوبی

### چکیده

ربات‌های دوپای غیرفعال امروزه مورد توجه بسیاری پژوهشگران است. تقریباً تمامی ربات‌های دوپای مدل‌سازی شده پیش از این به صورت مدل صلب همراه با جرم‌های نقطه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. در این مقاله ربات دوپای صفحه‌ای به صورت الاستیک مدل‌سازی و شبیه‌سازی شده است و حرکت یک‌تناوبی برای آن بررسی شده است. پای تکیه‌گاه ربات غیرفعال به صورت تیر اویلر-برنولی مدل‌سازی شده است و ارتعاشات آن به روش مودهای فرضی محاسبه شده‌اند و معادلات حرکت سیستم در فاز نوسانی به کمک آن محاسبه شده است. سپس رفتار ربات دوپای الاستیک به روش عددی شبیه‌سازی شده است و نحوه تغییرات زوایا و سرعت‌های زاویه‌ای آن در حرکت یک‌تناوبی بررسی شده است. در شبیه‌سازی‌ها مشخص شد در هنگامی که ارتعاشات بالا هستند سرعت‌های زاویه‌ای به حالت نوسانی درمی‌آیند. ارتعاشات پای تکیه‌گاه ربات دوپا و تأثیرات ضریب الاستیسیته و ضریب دمپینگ بر رفتار ربات الاستیک بررسی شده‌اند. سپس ربات دوپای الاستیک در حالتی که ارتعاشات آن کوچک هستند شبیه‌سازی شد و مشخص شد که ربات الاستیک در این حالت همانند ربات صلب رفتار می‌کند که درستی مدل‌سازی صورت گرفته را نشان می‌دهد. در این حالت حرکت پایدار یک تناوبی برای زاویه شیب  $0 < \gamma \leq 0.0328 \text{ rad}$  به دست آمد. همچنین جدایی مقادیر ویژه در زاویه شیب  $\gamma = 0.029 \text{ rad}$  رخ داد.

## Analysis of stable period-one gait of a planner passive biped with elastic links

Mohammad Yosofvand, Borhan Beigzadeh\*, Amir Hossein Davaei Markazi

School of Mechanical Engineering, Iran University of Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran, b\_beigzadeh@iust.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 April 2016  
Accepted 25 May 2016  
Available Online 05 July 2016

**Keywords:**  
Passive biped  
Elastic Link  
Stability  
Robot Vibration  
Period-one Gait

### ABSTRACT

Passive bipeds have become an interesting field of research for investigators. Probably all of the passive bipeds that have been modeled previously, are considered as rigid model with point-mass. In this paper, 2D planner compass-gait biped with elastic link is modeled and simulated and its period-one gait is investigated. The stance leg of the passive biped is modeled as an Euler-Bernoulli beam and its vibrations are modeled by using Assumed Modes Method and the equations of motion for the swing phase are developed. Then, behavior of the elastic biped is simulated by using numerical methods and the changes in leg angles and angular velocities of the biped are discussed. Computer simulations showed that when the vibrations of the stance leg are large, angular velocities become oscillating. Vibrations of the stance leg and the effects of Young's Modulus and damping coefficient on the motion of the elastic biped are discussed. Then model is simulated for the small vibrations of the stance leg and the results show that when the vibrations are small the elastic biped behaves like a rigid biped, which verifies our simulations. When the vibrations are small, period-one gait can be found for the elastic biped for the ramp slopes of  $0 < \gamma \leq 0.0328 \text{ rad}$ . The split in the eigenvalues of the period-one gait happens at the ramp slope of  $\gamma = 0.029 \text{ rad}$ .

### 1-مقدمه

کردند. در این مدل ربات به صورت یک پاندول دوگانه با پای نقطه‌ای مدل‌سازی شده است [2]. سپس گارسیا مدل ساده‌ترین ربات دوپا را مطرح کرد. در این مدل جرم‌های نقطه‌ای در انتهای پای ربات قرار گرفته‌اند و گارسیا توانست دوشاخه شدن حرکت ربات از سیکل یک‌تناوبی به سیکل دوتناوبی را ترسیم کند و نشان دهد [3].

مدل‌های جرم‌نقطه‌ای توسط محققین بسیاری استفاده شده‌اند. اسپانگ با تأیید نتایج به دست آمده توسط مک‌گیر از آن‌ها برای کنترل ربات‌های راه‌رونده استفاده کرد. وی روابط بین کنترل غیرخطی و راه رفتن غیرفعال را

نخستین بار مک‌گیر<sup>1</sup> در سال 1990 نشان داد که یک ربات دوپا<sup>2</sup> می‌تواند تنها به وسیله جاذبه از یک سطح شیب دار بدون هیچ گونه تحریک خارجی<sup>3</sup> یا استفاده از سیستم کنترلی به سمت پایین حرکت کند [1]. مدلی که مک‌گیر برای ربات دوپا در نظر گرفته بود، یک مدل صلب همراه با جرم‌های نقطه‌ای بود. گوسوامی و همکاران در سال 1997 مدل ربات دوپا پراگاری شکل را ارائه

<sup>1</sup> McGeer  
<sup>2</sup> Biped Robot  
<sup>3</sup> Actuation

پوآنکاره<sup>7</sup> تحلیل شده است.

## 2- معادلات حرکت دیفرانسیلی ربات دوپا با لینک الاستیک

در این قسمت به بررسی ربات دوپا با لینک‌های الاستیک پرداخته شده است. با توجه به این‌که ارتعاشات پای نوسانگر تأثیر ناچیزی در دینامیک مسئله دارد، از آن صرف‌نظر می‌کنیم. ابتدا انرژی جنبشی و پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل ناشی از خمش در ربات را به‌دست می‌آوریم. سپس به کمک روابط اویلر-لاگرانژ معادلات حرکت سیستم را به دست می‌آوریم. معادلات حرکت به‌دست آمده در ادامه در شبیه‌سازی سیستم و بررسی پایداری آن به‌کار می‌روند. سپس قانون انتقال در برخورد پای نوسانگر با زمین را به‌دست آورده و با محاسبه آن، نگاشت پوآنکاره سیستم که متغیرهای حالت سیستم را در لحظه برخورد پا با زمین به متغیرهای حالت در برخورد بعدی پا با زمین نگاشت می‌کند، محاسبه شده است.

### 2-1- انرژی جنبشی و پتانسیل پای تکیه‌گاه

در بررسی انرژی پای تکیه‌گاه از تغییر انرژی پتانسیل ناشی از خمش به علت کوچکی صرف‌نظر شده است. همچنین از تغییرات سرعت و در نتیجه تغییرات انرژی جنبشی ناشی از خمش پای تکیه‌گاه صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که طول پای تکیه‌گاه در اثر خمش تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند. پای تکیه‌گاه را به صورت یک تیر با تکیه‌گاه مفصلی در نظر می‌گیریم. پای تکیه‌گاه می‌تواند آزادانه حول نقطه تماس با زمین همانند تیر مفصل‌دار بچرخد. هیچ‌گونه جهش یا لغزش در پای تکیه‌گاه نداریم و فرض می‌کنیم که جرم به صورت یکنواخت در طول میله توزیع شده است و همچنین میزان خمش پای تکیه‌گاه را کوچک فرض می‌کنیم. با توجه به دستگاه مختصات انتخاب شده در "شکل 1" انرژی جنبشی پای تکیه‌گاه به صورت رابطه (1) محاسبه می‌شود:

$$T_1 = \rho A \theta^2 \frac{L^3}{6} + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

که در آن  $\rho A$  جرم واحد طول و  $J$  گشتاور جرمی و  $L$  طول پای تکیه‌گاه

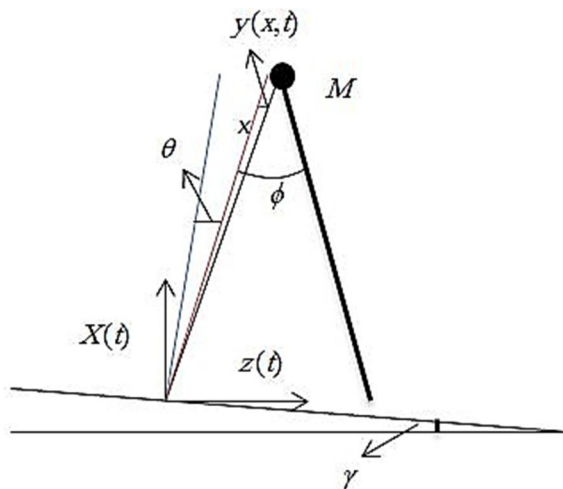


Fig. 1 Elastic biped's model and coordinates which are used in modeling. Swing leg is shown by bold line

شکل 1 مدل ربات الاستیک و جهت‌های مختصات آن؛ پای نوسانگر صلب با خط پررنگ مشخص شده است.

در حرکت ربات‌های دوپا در فضای سه‌بعدی بیان کرد [4]. این روش اخیراً نیز توسط بیگزاده و همکاران توسط مدلی با اندکی پیچیدگی بیشتر، برای کنترل چرخش ربات‌های دوپای سه‌بعدی به‌کار گرفته شد [5]. البته مدل‌های ساده جرم‌نقطه‌ای مذکور در دیگر ربات‌ها از جمله ربات‌های جهنده نیز به‌کار رفته‌اند [6,7]. ولی نکته مهم آن است که مدل‌های به‌کار رفته تقریباً همه به‌صورت صلب در نظر گرفته شده‌اند و تفاوت‌ها در نوع مدل پا، نوع زانوها و نیز مفصل‌ها می‌باشد. ویسه و همکاران مدل کف پای تخت به همراه فنر در یک ربات دوپای غیرفعال به جای پای نقطه‌ای را پیشنهاد کردند [8]. گریزل و همکاران یک مدل برای کنترل راه‌رفتن پایدار مجانبی ربات دوپای سه‌بعدی ارائه کردند که در آن لینک‌های ربات به صورت نقطه‌ای و صلب مدل شده است [9]. به‌تازگی کوپ و همکاران [10] یک مدل پیوسته ضربه‌ای برای برخورد پای ربات که به صورت نیم دایره‌ای مدل شده است، ارائه کرده‌اند. حائری یزدی و همکاران [11] یک ربات دوپای سه‌بعدی را به کمک شکل-دهی انرژی پتانسیل مدل‌سازی و کنترل کرده‌اند اما ربات به صورت صلب مدل‌سازی شده است. در [12,13] شاخه‌شاخه شدن و حرکت آشوبناک ربات‌های دوپا بررسی شده‌اند که در آن‌ها ربات دوپای غیرفعال به صورت صلب و نقطه‌ای مدل شده‌اند. در [14,15] لیدا و همکاران مدل پای جرم و فنر را ارائه دادند. در این مدل پای ربات به صورت یک فنر نسبتاً سخت در نظر گرفته شده است و جرم نقطه‌ای در قسمت لگن<sup>2</sup> وجود دارد. با این حال در این مدل نیز پای ربات دوپا به صورت الاستیک در نظر گرفته نشده است. محققین داخلی نیز در حوزه ربات‌های دوپای غیرفعال تحقیقاتی داشته‌اند که این تحقیقات هم در حوزه شبیه‌سازی [11,16] و هم بدست آوردن نتایج عملی [17] حایز اهمیت هستند.

اگرچه این مدل‌سازی‌ها به نتایج قابل قبولی در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته دست پیدا کرده‌اند اما ارائه یک مدل ساختاری دقیق‌تر برای لینک ربات‌های راه‌رونده بر روی پا و ربات‌های انسان‌نما ضروری به نظر می‌رسد. گرچه مساله الاستیک بودن لینک‌ها در دیگر حوزه‌های رباتیک کم و بیش مورد توجه قرار گرفته است [18,19]، ولی یکی از دلایلی که محققین تاکنون از در نظر گرفتن لینک الاستیک برای ربات‌های دوپا خودداری کرده‌اند پیچیدگی بیش از حد این مدل‌سازی می‌باشد. ما با استفاده مدل تیر اویلر-برنولی<sup>3</sup> و روش مودهای فرضی<sup>4</sup> مدل‌سازی ساده اما دقیقی از پای ربات دوپای صفحه‌ای غیرفعال برای اولین بار به‌صورت کاملاً الاستیک انجام داده‌ایم که می‌توان از آن در مدل‌سازی‌های بعدی و کنترل ربات استفاده کرد. در تحقیق حاضر هدف آن است که ارتعاشات ربات دوپای غیرفعال برای حرکت یک-تناوبی<sup>5</sup> مدل‌سازی و شبیه‌سازی شود. نتایج به دست آمده توسط شبیه‌سازی‌های صورت گرفته در نرم‌افزار متلب<sup>6</sup> و نتایج به دست آمده در تحقیقات قبلی تأیید شده‌اند.

بر این اساس ساختار این مقاله به این صورت است: ابتدا ربات دوپا با لینک الاستیک به روش مودهای فرضی مدل‌سازی و فرمول‌بندی شده است. سپس حرکت ربات الاستیک بررسی شده است و اثرات ضریب الاستیسیته و ضریب دمپینگ بر حرکت و پایداری آن بررسی شده است. در نهایت سیکل‌های حدی یک-تناوبی یافت شده برای ربات دوپای الاستیک ترسیم شده‌اند و پایداری آن‌ها از طریق بررسی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین نگاشت

<sup>1</sup> Heel-strike

<sup>2</sup> Hip

<sup>3</sup> Euler-Bernoulli

<sup>4</sup> Assumed Modes Method

<sup>5</sup> Period-one

<sup>6</sup> MATLAB

<sup>7</sup> Poincare map

می‌باشد. برای به دست آوردن انرژی پتانسیل خمشی از روابط اویلر-برنولی برای به دست آوردن ممان خمشی استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل اگر  $y$  نشان‌دهنده میزان خمش تیر در هر نقطه از تیر باشد ممان خمشی در آن نقطه از رابطه (2) به دست می‌آید [21,20]:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

که این رابطه نشان‌دهنده ممان خمشی دقیق است. با توجه به این که فرض کرده‌ایم تغییر شکل‌های تیر کوچک هستند می‌توان از رابطه ممان خمشی برای تغییر شکل‌های کوچک که یک رابطه تقریبی است به علت ساده‌تر شدن محاسبات استفاده کرد [21,20]:

$$M \approx EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3)$$

که در آن  $E$  ضریب الاستیسیته و  $I$  گشتاور دوم سطح هستند. با توجه به رابطه (3) و در نظر گرفتن انرژی پتانسیل گرانشی داریم:

$$V_1 = \rho Ag \frac{L^2}{2} \cos(\gamma - \theta) + \frac{1}{2} \int_0^L EI y_{xx}^2 dx \quad (4)$$

که در آن  $g$  شتاب گرانش می‌باشد.

## 2-2- بررسی انرژی جنبشی و پتانسیل جرم لگن

جرم نقطه لگن به صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شده است. جرم نقطه لگن به عنوان مفصل محل اتصال پای تکیه‌گاه و نوسانگر در نظر گرفته شده است و هیچ‌گونه اصطکاکی در آن وجود ندارد. تغییر مکان جرم نقطه لگن ناشی از خمش پای تکیه‌گاه در نظر گرفته شده است و از تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل آن ناشی از خمش صرف‌نظر نشده است و انرژی جنبشی آن به صورت رابطه (5) محاسبه می‌شود:

$$T_2 = \frac{1}{2} M (\dot{\theta}^2 y^2 + \dot{y}^2 + \theta^2 L^2 - 2L\theta\dot{y}) \quad (5)$$

که در آن  $M$  جرم نقطه‌ای است. با در نظر گرفتن محل اتصال پای تکیه‌گاه به زمین به عنوان مبدا انرژی پتانسیل و همچنین در نظر گرفتن تغییر ارتفاع ناشی از خمش، انرژی پتانسیل جرم نقطه لگن به صورت رابطه (6) محاسبه می‌شود:

$$V_2 = Mg(-y \sin(\gamma - \theta) + L \cos(\gamma - \theta)) \quad (6)$$

## 2-3- انرژی جنبشی و پتانسیل پای نوسانگر

از خمش الاستیک در پای نوسانگر برای ساده‌سازی مسئله صرف‌نظر شده است. پای نوسانگر را به صورت یک تیر که با تکیه‌گاه مفصلی به پای تکیه‌گاه در محل جرم لگن متصل شده است، در نظر می‌گیریم. پای نوسانگر می‌تواند آزادانه حول نقطه تماس با پای تکیه‌گاه همانند تیر مفصل‌دار بچرخد و هیچ‌گونه جهش یا لغزش در نقطه تماس نداریم. انرژی جنبشی آن به صورت رابطه (7) محاسبه می‌شود:

$$T_3 = \frac{1}{2} \rho AL^3 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} \rho A (\phi - \theta)^2 L^3 + \frac{1}{2} \rho AL^3 \dot{\theta} (\phi - \theta) \cos(\phi) + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 \quad (7)$$

با توجه به این که از خمش در پای نوسانگر صرف‌نظر کردیم انرژی پتانسیل فقط به صورت گرانشی می‌باشد؛ به عبارتی:

$$V_3 = \rho Ag L^2 \cos(\gamma - \theta) - \frac{1}{2} \rho Ag L^2 \cos(\gamma - \theta + \phi) \quad (8)$$

## 2-4- روش مودهای فرضی

در روش مودهای فرضی، حل مسئله ارتعاش سیستم پیوسته به صورت یک

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i(t) \quad (9)$$

که در آن  $\varphi_i$ ها توابع آزمایشی مشخص هستند که باید شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا کنند (توابع قابل قبول) و  $q_i(t)$ ها توابع نامعلوم زمانی هستند که مختصات عمومی هم خوانده می‌شوند.

رابطه (9) را می‌توان برای به دست آوردن روابط لاگرانژ به کار برد و سپس می‌توان از این رابطه لاگرانژ برای به دست آوردن معادلات حرکت سیستم گسسته  $n$  درجه آزادی معادل با سیستم پیوسته موردنظر استفاده کرد. برای تابع قابل قبول مذکور، تابع زیر را در نظر می‌گیریم [22]:

$$\varphi(x) = \cosh\left(\beta \frac{x}{L}\right) - \cos\left(\beta \frac{x}{L}\right) + \alpha \left[ -\sinh\left(\beta \frac{x}{L}\right) + \sin\left(\beta \frac{x}{L}\right) \right] \quad (10)$$

با توجه به روابط به دست آمده توسط لورا<sup>4</sup> برای تیر با جرم نقطه‌ای در انتهای آن، مقادیر  $\beta$  و  $\alpha$  در رابطه (10) به صورت زیر محاسبه می‌شوند [23]:

$$\beta = 1.07619566 \quad (11-الف)$$

$$\alpha = \frac{\cos(\beta) + \cosh(\beta)}{\sin(\beta) + \sinh(\beta)} \quad (11-ب)$$

با در نظر گرفتن تابع فوق می‌توان شکل مودها را برای مسئله پیدا کرد. برای ساده‌سازی مسئله، فقط مود اول ارتعاشی را در نظر می‌گیریم. بنابراین تغییر شکل در طول سیستم پیوسته  $y(x, t)$  را می‌توان به صورت رابطه (12) در نظر گرفت [22,20]:

$$y(x, t) = \varphi(x) q(t) \quad (12)$$

که با مشتق‌گیری از آن می‌توان سرعت تغییر شکل در هر لحظه را به دست آورد [22]:

$$\dot{y}(x, t) = \varphi(x) \dot{q}(t) \quad (13)$$

همچنین تغییر شکل در انتهای پای تکیه‌گاه برای جرم  $M$  که آن را می‌توان به صورت جرم نقطه‌ای در انتهای تیر مدل کرد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y(x, t) = \varphi(x) q(t) \Rightarrow \quad (14-الف)$$

$$y(L, t) = \varphi(L) q(t) \quad (14-ب)$$

$$\dot{y}(L, t) = \varphi(L) \dot{q}(t) \quad (14-ج)$$

## 2-5- معادلات حرکت سیستم پیوسته الاستیک در حالت یک تکیه‌گاهی

با توجه به روش مودهای فرضی، بی‌نهایت درجه آزادی پای تکیه‌گاه به 1 درجه آزادی کاهش می‌یابد چرا که تنها از مود اول ارتعاشی استفاده می‌کنیم. بنابراین، سیستم دارای سه درجه آزادی می‌باشد که از آن‌ها در روش اویلر-لاگرانژ استفاده می‌کنیم. مختصات عمومی به کار گرفته شده برای سیستم

<sup>1</sup> admissible function

<sup>2</sup> spatial coordinates

<sup>3</sup> time-dependent generalized coordinates

<sup>4</sup> Laura

پس از برخاستن از سطح شیب‌دار به صورت صلب مدل‌سازی می‌شود با در نظر گرفتن ثابت ماندن اندازه حرکت زاویه‌ای حول محل برخورد، می‌توان فرض کرد که پای تکیه‌گاه جدید به علت تقارن حرکت دچار خمشی به همان اندازه خمش پای تکیه‌گاه قبلی شده است و در واقع آن را به عنوان حالت اولیه برای گام بعدی در نظر گرفت. با توجه به روابط فوق می‌توان روابط مربوط به انتقال پای تکیه‌گاه را که به صورت لحظه‌ای و ناپیوسته رخ می‌دهد، به صورت رابطه (22) در نظر گرفت [3]:

$$\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(2\theta)(1 - \cos(2\theta)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}^- \quad (22)$$

که در آن‌ها - علامت بلافاصله قبل از برخورد و + علامت بلافاصله بعد از برخورد است. بنابراین معادلات حرکت سیستم، شرط برخورد و قوانین انتقال تکیه‌گاه به دست می‌آیند و می‌توان از آن‌ها برای شبیه‌سازی سیستم استفاده نمود. با به دست آمدن قانون انتقال می‌توان با داشتن شرایط انتهایی هر گام، وضعیت اولیه گام بعدی را محاسبه کرد. این کار به کمک تابع گام و یا نگاشت پوانکاره که ترکیب معادلات حرکت و تابع انتقال است انجام می‌گیرد.

### 3- بررسی حرکت و پایداری ربات دوپای الاستیک

برای این که مطمئن شویم معادلات حرکت به دست آمده برای ربات دوپا با لینک الاستیک درست هستند باید آن‌ها را برای مقادیر بالای ضریب الاستیسیته  $E$  شبیه‌سازی کنیم. در این صورت میزان خمش در ربات کاهش می‌یابد و تقریباً می‌توان آن را صلب در نظر گرفت. اولین نکته در شبیه‌سازی ربات دوپا با لینک الاستیک این است که باید به پای نوسانگر اجازه‌ی عبور در هنگامی که زاویه‌ی پای تکیه‌گاه تقریباً عمودی و نزدیک به عمود است داده شود. در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، هنگامی زاویه‌های پای تکیه‌گاه و نوسانگر از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهند و در واقع ربات در حالت عمود بر سطح شیب‌دار است؛ ما به پای نوسانگر اجازه عبور می‌دهیم و در واقع از برخورد پای نوسانگر با سطح شیب‌دار در این حالت صرف‌نظر می‌کنیم. در جدول 1 مقادیر پارامترهای فیزیکی که برای شبیه‌سازی ربات الاستیک به کار رفته‌اند، فهرست شده‌اند. ابتدا یک گام نمونه از ربات با لینک الاستیک که در شبیه‌سازی به دست آمده را برای یک گام با پارامترهای ذکر شده در جدول مذکور و شرایط اولیه زیر بررسی می‌کنیم:

$$Z_0 = [q_0, \dot{q}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0] = [0, -0.091, 0.12, -0.22, 0.24, -0.006] \quad (23)$$

جدول 1 پارامترهای فیزیکی ربات دوپای الاستیک

نام پارامتر	نماد	مقدار
جرم واحد طول	$\rho A$	5kg/m
طول پای ربات	$L$	1m
گشتاور دوم سطح	$I$	$5 \times 10^{-7} \text{m}^4$
جرم نقطه‌ای بالای ربات	$M$	10kg
شتاب جاذبه	$G$	$1 \text{m/s}^2$
ضریب دمپینگ	$C_q$	0.01/s
ضریب الاستیسیته	$E$	100GPa
زاویه سطح شیب‌دار	$\gamma$	0.009rad
ممان جرمی	$J$	$0.25 \text{kgm}^2$

که در "شکل 1" نشان داده شده است عبارتند از [22]:

$$[u_1, u_2, u_3] = [q, \theta, \phi] \quad (15)$$

که در آن  $q$  مختصات تابع زمانی پای تکیه‌گاه است؛  $\theta$  برابر با زاویه بین پای تکیه‌گاه و محور عمود بر سطح شیب‌دار می‌باشد و در نهایت  $\phi$  زاویه بین پای تکیه‌گاه و پای نوسانگر می‌باشد. با استفاده از رابطه اولر-لاگرانژ زیر می‌توان معادلات حرکت سیستم را به دست آورد [22]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i} = F_{\text{gen}, i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

که در آن  $L$  برابر با لاگرانژین سیستم می‌باشد و برابر است با [21,20]:

$$L = T_1 + T_2 + T_3 - V_1 - V_2 - V_3 \quad (17)$$

که  $T$  برابر با انرژی جنبشی سیستم و  $V$  انرژی پتانسیل می‌باشد. همچنین  $R$  به عنوان دمپینگ ریلی<sup>1</sup> به کار می‌رود که به صورت دمپینگ ساختاری در پای تکیه‌گاه در مسئله به کار گرفته می‌شود و از رابطه (18) به دست می‌آید [17]:

$$R = \frac{1}{2} (C_q \dot{q}^2) \quad (18)$$

که در آن  $C_q$  ضریب دمپینگ می‌باشد. همچنین  $F_{\text{gen}}$  شامل نیروهای خارجی در راستاهای مختصات عمومی می‌باشد که در این مسئله با توجه به این که نیروی خارجی به ربات دوپا وارد نمی‌شود می‌توان آن را صفر در نظر گرفت. بنابراین داریم:

$$F_{\text{gen}} = 0 \quad (19)$$

با جایگزین کردن عبارت‌ها برای  $L$  و  $T$  و  $R$  در رابطه (16) معادلات حرکت سیستم به دست می‌آید. لذا سه معادله دیفرانسیل کوپل شده مرتبه دوم به دست می‌آید. با استفاده از عملیات جبری، معادلات حرکت سیستم به صورت رابطه (20) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} B & -C & 0 \\ -C & \frac{5}{3}H + D + Bq^2 + J - H \cos(\phi) & H \left( \frac{-1}{3} + \frac{\cos(\phi)}{2} \right) \\ 0 & H \left( \frac{-1}{3} + \frac{\cos(\phi)}{2} \right) & \frac{H}{3} + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن مقادیر ثابت (با حروف بزرگ) در پیوست آورده شده‌اند.

### 2-6- تابع انتقال در هنگام برخورد

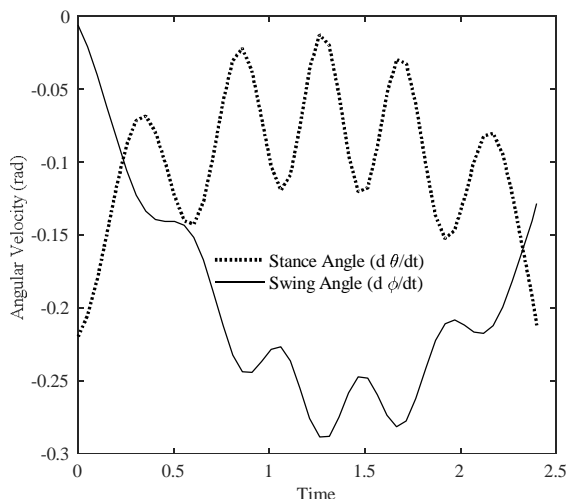
یک جهش و ناپیوستگی در سرعت‌های زاویه‌ای در هنگام برخورد پای نوسانگر با سطح شیب‌دار در نظر گرفته می‌شود. در این حالت ربات دوپا از حالت یک تکیه‌گاهی وارد فاز دو تکیه‌گاهی می‌شود. سپس از فاز دو تکیه‌گاهی وارد فاز یک تکیه‌گاهی شده و پای نوسانگر و تکیه‌گاه جابه‌جا می‌شوند و در واقع یک گام کامل می‌شود. فرض می‌کنیم که برخورد پای نوسانگر با سطح شیب‌دار و تغییر فاز ربات در زمان بسیار کوتاهی رخ می‌دهد و هیچ‌گونه لغزش و یا جهش در هنگام برخورد با سطح شیب‌دار رخ نمی‌دهد. بنابراین می‌توان برخورد را به صورت برخورد کاملاً پلاستیک در نظر گرفت.

برای تحلیل برخورد و تغییر فاز ربات باید اندازه حرکت زاویه‌ای پیش از برخورد و پس از برخورد را برای ربات با یکدیگر برابر قرار داده و روابط تغییر پای نوسانگر به پای تکیه‌گاه را به دست آورد. بنابراین برای ربات دوپا با لینک الاستیک، با توجه به هندسه مسئله و توجه به این که فرض کرده‌ایم ارتعاشات پای تکیه‌گاه کوچک است، شرط برخورد به صورت رابطه (21) می‌باشد [3]:

$$\phi(t) - 2\theta(t) = 0 \quad (21)$$

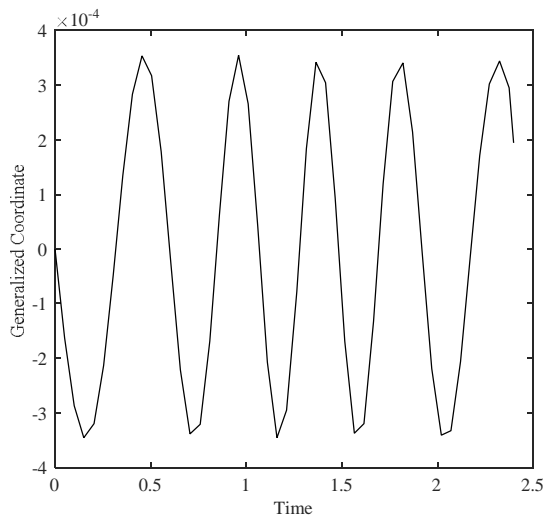
همچنین با توجه به این که پای نوسانگر دچار خمش نمی‌شود و پای تکیه‌گاه

<sup>1</sup> Rayleigh



**Fig. 3** Legs angular velocities during a typical step of elastic robot. Angular velocities become oscillating when the vibrations are high.

شکل 3 تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای در طول یک گام ربات الاستیک نمونه. سرعت‌های زاویه‌ای ربات هنگامی که بزرگی ارتعاشات بالا می‌باشد نوسانی می‌باشند.



**Fig. 4** Vibration of the swing leg through a step

شکل 4 ارتعاشات پای نوسانگر در یک گام

به کمک روش نیوتن-رافسون نقطه ثابت شرایط اولیه‌ای به صورت زیر برای حرکت یک-تناوبی ربات الاستیک با پارامترهای فیزیکی جدول 1 به دست می‌آید:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} -0.000205834537750 \\ -0.096859917619141 \\ 0.118169120794402 \\ -0.219571960673717 \\ 0.236338241588803 \\ -0.006103689813718 \end{bmatrix} \quad (24)$$

چند گام اولیه حرکت ربات با شرایط اولیه فوق پایدار می‌باشد؛ در شکل 5 تعداد 1000 گام برای شرایط اولیه مذکور نشان داده شده‌است. نوسانات سرعت‌های زاویه‌ای ربات در "شکل 6" نشان داده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به علت کم بودن ضریب دمپینگ، ارتعاشات پای تکیه‌گاه باعث نوسانی شدن سرعت‌های زاویه‌ای شده‌اند و به علت آن‌که نوسانات میرا نمی‌شوند، سرعت‌های زاویه‌ای به رفتار نوسانی خود ادامه می‌دهند ولی از محدوده پایدار خارج نمی‌شوند و همچنان ربات به حرکت خود ادامه می‌دهد.

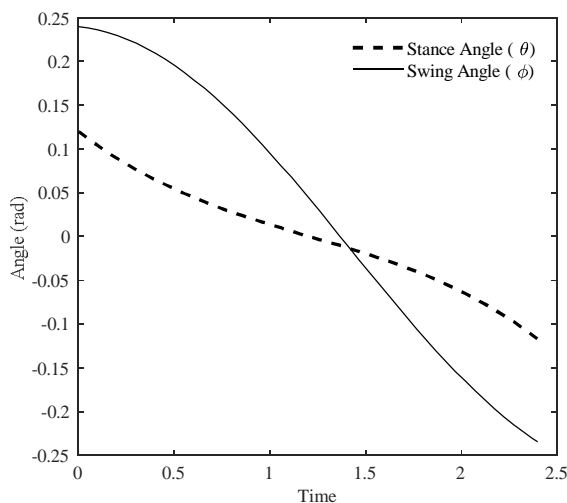
همچنین نمودار تغییرات زاویه‌ای پاهای ربات پس از شبیه‌سازی در "شکل 2" رسم شده‌اند.

همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود رفتار زاویه‌ای ربات با لینک الاستیک همانند ربات با جرم نقطه‌ای می‌باشد. علت آن این است که در این شبیه‌سازی، شرایط اولیه جابه‌جایی و خمش تیر صفر در نظر گرفته شد و تغییر مکان هر نقطه از پای تکیه‌گاه که در واقع ضریبی از تابع زمانی مختصات عمومی  $q(t)$  می‌باشد در این حالت کوچک است و در تغییرات زاویه‌ای ربات اثر ناچیزی دارد؛ اما نمودار گام‌های ربات کاملاً متقارن نیست.

سرعت‌های زاویه‌ای پاهای ربات دویا با لینک الاستیک در یک گام نمونه به صورت "شکل 3" تغییر می‌کنند. در "شکل 3" مشاهده می‌شود که خمش در پای تکیه‌گاه و ارتعاشات آن در سرعت‌های زاویه‌ای تأثیر گذاشته‌اند و منجر به نوسانی شدن سرعت‌های زاویه‌ای پاهای ربات شده است. نوسانات پای تکیه‌گاه بیشتر از نوسانات پای نوسانگر می‌باشد. علت فیزیکی آن این است که ارتعاشات پای تکیه‌گاه، مستقیماً در نظر گرفته شده‌است و بنابراین اثرات آن در نمودار سرعت زاویه‌ای پای تکیه‌گاه بیشتر می‌باشد.

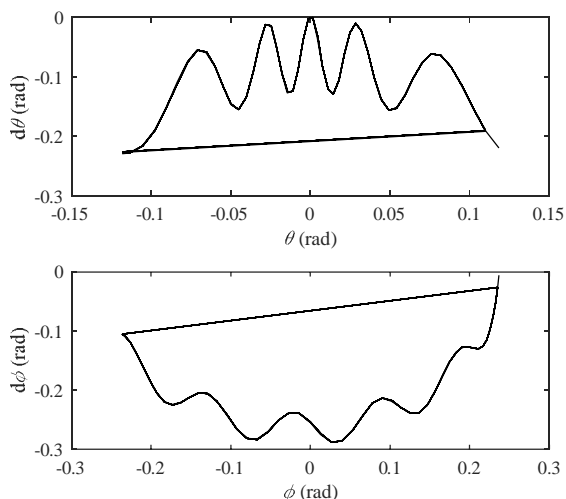
از طرفی پای نوسانگر در واقع یک آونگ آویزان از جرم نقطه‌ای لگن می‌باشد که ارتعاشات آن را در نظر نگرفتیم و در نتیجه ارتعاشات پای نوسانگر ناشی از ارتعاشات جرم لگن می‌باشد. بنابراین با یک آونگ با تکیه‌گاه مرتعش و با حرکت نوسانی علاوه بر حرکت قوسی آن روبرو هستیم. در نتیجه اثر این حرکات و ارتعاشات تکیه‌گاه آونگ (پای نوسانگر)، سرعت زاویه‌ای پای نوسانگر دارای نوسان می‌شود ولی مقدار آن در حقیقت کمتر از نوسانات پای تکیه‌گاه می‌باشد.

همان‌طور که در "شکل 4" مشاهده می‌شود، تیر جابه‌جایی اولیه ندارد، ولی بر اثر خاصیت الاستیسیته در نظر گرفته‌شده برای تیر، و در نتیجه ممان خمشی جرم نقطه لگن و البته پای نوسانگر دچار خمش شده و شروع به نوسان می‌کند که این نشان‌دهنده صحت مدل در نظر گرفته شده می‌باشد. به علت آن‌که ضریب دمپینگ در نظر گرفته شده کوچک می‌باشد ( $C_q = 0.01$ )، ارتعاشات به وجود آمده کاهش نمی‌یابد ولی افزایش هم نمی‌یابد و در یک محدوده ثابت پای تکیه‌گاه به ارتعاش می‌پردازد.



**Fig. 2** A typical step of elastic biped at the slope of  $\gamma = 0.009$  rad.

شکل 2 یک گام ربات الاستیک نمونه در زاویه شیب  $\gamma = 0.009$  rad.



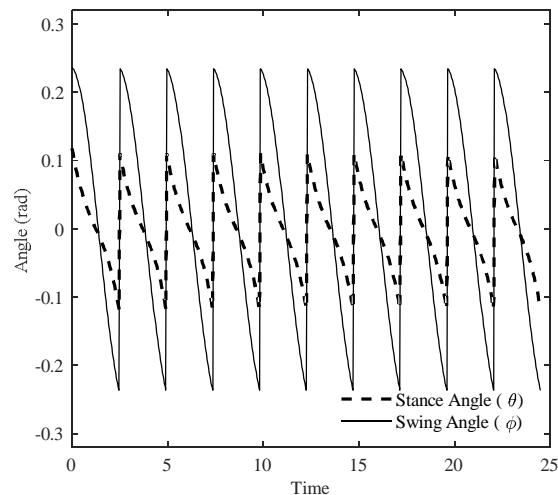
**Fig. 7** Phase plane diagram of the elastic biped at period-one gait for the slope of  $\gamma = 0.009$  rad

شکل 7 نمودار صفحه فاز ربات الاستیک در حرکت یک‌تناوبی برای زاویه سطح شیبدار  $\gamma = 0.009$  rad

الاستیسیته را حدود 100 GPa در نظر گرفتیم. ضریب الاستیسیته تأثیرات مهمی در شبیه‌سازی‌های انجام شده دارد. ضریب الاستیسیته یا مدول یانگ<sup>3</sup> یک خاصیت مکانیکی است که رابطه بین فشار و کشش (در واقع خمش) سیستم را تعیین می‌کند [21,20]. در واقع این خاصیت نشان دهنده میزان مقاومت خمشی یک تیر در برابر نیروی وارد بر آن می‌باشد. اولین فرض ما در بررسی ربات‌های دوقای با لینک الاستیک این است خمش در پاهای ربات همواره در محدوده الاستیک باقی می‌ماند و لینک‌های ربات کاملاً الاستیک هستند و در صورت برداشته شدن نیرو خمش و تغییر شکل در آن‌ها به صفر می‌رسد. در صورتی که بخواهیم سیستم رفتاری همانند ربات‌های با لینک صلب داشته باشد با بالا بردن ضریب الاستیسیته به این منظور می‌رسیم. هرچه ضریب الاستیسیته بالاتر باشد مدل به دست آمده سخت‌تر می‌باشد و دامنه نوسانات پای تکیه‌گاه کمتر می‌شود. بالعکس با کم شدن ضریب الاستیسیته مدل سختی خود را از دست داده و تحت همان شرایط اولیه دامنه ارتعاشات آن بالاتر می‌رود تا جایی که ممکن است ربات ناپایدار شده و سقوط کند. همچنین ضریب الاستیسیته با تحت تأثیر قرار دادن تابع زمانی، و در نتیجه، سرعت‌های زاویه‌ای ربات حرکت دوقای را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

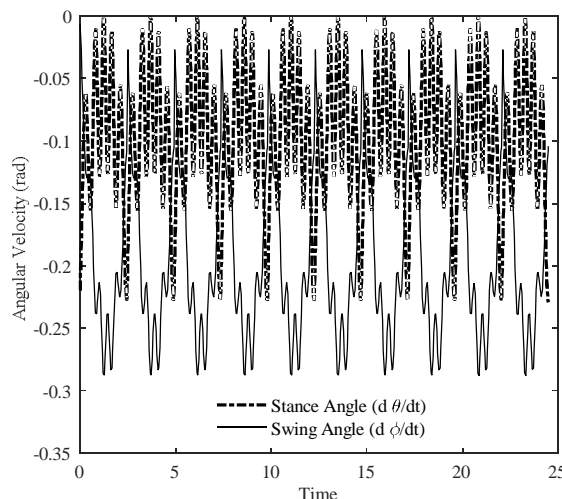
دمپینگ ریلی در نظر گرفته شده برای سیستم خطی می‌باشد و مقادیر آن باید به کمک آزمایش محاسبه شود. در این جا ما به‌علت این که امکان آزمایش مدل به‌دست آمده را نداریم باید از مقدار تخمینی آن استفاده کنیم. مقدار دمپینگ در نظر گرفته شده برای تابع  $q(t)$  برابر با 0.01/s می‌باشد که از نتایج ذکر شده در مرجع [22] برگرفته شده است.

ضریب دمپینگ با میرا کردن نوسانات پای تکیه‌گاه در سیستم اثرگذار است. با افزایش ضریب دمپینگ نوسانات سیستم سریع‌تر میرا شده و سیستم به حالت یکنواخت می‌رسد. هرچه ضریب دمپینگ بیشتر باشد اغتشاشات و اختلال‌های وارد شده به ربات زودتر میرا شده و در نتیجه پایداری سیستم از لحاظ ارتعاشی بالاتر می‌رود. از سوی دیگر با بالاتر در نظر گرفتن ضریب دمپینگ، به‌علت کاهش نوسانات، رفتار سیستم به رفتار ربات‌های دوقای با



**Fig 5** Period-one gait for the elastic biped robot at the slope of  $\gamma = 0.009$  rad. Biped's angles are not affected by the vibrations of the stance leg.

شکل 5 حرکت یک‌تناوبی ربات الاستیک در زاویه شیب  $\gamma = 0.009$  rad. ارتعاشات پای تکیه‌گاه اثری بر زاویه‌های ربات ندارد.



**Fig. 6** Time evolution of angular velocities of the elastic biped at the slope of  $\gamma = 0.009$  rad through period-one gait. Despite oscillations of the stance leg, he biped walks smoothly.

شکل 6 تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای ربات الاستیک در زاویه شیب  $\gamma = 0.009$  rad در حرکت یک‌تناوبی. با وجود نوسانی بودن سرعت‌های زاویه‌ای ربات به حرکت خود ادامه می‌دهد.

همچنین سرعت‌های زاویه‌ای ربات حالت نوسانی دارند و حول خط فرضی مرکزی برای ربات‌های صلب نوسان می‌کنند.

سیکل حدی ربات الاستیک در صفحه فاز برای زاویه‌های آن در "شکل 7" رسم شده است. سیکل حدی ربات الاستیک، زمانی که ارتعاشات بزرگی در پای تکیه‌گاه رخ می‌دهد به جای این که مسیر<sup>1</sup> واحدی را بپیماید، به حالت نوسانی درمی‌آید. در واقع در این حالت باید شرایطی را پیدا کنیم که در آن ربات در اطراف یک نقطه ثابت پایدار و در نتیجه سیکل حدی پایدار حرکت کند و تا زمانی که نوسانات سرعت‌های زاویه‌ای ربات الاستیک در ناحیه‌ی جذب<sup>2</sup> سیکل حدی باشد، به آن میل می‌کند و ربات الاستیک با وجود نوسانی شدن، به حرکت خود ادامه می‌دهد. در شبیه‌سازی‌های مذکور، ضریب

<sup>3</sup> Young's modulus

<sup>1</sup> trajectory

<sup>2</sup> basin of attraction

با استفاده از این شرط اولیه ربات الاستیک پس از هرگام به حالت نخستین بازمی‌گردد و در واقع یک سیکل را طی می‌کند.

همان‌طور که در "شکل 8" مشاهده می‌شود حرکت ربات با لینک الاستیک با توجه به پارامترهای در نظر گرفته شده، کاملاً تناوبی می‌باشد و شاهد حرکت یکنواخت در حرکت یک تناوبی می‌باشیم. با این شرایط اولیه، حرکت ربات را برای 1000 گام بدون سقوط کردن شبیه‌سازی می‌کنیم و مشاهده می‌شود که گام‌های کاملاً یکسانی را تجربه می‌کند که با نتایج تحلیل نگاشت پوانکاره نیز همخوانی کامل دارد.

در "شکل 9" مشاهده می‌شود که سرعت‌های زاویه‌ای پاها کاملاً از الگوی ربات‌های صلب نقطه‌ای پیروی می‌کند که نشان‌دهنده درستی شبیه‌سازی‌های صورت گرفته می‌باشد. به‌علت آن‌که نوسانات پای تکیه‌گاه بسیار کوچک است و تقریباً می‌توان آن را صفر در نظر گرفت و همچنین ضریب دمپینگ بالای در نظر گرفته شده برای سیستم، نمودارهای سرعت زاویه‌ای کاملاً صاف بوده و حالت نوسانی که در نمودار مربوط به سرعت‌های زاویه‌ای قسمت قبل مشاهده کردیم، در اینجا دیده نمی‌شود.

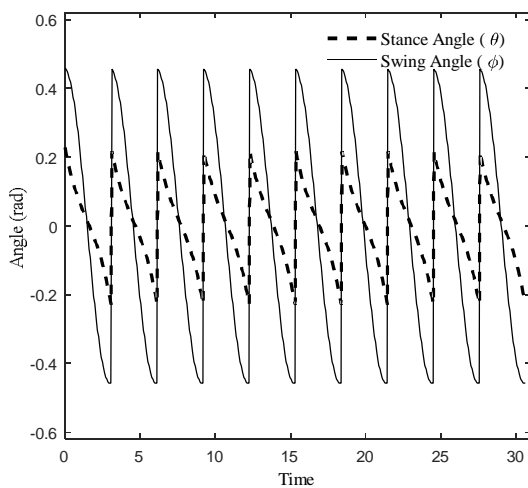


Fig. 8 Period-one gait for the elastic biped at the slope of  $\gamma = 0.015$  rad.

شکل 8 حرکت یک تناوبی ربات با لینک الاستیک در زاویه شیب  $\gamma = 0.015$  rad.

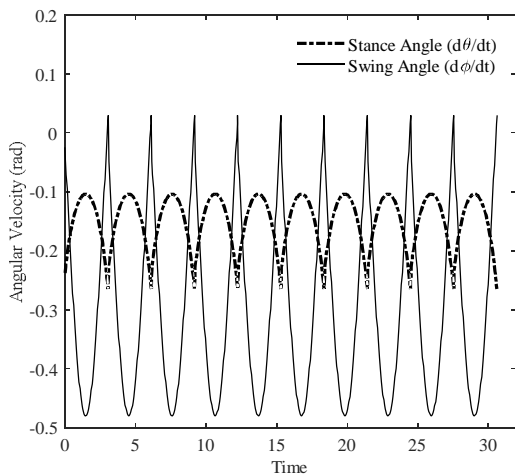


Fig. 9 Changes of the biped angular velocities through period-one gait at the slope of  $\gamma = 0.015$  rad

شکل 9 تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای پاها در حرکت یک تناوبی برای زاویه شیب  $\gamma = 0.015$  rad

لینک صلب نزدیک‌تر خواهد شد. از سوی دیگر با کاهش ضریب دمپینگ انتظار می‌رود میرایی نوسانات کاهش یابد؛ نتایج به‌دست آمده توسط شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده همین امر می‌باشد.

میزان تأثیر ضریب دمپینگ بر مقادیر ویژه سیستم بستگی به وضعیت اولیه سیستم نیز دارد. در هنگامی که نوسانات و ارتعاشات سیستم پای تکیه‌گاه زیاد است و در واقع سیستم به حالت یکنواخت نرسیده است تغییرات ضریب دمپینگ باعث تغییرات زیادی در مقادیر ویژه می‌شود و با بالا بردن ضریب دمپینگ می‌توان ارتعاشات سیستم را کاهش داد و سیستم را پایدار کرد. در واقع افزایش ضریب دمپینگ باعث کاهش مقادیر ویژه در حالت‌های با نوسانات زیاد (که معمولاً مقادیر ویژه نیز بسیار بیشتر از یک می‌باشند) می‌شود و سیستم را به سمت پایداری سوق می‌دهد. اما در حالتی که سیستم در وضعیت اولیه نزدیک به حالت یکنواخت خود قرار دارد، تغییرات ضریب دمپینگ اثرات کمی بر مقادیر ویژه دارد. علت این مسئله این است که در حالت غیر یکنواخت سیستم با افزایش ضریب دمپینگ سریع‌تر به حالت یکنواخت نزدیک می‌شود و در نتیجه مقادیر ویژه آن به مقادیر ویژه حالت صلب نزدیک می‌شود. ولی در هنگامی که سیستم در حالت یکنواخت می‌باشد به علت آنکه تغییر ضریب دمپینگ تأثیر چندانی بر آن ندارد، بنابراین تغییر ضریب دمپینگ تأثیر چندانی بر بزرگی مقادیر ویژه ندارد.

#### 4- بررسی حرکت یک تناوبی

برای تأیید مدل‌سازی و فرمول‌بندی صورت گرفته؛ در این قسمت پارامترهای ربات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که ربات الاستیک با حفظ الاستیسیته به ربات صلب نزدیک شود. در صورتی که نتایج به دست آمده توسط ربات الاستیک در هنگامی که ارتعاشات پای تکیه‌گاه کوچک هستند؛ با نتایج به دست آمده توسط مدل‌های قبلی همخوانی داشته باشد شبیه‌سازی‌های انجام شده تأیید شده و درستی مدل اثبات می‌شود. پارامترهای ربات الاستیک جدید در جدول 2 فهرست شده اند.

حال سطح شیب‌داری با زاویه  $\gamma = 0.015$  rad نظر گرفته می‌شود. با

حل معادله:

$$G(x^*) = S(x^*) - x^* \quad (25)$$

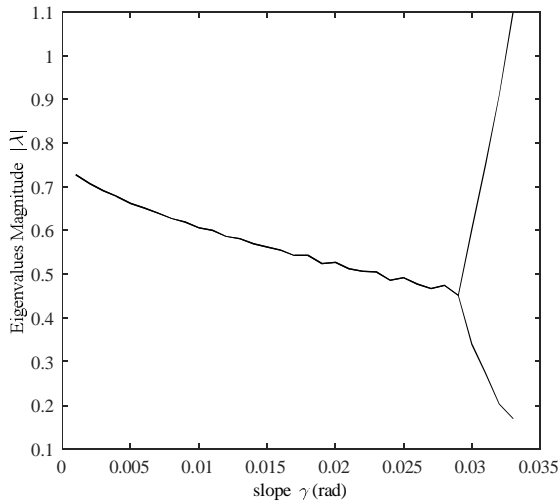
برای تمامی 6 متغیر ربات الاستیک به روش نیوتن-رافسون به نقطه ثابت یک‌تناوبی زیر می‌رسیم:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} -0.000000256069974 \\ 0.000003113730063 \\ 0.228574550005107 \\ -0.237202198242969 \\ 0.457149100009818 \\ -0.024357224886584 \end{bmatrix} \quad (26)$$

جدول 2 پارامترهای فیزیکی ربات الاستیک در حرکت یک‌تناوبی

Table 2 Physical parameters of the elastic biped at period-one gait.

نام پارامتر	نماد	مقدار
جرم واحد طول	$\rho A$	0.1kg/m
طول پای ربات	$L$	1m
گشتاور دوم سطح	$I$	$5 \times 10^{-7} \text{m}^4$
جرم نقطه‌ای بالای ربات	$M$	100kg
شتاب جاذبه	$g$	$1\text{m/s}^2$
ضریب دمپینگ	$C_q$	1/s
ضریب الاستیسیته	$E$	100GPa
زاویه سطح شیب‌دار	$\gamma$	0.015rad
ممان جرمی	$J$	0



**Fig. 11** Eigenvalues of the period-one gait per the ramp slope for the elastic biped. Eigenvalues are complex conjugate which split after the ramps slope increases. Stable period-one gait could be found until the slope of  $\gamma = 0.0328$  rad for the elastic biped.

**شکل 11** مقادیر ویژه حرکت یک تناوبی و بزرگی آن‌ها برحسب شیب سطح برای ربات الاستیک. مقادیر ویژه زوج‌های مختلط هستند که پس از مدتی جدایی رخ می‌دهد. تا زاویه  $\gamma = 0.0328$  rad حرکت یک‌تناوبی پایدار برای ربات الاستیک پیدا شد.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله ربات دویای صفحه‌ای با حرکت پرگاری شکل با لینک الاستیک مدل‌سازی و شبیه‌سازی شد. پای تکیه‌گاه به صورت تیر اویلر-برنولی و به شیوه مدهای فرضی مدل‌سازی شد و در نتیجه معادلات حرکت ربات الاستیک به دست آمد. ارتعاشات پای تکیه‌گاه و اثرات آن بر تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای ربات دویا بررسی شد و مشخص شد که هنگامی که ضریب الاستیسته ربات بالا می‌باشد و در نتیجه ارتعاشات پای تکیه‌گاه ربات کوچک می‌شوند، مدل الاستیک همانند یک ربات با لینک صلب رفتار می‌کند که درستی مدل‌سازی صورت گرفته را نشان می‌دهد. سپس حرکت یک‌تناوبی ربات الاستیک بررسی شد و مشخص شد که ربات می‌تواند سیکل‌های حدی پایدار تا زاویه شیب  $\gamma = 0.0328$  rad داشته باشد. بنابراین مشخص شد که می‌توان حرکت‌های تناوبی برای ربات الاستیک به دست آورد. در کارهای آینده می‌توان از مدل الاستیک به دست آمده برای کنترل ربات الاستیک استفاده کرد.

### 6- پیوست

ضرایب به کار رفته در معادله دینامیک حرکت، رابطه (20)، به شرح زیر فهرست می‌شوند:

$$B = M\varphi(L)^2 \quad (27)$$

$$C = ML\varphi(L) \quad (28)$$

$$D = ML^2 \quad (29)$$

$$H = \rho AL^3 \quad (30)$$

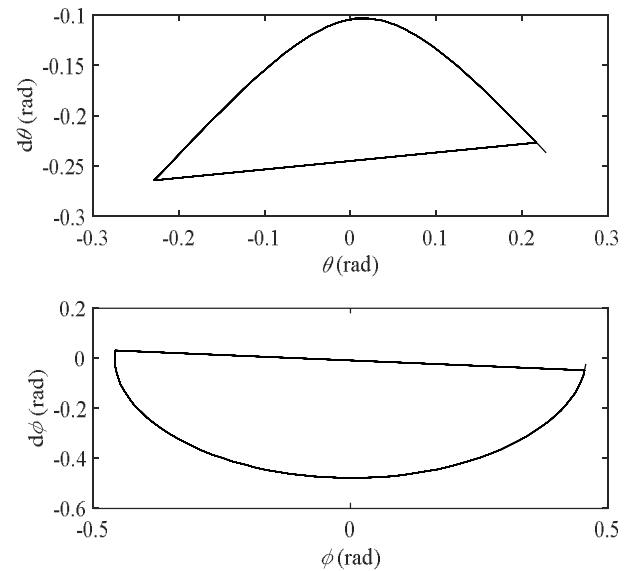
$$K = M\theta^2\varphi(L)^2q - q \int_0^L (EI\varphi_{xx}^2(x) dx) + Mg \sin(\gamma - \theta)\varphi(L) - C_q\dot{q} \quad (31)$$

$$M = -2M\varphi(L)^2\theta\dot{q}q - \frac{3}{2}\rho AgL^2 \sin(\gamma - \theta) - Mg\varphi(L)q \cos(\gamma - \theta) - MgL \sin(\gamma - \theta) + \frac{1}{2}\rho AgL^2 \sin(\gamma - \theta + \phi) - \frac{1}{2}\rho AL^3 \sin(\phi)(2\theta\dot{\phi} - \dot{\phi}^2) \quad (32)$$

$$N = \rho AL^3\theta\dot{\phi} \sin(\phi) - \frac{1}{2}\rho AL^3\theta^3 \sin(\phi) - \frac{1}{2}\rho AgL^2 \sin(\gamma - \theta + \phi) \quad (33)$$

در "شکل 10" سیکل حدی به دست آمده برای حرکت یک تناوبی با زاویه شیب  $\gamma = 0.015$  rad ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دیاگرام فاز به دست آمده کاملاً تکرار می‌شود و با توجه به این‌که مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین آن کمتر از یک هستند، بنابراین نشان‌دهنده یک سیکل حدی پایدار است. مقادیر ویژه حرکت به صورت عددی محاسبه شده‌اند. اگر اندکی اختلال در شرایط اولیه سیستم ایجاد گردد و یا در حین حرکت به سیستم وارد شود، به علت پایدار بودن سیکل حدی، این اغتشاشات حذف می‌شوند و سیستم به سیکل حدی مذکور مجدداً میل می‌کند. سیکل حدی به دست آمده تا هزار گام شبیه‌سازی شده‌است. کوچک بودن مقادیر  $q$ ، درستی فرض‌های در نظر گرفته شده برای مدل‌سازی ربات با لینک الاستیک را نشان می‌دهد.

در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته حرکت یک‌تناوبی پایدار در زاویه سطح شیب‌دار در بازه  $0 < \gamma \leq 0.0328$  برای سیستم یافت می‌شود. در "شکل 11" نقاط ثابت پیدا شده برای حرکت یک‌تناوبی برحسب تغییرات شیب، رسم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار ویژه‌های حرکت یک تناوبی به صورت مزدوج مختلط می‌باشند و بزرگی آن‌ها با یکدیگر برابر می‌باشد. سپس در حدود زاویه‌ی شیب  $\gamma = 0.029$  rad جدایی و دوشاخه<sup>1</sup> شدن مقادیر ویژه برای حرکت یک‌تناوبی ربات الاستیک رخ می‌دهد تا جایی که اندازه یکی از مقادیر ویژه در زاویه  $\gamma = 0.0328$  rad، بزرگتر از یک می‌شود و پس از آن نمی‌توان حرکت یک‌تناوبی پایدار برای ربات الاستیک پیدا کرد. بنابراین نشان داده شد در شبیه‌سازی صورت گرفته برای مدل نزدیک به مدل صلب و در هنگامی که ارتعاشات ربات کوچک هستند، حرکت یک‌تناوبی پایدار، قابل دستیابی است و در نتیجه درستی مدل موجود اثبات می‌گردد.



**Fig. 10** Limit cycle of the elastic biped at the period-one gait for the slope of  $\gamma = 0.015$  rad for the swing and stance leg are plotted. Biped walked 1000 cycles without falling over.

**شکل 10** سیکل حدی یک‌تناوبی ربات الاستیک آن برای برای زاویه شیب  $\gamma = 0.015$  rad برای زاویه‌های پای تکیه‌گاه و پای نوسانگر رسم شده‌اند. ربات توانست 1000 سیکل را بدون افتادن طی کند.

<sup>1</sup> Bifurcation



## 7-مراجع

- passive dynamic walking: A review, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 62, No. 6, pp. 889-909, 2014.
- [13] B. Thuijlt, A. Goswami, B. Espiau, Bifurcation and chaos in a simple passive bipedal gait, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 792-798, New Mexico, United States, April 20-25, 1997.
- [14] F. Iida, J. Rummel, A. Seyfarth, Bipedal walking and running with compliant legs, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3970-3975, Roma, Italy, April 10-14, 2007.
- [15] F. Iida, J. Rummel, A. Seyfarth, Bipedal walking and running with spring-like biarticular muscles, *Journal of biomechanics*, Vol. 41, No. 3, pp. 656-667, 2008.
- [16] B. Beigzadeh, Amputee walking robot: A different approach to biped walking problem, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 273-284, 2016. (in Persian فارسی)
- [17] S. M. H. Sadati, M. Naraghi, A. R. Ohadi Hamedani, Optimum design, manufacturing and experiment of a passive walking biped: Effects of structural parameters on efficiency, stability and robustness on uneven terrains, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 52-68, 2012. (in Persian فارسی)
- [18] A. Meghdari, A variational approach for modeling flexibility effects in manipulator arms, *Robotica*, Vol. 9, No. 2, pp. 213-217, 1991.
- [19] B. Tarvirdizadeh, E. Khanmirza, M. Ebrahimi, A. Kalhor, S. Vakiliipour, An efficient numerical and experimental system identification approach for a flexible manipulator, *Engineering Computations*, Vol. 32, No. 8, pp. 2467-2490, 2015.
- [20] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp. 670-673, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [21] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*, pp. 523-529, New York: McGraw Hill Higher Education, 2001.
- [22] O. Patil, P. Gandhi, On the dynamics and multiple equilibria of an inverted flexible pendulum with tip mass on a cart, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 136, No. 4, pp. 410-417, 2014.
- [23] P. A. Laura, J. L. Pombo, E. A. Susemihl, A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, No. 2, pp. 161-167, 1974.
- [1] T. McGeer, Passive dynamic walking, *The international journal of robotics research*, Vol. 9, No. 2, pp. 62-82, 1990.
- [2] A. Goswami, B. Espiau, A. Keramane, Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity-mimicking control laws, *Autonomous Robots*, Vol. 4, No. 3, pp. 273-286, 1997.
- [3] M. Garcia, A. Chatterjee, A. Ruina, M. Coleman, The simplest walking model: Stability, complexity, and scaling, *Journal of biomechanical engineering*, Vol. 120, No. 2, pp. 281-288, 1998.
- [4] W. M. Spong, F. Bull, Controlled symmetries and passive walking, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 7, pp. 1025-1031, 2005.
- [5] B. Beigzadeh, M. R. Sabaapour, M. R. Hairi Yazdi, Passivity based turning control of 3D biped robot with asymptotical stability, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 205-212, 2016. (in Persian فارسی)
- [6] S. H. Tamaddoni, F. Jafari, A. Meghdari, S. Sohrabpour, Biped hopping control based on spring loaded inverted pendulum model, *International Journal of Humanoid Robotics*, Vol. 7, No. 2, pp. 263-280, 2010.
- [7] A. Meghdari, M. Aryanpour, Dynamics modeling and analysis of the human jumping process, *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, Vol. 37, No. 1, pp. 97-115, 2003.
- [8] M. Wisse, A. L. Schwab, R. Q. Van der Linde, F. C. van der Helm, How to keep from falling forward: Elementary swing leg action for passive dynamic walkers, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 2, No.3, pp. 393-401, 2005.
- [9] J. W. Grizzle, C. Chevallereau, A. D. Ames, R. W. Sinnet, 3D bipedal robotic walking: Models, feedback control, and open problems, *IFAC Symposium on Nonlinear Control System*, Vol. 2, No. 3, pp. 505-532, 2010.
- [10] D. Koop, C. Q. Wu, Passive dynamic biped walking—Part I: Development and validation of an advanced model, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, No. 4, pp. 102-112, 2013.
- [11] M. R. Hairi Yazdi, M. R. Sabaapour, B. Beigzadeh, Asymptotically stable walking control of 3D biped robot via potential energy shaping approach, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 261-270, 2015. (in Persian فارسی)
- [12] S. Iqbal, X. Zang, Y. Zhu, J. Zhao, Bifurcations and chaos in