



ارتعاشات نوار گرافنی دولاویه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای

فرشاد یادگاری¹, اردشیر کرمی محمدی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شهرود، شهرود

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شهرود، شهرود

* شاهروود، صندوق پستی 316، akaramim@shahroodut.ac.ir

چکیده

ویژگی‌های بی‌نظیر گرافن، زمینه را برای استفاده از این ماده در موارد گوناگون از جمله سیستم‌های دارای حرکت محوری در بعد نانو فراهم کرده است. وجود حرکت محوری در سیستم‌ها موجب تغییر رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن‌ها می‌گردد. در این پژوهش ارتعاشات یک نوار گرافنی دولاویه دارای سرعت محوری ثابت با در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای و از طریق تئوری الاستیسیته غیرموضعی بررسی شده است. بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه تابی از کرنش در تمام نقاط جسم است. با توجه به ضخامت بسیار پایین لایه‌های گرافن و طول نوار، هر لایه بر اساس تئوری تیز اویلر-بولی مدل شده است. فرض بر این بوده است که جابه‌جایی‌های عرضی و انحنای هر دو لایه با هم برابر بوده و هیچ‌گونه جداگانه بین سطوح لایه‌ها هنگام حرکت رخ ندهد. یک مدول برشی برای در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای ناشی از پیوندهای ضعیف واندروالس در انرژی پتانسیل سیستم وارد شده است. با استفاده از روش همیلتون معادله سیستم به دست آمده و به کمک روش گالرکین حل شده است. نتایجی برای شرایط مرزی یکسرگیردار- یکسرآزاد به دست آمده و با تابیغ سایر مقالات موجود نیز مقایسه و اعتبارسنجی شده است. نتایج کامل‌تر برای شرایط مرزی دوسه‌مفصل به دست آمده و مشاهده می‌شود افزایش سرعت محوری موجب ایجاد تابایداری‌های دیبورژنس و فلااتر در سیستم می‌شود. همچنین تأثیر تغییرات مدول برشی و پارامتر غیرموضعی بر روی سرعت‌های بحرانی بررسی شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 09 تیر 1395

پذیرش: 29 مرداد 1395

ارائه در سایت: 04 مهر 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات

نوار گرافن

حرکت محوری

تئوری غیرموضعی

نایابداری

Vibration of axially moving two-layer graphene nonoribbon incorporating interlayer shear effect

Farshad Yadegari, Ardesir Karami Mohammadi*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

* P.O.B. 316 Shahrood, Iran, akaramim@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 29 June 2016

Accepted 19 August 2016

Available Online 25 September 2016

Keywords:

Vibration

Graphene nonoribbon

Axially moving

Nonlocal theory

Instability

ABSTRACT

Inimitable properties of graphene sheets enable a variety of applications such as axially moving nanodevices. Axial velocity affects dynamical response of systems. In this study linear vibration of an axially moving two-layer graphene nonoribbon with interlayer shear effect is proposed using nonlocal elasticity theory. Based on this theory, stress at a point is a function of strain at all other points of the body. Euler-Bernoulli theory is used to model the system due to nanoribbon thickness and length. It is assumed that the layers have the same transverse displacement and curvature and there is no transverse separation between layers surfaces. A shear modulus is imported in the potential energy expression in order to consider the interlayer shear effect due to weak Van der Waals forces. Governing equations are obtained using Hamilton's principle and are solved by Galerkin approach. Results for clamped-free boundary conditions are presented and compared to other available studies. Results for pinned-pinned boundary conditions are presented and it is observed that increasing axial velocity causes divergence and flutter instabilities in the system. Effects of different shear modulus and nonlocal parameter on critical speeds are also proposed.

و نانو کامپوزیت‌های با استحکام بالا استفاده شده است.

گرافن را ماده‌ی جادویی قرن بیست و پنجم نامیده‌اند. این ماده که گفته می‌شود محکم‌ترین ماده مورد مطالعه تاکنون است، جای گربنی قابل برای سلیکلکن است. گرافن ماده‌ای تخت و تک لایه متشکل از اتم‌های کربن است که در یک شبکه دو بعدی کندو مانند به هم متصل شده‌اند. این ماده دارای ضخامت یک اتم با ویژگی‌های بی‌نظیر است. گرافن با چگالی بالا، رسانایی نوری بالا، رسانایی الکتریکی و حرارتی بالا و قابل تنظیم و استحکام بی‌نظیر توجه کم‌سابقه‌ای را در تحقیقات بنیادی و کاربردی به خود جلب کرده است.

-1- مقدمه

فن‌آوری نانو دریچه‌ی جدیدی را در بسیاری از زمینه‌های علم از جمله علم مواد، مهندسی، پزشکی و انرژی گشوده است. در میان نانوموادهای گوناگون، نانولوله‌های کربنی¹ و ورق‌های گرافنی² به دلیل ویژگی‌های بی‌نظیر مکانیکی، الکترونیکی و گرمایی نگاه‌های بسیاری را به خود معطوف کرده است. به همین دلیل از این دو ماده برای توسعه نسل‌های جدید نانوابزارها در زمینه‌های مختلفی چون ردیاب‌ها، ترانزیستورها، سلول‌های خورشیدی، ابرخازن‌ها

¹Carbon Nano Tubes

²Graphene Sheets

حرکت محوری ساخته شده از مواد تابعی محوری با استفاده از روش غیرموضعی بررسی کرد. رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک میکروتیر دارای حرکت محوری با استفاده از روش ماتریس سختی دینامیکی مورد مطالعه موحدیان [12] قرار گرفت.

به دلیل ضخامت فوق العاده پایین، لایه‌های گرافن صلبیت خمی و سیار پایینی دارند و بنابراین برش بین لایه‌ای تاثیر مهمی در رفتار خمی و ارتعاشی گرافن‌های چندلایه دارد. در این مطالعه، رفتار ارتعاشی و ناپایداری یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن مدول برشی بین آن‌ها با استفاده از روش غیرموضعی الاستیسیته مود برسی قرار گرفته است. از آنجا که ضخامت لایه‌های گرافن بسیار کم است از تثویر تیر اویلر-برنولی برای مدل‌سازی سیستم استفاده شده است.

2- مدل‌سازی مسئله و استخراج معادلات سیستم

برای مدل‌سازی نوار گرافنی دولایه، نوار را به صورت دو تیر اویلر-برنولی در نظر می‌گیریم که بر روی هم قرار گرفته‌اند و مدول برشی بین آن‌ها وجود دارد که مبین پیوندهای واندروالس است. در شکل ۱، نوار گرافنی دولایه به طول l نشان داده شده است که با سرعت ثابت محوری v در حال حرکت می‌باشد. ارجابه‌جایی طولی تیرها صرف‌نظر شده و فرض می‌شود که جابه‌جایی‌های عرضی، w ، و چرخش، θ ، در هر دو تیر بالایی و پایینی با هم برابر باشند و هیچ‌گونه جدایی بین سطوح دو تیر هنگام حرکت و ارتعاش اتفاق نیافتد.

$$w_t(x, t) = w_b(x, t) = w(x, t) \quad (1)$$

$$\theta_t = \theta_b = \theta \quad (2)$$

با توجه به تغییر طول سطوح بالایی و پایینی لایه‌ها، میزان لغزش بین لایه‌ها نیز به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$s = -h\theta = h \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

در رابطه (3)، s ضخامت هر لایه گرافن می‌باشد.

تمامی جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها کوچک فرض می‌شوند، بنابراین معادلات حاکم بر مسئله به صورت خطی در نظر گرفته شده است.

2-1- استخراج معادلات

برای به دست آوردن معادلات سیستم از اصل همیلتون استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T) dt = 0 \quad (4)$$

در رابطه (4)، V انرژی پتانسیل، T انرژی جنبشی و t نشانگر زمان است.

انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

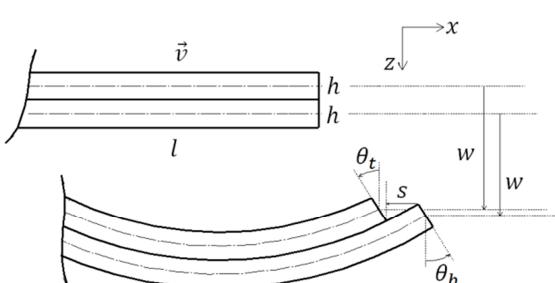


Fig. 1 Schematic of an axially moving two-layer graphene nanoribbon

شکل ۱ شماتیک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری

برای بررسی گرافن‌ها از روش‌های مانند شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی، مکانیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود. به دلیل پیچیدگی و هزینه بالای شبیه‌سازی‌های مولکولی و دینامیکی، استفاده از تئوری‌های تحلیلی بیشتر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در میان روش‌های تحلیلی، استفاده از تئوری غیر موضعی^۱ اینگونه [1] به دلیل تطابق مناسب با نتایج آزمایشگاهی و تجربی کاربرد بیشتری پیدا کرده است. بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط دیگر جسم است. محققان مختلفی از این روش برای مطالعه ورق‌های گرافنی یک و یا چندلایه استفاده کرده‌اند. در این روش‌ها معمولاً هر لایه گرافن به صورت یک تیر غیرموضعی اویلر-برنولی یا تیموشنکو و یا ورق غیرموضعی میندلین یا کیرشهف مدل می‌شود. انصاری و همکاران [2] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی تک‌لایه گرافن را به کمک روش غیرموضعی بررسی کردند. آن‌ها در این مطالعه از تئوری ورق میندلین برای مدل‌سازی استفاده کردند و فرکانس‌های طبیعی را به دست آوردند.

در پاره‌ای از مطالعات، با در نظر گرفتن چند ورق گرافن بر روی هم رفتار ورق دو و یا چندلایه گرافن مورد بررسی قرار گرفته است. در گرافن‌های چندلایه، لایه‌های گرافن به وسیله پیوندهای ضعیف واندروالس به هم متصل شده‌اند. از آین رو به راحتی می‌توانند بر روی هم بلغزند و تغییر شکل برشی رخ دهد [3]. پرده‌هان و همکار [4] به تحلیل ارتعاشات گرافن چندلایه قرار گرفته در یک ماتریس پلیمری پرداختند. نظام نیاز و همکار [5] ارتعاشات آزاد نانونوارهای گرافنی چندلایه را با در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ها در مطالعه قرار دادند.

از گرافن‌ها می‌توان در توسعه و طراحی حس‌گرهای با فناوری پیشرفته استفاده کرد. حس‌گرهایی برای تشخیص زودهنگام بیماری‌های سخت، حس‌گرهای گاز، حس‌گرهای فشار، حس‌گرهای الکترومغناطیسی و بسیاری از موارد دیگر در دنیای مدرن جایگاه مناسبی را برای گرافن‌ها به وجود آورده اند. مرجع [6] راهنمای بسیار خوبی در مورد استفاده از گرافن در حس‌گرهاست. در پژوهشی شن و همکاران [7] رفتار یک ورق تک لایه گرافن را به عنوان یک حس‌گر بررسی کردند. آن‌ها آثار ناشی از قرار گرفتن یک جرم در مرکز ورق غیرموضعی کیرشهف را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر ناتسوکی و همکاران [8] تغییرات فرکانس یک ورق مستطیلی دو لایه گرافن را با اجرام متصل مورد بررسی قرار دادند.

اجسام دارای حرکت محوری یک موضوع تحقیقاتی مهم در مهندسی می‌باشد. تاثیر حرکت محوری بر روی رفتارهای دینامیکی و ارتعاشی کابل، تیر، ورق و پوسته در ابعاد مacro توسط محققان مختلفی در سال‌های گذشته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است اما در ابعاد میکرو و نانو این مطالعات بسیار محدود می‌باشد. نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی به دلیل نسبت بالای مدول الاستیسیته به چگالی، در سرعت‌های بالا در معرض ناپایداری قرار دارند. لیم و همکاران [9] به بررسی رفتار دینامیکی نانوتیر دارای حرکت محوری با استفاده از روش غیرموضعی الاستیسیته پرداختند. آن‌ها ارتعاشات آزاد نانوتیر را تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. کیانی [10] ارتعاشات طولی، عرضی، پیچشی و هم‌چنین پایداری را برای یک نانولوله کربنی تک‌دارای حرکت محوری بررسی کرد. وی در این مطالعه نانولوله کربنی را به صورت یک تیر ریلی غیرموضعی مدل کرد. کیانی [11] در مطالعه دیگری ارتعاشات عرضی، طولی و پایداری را برای یک نانوتیر دارای

¹Nonlocal Theory

شود که در آن علامت ستاره برای سادگی حذف شده است.

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{l}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \tau = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t; \quad \mu = \frac{e_0 a}{l}; \quad \lambda = \frac{l}{r} \\ r &= \sqrt{\frac{I}{A}}; \quad \eta = \frac{v}{C_L}; \quad C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \gamma = \frac{h^2 K_{sh} l^2}{EI} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن C_L سرعت انتشار موج در تیر و γ شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر است.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\eta \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + (\lambda \eta)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ - \mu^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + 2\eta \lambda \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \tau} + (\lambda \eta)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

شرط مرزی بر حسب پارامترهای بی بعد، برای حالت دوسر مفصل به صورت رابطه (15):

$$\begin{aligned} w(0, \tau) = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(0, \tau) = 0 \\ w(1, \tau) = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

و برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد به صورت رابطه (16) بیان می شوند:

$$\begin{aligned} w(0, \tau) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, \tau) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(1, \tau) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}(1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

2-3- روش حل

به منظور حل معادله بی بعد از روش گالرکین استفاده شده است. در این روش نیاز است توابع شکل مود مناسبی متناظر با جابه جایی های عرضی در نظر گرفته شود. از آن جا که با توجه به شرایط مرزی سیستم شکل مودها باید وابسته به سرعت نیز باشند، یافتن توابع ویژه ای که دقیقاً شرایط مرزی طبیعی سیستم را ارضاء نمایند بسیار پیچیده است به همین دلیل از توابع شکل مود متناظر استاتیکی استفاده می شود. برای حالت دوسر مفصل این توابع به صورت رابطه (17) در نظر گرفته می شوند:

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{2} \sin(i\pi\xi) \quad (17)$$

و برای شرط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد توابعی به صورت رابطه (18) در نظر گرفته می شوند.

$$\phi_i(\xi) = \sinh(\beta_n \xi) - \sin(\beta_n \xi) - E(\cosh(\beta_n \xi) - \cos(\beta_n \xi)) \quad (18)$$

که در آن:

$$E = \frac{\sinh(\beta_n l) + \sin(\beta_n l)}{\cosh(\beta_n l) + \cos(\beta_n l)} \quad (19)$$

کاملاً مشخص است که توابع فوق شرط تعادل را ارضاء می کنند.

جابه جایی عرضی سیستم را به صورت گسسته رابطه (20) در نظر می گیریم:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\xi) \bar{w}_i(\tau) \quad (20)$$

که در آن N تعداد مودهای در نظر گرفته شده و $(\tau)_i$ تابع زمانی نامعلوم هستند. با جایگذاری رابطه (20) در معادله بی بعد شده و ضرب کردن عبارت حاصل در (ξ) ϕ_i و انتگرال گیری در فاصله ۰ تا ۱، فرم ماتریسی معادله به صورت رابطه (21) به دست می آید.

$$M\ddot{w} + G\dot{w} + K\bar{w} = 0 \quad (21)$$

که در آن M ، G و K به ترتیب نشان دهنده ماتریس های جرم، میرایی و سختی

$$T = \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

که در آن، A مساحت سطح مقطع تیر، l طول تیر، ρ چگالی تیر و v سرعت محوری ثابت تیر است.

ارزی پتانسیل سیستم نیز به صورت رابطه (6) به دست می آید:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l M_t^{nl} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_b^{nl} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{sh} s^2 dx \quad (6)$$

که در آن K_{sh} مدول برش بین لایه ای و M_t^{nl} و M_b^{nl} به ترتیب گشتاور خمی غیرموضعی لایه بالای و پایینی است.

با قرار دادن روابط (5) و (6) در رابطه (4)، معادله حاکم به صورت رابطه (7) حاصل می شود.

$$2\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} - h^2 K_{sh} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

2-2- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

بر مبنای فرم دیفرانسیلی تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن رابطه تنش محوری غیر موضعی با تنش محوری موضعی به صورت رابطه (8) به دست می آید [1]:

$$\sigma_x^{nl} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_x^{nl}}{\partial x^2} = \sigma_x^l = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

که در آن e_0 یک ثابت وابسته به ماده است که به وسیله آزمایش های تجربی تعیین می گردد. a نیز یک مشخصه طولی درونی (مانند طول پیوند اتم های کربن، پارامتر شبکه و یا فاصله ریزدانه ای) است. با ضرب رابطه (8) در z و انتگرال گیری روی سطح مقطع تیر، رابطه بین گشتاور خمی موضعی و غیرموضعی به صورت رابطه (9) به دست می آید :

$$M_x^{nl} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = M_x^l = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

در رابطه (9)، I ممان اینرسی سطح و E مدول الاستیسیته است که مقدار آن برای گرافن در حدود یک تراپاسکال است [5].

با جایگذاری رابطه (9) در معادله (7) معادله حرکت سیستم به صورت رابطه (10) حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h^2 K_{sh} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - (e_0 a)^2 [\rho A \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + 2v \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + v^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\ - \frac{h^2}{2} K_{sh} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

شرط مرزی برای حالت دو سر مفصل و یکسر گیردار- یکسر آزاد به ترتیب توسط رابطه های (11) و (12) تعیین می گردد.

$$w(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$$

$$w(l, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (11)$$

$$w(0, t) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l, t) = 0 \quad (12)$$

به منظور بررسی عمومی تر معادله با در نظر گرفتن پارامترهای بی بعد به صورت روابط (13)، فرم بی بعد معادله (10) به صورت رابطه (14) حاصل می-

مختلط سیستم و در نتیجه فرکانس‌های مختلط محاسبه می‌شوند.

3- نتایج

در یک سیستم پایه‌تار، تنها ناپایداری دیورژانس اتفاق می‌افتد، در حالی که در سیستم‌های ناپایه‌تار، بسته به میزان ناپایه‌تاری سیستم ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر می‌توانند رخ دهنند. برای یک سیستم پایه‌تار فرکانس‌ها به صورت حقیقی و یا موهومی محض ظاهر می‌شوند. هنگامی که پایین‌ترین فرکانس از صفر عبور کند، سیستم ناپایدار می‌شود. در سیستم‌های ناپایه‌تار همانند سیستم‌های پایه‌تار هنگامی که پایین‌ترین فرکانس از میدا عبور کند و یا دو فرکانس مختلف بر هم منطبق شوند، ناپایداری رخ می‌دهد [13].

در شبیه سازی، مقادیر عددی برای پارامترهای لایه‌های گرافن به صورت $b=2 \text{ nm}$, $\lambda=0.335 \text{ nm}$, $E=1 \text{ GPa}$, $L=16 \text{ nm}$, $\rho=2260 \text{ kg/m}^3$ (عرض تیر)،

$a=1.44 \text{ nm}$ و تعداد مودها $N=12$ در نظر گرفته شده است.

ابتدا فرکانس‌های طبیعی برای نوار گرافن دولایه بدون حرکت محوری و با شرط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد با طول‌های مختلف و سه مقدار مختلف مدول برشی، مطابق جدول 1 محاسبه شده و به منظور اعتبارسنجی حل، با نتایج مرجع [5] نیز که از روش شبیه‌سازی مولکولی بدست آمده مقایسه شده است که انطباق قابل قبولی را نشان می‌دهد. توضیحات بیشتری برای مقادیر در نظر گرفته شده برای مدول برشی در بخش 1-3 ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول نوار، سختی سیستم کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همچنین افزایش مقدار

مدول برشی موجب کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

همان‌طور که انتظار می‌رود برای سیستم با سرعت محوری، مقادیر ویژه به دست آمده تابعی از سرعت خواهد بود. در شکل‌های 2 و 3 نمودار تغییرات قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم با شرط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد بر حسب پارامتر η بعد سرعت رسم شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر قسمت حقیقی همواره منفی بوده و سیستم با این مشخصات، در این سرعت‌ها ناپایدار نمی‌شود. تا قبل از سرعت $\eta=0.012$ هر دو مود سیستم ارتعاشی و میراست. در $\eta=0.012$ قسمت موهومی برای مود اول به صفر رسیده و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه می‌شود. از سرعت $\eta=0.012$ تا $\eta=0.037$ مود اول فوق میرا و غیر ارتعاشی شده اما مود دوم همچنان ارتعاشی و میراست. از سرعت $\eta=0.037$ تا $\eta=0.084$ تا نیز دو مود سیستم، ارتعاشی و میرا هستند. از سرعت $\eta=0.084$ تا انتهای محدوده رسم شده، مود اول همچنان ارتعاشی و میراست اما مود دوم فوق میرا و غیر ارتعاشی می‌باشد.

می‌باشد و به صورت روابط (22) تا (24) به دست می‌آیند.

$$[M]_{ij} = \int_0^1 (\phi_i \phi_j + \mu^2 \phi'_i \phi'_{j'}) d\xi \quad (22)$$

$$[G]_{ij} = 2\lambda\eta \int_0^1 (-\phi_i \phi'_{j'} + \mu^2 \phi''_i \phi'_{j'}) d\xi \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [K]_{ij} = & \int_0^1 ((\gamma - (\lambda\eta)^2) \phi'_{i'} \phi'_{j'} + (1 - \mu^2(\lambda\eta)^2)) d\xi \\ & + \frac{\gamma\mu^2}{2} \phi''_i \phi''_{j'} \end{aligned} \quad (24)$$

در روابط (22) تا (24) علامت 'نشان‌دهنده مشتق نسبت به متغیر بی بعد مکان می‌باشد.

جابه‌جایی دینامیکی در رابطه (21) را به صورت رابطه (25) در نظر می‌گیریم.

$$\bar{W}(\tau) = W e^{i\alpha\tau} \quad (25)$$

که در آن W ، بردار دامنه امواج انتشار یافته در نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری و پارامتر α ، مقادیر ویژه معادله (21) می‌باشد. از آن جا که معادله سیستم دارای عبارت ژیروسکوپی می‌باشد، مقادیر و بردارهای ویژه به صورت اعداد مختلط ظاهر می‌شوند. قسمت موهومی نشان‌دهنده فرکانس ارتعاشات و قسمت حقیقی بیان‌گر وضعیت پایه‌تاری سیستم و نیز میرایی می‌باشد.

$$\alpha = \operatorname{Re}[\alpha] + i\operatorname{Im}[\alpha] \quad (26)$$

برای محاسبه مقادیر ویژه، ماتریس‌ها و بردارهایی به صورت رابطه (27) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} [B] &= \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [G] \end{bmatrix} \\ [E] &= \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \\ \{z\} &= \begin{cases} \{\dot{w}\} \\ \{w\} \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

بنابراین مرتبه معادله (21) به صورت رابطه (28) کاهش می‌یابد.

$$[B]\{\dot{z}\} + [E]\{z\} = \{0\} \quad (28)$$

با قرار دادن روابط (27) در رابطه (28) مساله مقدار ویژه (29) حاصل می‌شود:

$$(\alpha[I] - [Y])\{W\} = \{0\} \quad (29)$$

که در آن

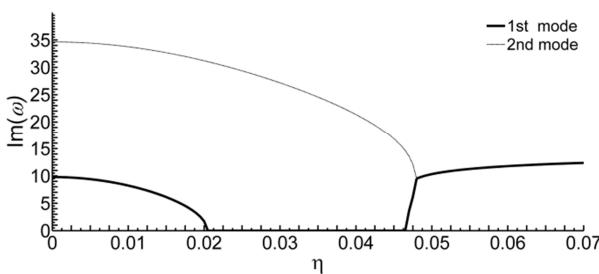
$$[Y] = -[B]^{-1}[E] \quad (30)$$

و I ماتریس همانی می‌باشد. با حل مساله مقدار ویژه (29) مقادیر ویژه

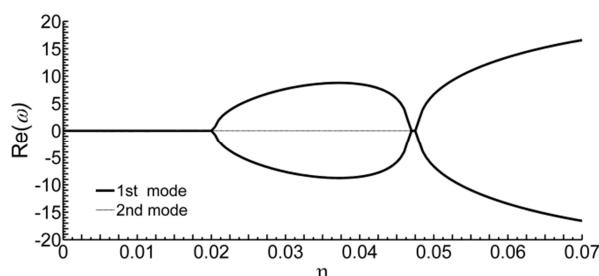
جدول 1 فرکانس‌های طبیعی اول و دوم برای شرط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد برای مقادیر مختلف مدول برشی

Table 1 1st and 2nd natural frequencies for clamped-free boundary condition and different shear modulus

تیر ساندویچی سه لایه یکسر گیردار-یکسر آزاد [5]		مطالعه حاضر (نوار دولایه یکسر گیردار-یکسر آزاد)									
		$K_{sh} = 0.25 \text{ GPa}$				$K_{sh} = 3.01 \text{ GPa}$				$K_{sh} = 4.6 \text{ GPa}$	
فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	طول (nm)
45.53	11.23	45.56	7.88	48.87	7.20	52.08	6.92	12			
40.84	9.81	39.34	6.69	42.50	6.00	44.19	5.68	13			
36.94	8.66	34.30	5.75	37.32	5.06	38.93	4.74	14			
33.63	7.71	30.16	5.00	33.06	4.30	34.61	3.98	15			
30.81	6.92	26.71	4.38	29.52	3.68	31.00	3.37	16			

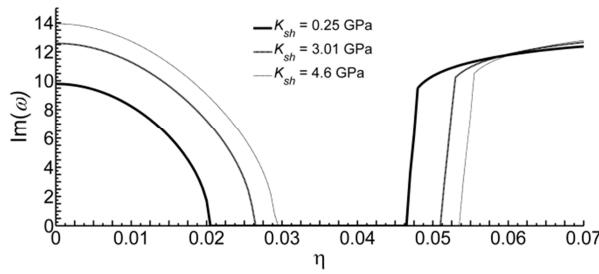


شکل ۴ تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهصل

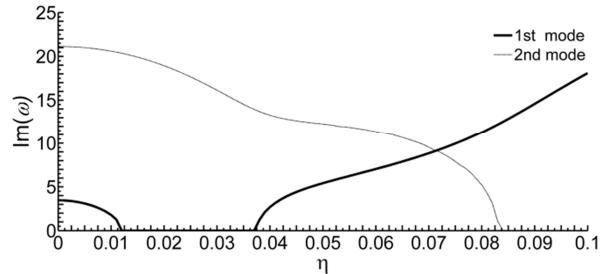


شکل ۵ تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهصل

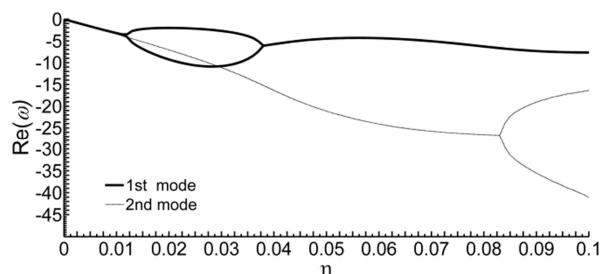
گرافن‌های چندلایه اهمیت بالایی دارد. مدول برش بین لایه‌ای، K_{sh} ، در واقع معیاری برای اندازه‌گیری میزان مقاومت لایه‌های گرافن در برابر لغزش بین سطوح می‌باشد. آزمایش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های مولکولی بسیاری برای بررسی رفتار برشی بین لایه‌ها انجام شده است. در این مطالعات تاثیر پارامترهای مختلفی همچون الگوی چینش اتم‌ها [15]، دما [16]، تعداد لایه‌ها [17] و حفره‌های اتمی در تعیین این مدول برشی بررسی شده است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد برای گرافن‌های دولایه این مقدار از 0.25GPa تا 4.6GPa گزارش شده است [19,18,3]. باید توجه داشت که مدول برشی بین‌لایه‌ای از لحاظ فیزیکی با مدول برشی خود گرافن متفاوت است و مقدار بسیار کمتری نسبت به آن دارد [3]. در شکل‌های ۶ و ۷ نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول برای مقادیر مختلف مدول برشی رسم شده است.



شکل ۶ تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهصل و مقادیر مختلف مدول برشی



شکل ۲ تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد



شکل ۳ تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد

در شکل‌های ۴ و ۵ نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم برای شرط مرزی دو سرمهصل رسم شده است. مشاهده می‌شود که تا قبل از سرعت $\eta=0.024$ هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند. در سرعت‌های بین $\eta=0.024$ تا $\eta=0.041$ قسمت موهومی برای مود اول صفر است و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه و دارای مقادیر ویژه مود اول صفر است و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه و دارای مقادیر ویژه مود اول صفر است. وجود یک مقدار ویژه مثبت نشان‌دهنده حقیقی با علامت‌های مخالف است. این مقدار ویژه مثبت نشان‌دهنده وجود ناپایداری دیورزنس در سیستم است. مود اول ناپایدار استاتیکی (غیر ارتعاشی) شده و تیر دچار کمانش می‌شود. البته مود دوم ارتعاشی و میراست اما ارتعاش روی حالت کمانش یافته رخ می‌دهد نه حول نقطه تعادل. از سرعت $\eta=0.0415$ تا $\eta=0.041$ نیز هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند. اما از سرعت $\eta=0.0415$ تا انتهای محدوده رسم شده نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی برای مودهای اول و دوم بر هم منطبق می‌شوند. در واقع سیستم در این ناحیه دارای دو جفت مقدار ویژه مختلط مزدوج یکسران با قسمت‌های حقیقی مختلف‌العلامت است. این میان ناپایداری فلاتر برای سیستم است که هر دو مود ناپایدار بوده و دست‌خوش ارتعاش و اگرا حول حالت تعادل ناپایدار هستند [14].

3-1- بررسی تأثیر برش بین لایه‌ای

در گرافن‌های چندلایه، لایه‌های گرافن بهوسیله پیوندهای ضعیف واندروالس به هم متصل شده‌اند. بنابراین اگر نیروی برشی وارد شده به لایه‌های گرافن بر این نیروی پیوندی غلبه کند، لایه‌ها بر روی هم می‌لغزند و انرژی کرنشی بین آن‌ها آزاد می‌شود. این موضوع می‌تواند موجب تغییر در رفتار حرکتی سیستم گردد. به همین دلیل در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای برای بررسی رفتار

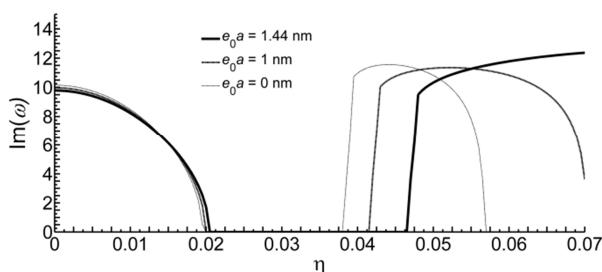


Fig. 8 تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهفسل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

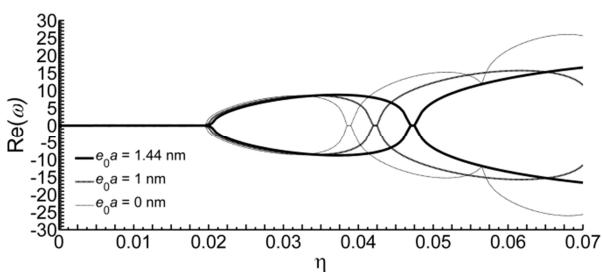


Fig. 9 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهفسل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

برنولی در نظر گرفته شده که بر روی هم قرار گرفته‌اند و جایه‌جایی عرضی نسبی آن‌ها صفر است. مدول برشی بین لایه‌ای برای مدل‌سازی پیوندهای واندروالس بین لایه‌ها در معادلات در نظر گرفته شده است. معادلات به کمک تئوری الاستیستیته غیرموضعی به دست آمده و از طریق روش گالرکین حل شده‌اند. برای شرط مرزی یکسرگیردار- یکسر آزاد تنایج با مقالات موجود مقایسه شده است. مشاهده می‌شود در حالتی که مدول برشی در حدود 0.25 گیگاپاسکال باشد نتایج نزدیکتری به دست می‌آید و با افزایش مدول برشی این اختلاف بیشتر می‌شود. همچنین برای حالت دو سر مفصل نمودارهای تغییرات فرکانس‌های بی بعد به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد رسم شده و تأثیر تغییرات پارامتر غیرموضعی و مدول برشی بررسی شده است. این نتیجه حاصل می‌شود که با افزایش طول سختی سیستم و در نتیجه مقدار فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. برای شرط مرزی دو سر مفصل افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس بی بعد سیستم و ناپایدار شدن سیستم در سرعت‌های بالاتر می‌شود. مشاهده می‌شود در حالتی که سیستم ساکن است، کاهش پارامتر غیرموضعی موجب افزایش فرکانس بی بعد سیستم می‌گردد. همچنین کاهش پارامتر غیرموضعی موجب می‌شود سیستم در سرعت‌های پایین‌تری وارد ناپایداری گردد.

5- مراجع

- [1] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [2] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010.
- [3] H. Rokni, W. Lu, A continuum model for the static pull in behavior of graphene of nanoribbon electrostatic actuators with interlayer

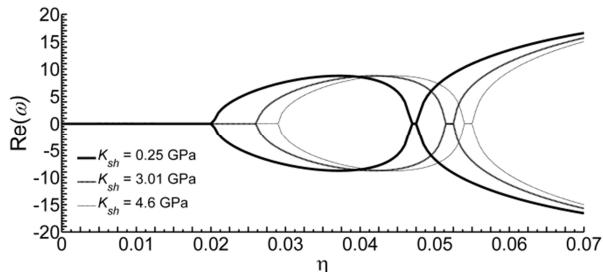


Fig. 7 تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی بعد برای شرط مرزی دوسرمهفسل و مقادیر مختلف مدول برشی

همان‌طور که مشخص است با افزایش مدول برشی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر مود اول در سرعت‌های بالاتر رخ می‌دهد. همچنین افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم شده است. باید توجه داشت که شرایط مرزی تاثیر زیادی بر ارتعاشات و پایداری سیستم‌های پیوسته دارند. طبیعی است که با در نظر گرفتن شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد لایه‌ها امکان لغزش بیشتری بر روی هم نسبت به حالت دو سر مفصل دارد.

3- بررسی تأثیر پارامتر غیرموضعی

تئوری الاستیستیته غیرموضعی به منظور در نظر گرفتن آثار ریز مقیاس ارائه شد. این تئوری تنش در یک نقطه را تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم در نظر می‌گیرد و پیوندی مناسب بین مدل اتمی دینامیک شبکه و آزمایش‌های تجربی برقرار می‌کند. در بررسی یک نقطه هنگامی که از اثر کرنش سایر نقاط چشم‌پوشی شود، همان مدل کلاسیک الاستیستیته به دست می‌آید. این کار معادل با صفر قرار دادن پارامتر غیرموضعی در معادلات می‌باشد. مقدار عددی پارامتر غیرموضعی توسط آزمایش‌های تجربی، شبیه‌سازی‌های مولکولی و یا به وسیله انطباق منحنی‌های انتشار موج با مدل اتمی دینامیک شبکه به دست می‌آید [20]. در گرافن‌های چندلایه برای پارامتر غیرموضعی با توجه به تعداد لایه‌ها مقادیر متفاوتی ارائه شده است [5].

در شکل‌های 8 و 9 نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول به ازای سه مقدار مختلف برای پارامتر غیرموضعی رسم شده است. مشخص است با کاهش پارامتر غیرموضعی از 1.44 به 1 و سپس به 0 مود اول سیستم در سرعت‌های پایین‌تری ناپایدار می‌شود. همچنین هنگامی که سیستم ساکن است، در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی موجب کاهش فرکانس بی بعد اول شده، در حالی که در سرعت‌های بالاتر تئوری کلاسیک الاستیستیته فرکانس کمتری را پیش‌بینی می‌کند.

همان‌طور که در شکل 9 مشخص است کاهش پارامتر غیرموضعی، موجب کاهش سرعت بحرانی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر می‌گردد، اما تأثیر این موضوع بر روی سرعت بحرانی مربوط به ناپایداری فلاتر بسیار بیشتر است. به عنوان مثال به ازای سرعت 0.04 η با در نظر گرفتن مقدار 1.44 برای پارامتر غیرموضعی سیستم دارای ناپایداری دیورژانس است، اما به ازای مقدار صفر ناپایداری سیستم از نوع فلاتر خواهد بود.

4- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری پرداخته شده است. لایه گرافن به صورت دو تیر اویلر-

- materials, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 610-619, 2014.
- [12] K. Movahedian, Dynamic stiffness matrix method for axially moving micro-beam, *Interaction and Multiscale Mechanics*, Vol. 5, No. 4, pp. 385-397, 2012.
- [13] Q. H. Zuo, H. L .Schreyer, Flutter and divergence instability of nonconservative beams and plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 9, pp. 1355-1367, 1996.
- [14] P. Hagedorn, A. Dasgupta, *Vibration and waves in continuous mechanical systems*, pp. 126,168, England: John Wiley, 2007.
- [15] G. Savini, Y. J. Dappe, S. Öberg, J. C. Charlier, M. I. Katsnelson, A. Fasolino, Bending modes, elastic constants and mechanical stability of graphitic systems, *Carbon*, Vol. 49, No. 1, pp. 62-69, 2011.
- [16] H. Conley, N. V. Lavrik, D. Prasai, K. I .Bolotin, Graphene bimetallic-like cantilevers: probing graphene/substrate interactions, *Nano letters*, Vol. 11, No. 11, pp. 4748-4752, 2011.
- [17] J. B. Ma, L. Jiang, S. F . Asokanthan, Influence of surface effects on the pull-in instability of NEMS electrostatic switches, *Nanotechnology*, Vol. 21, No. 50, pp. 505708, 2010.
- [18] Y. Liu, Z. Xu, Q . Zheng, The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 59, No. 8, pp. 1913-1622, 2011.
- [19] Y. K. Shen, H. A. Wu, Interlayer shear effect on multilayer graphene subjected to bending, *Applied Physics Letters*, Vol. 100, No. 10, pp. 101909, 2012.
- [20] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics*, Vol. 98, No. 12, pp .124301, 2005.
- shear and surface energy effects, *Journal of applied physics*, Vol. 113, No. 15, pp. 153512, 2013.
- [4] S. C. Pradhan, J. K. Phadikar, Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models, *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 11, pp. 1062-1069, 2009.
- [5] R. Nazemnezhad, S. Hosseini-Hashemi, Free vibration analysis of multi-layer grapheme nanoribbons incorporating shear effect via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Physics Letters A*, Vol. 378, No. 44, pp. 3225-3232, 2014.
- [6] Q. Wang, B. Arash, A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors, *Computational Materials Science*, Vol. 82, pp. 350-360, 2014.
- [7] Z. B. Shen, H. L. Tang, D. K. Li, G. J. Tang, Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp. 200-205, 2012.
- [8] T. Natsuki, J. X. Shi, Q. Q. Ni, Vibration analysis of nano mechanical mass sensor using double-layered graphene sheets resonators, *Journal of Applied Physics*, Vol. 114, No. 9, pp. 73-78, 2013.
- [9] C. W. Lim, C. Li, J. L. Yu, Dynamic behavior of axially moving nanobeams based on nonlocal elasticity approach, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 26, No. 5, pp. 755-765, 2010.
- [10] K. Kiani, Longitudinal, transverse and torsional vibrations and stabilities of axially moving single-walled carbon nanotubes, *Current Applied Physics*, Vol. 13, No. 8, pp. 1650-1661, 2013.
- [11] K. Kiani, Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded