



## تحلیل غیرخطی تشدید پره و روتور با استفاده از معادله انشعاب و روش عددی

اصغر نجفی<sup>1</sup>، محمدرضا قضاوی<sup>2\*</sup>، علی اصغر جعفری<sup>3</sup>

1- دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 111-14115، ghazavim@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 18 اردیبهشت 1393  
پذیرش: 20 خرداد 1393  
ارائه در سایت: 08 مهر 1393

کلید واژگان:

انشعاب هوب هامیلتونی  
روتور پره‌دار  
گردش مخروطی  
گردش استوانه‌ای  
معادله انشعاب

### چکیده

همان‌طور که در مطالعات قبلی نشان داده شده است، پره‌های انعطاف‌پذیر می‌توانند تحت شرایطی باعث تشدید ارتعاشات روتور پره‌دار شوند. در این مقاله رفتار غیرخطی روتوری که با این نوع تشدید مواجه شده است بررسی می‌شود. برای این منظور، مدلی از یک روتور پره‌دار در نظر گرفته شده است که در آن شفت و دیسک صلب هستند. پره‌ها با تیرهای انعطاف‌پذیر مدل‌سازی شده‌اند. دو انتهای شفت روی یاتاقان‌های غیرخطی و الاستیک قرار دارند. جمله غیرخطی تابع سختی یاتاقان‌ها از درجه سه هستند. ارتعاشات روتور شامل مود گردش استوانه‌ای و مخروطی است. معادله انشعاب در مرز پایداری با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به‌دست آمده است. اثرات غیرخطی به کمک این معادله بررسی شده‌اند. مشخص شده است که رفتار سیستم در مواجه با انشعاب هوب هامیلتونی وابسته به نوع ضریب غیرخطی یاتاقان‌ها است. براساس نتایج به‌دست آمده، انشعاب هوب زیر بحرانی و فوق بحرانی امکان‌پذیر است. در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی عددی اثر میرایی‌ها نیز بر مسیر حرکت مرکز دیسک چرخان محاسبه شده است. روش‌ها و نتایج به‌دست آمده در این مقاله را می‌توان برای مطالعه انشعاب هوب هامیلتونی در دیگر زمینه‌ها به‌کار برد.

## Nonlinear analysis of resonance between the blade and rotor by the bifurcation equation and numerical method

Asghar Najafi<sup>1</sup>, Mohammad Reza Ghazavi<sup>2\*</sup>, Ali Asghar Jafari<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, TarbiatModares University, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, TarbiatModares University, Tehran, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 08 May 2014  
Accepted 10 June 2014  
Available Online 30 September 2014

#### Keywords:

Hamiltonian Hopf Bifurcation  
Conical Whirling  
Cylindrical Whirling  
Bladed Rotor  
Bifurcation Equation

### ABSTRACT

As shown in the previous studies, blades can cause resonance in bladed rotors under some specific conditions. In this paper, the nonlinear behavior of a rotor, which faces with this kind of resonance, is investigated. In order to reach this goal, a model of bladed rotor, in which the disk and shaft are rigid, is considered. The blades are modeled by flexible beams. It is assumed that both ends of the shaft are supported by elastic and nonlinear bearings. The nonlinear term of the bearing stiffness function is cubic. The rotor vibrations include both cylindrical and conical whirling. The bifurcation equation on the stability boundary is obtained by the method of multiple time scales. The nonlinear effects are studied by this equation. It is revealed that the system behavior, when it encounters Hamiltonian Hopf bifurcation, is dependent on the bearing stiffness nonlinearity type. Accordingly, both subcritical and supercritical Hopf bifurcations are possible. Eventually, a numerical simulation is performed in order to study the effects of damping coefficients on the trajectory of rotating disk center. The results and methods, which are used in this paper, can be used for studying Hamiltonian Hopf bifurcation in other fields.

### 1- مقدمه

می‌تواند منجر به پدیده‌های نامطلوبی مانند ناپایداری نیز بشود. در سال‌های اخیر، تحقیقاتی برای بررسی دینامیک کوپل پره و دیسک صورت گرفته است. آنچه که در زیر آورده شده است بخشی از این تحقیقات را به‌صورت خلاصه تشریح می‌کند. گبران و سینها روشی را برای تشخیص ارتعاشات پره‌ها از ارتعاشات پیچشی شفت ارائه داده‌اند [2]. سینها یک توربوفن را که دچار شکست پره شده است را مورد بررسی قرار داده است [3]. وی در مدل خود پره‌ها را انعطاف‌پذیر در نظر گرفته است و اثر میرایی داخلی شفت نیز در این

امروزه، پره‌ها، به‌عنوان یکی از اجزای تجهیزات دوار، همانند توربین‌ها و کمپرسورها اهمیت ویژه‌ای دارند. این اجزا معمولاً با استفاده از پاندول چرخان، ریسمان و یا تیر مدل‌سازی می‌شوند [1]. در بیشتر مواقع، مطالعه دینامیک پره به‌تنهایی برای به‌دست آوردن نتایج دقیق کافی نیست، زیرا این پره‌ها با دیسک کوپل هستند و دینامیک دیسک می‌تواند در رفتار دینامیکی آن‌ها تاثیر داشته باشد. تاثیر دینامیک پره بر دیسک چرخان در شرایطی

Please cite this article using:

A. Najafi, M.R. Ghazavi, A.A. Jafari, Nonlinear analysis of resonance between the blade and rotor by the bifurcation equation and numerical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 43-51, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

غیرخطی پدیده تشدید خودتحریک برای روتور پره‌داری که با مودهای گردش استوانه‌ای و مخروطی ارتعاش می‌کند صورت نگرفته است. این مسئله از این جهت اهمیت دارد که بیشتر سیستم‌های مکانیکی غیرخطی هستند. همچنین، در بعضی موارد می‌توان با اضافه کردن اثرات غیرخطی آسیب-پذیری آن‌ها را در برابر ناپایداری‌ها و تشدیدهای ناخواسته کاهش داد. از طرف دیگر نمونه‌های فیزیکی و کاربردی زیادی از ناپایداری خودتحریک سیستم‌های هامیلتونی وجود دارد، اما کارهای کمی درباره تحلیل غیرخطی این پدیده صورت گرفته است. در صورت انجام تحلیل غیرخطی روی یک سیستم چند جسمی می‌توان روند به کار رفته را در موارد دیگر به کار برد. از این رو بررسی رفتار غیرخطی مجموعه دیسک و پره در مواجهه با تشدید بسیار مهم است و می‌توان با استفاده از نتایج به دست آمده اثرات مخرب آن را کاهش داد. برای این منظور یک روتور پره‌دار که قابلیت ارتعاش داخل صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای را دارد، در نظر گرفته شده است. سختی یاتاقان‌ها متقارن و غیرخطی است. معادله انشعاب با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمده است. معادله انشعاب کمک می‌کند تا اثر پارامترهای مختلف بر رفتار سیستم غیرخطی پیش‌بینی شود. همچنین، از روش عددی برای تکمیل و صحت‌گذاری نتایج حاصل از معادله انشعاب استفاده می‌شود.

## 2- تعیین معادله حرکت

در این قسمت، معادلات حرکت برای مدلی که در شکل 1 نشان داده شده است به دست می‌آیند. پره‌های آن با استفاده از  $n$  تیر یکسر درگیر مدل‌سازی شده‌اند. تنها پره  $i$  ام در شکل نشان داده شده است. فرض می‌شود که بیش از سه پره بر روی دیسک قرار دارد. به این ترتیب کل مجموعه روتور متقارن است. این پره‌ها با زاویه  $\nu$  نسبت به محور شفت به لبه خارجی دیسک صلب متصل شده‌اند. از آنجایی که ضخامت پره‌ها نسبت به طول آن‌ها کم است از مدل تیر اولر برنولی استفاده شده است. در شکل 1 دو دستگاه مختصات اصلی نشان داده شده است. چهارچوب ثابت است در حالی که  $OXYZ$  چارچوب چرخان است که با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  که برابر سرعت زاویه روتور است دوران می‌کند. موقعیت مرکز دیسک در چارچوب چرخان با مختصات  $x$  و  $y$  بیان می‌شود. معادلات حرکت با استفاده از این مختصات دورانی به دست می‌آیند. محور  $\xi$  در راستای تار خنثی پره قبل از تغییر شکل یافتن آن قرار گرفته است. محور  $\zeta$  با محور دوران زاویه‌ای برابر  $\nu$  می‌سازد. محور  $\eta$  بر هر دوی این محورها عمود است.  $m_d$  جرم دیسک است که در مرکز آن قرار دارد. فرض می‌شود که جرم کل روتور که شامل جرم دیسک و کل پره‌ها است برابر  $m_i$  باشد. بنابراین اگر جرم یک پره برابر  $m_b$  باشد،  $m_i = nm_b + m_d$  خواهد بود. شعاع دیسک برابر  $R$  و طول پره‌ها برابر  $l_b$  باشد. در شکل زاویه  $\psi_i$  موقعیت پره  $i$  ام در روی دیسک را نشان می‌دهد. تمامی پره‌ها به‌طور منظم و متوازن قرار گرفته‌اند و یاتاقان‌ها متقارنند. شفت که طول آن  $2L$  است، صلب در نظر گرفته شده است. به‌منظور مطالعه مودهای مخروطی و استوانه‌ای به‌صورت مجزا، فرض شده است که دیسک در میانه شفت قرار دارد. در این صورت گردش استوانه‌ای و مخروطی دی کوپل هستند. شکل 2 شمایی از حرکت‌های استوانه‌ای و مخروطی روتور را نشان می‌دهد.

فرض می‌شود که  $e_x, e_y, e_z, e_\xi, e_\eta, e_\zeta, e_\zeta$  به ترتیب بردارهای واحد در امتدادهای محورهای  $\xi, \eta, x, y, z, \zeta$  باشند، در این صورت روابط (1) تا (3) بین بردارهای یک برقرار است:

مدل موجود است. کرنال و دگونی [4] نوعی ناپایداری را برای پره‌های موتور هواپیماهای ملخ‌دار مورد مطالعه قرار داده‌اند. این نوع ناپایداری برای پره‌هایی اتفاق می‌افتد که طول آن‌ها از شعاع دیسک بیشتر باشد. آن‌ها در مدل خود از مدل پاندول چرخان استفاده کردند.

توران و بلت [5] اثرات کوپل بین پره و دیسک را بررسی کرده‌اند. آن‌ها در مقاله خود فرکانس‌های طبیعی مربوط به مودهای پیچشی روتور را با در نظر گرفتن ارتعاشات داخل صفحه‌ای پره‌ها به دست آورده‌اند. تحلیل آن‌ها محدود به تعیین فرکانس‌های طبیعی بوده و تحلیل انشعاب و پایداری انجام نشده است.

البدور [6] دینامیک کوپل خمش پره و پیچش روتور را بررسی کرده است. البدور و کایسیا [7] به بررسی پایداری مجموعه روتور و پره که تحت تحریک پیچشی قرار دارد پرداخته‌اند. آن‌ها از روش فلوکه برای بررسی سیستم تحریک شده پارامتریک<sup>1</sup> استفاده کرده‌اند.

وان و همکاران [8] مدل کاملی از شفت و پره و یاتاقان ژورنال ارائه داده‌اند. آن‌ها در مقاله خود دینامیک پره و شفت را خطی در نظر گرفته‌اند، اما جملات غیرخطی مربوط به یاتاقان‌ها را در مدل خود آورده‌اند. آن‌ها تحلیل انشعاب را به صورت عددی انجام دادند. ینگ و هوانگ به تحلیل مودال یک سیستم دیسک و پره با دیسک انعطاف‌پذیر پرداختند و در کار خود از روش گالرکین برای به دست آوردن شکل مودها استفاده کردند [9].

جنتا [10, 11] تاثیر مجموعه پره‌ها بر ناپایداری یک دیسک چرخان را مورد توجه قرار داده است. در این مقاله با خطی‌سازی نشان داده شده است که وقتی پره بلند باشد (بلندتر از شعاع دیسک) می‌تواند باعث تشدید روتور در سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی شود. این تنها شرط ایجاد ناپایداری توسط مجموعه پره‌ها در نظر گرفته شده است. نواحی ناپایداری برای ارتعاشات داخل صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای به دست آمده‌اند. در این مقاله نتیجه گرفته شده است که اولاً، تنها حرکت درون صفحه‌ای برای پره‌ها می‌تواند موجب ناپایداری شود و ثانیاً، برای پره‌هایی که طول آن‌ها از شعاع دیسک کوچک‌تر است ناپایداری اتفاق نمی‌افتد و ثالثاً، میرایی پره‌ها اگرچه میرایی داخلی محسوب می‌شود، اما نمی‌تواند باعث ایجاد ناپایداری شود. سانچز و همکاران [12] به بررسی تجربی و تحلیلی پدیده ناپایداری که در اثر ایجاد تشدید بین یک دسته چهار تایی از پره‌ها و پایه ایجاد می‌شود پرداخته‌اند. در مدل آن‌ها، پره‌ها با لولا به روتور متصل شده‌اند.

آناگوا و همکاران [13] به بررسی اثر کوپل بین پره و شفت پرداخته‌اند. آن‌ها ارتعاشات خارج صفحه‌ای و داخل صفحه‌ای پره‌ها را در مدل خطی خود در نظر گرفته‌اند. تحلیلی که توسط آن‌ها انجام شده به صورت خطی بوده و تحلیل انشعاب برای ناپایداری‌ها انجام نشده است. کار ایشان با استفاده از نتایج تجربی صحت‌گذاری شده است. سانتوس و همکاران [14] روشی برای کنترل ارتعاشات پره‌ها با استفاده از یاتاقان‌های مغناطیسی روتور ارائه داده‌اند. دیکن و النفای [15] یک روتور نامیزان پره‌دار را مطالعه کردند. آن‌ها ارتعاشات داخل صفحه‌ای روتور و حرکت خمشی پره‌ها را در نظر گرفتند. آنچه در کارهای گذشته انجام شده است نشان می‌دهد که امکان تشدید بین مودهای حرکتی دیسک چرخان و پره‌ها وجود دارد [16, 17]. این تحقیقات نشان می‌دهند که پره‌ها به‌عنوان یک نوسانگر می‌توانند باعث تشدید ارتعاشات پیشروی گردش استوانه‌ای و مخروطی روتور شوند. تشدید بین دو نوسانگر می‌تواند منجر به افزایش دامنه ارتعاشات شود، اما، به دلیل وجود اثرات غیرخطی، دامنه تا مقدار محدودی افزایش می‌یابد. تاکنون، تحلیل

1- Parametrically excited

$$\bar{p}_i = v_i e_\eta + (R + \xi) e_\xi + x e_x + y e_y \quad (7)$$

$$\bar{v}_i = \dot{v}_i e_\eta + v_i \dot{e}_\eta + (R + \xi) \dot{e}_\xi + x \dot{e}_x + y \dot{e}_y + j e_y \quad (8)$$

که در آن  $v_i(\xi)$  جابه‌جایی ذره‌ای بر روی پره است که در اثر تغییر فرم آن از نقطه  $P$  به نقطه  $Q$  منتقل می‌شود. انرژی جنبشی پره را می‌توان به صورت رابطه (9) به‌دست آورد:

$$T_i = \frac{\rho_b}{2} \int_0^{l_b} |\bar{v}_i|^2 d\xi \quad (9)$$

که در آن  $\rho_b$  جرم واحد طول پره است. فرض کنید که  $I_d$  و  $J_d$  به ترتیب ممان عرضی و قطبی دیسک باشند. در این صورت، انرژی جنبشی دیسک دوار به صورت رابطه (10) به‌دست می‌آید:

$$T_d = \frac{m_d}{2} |\bar{v}_d|^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad (10)$$

کل انرژی جنبشی سیستم شامل انرژی دیسک و پره‌ها به صورت رابطه (11) حساب می‌شود:

$$T = T_d + \sum_i T_i \quad (11)$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در یاتاقان‌ها و پره‌ها به صورت رابطه (12) محاسبه می‌شود:

$$U_d = \int_0^{|\Delta|} f(\Delta) d\Delta$$

$$U_i = \frac{1}{4} \rho_b \Omega^2 \int_0^{l_b} (2R + l_b + \xi)(l_b - \xi) \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^{l_b} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (12)$$

که در آن  $U_d$  انرژی پتانسیل ذخیره شده در یاتاقان است و  $U_i$  انرژی پتانسیل ذخیره شده در پره الاستیک است. همچنین،  $f$  نیروی ارتجاعی است که از طرف یاتاقان‌ها وارد می‌شود. اگر این تابع به صورت یک سری تیلور تا اولین جمله غیرخطی بسط داده شود، در این صورت می‌توان گفت که تابع  $f(s) = k_B \Delta + \alpha |\Delta|^2 \Delta$  باید فرد باشد.  $\alpha$  ضریب جمله درجه سوم است که به ضریب دافینگ معروف است. بسیاری از رفتارهای غیرخطی یک روتور را می‌توان با این معادله دافینگ به‌دست آورد. انرژی پتانسیل کل به صورت رابطه (13) به‌دست می‌آید:

$$U = U_d(\Delta_1) + U_d(\Delta_2) + \sum_i U_i \quad (13)$$

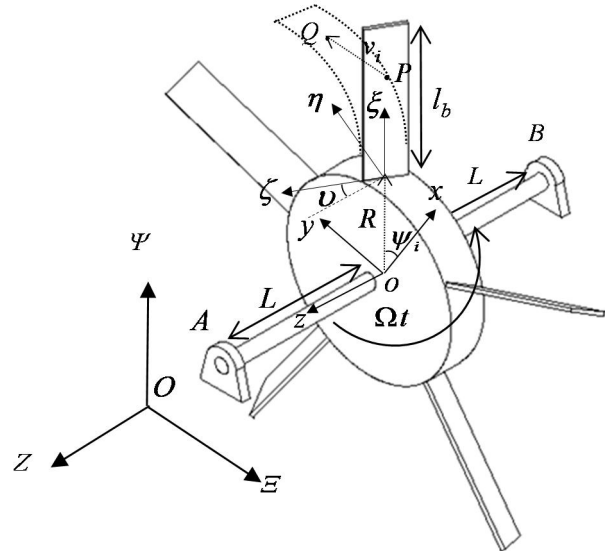
که در آن  $\Phi$ ،  $r$ ،  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  در رابطه (14) تعریف می‌شود.

$$\Phi = \Phi_x + j\Phi_y, \quad r = x + jy, \quad \Delta_2 = r + j\Phi L, \quad \Delta_1 = r - j\Phi L \quad (14)$$

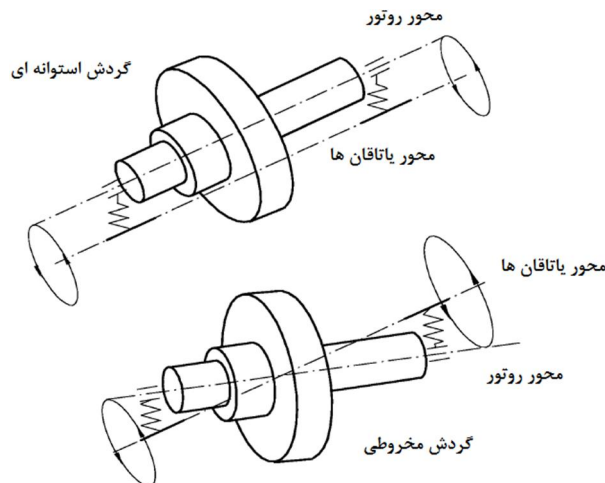
از لحاظ فیزیکی  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  متغیرهای موهومی هستند که به ترتیب نشان‌دهنده میزان جابه‌جایی دو انتهای شفت در نقاط  $A$  و  $B$  هستند.  $r$  و  $\Phi$  نیز بیانگر جابه‌جایی‌های انتقالی و زاویه‌ای دیسک در صفحه مختلط هستند. مواد و سازه‌های فلزی می‌توانند دارای میرایی خطی باشند. اگر فرض شود که، پره‌ها از مواد کلوین ساخته شده‌اند و مدل میرایی ویسکوز برای یاتاقان‌ها استفاده شود [19, 18, 1]، تابع زوال ریلی برای یاتاقان‌ها و پره‌ها به صورت رابطه (15) و (16) به‌دست می‌آیند:

$$D_B = \frac{1}{2} c_B \left( |\dot{\Delta}_1 + j\Omega \Delta_1|^2 + |\dot{\Delta}_2 + j\Omega \Delta_2|^2 \right) \quad (15)$$

$$D_i = \frac{1}{2} I_b \gamma_b \int_0^{l_b} \left( \frac{\partial^2 \dot{v}_i}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (16)$$



شکل 1 مدل دیسک چرخان پره‌دار



شکل 2 گردش استوانه‌ای و مخروطی روتور بر روی یاتاقان‌های الاستیک (برچسب محور یاتاقان به معنی موقعیت غیر تغییر شکل یافته است) [1]

$$e_\xi = \cos(\psi_i) e_x + \sin(\psi_i) e_y \quad (1)$$

$$e_\eta = -\cos(\nu) \sin(\psi_i) e_x + \cos(\nu) \cos(\psi_i) e_y - \sin(\nu) e_z \quad (2)$$

$$e_\zeta = -\sin(\nu) \sin(\psi_i) e_x + \sin(\nu) \cos(\psi_i) e_y + \cos(\nu) e_z \quad (3)$$

اگر  $\Phi_x$  دوران دیسک حول محور  $x$  و  $\Phi_y$  دوران حول محور  $y$  باشد، آنگاه می‌توان سرعت زاویه‌ای مطلق دیسک را به صورت رابطه (4) به‌دست آورد:

$$\bar{\omega} = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \quad (4)$$

که در آن:

$$\omega_x = \dot{\Phi}_x - \Phi_y \Omega$$

$$\omega_y = \dot{\Phi}_y + \Phi_x \Omega$$

$$\omega_z = \Omega - \Phi_x \dot{\Phi}_y - \Phi_y^2 / 2 - \Phi_x^2 / 2$$

مشتق بردارهای یکه به صورت روابط (5) و (6) به‌دست می‌آیند:

$$\dot{e}_\xi = \cos(\psi_i) \dot{e}_x + \sin(\psi_i) \dot{e}_y \quad (5)$$

$$\dot{e}_\eta = -\cos(\nu) \sin(\psi_i) \dot{e}_x + \cos(\nu) \cos(\psi_i) \dot{e}_y + \sin(\nu) \dot{e}_z \quad (6)$$

که در آن نماد نقطه بر روی متغیرها نشان‌دهنده مشتق‌گیری نسبت به زمان است. اگر  $\bar{p}_i$  بردار موقعیت نقطه دلخواه  $P$  بر روی پره و  $\bar{v}_i$  بردار سرعت آن باشد، آنگاه، با توجه به شکل 1، روابط (7) و (8) برقرار است:

$$\begin{aligned} & \ddot{r}^* + (2j\Omega^* + \mu^*)\dot{r}^* + (1 - \Omega^{*2} + j\Omega^*\mu^*)r^* \\ & + m^* \cos v (j\ddot{u}_1 - 2\Omega^*\dot{u}_1 - \Omega^{*2}u_1) \\ & = -\alpha^* \left( |\Delta_1^*|^2 \Delta_1^* + |\Delta_2^*|^2 \Delta_2^* \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\Phi} + [j(2 - J^*)\Omega^* + \mu_r^*]\dot{\Phi} + [\Omega^{*2}(J^* - 1) + j\Omega^*\mu_r^*]\Phi \\ & - jI^* \sin v (\ddot{u}_1 + \Omega^{*2}u_1) = -\alpha_r^* \left( |\Delta_2^*|^2 \Delta_2^* - |\Delta_1^*|^2 \Delta_1^* \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & 2(\ddot{u}_1 + \mu_b^*\dot{u}_1 + \omega_b^{*2}u_1) - j\chi_1(\ddot{r}^* + 2\Omega^*j\dot{r}^* - \Omega^{*2}r^*)\cos v \\ & + j\chi_2(\ddot{\Phi} + \Omega^{*2}\Phi)\sin v = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\ddot{u}_q + \mu_b^*\dot{u}_q + \omega_b^{*2}u_q = 0 \quad (27)$$

صورت ماتریسی معادلات (24) تا (26) به صورت رابطه (28) است:

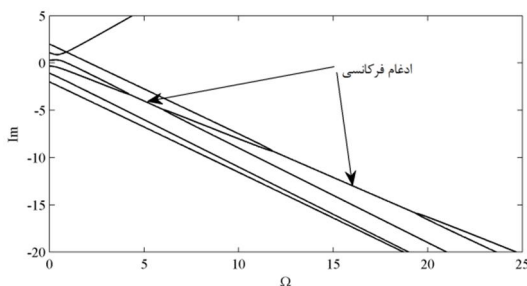
$$M\ddot{g} + (G + C)\dot{g} + (K + N)g = f(g) \quad (28)$$

که در آن ماتریس‌های  $M$  و  $K$  و  $C$  و  $G$  و  $N$  و همین طور  $g$  و  $f(g)$  در ضمیمه ب تعریف شده‌اند. معادله غیرمیرای معادله (28) به صورت رابطه (29) است:

$$M\ddot{g} + G\dot{g} + Kg = f(g) \quad (29)$$

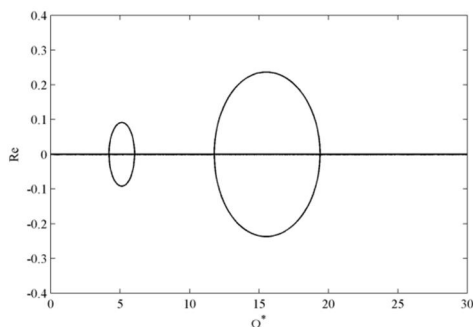
### 3- تحلیل خطی پدیده تشدید

یک روتور پره‌دار با  $\delta = 0.6$  و  $J^* = 0.1$  مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرکانس‌های این مورد با استفاده از نمودارهای کمپبل در شکل 3 نشان داده شده‌اند. شکل 3 این فرکانس‌ها را برای سیستم کوپل نمایش داده است. منحنی زوال برای سیستم کوپل در شکل 4 رسم شده است. دو حباب ناپایداری در این نمودار دیده می‌شود. حباب اول و دوم به ترتیب به دلیل تشدید بین پره‌ها با مودهای استوانه‌ای و مخروطی ایجاد شده‌اند. بنابراین، دو ناحیه بحرانی محدود وجود دارند که در داخل آن‌ها ناپایداری دینامیکی رخ می‌دهد. هر یک از این نواحی دارای دو مرز پایداری هستند. این مرزها منطبق بر نقاط تقاطع این حباب‌ها با محور سرعت دورانی هستند. در هر یک از این نقاط، سیستم دارای مقادیر ویژه غیرساده خواهد بود.



شکل 3 نمودار کمپبل برای روتور پره‌دار؛  $m^* = 0.3$  و  $\delta = 0.6$  و  $\omega_b^{*2} = 0.1$

$$I^* = 0.05 \text{ و } J^* = 0.1 \text{ و } \nu = 0.2 \text{ و } \kappa^* = 4$$



شکل 4 نمودار زوال برای روتور پره‌دار کوپل شده با پارامترهای ارائه شده در شکل 3

که در آن  $\gamma_b$  و  $c_B$  ضرایب میرایی پره‌ها و یاتاقان‌ها هستند. اگر تنها یک مود برای تغییر حالت پره الاستیک در نظر گرفته شود می‌توان آن را به صورت رابطه (17) تقریب زد [21, 20]:

$$v_i / l_b \approx \phi(\xi)q_i \quad (17)$$

تابع مود اول که شرایط مرزی را برای تیر یک‌سر درگیر ارضا می‌کند به صورت رابطه (18) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \phi = C \{ & [\sin \gamma - \sinh \gamma][\sin(\gamma \xi^*) - \sinh(\gamma \xi^*)] \\ & + [\cos(\gamma) + \cosh(\gamma)][\cos(\gamma \xi^*) - \cosh(\gamma \xi^*)] \} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن  $\gamma = 1.875$  و  $C$  ثابت است و به صورت رابطه (19) تعریف می‌شود:

$$C = \frac{\int_0^1 C\phi(\xi^*)d\xi^*}{\int_0^1 \phi^2(\xi^*)d\xi^*} \quad (19)$$

با استفاده از معادله لاگرانژ و صرف نظر کردن از جملات با درجه بالاتر، معادله حرکت سیستم به صورت روابط (20) تا (22) به دست خواهد آمد. این معادلات، به علت طولانی بودنشان، در ضمیمه الف آورده شده‌اند. در اینجا تنها صورت بی بعد شده آن‌ها آورده شده است:

$$\begin{aligned} & \ddot{r}^* + (2j\Omega^* + \mu^*)\dot{r}^* + (1 - \Omega^{*2} + j\Omega^*\mu^*)r^* \\ & + \frac{m^*}{n} \sum_{i=1}^n (j\dot{q}_i - 2\Omega^*\dot{q}_i - \Omega^{*2}q_i) \exp(j\psi_i) \cos(v) \\ & = -\alpha^* \left( |\Delta_1^*|^2 \Delta_1^* + |\Delta_2^*|^2 \Delta_2^* \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\Phi} + [j(2 - J^*)\Omega^* + \mu_r^*]\dot{\Phi} \\ & + [\Omega^{*2}(J^* - 1) + \kappa^* + j\Omega^*\mu_r^*]\Phi \\ & - j\frac{I^*}{n} \sum_i (\dot{q}_i + \Omega^{*2}q_i) \exp(j\psi_i) \sin(v) \\ & = -\alpha_r^* \left( |\Delta_2^*|^2 \Delta_2^* - |\Delta_1^*|^2 \Delta_1^* \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & 2(\ddot{q}_i + \mu_b^*\dot{q}_i + \omega_b^{*2}q_i) \\ & - j\chi_1(\ddot{r}^* + 2\Omega^*j\dot{r}^* - \Omega^{*2}r^*) \exp(-j\psi_i) \cos v \\ & + j\chi_1(\ddot{r}^* - 2\Omega^*\dot{r}^* - \Omega^{*2}r^*) \exp(j\psi_i) \cos v \\ & + j\chi_2(\ddot{\Phi} + \Omega^{*2}\Phi) \exp(-j\psi_i) \sin v \\ & - j\chi_2(\ddot{\Phi} + \Omega^{*2}\Phi) \exp(j\psi_i) \sin v = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \Omega \sqrt{m_t / 2k_B}, \quad \mu^* = 2c_B / \sqrt{2k_B m_t}, \\ \mu_r^* &= 2c_R \sqrt{m_t} / I_t \sqrt{2k_B}, \quad \mu_b^* = \mu_b \sqrt{m_t} / m_b \sqrt{2k_B}, \\ k_b^* &= k_b / 2k_B, \quad t^* = t \sqrt{2k_B / m_t}, \quad r^* = r / l, \quad \omega_b^* = \omega_b \sqrt{m_t / 2k_B}, \\ J^* &= J_t / I_t, \quad I^* = nI / I_t, \quad m^* = nm / m_t, \quad \kappa^* = \kappa m_t / 2k_B I_t, \\ \alpha_r^* &= L l_b^2 \alpha / I_t \Omega_{cr}^2, \quad \alpha^* = l_b^3 \alpha / m_t \Omega_{cr}^2, \quad \Omega_{cr} = \sqrt{2k_B / m_t}, \\ \Delta_{1,2}^* &= \Delta_{1,2} / l_b \end{aligned}$$

برای ساده‌سازی تحلیل‌ها لازم است که تغییر مختصات زیر به معادله حرکت اعمال شود. این تغییر مختصات به صورت رابطه (23) است:

$$q_i = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \exp(-jk\psi_i) \quad (23)$$

که در آن  $u_k$  ها مختصات مودال هستند. تنها مود قطر گره‌ای اول ( $k=1$ ) می‌تواند با دیسک دوار کوپل شود. معادله حرکت در صورت نهایی خود به صورت روابط (24) تا (27) خواهد بود:

$$O(\varepsilon) \quad MD_0^2 g_0 + GD_0 g_0 + K g_0 = 0 \quad (38)$$

$$O(\varepsilon^2) \quad MD_0^2 g_1 + GD_0 g_1 + K g_1 = -(2MD_1 D_0 + GD_1) g_0 \quad (39)$$

$$O(\varepsilon^3) \quad MD_0^2 g_2 + GD_0 g_2 + K g_2 = - (MD_1^2 + 2MD_0 D_2 + GD_2) g_0 - (2MD_1 D_0 + GD_1) g_1 - \hat{\sigma} (AD_0 + B) g_0 - f(g_0) \quad (40)$$

که در آن

$$A = \frac{\partial G}{\partial \Omega} \quad B = \frac{\partial K}{\partial \Omega}$$

جواب غیرنرولی معادله (40) به صورت رابطه (41) است:

$$g_0 = A u_0 \exp(\lambda T_0) \quad (41)$$

که در آن  $A$  تابعی از  $T_1, T_2, \dots$  است.  $A$  با اعمال شرط حل پذیری در مراحل بعدی تقریب زنی به دست خواهد آمد. با جاگذاری (41) در (39) می توان جواب غیرنرولی معادله (39) را به صورت رابطه (42) به دست آورد:

$$g_1 = u_1 \exp(\lambda T_0) D_1 A \quad (42)$$

این جواب و معادله (41) اگر در معادله (40) قرار داده شوند و دو طرف معادله در  $v_0^H$  ضرب شوند، رابطه (43) حاصل می شود:

$$g D_1^2 A + v_0^H (\lambda \hat{\sigma} A + \hat{\sigma} B) u_0 A + g \tilde{\alpha} |A|^2 A \quad (43)$$

که در آن ثابت  $g$  و  $\tilde{\alpha}$  به صورت روابط (44) و (45) به دست می آیند:

$$g = v_0^H M u_0 + v_0^H (2M \lambda + G) u_1^H \quad (44)$$

$$\tilde{\alpha} = v_0^H f(u_0) / g \quad (45)$$

برای به دست آوردن صورت نرمال معادله حرکت باید از فرایند بازسازی استفاده کرد. برای این منظور از تقریب زیر (معادله (46)) استفاده می شود:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \varepsilon^2 D_1^2 A + O(\varepsilon^3) \quad (46)$$

با استفاده از این معادله نتیجه نهایی به صورت رابطه (47) حاصل می شود:

$$\ddot{A} + \sigma a A + \tilde{\alpha} |A|^2 A = 0 \quad (47)$$

که در آن  $a = v_0^H (\lambda A + B) u_0 / g$ . مسیر فاز شرایط یک معادله دیفرانسیل جداپذیر را ارضا می کند و می توان از آن انتگرال گیری کرد که نتیجه آن به صورت رابطه (48) خواهد بود:

$$|A|^2 + \sigma a |A|^2 + \tilde{\alpha} |A|^4 / 2 = C \quad (48)$$

که در آن  $C$  یک ثابت خواهد بود. چنانچه  $A$  به صورت  $A = \rho e^{j\theta}$  در مختصات قطبی بیان شود کار ساده تر خواهد شد. اگر این تغییر متغیر به معادله (48) اعمال شود، معادله (49) حاصل خواهد شد:

$$\dot{\rho}^2 + \sigma a \rho^2 + \tilde{\alpha} \rho^4 / 2 = C \quad (49)$$

در واقع ثابت  $C$  هامیلتونین موثر معادله (47) است. پتانسیل موثر آن به صورت رابطه (50) به دست می آید:

$$V_e = \sigma a \rho^2 + \tilde{\alpha} \rho^4 / 2 \quad (50)$$

اکستریم های این تابع منطبق بر نقاط تعادل است. اگر نقطه تعادل مربوط به یک مینیمم باشد در اطراف آن نوسانات کوچکی وجود خواهد داشت. در صورتی که نقطه تعادل غیرصفر باشد، نشان دهنده وجود یک سیکل حدی به همراه یک حرکت مارپیچ به دور آن خواهد بود. در فضای فاز، این مسیر مربوط به یک چمبره دوبعدی است. در صورتی که نقاط تعادل مربوط به یک ماکسیمم باشند، ناپایدار خواهند بود و حرکت نوسانی ایجاد نخواهد شد.

#### 4- مقادیر و بردارهای ویژه در مرز پایداری

با توجه به اینکه بر روی مرز پایداری یک سیستم هامیلتونی مقادیر ویژه غیر ساده هستند می توان زنجیره جردن را برای معادله (29) به صورت روابط (30) تا (33) نوشت:

$$(M\lambda^2 + G\lambda + K)u_0 = 0 \quad (30)$$

$$(M\lambda^2 + G\lambda + K)u_1 = -(2M\lambda + G)u_0 \quad (31)$$

$$v_0^H (M\lambda^2 + G\lambda + K) = 0 \quad (32)$$

$$v_1^H (M\lambda^2 + G\lambda + K) = -v_0^H (2M\lambda + G) \quad (33)$$

که در آن  $u_0$  و  $v_0$  به ترتیب مقادیر ویژه چپ و راست هستند. اگر  $u_0$  و  $v_0$  به گونه ای انتخاب شوند که معادلات (30) و (32) برآورده شوند می توان  $u_1$  و  $v_1$  را با حل معادلات (31) و (33) به دست آورد.

#### 5- معادله انشعاب جهت بررسی پدیده تشدید

روش مقیاس های چندگانه، برای بدست آوردن معادله انشعاب معادله (28) مورد استفاده قرار گرفته است. رفتارهای خطی و غیرخطی را می توان با استفاده از معادله انشعاب مورد تحلیل قرار داد. از آنجایی که در اینجا پدیده تشدید مورد بررسی قرار می گیرد می توان جواب متناوب ناشی از آن را مطالعه کرد. تحلیل در اطراف سرعت بحرانی انجام شده است. منظور از سرعت بحرانی در اینجا سرعت دورانی است که حد پایداری سیستم است. بعد و یا قبل از این سرعت بین پره ها و روتور تشدید اتفاق می افتد. انحراف از سرعت بحرانی را می توان با پارامتر کوچک  $\sigma$  که برابر  $\sigma = \Omega^* - \Omega_0$  است نشان داد. فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

1- جملات غیرخطی نسبت به جملات خطی کوچک هستند. چنانچه تحلیل در اطراف مرز پایداری صورت بگیرد این فرض می تواند ارضا شود. با استفاده از این تحلیل می توان نوع انشعاب هوپ را در اطراف مرز پایداری مشخص نمود.

2- تمامی ضرایب میرایی کوچک هستند. ضرایب میرایی برای تحلیل پایداری بسیار مهم هستند. آن ها می توانند به شدت پایداری را تحت تاثیر قرار دهند. با این وجود، در اغلب موارد آن ها نسبت به میرایی بحرانی سیستم کوچک هستند.

براساس این فرضیات، پارامتر کنترل سرعت به صورت رابطه (34) مقیاس می شود:

$$\sigma = \varepsilon^2 \hat{\sigma} \quad (34)$$

بسط سری زیر برای  $g$  رابطه (35) در نظر گرفته می شود:

$$g = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k q_k \quad (35)$$

این متغیرهای مستقل تابعی از چند مقیاس زمانی هستند که به صورت رابطه (36) به  $\tau$  مرتبط می شوند:

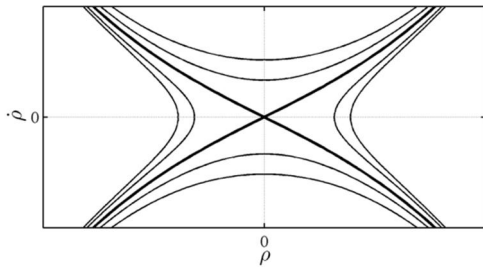
$$T_0 = \tau \quad T_1 = \varepsilon \tau \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau \dots \quad (36)$$

با اعمال قاعده زنجیره ای، مشتقات زمانی به صورت رابطه (37) در خواهند آمد:

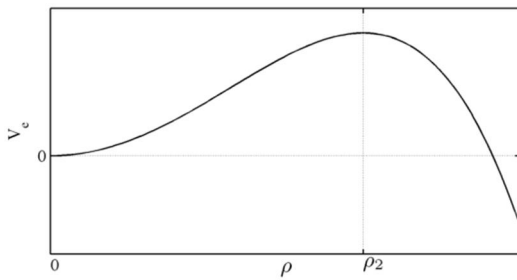
$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_2^2 + \dots \quad (37)$$

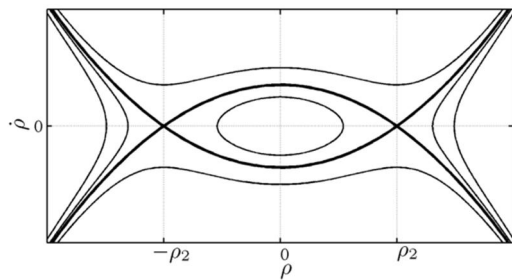
اگر معادلات (35) و (37) در معادله (29) قرار داده شود و ضرایب توان های مشابه  $\varepsilon$  برابر قرار داده شوند، مجموعه معادلات (38) تا (40) حاصل می شوند:



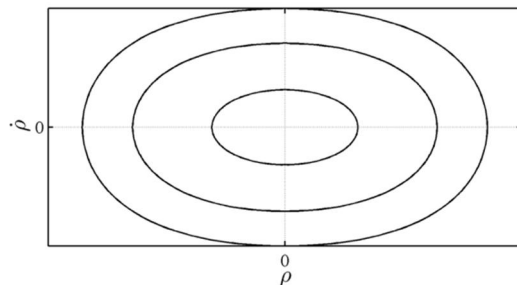
شکل 7 منحنی فاز برای  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$



شکل 8 تابع پتانسیل موثر در برابر  $\rho$  برای  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$



شکل 9 منحنی فاز برای  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$



شکل 10 منحنی فاز برای  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$

مجموعه مسیره‌های فاز برای این حالت در شکل 9 رسم شده است. مبدأ یک مرکز است در حالی که نقطه تعادل  $\rho_2$  یک نقطه زینی است و در اطراف آن حرکت نوسانی تشکیل نمی‌شود. خط جداکننده که از نقطه تعادل غیرصفر عبور می‌کند با خط پررنگ مشخص شده است. این مسیر یک مسیر هتروکلینیک است. همان‌طور که انتظار می‌رود مبدأ یک مرکز است و  $\rho_2$  یک نقطه تعادل زینی است.

**حالت چهارم  $\sigma a > 0$  و  $\tilde{\alpha} > 0$ :**

نقطه کمینه تابع پتانسیل در مبدأ قرار دارد. این نقطه تعادل ناپایدار تنها اکسترمم تابع پتانسیل خواهد بود. مجموعه مسیره‌های فاز در شکل 10 مختلف رسم شده است. در این حالت مبدأ یک مرکز است.

**6- شبیه‌سازی عددی**

معادله انشعاب با فرض صفر بودن میرایی‌ها به‌دست آمد. بنابراین، این معادله

بسته به علامت ضرایب  $\tilde{\alpha}$  و  $a$  رفتار سیستم متفاوت خواهد بود.  $\tilde{\alpha}$  وابسته به ضریب غیرخطی است و  $a$  با سرعت دورانی تغییر می‌کند. بنابراین مقدار آن در مرزهای پایداری بالا و پایین متفاوت است. در این قسمت به بررسی شرایط مختلف پرداخته خواهد شد.

**حالت اول  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} > 0$ :**

پتانسیل موثر  $V_e$  در شکل 5 رسم شده است. نقاط اکسترمم این تابع در  $\rho_1 = 0$  و  $\rho_2 = \sqrt{\sigma a / \tilde{\alpha}}$  قرار دارند. در  $\rho_1 = 0$  تابع پتانسیل بیشینه است و از این رو ناپایدار است. در  $\rho_2$  این تابع کمینه است و این نقطه تعادل پایدار است. از آنجایی که جواب غیرصفر پایدار است انشعاب هوپ فوق بحرانی است.

مجموعه مسیره‌های فاز در شکل 6، به ازای  $C$  های مختلف رسم شده است. در مبدأ یک نقطه زینی وجود دارد در حالی که  $\rho_2$  یک مرکز محسوب می‌شود و در اطراف آن حرکت نوسانی تشکیل می‌شود. مسیر فاز در صورتی که  $C=0$  باشد از مبدأ عبور می‌کند. معادله این مسیر به صورت رابطه (51) است:

$$\dot{\rho}^2 + \sigma a \rho^2 + \tilde{\alpha} \rho^4 / 2 = 0 \quad (51)$$

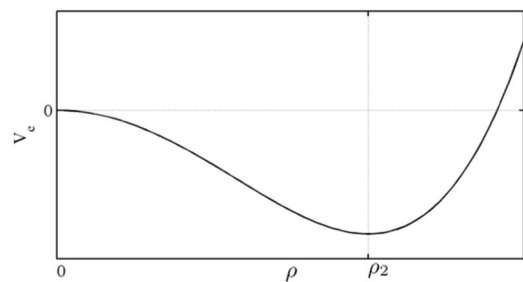
این مسیر هموکلینیک در شکل با خط پررنگ مشخص شده است.

**حالت دوم  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$ :**

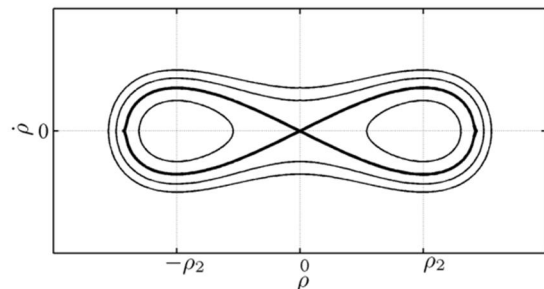
نقطه بیشینه تابع پتانسیل در مبدأ قرار دارد. این نقطه تعادل ناپایدار تنها اکسترمم تابع پتانسیل خواهد بود. مجموعه مسیره‌های فاز در شکل 7 رسم شده است. خط جداکننده که به‌ازای  $C=0$  به‌دست آمده است با خط پررنگ مشخص شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود مبدأ یک نقطه زینی است.

**حالت سوم  $\sigma a > 0$  و  $\tilde{\alpha} < 0$ :**

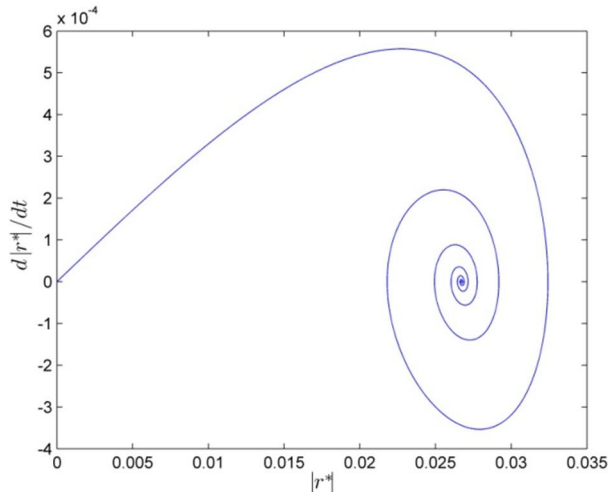
پتانسیل موثر  $V_e$  در شکل 8، رسم شده است. نقاط اکسترمم این تابع در  $\rho_1 = 0$  و  $\rho_2 = \sqrt{\sigma a / \tilde{\alpha}}$  قرار دارند. در  $\rho_1 = 0$  تابع پتانسیل کمینه است و از این رو پایدار است. در  $\rho_2$  این تابع بیشینه است و این نقطه تعادل ناپایدار است. از آنجایی که جواب غیرصفر ناپایدار است، انشعاب هوپ زیر بحرانی خواهد بود.



شکل 5 تابع پتانسیل موثر در برابر  $\rho$  برای  $\sigma a < 0$  و  $\tilde{\alpha} > 0$



شکل 6 منحنی فاز برای  $\sigma a > 0$  و  $\tilde{\alpha} > 0$



شکل 12 نمودار فاز یک روتور غیرخطی میرا  $m^* = 0.3$ ,  $\mu_b^* = 0.02$ ,  $\mu^* = 0.02$ ,  $\alpha^* = 50$ ,  $\alpha_R^* = 50$ ,  $R^* = 0.25$ ,  $\omega_0^2 = 0.1$ ,  $\Omega^* = 5.1$ ,  $v = 0.2$ ,  $l^* = 0.1$ ,  $f = 0.2$

در حالتی که پایدار است مرکز و در حالتی که ناپایدار است زینی است. نتیجه مهمی که نه تنها برای مسئله بررسی شده در این مقاله بلکه برای هر سیستم هامیلتونی که با تشدید مواجه شده است صادق خواهد بود این است که نقاط تعادل معادله انشعاب یا پایدارند که در این صورت مرکز محسوب می‌شوند و یا ناپایدارند که در این صورت زینی هستند.

نقطه تعادل غیرصفر در معادله انشعاب متناظر با دامنه ارتعاشات بعد از وقوع تشدید است. دامنه ارتعاشات بعد از تشدید تابعی از سرعت دورانی و ضریب جمله غیرخطی سختی یا تاقان‌ها است. به طوری که اگر ضریب جمله غیرخطی افزایش یابد دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد و هر چه سرعت دورانی از مرز پایداری فاصله بگیرد این مقدار افزایش خواهد یافت.

رفتار سیستم در مواجه با انشعاب هوپ هامیلتونی وابسته به نوع ضریب غیرخطی یا تاقان‌ها و مرز پایداری سیستم است. به طوری که چنانچه یک روتور سخت شونده از مرز پایداری پایین عبور کند دچار انشعاب هوپ فوق بحرانی خواهد شد و یا اینکه اگر یک روتور نرم شونده با افزایش سرعت و عبور از مرز پایداری پایین وارد ناحیه ناپایدار شود، انشعاب هوپ زیر بحرانی خواهد بود. به بیان دیگر، در صورت وقوع ناپایداری یا پدیده جهش اتفاق می‌افتد و یا اینکه دامنه ارتعاشات به مقدار محدودی ختم می‌شود. شایان ذکر است، که رفتار سیستم غیرخطی که با پدیده تشدید بین دیسک چرخان و پره مواجه شده است، از دو حالت مذکور خارج نیست.

وجود میرایی در سیستم نیز باعث می‌شود تا منحنی‌های فاز به صورت مارپیچ به نقطه مرکز متصل شوند. معنی فیزیکی این مطلب آن است که در صورت وجود میرایی در سیستم، ارتعاشات سیستم در نهایت به یک سیکل حدی ختم می‌شود.

به دلیل اینکه پدیده انشعاب هوپ هامیلتونی در تجهیزات دوار بسیار دیده می‌شود، نتایج و روش‌های به کار رفته در این تحقیق را می‌توان در دیگر کاربردها استفاده کرد که این موضوع برای کارهای آتی توصیه می‌شود.

## 8- ضمائم

### ضمیمه الف:

معادله حرکت بی‌بعد شده به صورت روابط (الف-1) تا (الف-3) به دست می‌آیند:

به تنهایی قادر به نشان دادن رفتار یک روتور میرای غیرخطی نیست. با استفاده از یک تحلیل عددی می‌توان تاثیرات ترکیبی را بررسی کرد. علاوه بر این، تحلیل عددی می‌تواند تحلیل انشعاب را صحت‌گذاری کند.

در ابتدا شبیه‌سازی عددی برای یک روتور غیرمیرا انجام می‌شود و نتیجه با تحلیل انشعاب مقایسه می‌شود. پارامترهایی که برای شبیه‌سازی انتخاب می‌شوند به صورت زیر هستند:

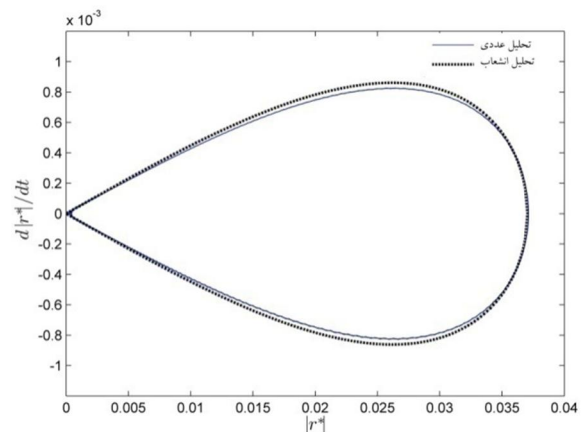
$$\alpha^* = 50 \quad \Omega^* = 5.1, \quad \mu^* = 0, \quad \mu_b^* = 0, \quad \omega_0^2 = 0.1, \quad m^* = 0.3$$

بر اساس این پارامترها، سرعت بحرانی پایین برابر 4/9353 است. یا تاقان‌ها سخت شونده هستند. این شرایط منطبق بر حالت اول است. در مبدا سیستم ناپایدار است و با کوچکترین اغتشاش، مسیر در راستای اتصال هموکلینیک شروع به حرکت می‌کند. به دلیل صفر بودن تمام ضرایب میرایی، هیچ استهلاک انرژی وجود ندارد و سیستم کاملاً هامیلتونی است. حل عددی معادلات (24) تا (26) در شکل 11 رسم شده است. مسیر هموکلینیک که از معادله (51) به دست آمده است نیز در این نمودار ترسیم شده است. این نمودار با نموداری که در شکل 6 نشان داده شده است قابل مقایسه است. همان‌طور که دیده می‌شود، مسیر حرکت بسته است که این مسئله به دلیل عدم اتلاف و پایا بودن انرژی است.

شبیه‌سازی عددی بار دیگر انجام می‌شود با این تفاوت که این بار میرایی‌ها صفر نیستند. ضرایب میرایی به صورت  $\mu^* = 0.02$ ,  $\mu_b^* = 0.02$  در نظر گرفته می‌شوند. جواب عددی معادلات در شکل 12 نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، تحت اثر میرایی‌ها مسیر تبدیل به یک مارپیچ جمع شونده می‌شود که نقطه زینی را به مرکز پایدار متصل می‌کند.

## 7- نتیجه گیری

با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه تحلیل غیرخطی بر روی پدیده تشدید که بین پره و روتور رخ می‌دهد، صورت گرفت. از آنجایی که این تشدید یک ناپایداری دینامیکی در سیستم هامیلتونی است، انشعاب ایجاد شده یک انشعاب هوپ هامیلتونی است. معادله دیفرانسیلی که به این روش به دست می‌آید از درجه دو است. بر اساس این معادله چهار حالت مختلف بررسی شد. در دو حالت از این چهار حالت نقطه تعادل صفر پایدار و در دو حالت دیگر ناپایدار است. زمانی که نقطه تعادل صفر پایدار باشد، این نقطه مرکز است. اما اگر این نقطه ناپایدار باشد زینی خواهد بود. از سوی دیگر، نقطه تعادل غیرصفر در یک حالت پایدار و در یک حالت ناپایدار خواهد بود و در دو حالت دیگر وجود نخواهد داشت.



شکل 11 نمودار فاز یک روتور غیرخطی غیر میرا  $m^* = 0.3$ ,  $\mu_b^* = 0$ ,  $\mu^* = 0$ ,  $\alpha^* = 50$ ,  $\alpha_R^* = 50$ ,  $R^* = 0.25$ ,  $\omega_0^2 = 0.1$ ,  $\Omega^* = 5.1$ ,  $v = 0.2$ ,  $l^* = 0.1$ ,  $f = 0.2$

$$G = \begin{bmatrix} 2j\Omega^* & 0 & 2\Omega^* m^* \cos \nu \\ 0 & j(2-J^*)\Omega^* & 0 \\ 2\Omega^* \chi_1 \cos \nu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} j\Omega^* \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & j\Omega^* \mu_R^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & \mu_R^* & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_b^* \end{bmatrix}$$

$$g = \{r^*, \Phi, u_1\}^T$$

$$f(g) = [-\alpha^* (|A_1^*|^2 A_1^* + |A_2^*|^2 A_2^*), -\alpha_R^* (|A_2^*|^2 A_2^* - |A_1^*|^2 A_1^*), 0]^T$$

9- فهرست علائم

ماتریس میرایی	$C$
ضریب میرایی یاتاقان	$c_B$
برابر $L^2 c_B$ است	$c_R$
تابع ریلی برای یاتاقانها	$D_B$
تابع ریلی برای پره $i$ ام	$D_i$
بردارهای واحد در راستاهای $x, y, z$	$e_x, e_y, e_z$
بردارهای واحد در راستاهای $\xi, \eta, \zeta$	$e_\xi, e_\eta, e_\zeta$
مدول الاستیسیته شفت	$E_s$
مدول الاستیسیته پره	$E_b$
آرایه‌ای از مختصات تعمیم یافته	$G$
ماتریس ژیروسکوپی	$G$
ممان دوم سطح مقطع پره	$I_b$
ممان اینرسی جانبی دیسک	$I_d$
ممان اینرسی جانبی کل روتور	$I_t$
ممان اینرسی جانبی کل روتور به صورت بی بعد شده	$I^*$
ممان اینرسی قطبی دیسک	$J_d$
ممان اینرسی قطبی کل روتور	$J_t$
ممان اینرسی قطبی کل روتور به صورت بی بعد شده	$J^*$
ماتریس سختی	$K$
سختی یاتاقان	$k_B$
طول پره	$l_b$
نصف طول شفت	$L$
ماتریس جرم	$M$
جرم دیسک	$m_d$
جرم پره	$m_b$
در معادله (الف-1) استفاده شده است	$m$
متناسب با نسبت جرم کل پره‌ها به جرم کل روتور است	$m^*$
تعداد پره‌ها	$n$
ماتریس غیرگردشی	$N$
موقعیت یک نقطه در پره $i$ ام	$\bar{p}_i$
مختصات مودال پره	$q_i$
موقعیت دیسک در صفحه مختلط	$r$
شعاع دیسک	$R$
جابه‌جایی‌های شفت در یاتاقانهای $A$ و $B$	$\Delta_2, \Delta_1$
انرژی سینماتیکی دیسک	$T_d$
انرژی سینماتیکی پره‌ام	$T_i$

$$m_i \ddot{r} + (2jm_t \Omega + 2c_B) \dot{r} + (2k_B - m_t \Omega^2 + 2j\Omega c_B) r + ml_b \sum_{i=1}^n (j\ddot{q}_i - 2\Omega \dot{q}_i - \Omega^2 q_i) \exp(j\psi_i) \cos(\nu) \quad (1-الف)$$

$$= \alpha (|A_1|^2 A_1 + |A_2|^2 A_2) \\ I_t \ddot{\Phi} + [j(2I_t - J_t) \Omega + 2c_R] \dot{\Phi} + [\Omega^2 (J_t - I_t) + 2\kappa + 2j\Omega c_R] \Phi - jI \sum_i (\ddot{q}_i + \Omega^2 q_i) \exp(j\psi_i) \sin(\nu) = \quad (2-الف)$$

$$L\alpha (|A_2|^2 A_2 - |A_1|^2 A_1) \\ 2l_b (m_b \ddot{q}_i + \mu_b \dot{q}_i + m_b \omega_b^2 q_i) - jm (\ddot{r} + 2\Omega \dot{r} - \Omega^2 r) \exp(-j\psi_i) \cos \nu + jm (\ddot{r} - 2\Omega \dot{r} - \Omega^2 r) \exp(j\psi_i) \cos \nu \quad (3-الف) \\ + jll_b (\ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi) \exp(-j\psi_i) \sin \nu - jll_b (\ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi) \exp(j\psi_i) \sin \nu = 0$$

که در آن پارامترها به صورت زیر هستند:

$$R^* = R / l_b \\ \omega_b^2 = \Omega^2 (\delta + \sin^2 \nu) + \omega_0^2 \\ m = m_b \chi_1 \\ \delta = \frac{1}{2} \int_0^1 (2R^* + 1 + \xi^*) (1 - \xi^*) \left( \frac{d\phi}{d\xi^*} \right)^2 d\xi^* - 1 \\ \mu_b = \frac{\gamma_b I_b}{l_b^3} \int_0^1 \left( \frac{d^2 \phi}{d\xi^{*2}} \right)^2 d\xi^* \\ k_b = \frac{EI_b}{l_b^3} \int_0^1 \left( \frac{d^2 \phi}{d\xi^{*2}} \right)^2 d\xi^* \\ I = m_b l_b^2 \chi_2 \\ J_t = J_d + n \rho l_b^3 \int_0^1 (R^* + \xi^*)^2 d\xi^* \\ c_R = L^2 c_B \\ I_t = I_d + \frac{n \rho l_b^3}{2} \int_0^1 (R^* + \xi^*)^2 d\xi^* \\ \kappa = L^2 k_B \\ \chi_1 = \int_0^1 \phi d\xi^* \\ \chi_2 = \int_0^1 (R^* + \xi^*) \phi (\xi^*) d\xi^* \\ \omega_0^2 = k_b / m_b$$

ضمیمه ب:

ماتریس‌های  $K$  و  $M$  و  $C$  و  $G$  و  $N$  و همین طور  $g$  و  $f(g)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & jm^* \cos \nu \\ 0 & 1 & jI^* \sin \nu \\ -j\chi_1 \cos \nu & j\chi_2 \sin \nu & 2 \end{bmatrix} \\ K = \begin{bmatrix} 1 - \Omega^{*2} & 0 & -jm^* \Omega^{*2} \cos \nu \\ 0 & \Omega^{*2} (1 - J^*) + \kappa^* & -jI^* \Omega^{*2} \sin \nu \\ j\Omega^{*2} \chi_1 \cos \nu & j\Omega^{*2} \chi_2 \sin \nu & 2\omega_b^{*2} \end{bmatrix}$$



10- مراجع

[1] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*, First ed., New York:Springer, 2005.

[2] A. A. Gubran, J. K. Sinha, Shaft instantaneous angular speed for blade vibration in rotating machine, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 47-59, 2014.

[3] S. K. Sinha, Rotordynamic analysis of asymmetric turbfan rotor due to fan blade-loss event with contact-impact rub loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 9, pp. 2253-2283, 2013 .

[4] S. H. Crandall, J. Dugundji, Resonantwhirling of aircraft propeller-engine systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 4, pp. 929-935, 1981 .

[5] Ö. Turhan, G. Bulut, Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 1-2, pp. 292-318, 2006.

[6] B. O. Al-Bedoor, Dynamic model of coupled shaft torsional and blade bending deformations in rotors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 169, No. 1-2, pp. 177-190, 1999.

[7] B. O. Al-Bedoor, A. A. Al-Qaisia, Stability analysis of rotating blade bending vibration due to torsional excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 282, No. 3-5, pp. 1065-1083, 2005.

[8] L. Wang, D. Q. Cao, W. Huang, Nonlinear coupled dynamics of flexible blade-rotor-bearing systems, *Tribology International*, Vol. 43, No. 4, pp. 759-778, 2010.

[9] C. H. Yang, S. C. Huang, The influence of disk's flexibility on coupling vibration of shaft-disk-blades systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 1-2, pp. 1-17, 2007.

[10] G. Genta, On the stability of rotating blade arrays, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 4-5, pp. 805-836, 2004.

[11] G. Genta, C. Feng, A. Tonoli, Dynamics behavior of rotating bladed discs: A finite element formulation for the study of second and higher order harmonics, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 25, pp. 5289-5306, 2010.

[12] L. Sanches, G. Michon, A. Berlioz, D. Alazard, Helicopter ground resonance phenomenon with blade stiffness dissimilarities: experimental and theoretical developments, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, No. 5, pp. 051028, 2013.

[13] N. Anegawa, H. Fujiwara, O. Matsushita, Vibration diagnosis featuring blade-shaft coupling effect of turbine rotor models, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 133, No. 2, pp. 022501-022501, 2010.

[14] I. F. Santos, C. M. Saracho, J. T. Smith, J. Eiland, Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor-blade parametric coupled vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 271, No. 3-5, pp. 883-904, 2004.

[15] H. Diken, K. Alnefaie, Effect of unbalanced rotor whirl on blade vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 14, pp. 3498-3506, 2011.

[16] A. Najafi, M.-R. Ghazavi, A.-A. Jafari, Application of Krein's theorem and bifurcation theory for stability analysis of a bladed rotor, *Meccanica*, pp. 1-20, 2014/04/05, 2014. English

[17] M.-R. Ghazavi, A. Najafi, A.-A. Jafari, Bifurcation and nonlinear analysis of nonconservative interaction between rotor and blade row, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 65, No. 0, pp. 29-45, 2013.

[18] M. Gürgöze, S. Zeren, The influences of both offset and mass moment of inertia of a tip mass on the dynamics of a centrifugally stiffened viscoelastic beam, *Meccanica*, Vol. 46, No. 6, pp. 1401-1412, 2011.(English)

[19] B. J. Lazan, *Dampings of materials and members in structural mechanics*, New York: Pergamon Press, 1968.

[20] W. T. Thomson, M. D. Dahleh, *Theory of vibration with applications*, 5 ed.: Prentice-Hall, 1997.

[21] S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*, 1974.

$U_B$	انرژی پتانسیل ذخیره شده در یاتاقان‌ها
$U_i$	انرژی پتانسیل ذخیره شده در پره $i$ ام
$u_0, u_1$	حلقه جردن سمت راست
$u_k$	مختصات قطر گره‌ای
$v_0, v_1$	حلقه جردن سمت چپ
$\bar{v}_d$	بردار سرعت مرکز دیسک
$v_i$	جاب‌جایی ناشی از تغییر شکل پره
$\bar{v}_i$	بردار سرعت ذره‌ای در پره
XVZ	چهار چوب لخت
XyZ	چهارچوب دوار متصل به دیسک

علامه یونانی

$\alpha$	ضریب دافینگ یاتاقان‌ها
$\alpha^*$	ضریب دافینگ به صورت بی بعد شده
$\alpha_R^*$	در معادله (21) استفاده شده است
$\beta$	ضریب دافینگ سختی پره‌ها
$\Delta_{1,2}$	جاب‌جایی شفت در یاتاقان‌های سمت راست و چپ
$\Delta_{1,2}^*$	در معادلات (20) و (21) استفاده شده است
$\gamma_b$	ویسکوزیته پره
$\gamma_s$	ویسکوزیته شفت
$\kappa$	در معادله (الف-2) استفاده شده است
$\kappa^*$	در معادله (21) استفاده شده است
$\Phi$	جهت‌گیری دیسک در صفحه مختلط
$\Phi_y, \Phi_x$	جاب‌جایی‌های زاویه‌ای دیسک
$\delta$	ضریب استدولا-سوتول
$\lambda$	مقدار ویژه
$\kappa$	است $L^2 K_d$ برابر
$\mu^*$	ضریب میرایی روتور در حالت بی بعد شده
$\mu_R^*$	در معادله (21) به کار رفته است
$\nu$	زاویه استگر
$\rho_b$	جرم بر واحد طول پره
$\bar{\omega}$	بردار سرعت زاویه‌ای
$\omega_b$	فرکانس پره
$\omega_z, \omega_y, \omega_x$	سرعت‌های زاویه حول محورهای $x, y, z$
$\Omega$	سرعت دورانی
$\Omega^*$	سرعت دورانی بی‌بعد شده
$\psi_i$	موقعیت زاویه‌ای پره $i$ ام در دیسک
$\mathcal{G}$	در معادله (44) تعریف شده است

بالانویس‌ها

$()'$	$\Omega^*$ مشتق نسبت به
$()^*$	پارامترهای بی‌بعد شده
$()^H$	هرماتین