مجلهٔ فنی و مهندسی مدرس - مکانیک
شمارهٔ ۳۷، پاییز ۱۳۸۸

حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانهٔ کامپوزیتی

محمدحسن کیهانی[۱*]، محمود شریعتی[۲]، محمود نوروزی[۳]

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
۳- دانشجوی دکتری مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

***شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶**
h_kayhani@shahroodut.ac.ir

(دریافت مقاله: مرداد ۱۳۸۶، پذیرش مقاله: فروردین ۱۳۸۷)

چکیده- در این مقاله یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی در استوانهٔ ساخته شده از مواد مرکب در شرایط پایدار ارائه شده است. حل دقیق ارائه شده، برای بررسی انتقال حرارت در مخازن و لوله‌های کامپوزیتی بسیار مفید است. در این تحقیق تانسور ضرایب هدایت حرارتی برای مواد مرکب معرفی شده و نحوه تعیین ضرایب از روی خواص الیاف و ماده زمینه بیان شده است. در ادامه، معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای مواد کامپوزیتی - در شرایطی که الیاف در هر لمینا به‌دور استوانه پیچیده شده - به‌دست آمده و به روش جداسازی متغیرها حل دقیقی برای این معادله در شرایط مرزی معینی ارائه شده است.

کلید واژگان: حل تحلیلی، مواد مرکب، انتقال حرارت هدایتی، استوانه.

۱- مقدمه

امروز استفاده از مواد مرکب برای ساخت تجهیزات، ماشین‌آلات و سازه‌ها توسعه چشمگیری پیدا کرده است. استفاده از این مواد به سبک‌سازی تجهیزات و سازه‌ها (با حفظ مقاومت مکانیکی) و کاهش هزینه‌ها منجر می‌شود. استفاده از این مواد در بعضی صنایع (مانند صنایع شیمیایی، پره‌های توربینهای گازی، صنایع نظامی، هوا فضا و مانند آن) بدون رقابت از طرف مواد ایزوتروپ است. بررسیهای علمی بیشتر بر رفتار این مواد تحت بارگذاریهای مکانیکی و دمایی متمرکز بوده و کمتر به بررسی سایر پدیده‌ها نظیر انتقال حرارت در این مواد پرداخته شده است.

تاکنون فعالیتهایی در زمینه تحلیل انتقال حرارت در مواد غیر ایزوتروپ انجام شده است. تحلیلهای اولیه عمدتاً بر انتقال حرارت یک‌بُعدی در کریستالهای غیر ایزوتروپ متمرکز بوده است [۱، ۲].

به‌تدریج و با توسعه دانش مواد مرکب، انتقال حرارت در این مواد نیز مورد توجه قرار گرفت. مقاله مولهلند[1] [۳] در مورد پدیده‌های پخش غیردائم در استوانه اورتوتروپیک

1. Mulholland

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

یکی از اولین فعالیتها در این زمینه است. امروز نیز فعالیتهای مستمری در راستای ارائه فرمولبندی‌های جدید و بررسی انتقال حرارت در مواد مرکب صورت می‌گیرد. در این زمینه می‌توان به مقالات گولوچان[1] [٤] و شی-کیانگ[2] [٥] اشاره کرد. گیرینگارد[3] [٦] در مقاله خود تئوری انتقال حرارت و تعیین خواص هدایتی در مواد مرکب را بررسی کرده است.

بررسی انتقال حرارت در فرایند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه می‌توان به پژوهش حسن[4] [٧] و همکاران در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره کرد. در این پژوهش شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لمینیتهای کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهام[5] [٨] به تحلیل انتقال حرارت کاربردی (کاربرد در فرایند تولید) به روش المان محدود در مواد غیرایزوتروپ پرداخته است.

در زمینه ارائه تحلیل‌های دقیق (غیرعددی) حرارتی برای مواد مرکب نیز تلاشهایی انجام شده است. به‌عنوان نمونه سان[6] [٩] حل تحلیلی انتقال حرارت یک‌بُعدی غیردائم را در بلوک کامپوزیتی ارائه کرده است. اوسلوکا[7] [١٠] نیز با استفاده از توابع گرین و فرمولبندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسطهای کامپوزیتی به‌دست آورده است. لو[8] [١١، ١٢] حلهای دقیقی را برای انتقال حرارت غیردائم در استوانه کامپوزیتی در جهات شعاع و محور استوانه و در شرایط مرزی و اولیه مختلف ارائه کرده است.

در مقاله حاضر به انتقال حرارت پایدار دوبُعدی در استوانه کامپوزیتی پرداخته و حل تحلیلی را برای توزیع دما در شرایطی که استوانه از داخل در دمای ثابت و از بیرون تحت اثر همزمان تشعشع خورشید و جابه‌جایی طبیعی قرار دارد، به‌دست می‌آوریم. در این پژوهش برای حل معادله انتقال حرارت از روش جداسازی متغیرها استفاده شده و ضرایب فوریه توزیع دما در هر لایه از حل دستگاه معادلات حاصل از شرایط مرزی و معادلات پیوستگی دما و پیوستگی شار بین لایه‌ها به‌دست می‌آیند. نتایج این تحلیل به‌طور مستقیم در لوله‌ها و مخازن کامپوزیتی قابل به‌کارگیری است. علاوه بر دیدگاه حرارتی، نتایج حاصل از حل دقیق ارائه شده در تحلیل تنشها و کرنشهای حرارتی نیز کاربرد دارند. همچنین در این تحقیق، تئوری انتقال حرارت هدایتی در کامپوزیتها به‌طور تفصیلی بررسی شده و نحوه تعیین ضرایب انتقال حرارت از روی خواص ماده زمینه و الیاف تشریح شده است. خاطر نشان می‌شود که پاسخهای تحلیلی به چند دلیل ارزش فراوانی دارند:

- پاسخهای حاصل از این تحلیلها کاملاً صحیح و خدشه ناپذیرند.
- به‌عنوان معیاری برای سنجش دقت روشهای عددی و تقریبی به‌کار می‌روند (البته در شرایط تعریف شده مشخص).
- علاوه بر دقت کمی نتایج حاصل، از لحاظ کیفی و ایجاد درک روند و روال نتایج حایز اهمیت هستند.

۲- هدایت حرارتی در مواد مرکب

به‌طور کلی رابطه فوریه برای انتقال حرارت هدایتی در مواد اورتوتروپ به‌صورت زیر است [١٣]:

1. Golovchan
2. Shi.Qiang
3. Greengard
4. Hassan
5. Newnham
6. Sun
7. Oseloka
8. Lu

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

q شار حرارتی، k_{ij} ضرایب انتقال حرارت هدایتی و T دما است.

مطابق قاعده رفت و برگشتی[1] در ترمودینامیک، تانسور ضرایب هدایت باید متقارن باشد [۱۳]. یعنی برای تمامی مواد موجود در طبیعت بایستی:

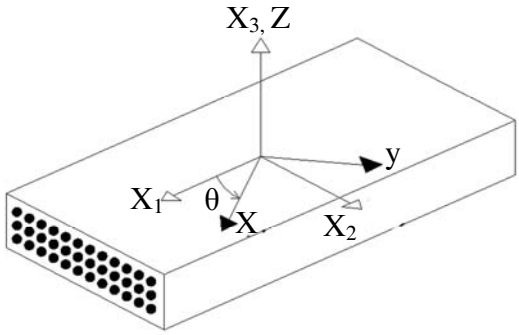
$$k_{ij} = k_{ji} \qquad (2)$$

همچنین بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، مقادیر روی قطر اصلی تانسور ضرایب هدایت مثبت هستند و بین درایه‌ها بایستی رابطه زیر برقرار باشد [۱۳]:

$$k_{ii}k_{jj} > k_{ij}^{2} \qquad for: i \neq j \qquad (3)$$

به‌طور کلی در مواد مرکب، دو دستگاه مختصات اصلی[2] ($x_1x_2x_3$) و فرعی[3] (xyz) تعریف می‌شوند [۱۴]. مطابق شکل ۱ جهت دستگاه مختصات اصلی وابسته به‌سمت قرارگیری الیاف است به‌نحوی‌که محور x_1 در راستای الیاف، محور x_2 در صفحه لایه کامپوزیتی[4] و محور x_3 عمود بر لایه قرار دارد.

در ساخت مواد مرکب با چیدن لایه‌های مختلف بر روی یکدیگر، لمینیت[5] کامپوزیتی ایجاد می‌شود. از آنجاکه معمولاً راستای الیاف در لایه‌ها متفاوت است، لذا به تعریف یک دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی) نیاز است که بتوان در جهات ثابت کمیتهای فیزیکی را بررسی کرد. بنابراین در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه θ انحراف وجود دارد و محور x_3 دستگاه مختصات اصلی با محور z دستگاه مختصات فرعی هم‌جهت است.



شکل ۱ دستگاه‌های مختصات اصلی و فرعی

در دستگاه مختصات اصلی رابطه فوریه برای ماده مرکب به‌صورت زیر است [۷]:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_{on} = -\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix}_{on} \qquad (4)$$

مطابق رابطه (٤) در هر لایه، خواص در جهت الیاف (x_1) با جهات عمود بر الیاف (x_2 و x_3) متفاوت است اما انتقال حرارت در صفحه عمود بر الیاف در کلیه جهات یکسان است.

از آنجاکه با دوران به اندازه $-\theta$ می‌توان از محور فرعی به محور اصلی رسید، بنابراین رابطه (٤) بر حسب محور فرعی به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$[T(-\theta)]\{q\}_{off} = -[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \qquad (5)$$

1. Reciprocity
2. On Axis
3. Off Axis
4. Lamina
5. Laminate

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

در رابطه (۵)، $[T(\theta)]$ ماتریس دوران بردار بوده و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$[T(\theta)]=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & ۰ \\ sin\theta & cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad (۶)$$

از رابطه (۵)، بردار شار در جهات فرعی به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\{q\}_{off} = -[T(-\theta)]^{-۱}[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad (۷)$$

از آنجاکه ماتریس دوران، متعامد است، بنابراین:

$$[T(\theta)]^{-۱} = [T(-\theta)] \quad (۸)$$

با اعمال رابطه (۸) در رابطه (۷)، رابطه بردار شار حرارتی در جهات فرعی به شکل زیر خواهد بود:

$$\{q\}_{off} = -[T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad (۹)$$

مطابق قانون فوریه، انتقال حرارت در جهات فرعی به شکل زیر است:

$$\{q\}_{off} = -[k]_{off}\nabla T_{off} \quad (۱۰)$$

بنابراین با مقایسه روابط (۹) و (۱۰)، تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی بر حسب جهات اصلی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$[k]_{off} = [T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)] \quad (۱۱)$$

چنانچه تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با $[k]$ و در جهات فرعی با $[\bar{k}]$ نشان داده و همچنین $\cos\theta$ با m_l و $sin\theta$ با n_l نامگذاری شود، در این‌صورت از روابط (٤)، (٦) و (۱۱) درایه‌های تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی به‌دست می‌آیند [۷]:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{۱۱} &= m_l^{۲}k_{۱۱} + n_l^{۲}k_{۲۲} \\ \bar{k}_{۲۲} &= n_l^{۲}k_{۱۱} + m_l^{۲}k_{۲۲} \\ \bar{k}_{۳۳} &= k_{۲۲} \\ \bar{k}_{۱۲} &= \bar{k}_{۲۱} = m_l n_l (k_{۱۱} - k_{۲۲}) \\ \bar{k}_{۱۳} &= \bar{k}_{۳۱} = ۰ \\ \bar{k}_{۲۳} &= \bar{k}_{۳۲} = ۰ \end{aligned} \quad (۱۲)$$

اکنون این سؤال اساسی مطرح می‌شود که چگونه می‌توان ضرایب هدایت را در دستگاه مختصات اصلی $(k_{۱۱}, k_{۲۲})$ تعیین کرد تا بر اساس آنها و نیز رابطه (۱۲) بتوان ضرایب انتقال حرارت را در دستگاه مختصات فرعی (مرجع) به‌دست آورد. به‌طور کلی دو روش برای تعیین ضرایب هدایت در دستگاه مختصات اصلی پیشنهاد می‌شود:

۱.انجام آزمایش برای تعیین ضریب هدایت حرارتی بر روی یک لمینا در جهت الیاف و جهت عمود بر الیاف؛

۲.استفاده از فرمولبندی خاصی بر اساس ضرایب هدایتی الیاف[۱]، ماده زمینه[۲] و نیز درصد حجمی الیاف [۱۵].

روش دوم، روش مناسبی با خطای کمتر از ۲٪ [۱۵] که در نبود امکانات آزمایشگاهی بسیار راه‌گشا است (به‌خصوص برای محاسبات مهندسی). در این روش ضرایب انتقال حرارت (یا سایر پارامترهای فیزیکی جهت‌دار ماده) بر اساس روابط زیر قابل محاسبه است [۱۵]:

$$k_{۱۱} = \nu_f k_f + \nu_m k_m \quad (۱-۱۳)$$

$$k_{۲۲} = k_m \frac{۱ + \zeta\eta\nu_f}{۱ - \eta\nu_f} \quad (۲-۱۳)$$

در روابط (۱۳)، k_f ضریب هدایت حرارتی الیاف، k_m ضریب هدایت حرارتی ماده زمینه، ν_f درصد

1. Fiber
2. Matrix

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

حجمی الیاف و v_m درصد حجمی ماده زمینه است. کمیتهای ζ و η نیز از روابط زیر قابل محاسبه است:

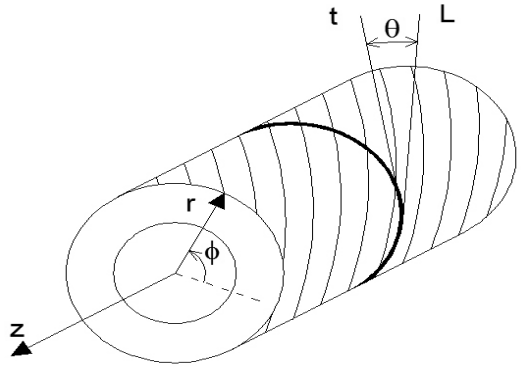
$$\eta = \frac{k_f / k_m - ۱}{k_f / k_m + \zeta} \qquad (۱-۱٤)$$

$$\zeta = ۱/(٤ - ۳v_m) \qquad (۲-۱٤)$$

به‌طور کلی روابط (۱۳) و (۱٤) برای اندازه‌گیری سایر کمیتهای فیزیکی مواد مرکب نیز قابل تعمیم است [۱۵]. به عنوان نمونه کمیت‌هایی نظیر ثابت دی‌الکتریک، ثابت نفوذپذیری مغناطیسی، ثابت هدایت الکتریکی و ضریب نفوذ جرم از طریق اعمال روابط (۱۳) و (۱٤) قابل محاسبه است.

۳- مدلسازی، معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این تحقیق انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانه کامپوزیتی مطالعه شده است. در اینجا فرض شده که الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهتهای مشخصی پیچیده شده‌اند. در شکل ۲ یک لمینا در وضعیت بیان شده نشان داده شده است. مطابق شکل، r، φ و z مؤلفه‌های دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند. اگر L خط مماس بر استوانه در جهت الیاف و t نیز خط مماس بر استوانه در جهت φ باشد، در این‌صورت زاویه الیاف (θ)، زاویه بین دو خط L و t است.



شکل ۲ جهت الیاف در لایه استوانه‌ای

به‌منظور تعیین معادله انتقال حرارت، بایستی المانی استوانه‌ای مشابه شکل ۲ در نظر گرفت. مشابه رابطه (۱)، در دستگاه مختصات استوانه‌ای رابطه فوریه در ماده اورتوتروپ به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\varphi \\ q_z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{k}_{۱۱} & \bar{k}_{۱۲} & \bar{k}_{۱۳} \\ \bar{k}_{۲۱} & \bar{k}_{۲۲} & \bar{k}_{۲۳} \\ \bar{k}_{۳۱} & \bar{k}_{۳۲} & \bar{k}_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \dfrac{۱}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

با توجه به شکل ۳ در صورتی که موازنه انرژی برای المان استوانه‌ای برقرار شود، رابطه حاصل به‌صورت زیر است:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\frac{\partial q_r dA_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\varphi dA_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial q_z dA_z}{dz} dz \qquad (۱٦)$$

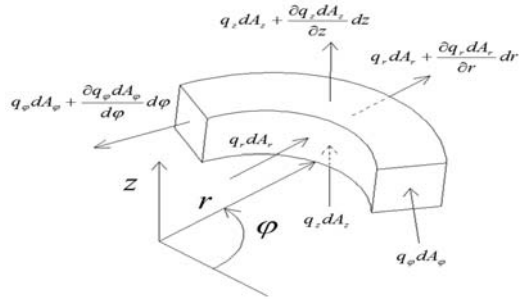
در رابطه (۱٦)، ρ چگالی، C ظرفیت گرمایی ویژه، t زمان و V حجم است. همچنین مقادیر اندازه سطوح و حجم المان عبارتند از:

$$dA_r = rd\varphi dz \qquad (۱-۱۷)$$

$$dA_\varphi = drdz \qquad (۲-۱۷)$$

$$dA_z = rd\varphi dr \qquad (۳-۱۷)$$

$$dV = rd\varphi drdz \qquad (٤-۱۷)$$



شکل ۳ شارهای حرارت در یک المان استوانه‌ای

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

با اعمال روابط (۱۷) و (۱۵) در رابطه (۱۶)، رابطه زیر برای انتقال حرارت در ماده اورتوتروپ به‌دست می‌آید [۱۳] تا [۱۶]:

$$\begin{aligned}&\bar{k}_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\bar{k}_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\\&\bar{k}_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+(\bar{k}_{12}+\bar{k}_{21})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial r}+\\&(\bar{k}_{13}+\bar{k}_{31})\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+\frac{k_{13}}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+\\&(\bar{k}_{23}+\bar{k}_{32})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial z}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}\qquad(18)$$

نکته جالب توجه در معادله (۱۸) آن است که با توجه به قانون دوم ترمودینامیک بایستی ضرایب معادله (ضرایب هدایت ماده) به‌گونه‌ای باشند که معادله فوق برای هر وضعیت دوبُعدی، بیضوی باقی بماند و در حالت دوبُعدی صورت کانونیکی معادله فوق بسیار شبیه معادله لاپلاس (شکل استاندارد معادله هدایت در مواد ایزوتروپ) بوده و بیضوی است [۱۶].

حال بایستی از روی رابطه (۱۸) معادله انتقال حرارت برای لمینیت کامپوزیتی استوانه‌ای تعیین شود. با توجه به شکل ۲ می‌توان دریافت که زاویه الیاف نسبت به محور φ تعریف شده و از آنجاکه φ مؤلفه دوم دستگاه مختصات r، φ و z است، بنابراین به بازارایی ضرایب انتقال حرارت معادله (۱۲) در این دستگاه مختصات نیاز است (زیرا در رابطه (۱۲) زاویه الیاف نسبت به مؤلفه اول دستگاه مختصات تعریف شده است). بنابراین برای لمینیت استوانه‌ای مذکور شکل بازارایی شده رابطه (۱۲) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{11}&=k_{22}\\\bar{k}_{22}&=m_l^2k_{11}+n_l^2k_{22}\\\bar{k}_{33}&=n_l^2k_{11}+m_l^2k_{22}\\\bar{k}_{12}&=\bar{k}_{21}=0\\\bar{k}_{13}&=\bar{k}_{31}=0\\\bar{k}_{23}&=\bar{k}_{32}=m_ln_l(k_{11}-k_{22})\end{aligned}\qquad(19)$$

با اعمال رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸)، معادله‌ای برای انتقال حرارت در این لمینیت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&k_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\\&\left(m_l^2k_{11}+n_l^2k_{22}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\\&\left(n_l^2k_{11}+m_l^2k_{22}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\\&2m_ln_l(k_{11}-k_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial z}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}\qquad(20)$$

در وضعیت پایدار، ترم مشتق زمان در سمت راست رابطه (۲۰) برابر صفر است. در شرایطی که سیال در حال تغییر فاز در لوله در جریان باشد، می‌توان دمای داخل لوله را ثابت فرض کرد و در صورتی‌که شرایط مرزی در خارج نیز تابعی از z نباشد، جمله گرادیان دما برای لوله‌های طویل در جهت z برابر صفر است [۱۷].

در این تحقیق چنین شرایطی برای استوانه در نظر گرفته شده است. بنابراین با اعمال شرایط مذکور، معادله (۲۰) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}&k_{22}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\\&\left(m_l^2k_{11}+n_l^2k_{22}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=0\end{aligned}\qquad(21)$$

در خارج از استوانه نیز شرط مرزی توامان جابه‌جایی آزاد و تشعشع خورشید برقرار است:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

$$-k_{۲۲}\frac{\partial T}{\partial r}=-q''(\varphi)+h(T-T_{\infty}) \qquad (۲۲)$$

در رابطه (۲۲)، h ضریب جابه‌جایی در سطح خارجی لیمینیت، T_{∞} دمای محیط و $q''(\varphi)$ شار تشعشعی خورشید است و از رابطه زیر قابل محاسبه است [۱۷]:

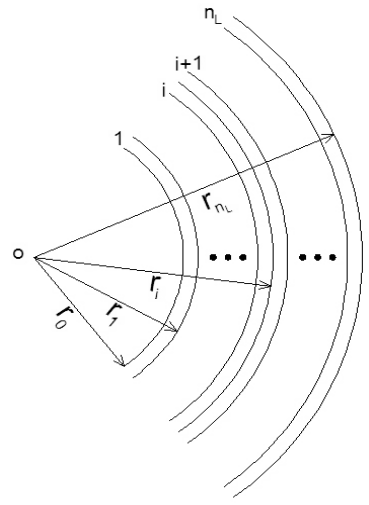
$$q''(\varphi)=\begin{cases}q''\sin\varphi & ۰\le\varphi\le\pi\\ ۰ & \pi<\varphi<۲\pi\end{cases} \qquad (۲۳)$$

از آنجاکه لمینیت استوانه‌ای از لایه‌های متعددی تشکیل شده و جهت الیاف در هر لایه با لایه مجاور ممکن است متفاوت باشد، لذا معادله (۲۱) در هر لایه متفاوت خواهد بود و بین لایه‌ها باید شرط مرزی همزمان پیوستگی دما و پیوستگی شار دما وجود داشته باشد [۱۷].

در شکل ٤ لایه‌ها در لمینیت استوانه‌ای نشان داده شده است. چنانچه اگر $r=r_i$ مرز بین دو لایه i و $i+۱$ باشد، بنابراین در این شعاع:

$$T^{(i)}=T^{(i+۱)} \qquad (۱-۲٤)$$

$$-k_{۲۲}\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r}=-k_{۲۲}\frac{\partial T^{(i+۱)}}{\partial r} \qquad (۲-۲٤)$$



شکل ٤ چیدمان لایه‌ها در لمینیت استوانه‌ای

٤- حل تحلیلی هدایت در لمینیت استوانه‌ای

در این بخش حل تحلیلی معادله انتقال حرارت هدایتی رابطه (۲۱) در شرایط توصیف شده در بخش ۳ (توزیع دمای یکنواخت در داخل استوانه و شرط مرزی هم زمان جابه‌جایی و تشعشع در داخل آن) ارائه می‌شود.

در آغاز تحلیل لازم است معادله (۲۱) به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$\frac{\partial^{۲}T}{\partial r^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{۱}{\mu^{۲}r^{۲}}\frac{\partial^{۲}T}{\partial\varphi^{۲}}=۰ \qquad (۲۵)$$

با توجه به رابطه (۲۱) مقدار μ در رابطه (۲۵) از معادله زیر قابل تعیین است:

$$\mu=\sqrt{\frac{k_{۲۲}}{m_l^{۲}k_{۱۱}+n_l^{۲}k_{۲۲}}} \qquad (۲٦)$$

در حالت خاص، چنانچه زاویه الیاف (φ) برابر ۹۰ درجه باشد، آنگاه $m_l=۰$ و $n_l=۱$ است. لذا با توجه به رابطه (۲٦) می‌توان دریافت که در این حالت، $\mu=۱$ بوده و در نتیجه رابطه (۲۵) نظیر رابطه انتقال حرارت دوبُعدی در ماده ایزوتروپ با ضریب هدایت $k_{۲۲}$ خواهد بود.

در این مقاله برای حل معادله (۲۵) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. مطابق این روش، توزیع دما در دوبُعد r و φ بر اساس دو تابع $F(r)$ و $G(\varphi)$ قابل جداسازی است:

$$T(r,\varphi)=F(r)G(\varphi) \qquad (۲۷)$$

با اعمال رابطه (۲۷) در رابطه (۲۵)، معادله انتقال حرارت به شکل دو معادله زیر جداسازی می‌شود:

$$r^{۲}F''+rF'-\lambda_n^{۲}F=۰ \qquad (۱-۲۸)$$

$$G''+\mu^{۲}\lambda_n^{۲}G=۰ \qquad (۲-۲۸)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

در معادلات (۲۸)، پارامتر λ_n معرف مقادیر ویژه معادله انتقال حرارت است. مقدار λ_n نیز از اعمال شرایط مرزی روی معادله (۲۸-۲) محاسبه می‌شود. با توجه به این‌که لمینیت استوانه‌ای از نظر هندسی حلقه‌ای کامل است، بنابراین برای این حلقه باید شرایط پیوستگی دما و شار در ابتدا و انتهای حلقه برقرار باشد:

$$G(0) = G(2\pi) \qquad (۱-۲۹)$$

$$G'(0) = G'(2\pi) \qquad (۲-۲۹)$$

جواب کلی معادله (۲۸-۲) به‌صورت زیر است:

$$G(\varphi) = A_n \cos(\mu\lambda_n\varphi) + B_n \sin(\mu\lambda_n\varphi) \qquad (۳۰)$$

با اعمال رابطه (۳۰) در شرایط مرزی روابط (۲۹)، معادلات همگنی به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} A_n\left(\cos(2\pi\mu\lambda_n) - 1\right) + B_n \sin(2\pi\mu\lambda_n) = 0 \\ A_n \sin(2\pi\mu\lambda_n) - B_n\left(\cos(2\pi\mu\lambda_n) - 1\right) = 0 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

از آنجاکه معادلات فوق همگن است، لذا جوابشان صفر است، مگر آن که وابسته خطی باشند. به عبارت دیگر در صورتی پاسخ آنها غیر صفر است که دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (۳۱) صفر شود:

$$\left(\cos(2\pi\mu\lambda_n) - 1\right)^2 + \sin^2(2\pi\mu\lambda_n) = 0 \qquad (۳۲)$$

از حل معادله مثلثاتی (۳۲)، مقادیر ویژه معادله انرژی در هر لایه به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\lambda_n = \frac{n}{\mu} \qquad n = 0,1,2,... \qquad (۳۳)$$

معادله (۲۸-۱) معادله دیفرانسیل کوشی - اویلر بوده و دارای جواب عمومی زیر است:

$$F(r) = \begin{cases} C_1 r^{\lambda_n} + C_2 r^{-\lambda_n} & n > 0 \\ C_3 Ln(r) + C_4 & n = 0 \end{cases} \qquad (۳۴)$$

بنابراین با اعمال روابط (۳۰) و (۳۴) در رابطه (۲۷) پاسخ عمومی زیر برای توزیع دما در هر لایه لمینیت استوانه‌ای به‌دست می‌آید. در این مقاله برای آنکه تمامی ضرایب سری فوریه توزیع دما هم‌بُعد شوند (با بُعد دما)، پاسخ بخش اویلر سری فوریه نسبت به شعاع داخلی (r_0) سنجیده شده و برای همگن کردن شرط مرزی در داخل استوانه با اعمال تغییر متغیر $\tau = T - T_{in}$ در معادله (۲۵)، رابطه زیر برای توزیع دما به‌دست می‌آید:

$$\tau^{(i)}(r,\varphi) = a_0^{(i)} Ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + b_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} a_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n/\mu_i} + \\ b_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n/\mu_i} \end{matrix} \right) cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{matrix} c_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n/\mu_i} + \\ d_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n/\mu_i} \end{matrix} \right) sin(n\varphi) \qquad (۳۵)$$

در رابطه فوق ضرایب a_n، b_n، c_n و d_n ضرایب ثابت سری فوریه (از بُعد دما) است. همچنین در رابطه (۳۵)، بالانویسها و اندیسهای i نشانگر لایه شماره i در لمینیت کامپوزیتی است (به شکل ٤ توجه شود).

برای تعیین ضرایب فوریه به اعمال شرایط مرزی نیاز است. از آنجاکه در این تحقیق دمای داخل استوانه مقدار ثابت T_{in} فرض شده، لذا این شرط در رابطه (۳۵) به‌صورت $\tau(r = r_0, \varphi) = 0$ ظاهر شده و با اعمال آن روابط زیر برای ضرایب فوریه لایه اول حاصل می‌شوند:

$$b_0^{(1)} = 0 \qquad (۱-۳۶)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

$$a_n^{(1)} + b_n^{(1)} = 0 \qquad (۲-۳۶)$$

$$c_n^{(1)} + d_n^{(1)} = 0 \qquad (۳-۳۶)$$

بین لایه‌ها نیز شرایط مرزی پیوستگی دما و پیوستگی شار حرارتی روابط (۲٤) برقرار است. با اعمال رابطه (۳۵) در شرایط مرزی (۲٤) در مرز بین لایه‌های i و $i+1$ (در شعاع $r = r_i$)، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$a_0^{(i)} = a_0^{(i+1)} \qquad (۱-۳۷)$$

$$b_0^{(i)} = b_0^{(i+1)} = 0 \qquad (۲-۳۷)$$

$$a_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_i} + b_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_i} - a_n^{(i+1)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_{i+1}} - b_n^{(i+1)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_{i+1}} = 0 \qquad (۳-۳۷)$$

$$c_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_i} + d_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_i} - c_n^{(i+1)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_{i+1}} - d_n^{(i+1)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_{i+1}} = 0 \qquad (٤-۳۷)$$

$$a_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_i - 1} - b_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_i - 1} - a_n^{(i+1)}(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}})(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_{i+1} - 1} + b_n^{(i+1)}(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}})(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_{i+1} - 1} = 0 \qquad (۵-۳۷)$$

$$c_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_i - 1} - d_n^{(i)}(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_i - 1} - c_n^{(i+1)}(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}})(\frac{r_i}{r_0})^{n/\mu_{i+1} - 1} + d_n^{(i+1)}(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}})(\frac{r_i}{r_0})^{-n/\mu_{i+1} - 1} = 0 \qquad (۶-۳۷)$$

شایان ذکر است که روابط (۳۷) فقط در مرز بین لایه‌ها ($i = 1,2,...,n_{L-1}$ و $r = r_i$) معتبر بوده و در داخل و خارج استوانه اعتباری ندارند.

در سطح خارجی استوانه ($r = r_{nL}$) نیز شرط مرزی همزمان جابه‌جایی طبیعی و تشعشع برقرار بوده و برای اعمال آن بایستی معادله (۳۵) را در رابطه (۲۲) قرار داد. در این حالت معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$a_0^{(n_L)} = \frac{r_{n_L}}{k_{22} + h r_{n_L} Ln(\frac{r_{n_L}}{r_0})}\left(\frac{q''}{\pi} + h(T_\infty - T_{in})\right) \qquad (۱-۳۸)$$

$$a_n^{(n_L)}[h(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_L}}} + k_{22}(\frac{n}{r_0 \mu_{n_L}})(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_L}} - 1}] + b_n^{(n_L)}[h(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{-\frac{n}{\mu_{n_L}}} - k_{22}(\frac{n}{r_0 \mu_{n_L}})(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{-\frac{n}{\mu_{n_L}} - 1}] = \begin{cases} 0 \to n = odd \\ \frac{2q''}{\pi(1 - n^2)} \to n = even \end{cases} \qquad (۲-۳۸)$$

$$c_n^{(n_L)}[h(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_L}}} + k_{22}(\frac{n}{r_0 \mu_{n_L}})(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{\frac{n}{\mu_{n_L}} - 1}] + d_n^{(n_L)}[h(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{-\frac{n}{\mu_{n_L}}} - k_{22}(\frac{n}{r_0 \mu_{n_L}})(\frac{r_{n_L}}{r_0})^{-\frac{n}{\mu_{n_L}} - 1}] = \begin{cases} \frac{q''}{2} \to n = 1 \\ 0 \to n > 1 \end{cases} \qquad (۳-۳۸)$$

با توجه به معادلات (۳٦) تا (۳۸) نتیجه می‌شود که ضرایب a_0 و b_0 در تمامی لایه‌ها برابر بوده و مقدار a_0 از رابطه (۳۸-۱) قابل محاسبه و مقدار b_0 نیز برابر صفر است.

برای تعیین ضرایب a_n و b_n باید در هر n و برای تمامی لایه‌ها، دستگاه معادلات شامل روابط (۳٦-۲)، (۳۷-۳)، (۳۷-۵) و (۳۸-۲) حل شود. خوشبختانه دستگاه حاصل یک دستگاه ۵ قطری بوده و نیاز به معکوس کردن ماتریس ضرایب از روشهای متداول نیست و در این تحقیق با استفاده از روش حذفی گوس، ماتریس ضرایب

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

قطری و مقادیر a_n و b_n تعیین شده است. مشابه همین روش برای تعیین ضرایب c_n و d_n از معادلات (۳۶-۳)، (۳۷-٤)، (۳۷-٦) و (۳۸-۳) به‌کار می‌رود.

مشکل اصلی برای حل دستگاه معادلات فوق وجود درایه‌های بسیار بزرگ در ماتریس ضرایب در مقادیر n بزرگ است که با توجه به حداکثر دقت کامپیوترها، محاسبه ضرایب را دشوار می‌سازد، اما خوشبختانه سری فوریه رابطه (۳۵) به‌سرعت همگرا بوده و به محاسبه برای مقادیر n بسیار بزرگ نیاز نیست. این موضوع در بخش نتایج تشریح شده است.

۵- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در لمینیت استوانه‌ای تحت شرایط مرزی تعریف شده در بخش ۳ بیان شده است.

در این مقاله برای تشریح انتقال حرارت در مواد مرکب، اثر زاویه الیاف بر رفتار حرارتی در لمینیت یک لایه (یا چند لایه ولی با زاویه الیاف یکسان) مطالعه شده است. همچنین در ادامه توزیع دما در لمینیتهای چندلایه در آرایش مختلف لایه‌ها بررسی و نحوه تغییرات دما در لایه‌های مختلف در طی جملات سری فوریه مطالعه شده است.

ماده مرکب در نظر گرفته شده برای این بخش ترکیب ۲۵٪ اپوکسی با ۷۵٪ الیاف گرافیت (کولار/ اپوکسی[1]) است. علت انتخاب این کامپوزیت وجود اختلاف قابل توجه میان ضریب انقال حرارت هدایتی در الیاف و ماده زمینه است (زیرا گرافیت ماده‌ای نسبتاً رسانا و اپوکسی نوعی عایق حرارتی است).

وجود اختلاف زیاد میان ضرایب هدایت الیاف و ماده زمینه منجر به افزایش ۱۲/۷٦ برابری ضریب هدایت در جهت الیاف نسبت به جهت عمود بر الیاف شده است و تحلیل حرارتی این کامپوزیت می‌تواند به ایجاد درکی صحیح از اختلاف انتقال حرارت میان مواد ایزوتروپ و مواد مرکب کمک شایانی نماید. در جدول ۱ از خواص فیزیکی الیاف و ماده زمینه و در جدول ۲ خواص ماده مرکب حاصل از ترکیب آنها آورده شده است.

جدول ۱ خواص الیاف و ماده زمینه [۱۸]

جنس ماده زمینه	اپوکسی
جنس الیاف	گرافیت
ضریب هدایت ماده زمینه (W/m. K)	۰/۱۹
ضریب هدایت الیاف (W/m. K)	۱٤/۷٤
ظرفیت گرمایی ماده زمینه (J/kg.K)	۱٦۱۳
ظرفیت گرمایی الیاف (J/kg.K)	۷۰۹

جدول ۲ خواص ماده مرکب کولار/ اپوکسی [۱۸]

k در جهت موازی الیاف (W/m. K)	۱۱/۱
k در جهت عمود بر الیاف (W/m. K)	۰/۸۷
درصد حجمی الیاف	۷۵
نقطه ذوب (K)	٤۵۰
ظرفیت گرمایی (J/kg.K)	۹۳۵
چگالی (kg/m^3)	۱٤۰۰

1. Kevlar/Epoxy

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

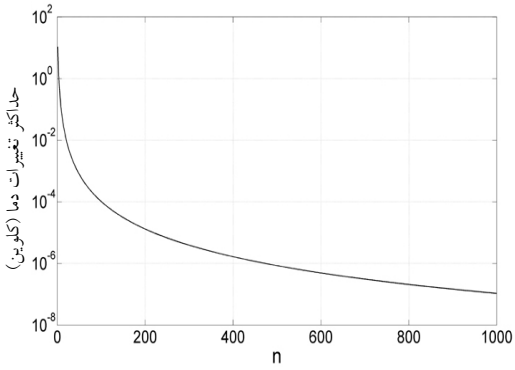
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

در ابتدا برای درک بهتر انتقال حرارت در مواد مرکب، یک لمینیت کامپوزیتی یک لایه (یا چند لایه ولی با زاویه الیاف یکسان) با هندسه و شرایط مرزی مطابق اطلاعات مندرج در جدول ۳ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳ هندسه و شرایط مرزی

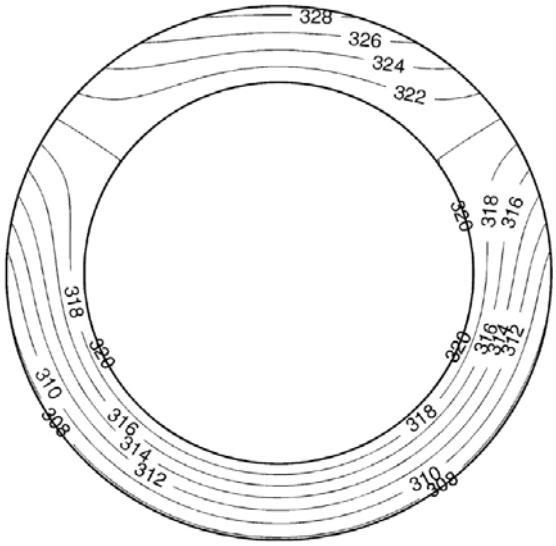
قطر داخلی (cm)	۳۰
قطر خارجی (cm)	٤۲
شار تشعشی خورشید (W/m^2)	۷۰۰
ضریب جابه‌جایی آزاد (W/m^2K)	۲۰
دمای داخل استوانه (K)	۳۲۰
دمای محیط (K)	۳۰۰
زاویه الیاف (درجه)	۹۰

در شکل ۵ حداکثر تغییرات دما در لمینیت در جمله‌های مختلف سری فوریه نشان داده شده است. مطابق شکل سری فوریه رابطه (۳۵) به‌سرعت همگرا بوده به‌نحوی‌که در ۱۰۰اُمین جمله سری فوریه، تغییرات دما به $۱/۰۳\times۱۰^{-۵}K$ کاهش یافته است. بنابراین به‌نظر می‌رسد که برای ایجاد شرایط همگرایی، فقط محاسبه ۱۰۰ جمله اول سری فوریه کافی است.



شکل ۵ حداکثر تغییرات دما بر حسب n در حالت φ=۹۰°

شکل ٦ توزیع دما را در لمینیت مذکور نشان می‌دهد. از آنجاکه در این حالت زاویه الیاف برابر ۹۰ درجه است (الیاف در جهت محور z)، بنابراین در این وضعیت، انتقال حرارت در لمینیت، مشابه ماده‌ای ایزوتروپ با ضریب هدایت $k_{۲۲}$ برابر است. در اینجا حداکثر دما برابر ۳۲۸/۹۸K و متوسط دما برابر ۳۱۷/۰۹K است.

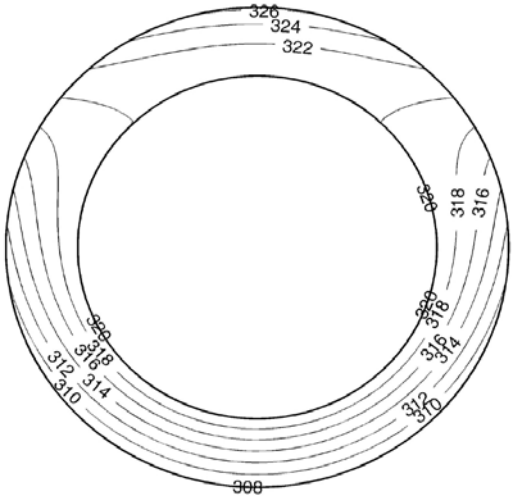


شکل ٦ توزیع دما (K) در لمینیت یک لایه در θ=۹۰°

در شکل ۷ توزیع دما در این لمینیت در حالتی‌که زاویه الیاف صفر است (الیاف در جهت φ)، نشان داده شده. در این حالت ضریب هدایت در جهت r برابر $k_{۲۲}$ و در جهت φ برابر $k_{۱۱}$ است. با توجه به اینکه در این ماده $k_{۱۱} > k_{۲۲}$ است، بنابراین مقدار مؤثر ضریب هدایت در حالتی‌که زاویه الیاف صفر درجه است، نسبت به حالتی‌که ۹۰ درجه است، بزرگتر خواهد بود. به‌همین دلیل توزیع دما به وضوح از شکل ٦ یکنواخت‌تر است. در این حالت حداکثر دما برابر ۳۲٦/٤٦K و متوسط دما برابر ۳۱۷/۱۰K است. بنابراین هر چند متوسط دما در هر دو وضعیت تقریباً یکسان است، اما

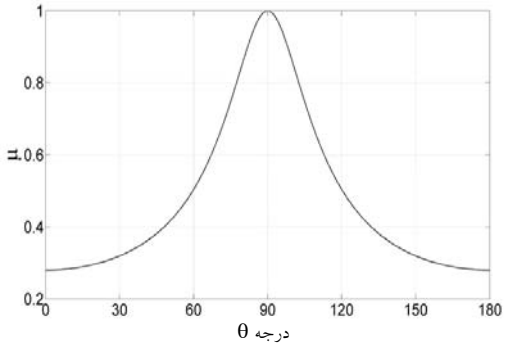
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

به‌دلیل پخش بهتر حرارت (در حالت $\theta = 0^\circ$ نسبت به $\theta = ۹۰^\circ$)، بیشینه دما کمتر شده است.



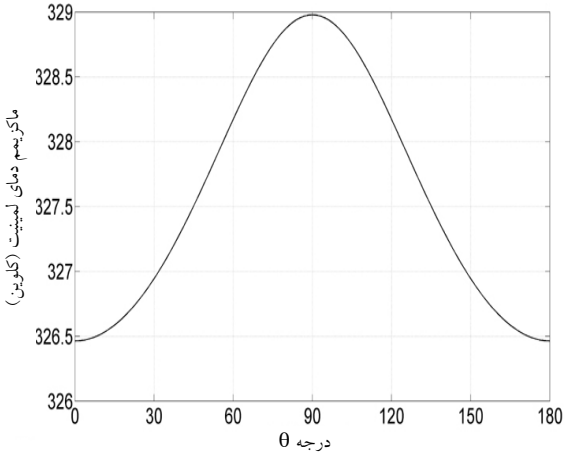
شکل ۷ توزیع دما (K) در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = ۰^\circ$

در شکل ۸، توزیع ضریب معادله انتقال حرارت (μ) بر حسب زاویه الیاف نشان داده شده است (به رابطه (۲۶) توجه شود). مطابق شکل، این ضریب نسبت به زاویه ۹۰ درجه متقارن بوده و دارای پرید ۱۸۰ درجه است. مقدار بیشینه این منحنی نیز در زاویه ۹۰ درجه قرار دارد. با توجه به معادله (۲۵) کوچک شدن مقدار μ به کاهش اثر گرادیان دما در جهت φ و یکنواخت شدن توزیع دما در لمینیت کامپوزیتی کمک می‌کند.



شکل ۸ نمودار ضریب μ بر حسب زاویه الیاف

شکل ۹ اثر زاویه الیاف بر بیشینه دمای لمینیت را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۸ با نزدیک شدن به زاویه ۹۰ درجه، مقدار μ افزایش و ضریب هدایت حرارتی در جهت φ کاهش می‌یابد؛ در نتیجه گرادیان دما در لمینیت زیاد شده و سبب افزایش بیشینه دما و کاهش یکنواختی در توزیع دما می‌شود.



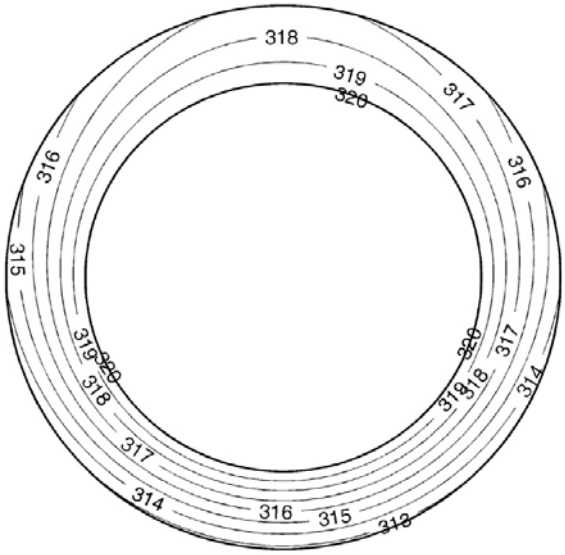
شکل ۹ نمودار بیشینه دمای لمینیت یک لایه بر حسب زاویه الیاف

پس از بررسی توزیع دما در استوانه کامپوزیتی یک لایه، توزیع دما در لمینیتهای کامپوزیتی چندلایه با آرایش مختلف الیاف بررسی شده است. در ابتدا یک لمینیت ٦ لایه با آرایش متعامد[1] با زاویه الیاف [۰°، ۹۰°، ۰°، ۹۰°، ۰°، ۹۰°] در نظر گرفته شد. ضخامت لایه‌ها برابر ۱ سانتیمتر و قطر داخلی استوانه برابر ۳۰ سانتیمتر است. شرایط مرزی حرارتی و جنس کامپوزیت مشابه حالت لمینیت یک لایه است.

1. Cross.Ply

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

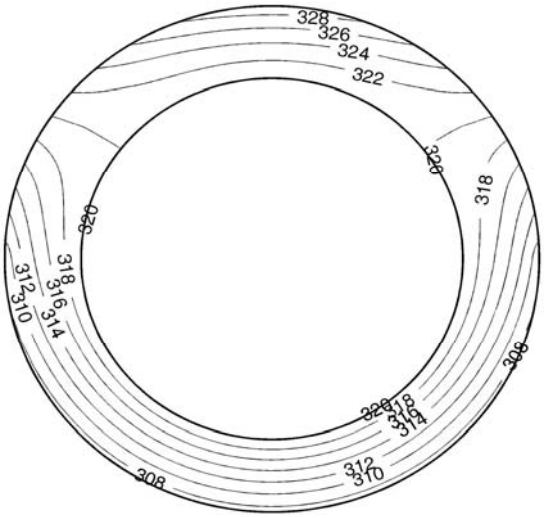
در شکل ۱۰ توزیع دما در این لمینیت نشان داده شده است. در این حالت متوسط دمای لمینیت برابر ۳۱۷/۱۰K و بیشینه دما برابر ۳۲۰/۰۰K است.



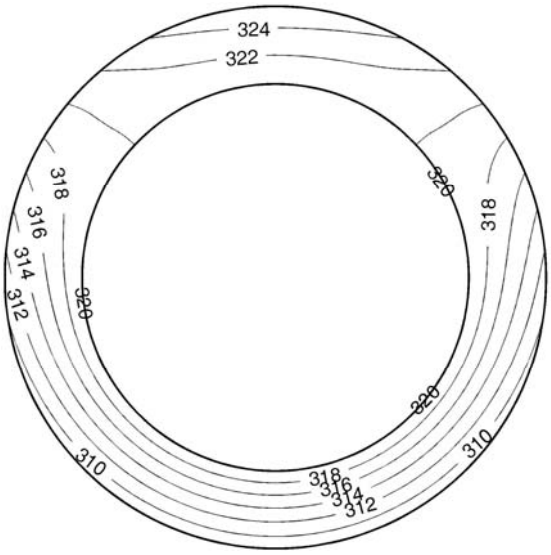
شکل ۱۰ توزیع دما (کلوین) در لمینیت متعامد

اکنون مشابه حالت قبل، لمینیت کامپوزیتی دیگری را که دارای شش لایه با آرایش الیاف شبه ایزوتروپ[1] [°۳۰۰، °۲۴۰، °۱۸۰، °۱۲۰، °۶۰، °۰] است، در نظر می‌گیریم. شکل ۱۱ توزیع دما را در این لمینیت نشان می‌دهد. در این آرایش الیاف، حداکثر دما برابر ۳۲۹/۴۷K و متوسط دما برابر ۳۱۷/۱۰K است. مطابق شکل آرایش جدید الیاف منجر به اختلاف قابل توجهی در کیفیت و کمیت انتقال حرارت نسبت به حالت قبل شده است. این موضوع ناشی از بزرگی ۱۲/۷۶ برابری ضریب هدایت در جهت الیاف نسبت به جهت عمود بر الیاف است که سبب وابستگی شدید توزیع دما به جهت قرارگیری الیاف در لایه‌ها شده است، به‌نحوی‌که در آرایش متعامد (شکل ۱۰) پخش حرارت در لمینیت بسیار بهتر از آرایش شبه ایزوتروپ (شکل ۱۱) است.

1. Quasi.Isotropic



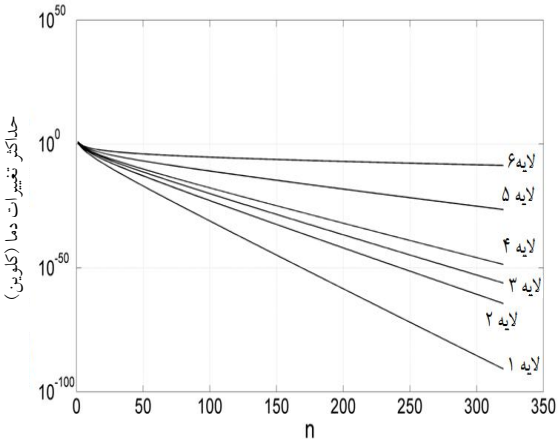
شکل ۱۱ توزیع دما (کلوین) در لمینیت شبه ایزوتروپ



شکل ۱۲ توزیع دما (کلوین) در لمینیت s[°۹۰، °۳۰، °۴۵]

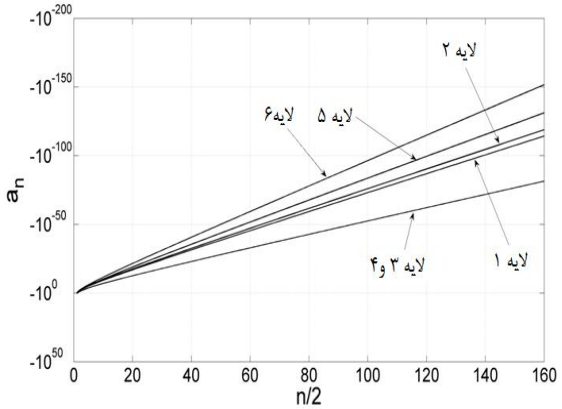
در شکل ۱۲ توزیع دما در لمینیت دیگری با آرایش الیاف [°۴۵، °۳۰، °۹۰، °۹۰، °۳۰، °۴۵] نشان داده شده است. در این حالت حداکثر دما برابر ۳۲۶/۰۳K و متوسط دما برابر ۳۱۷/۱۰K است. مشاهده می‌شود که در این آرایش، توزیع دما در لمینیت، حالتی بین توزیع دما در آرایش شبه ایزوتروپ و آرایش متعامد است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]



شکل ۱۳ حداکثر تغییرات دما بر حسب جملات سری فوریه در لمینیت $_S$[۹۰°، ۳۰°، ۴۵°]

در شکل ۱۳ حداکثر تغییر دما در طول جملات سری فوریه و در لایه‌های مختلف لمینیت کامپوزیتی برای آرایش الیاف مربوط به شکل ۱۲ نشان داده شده است. مطابق این شکل با افزوده شدن بر تعداد جملات سری فوریه از مقدار تغییر دما در تمامی لایه‌ها کاسته می‌شود به‌نحوی‌که در جمله ۵۰ام حداکثر تغییر دما مربوط به لایه ششم بوده و برابر $۹/۸۶\times۱۰^{-۵}$ K است. لذا به‌نظر می‌رسد که برای محاسبات مهندسی، فقط محاسبه ۵۰ جمله اول سری فوریه با دقت فوق‌العاده زیادی کفایت می‌کند. همچنین روند تغییرات دما در طول جملات سری فوریه به‌نحوی است که در لایه‌های با شعاع کوچکتر میزان این تغییرات نسبت به لایه‌های با شعاع بزرگتر، کمتر است. علت این موضوع وجود جمله $(\frac{r}{r_۰})^{n/\mu}$ در رابطه (۳۵) است که سبب بیشتر بودن تغییرات دما در لایه‌های با شعاع بزرگتر شده است. همچنین این جمله عاملی دردسرساز در حل دستگاه معادلات مربوط به ضرایب سری فوریه (روابط (۳۷) و (۳۸)) است. زیرا در مقادیر n بزرگ، جمله فوق به‌شدت رشد می‌کند به‌نحوی که در این حالت، به‌ازای $n>۳۲۰$ ماتریس ضرایب در شرایط ناهنجار[1] قرار می‌گیرد و خطای عددی مربوط به حل دستگاه، رشد پیدا می‌کند. از آنجاکه ماتریسهای ضرایب حاصل از معادلات (۳۷) و (۳۸) پنج قطری هستند، لذا بهتر است که در مقادیر n بزرگ، از روشهای معمول در معکوس کردن ماتریس ضرایب استفاده نشود زیرا معکوس کردن ماتریس ضرایب روشی پرهزینه و با خطای عددی زیادی (به‌دلیل زیاد بودن تعداد محاسبات) است. در این مقاله برای حل دستگاه ضرایب از روش حذفی گوس استفاده شده و ماتریس ضرایب قطری شده است. به این‌ترتیب امکان تعیین ضرایب تا جمله $n=۳۲۰$ فراهم شده است و در این جمله حداکثر تغییر دما مربوط به لایه ششم بوده و برابر $۲/۳۱\times۱۰^{-۹}$ K است. بنابراین نتیجه می‌شود که هر چند محاسبه ضرایب در مقادیر n بسیار بزرگ کار دشواری است اما به‌دلیل سرعت بالای همگرایی سری فوریه، فقط محاسبه چندین جمله اولیه این سری کفایت می‌کند و لذا به محاسبه ضرایب در مقادیر n بزرگ نیاز نیست.

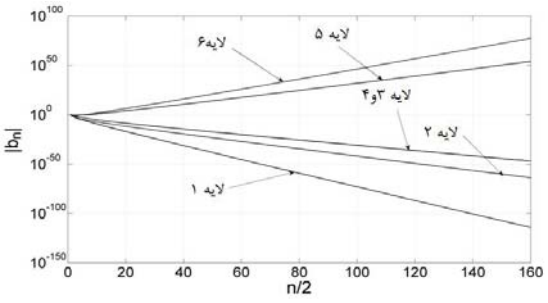


شکل ۱۴ توزیع جمله a_n سری فوریه بر حسب $n/۲$ در لمینیت $_S$[۹۰°، ۳۰°، ۴۵°]

1. Ill Condition

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

در شکلهای ۱٤ و ۱۵ جملات a_n و b_n سری فوریه در هر ٦ لایه برای آرایش الیاف مربوط به شکل ۱۳ نشان داده شده است. از آنجاکه این جملات به‌ازای مقادیر n فرد برابر صفر است، لذا دیاگرام مربوط به این جملات بر حسب $n/۲$ نمایش داده شده است. همچنین مقادیر a_n همواره مثبت بوده، اما مقادیر b_n در لایه‌های دوم و پنجم منفی و در سایر لایه‌ها مثبت است. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود ضرایب a_n اعداد بسیار کوچکی هستند که با افزایش مقدار n به‌شدت کاهش می‌یابند، زیرا a_n ضریب جمله $(\frac{r}{r_o})^{n/\mu}$ سری فوریه است و به‌دلیل بزرگ بودن مقدار این جمله، کوچک بودن قابل توجه مقدار a_n برای همگرایی سری امری ضروری است. همچنین c_n ضریبی مثبت و d_n ضریبی منفی است که فقط به‌ازای $n = ۱$ دارای ارزش هستند.



شکل ۱۵ توزیع جمله b_n سری فوریه بر حسب $n/۲$ در لمینیت $[۴۵^\circ, ۳۰^\circ, ۹۰^\circ]_s$

٦- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر تانسور و رابطه انتقال حرارت در مواد مرکب معرفی و در مورد نحوه تعیین ضرایب هدایت این مواد بحث و در ادامه یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت در لمینیت کامپوزیتی استوانه‌ای دوبُعدی ارائه شد. حل دقیق ارائه شده مستقیماً در لوله‌ها و مخازن کامپوزیتی استوانه‌ای قابل به‌کارگیری است. رابطه به‌دست آمده برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانه کامپوزیتی (رابطه (۳۵)) صورت عمومی انتقال حرارت در این لمینیت‌ها بوده و برای تمامی شرایط مرزی حرارتی قابل به‌کارگیری است. شرایط مرزی فقط در مقدار ضرایب فوریه رابطه (۳۵) مؤثر هستند و این ضرایب را می‌توان با استفاده از هر نوع شرط مرزی دلخواه در داخل و خارج استوانه به‌دست آورد. همچنین بایستی توجه داشت که شرایط حرارتی بین‌لایه‌ای (روابط (۳۷) مربوط به پیوستگی دما و شار حرارتی)، مستقل از شرایط مرزی در داخل و خارج استوانه هستند. در این تحقیق حالتی از شرایط مرزی که در آن دمای داخل استوانه ثابت و سطح بیرونی تحت تأثیر همزمان داخل استوانه ثابت و سطح بیرونی تحت تأثیر همزمان انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد و تشعشع خورشید قرار دارد، مطالعه شد.

از جمله نتایج قابل توجه این تحقیق، تأثیر قابل توجه زاویه قرارگیری الیاف و نحوه چیدمان لایه‌ها در توزیع دما در لمینیت است. به‌نحوی که برای سه آرایش مختلف چیدمان لایه‌ها، آرایش متعامد، توزیع دمای یکنواخت‌تری را نسبت به آرایش شبه ایزوتروپ و آرایش $[۴۵^\circ, ۳۰^\circ, ۹۰^\circ]_s$ نشان می‌دهد. همچنین برای لمینیت‌های یک‌لایه‌ای مورد بررسی در این تحقیق، تغییر زاویه الیاف از صفر تا ۹۰ درجه سبب افزایش بیشینه دما و کاهش متوسط دمای استوانه می‌شود که این پدیده را می‌توان به بالا بودن ضریب هدایت الیاف نسبت به ماده زمینه نسبت داد.

بنابراین در هر کاربرد مهندسی با توجه به اهداف طراحی می‌توان با انتخاب ماده کامپوزیتی و جهت الیاف، توزیع مناسب دما را به‌دست آورد. برای مثال در صورتی‌که هدف کاهش تنش حرارتی در ماده باشد،

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

می‌توان با انتخاب مناسب جهتهای الیاف، توزیع دما را در لمینیت یکنواخت‌تر و گرادیان دما را در آن کاهش داد. همچنین با استفاده از مواد مرکب می‌توان لمینیتهایی ساخت که در برخی جهتها رسانا و در جهات دیگر عایق حرارتی هستند بنابراین کاربردهای بی‌شماری برای این مواد در بحث انتقال حرارت متصور است.

۷- سپاسگزاری

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام گردیده است.

۸- منابع

[1] W. A. Wooster, A Textbook in Crystal Physics, London, Cambridge University Press, 1957, 455.

[2] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, London, Clarendon Press, 1957, 309.

[3] Mulholland G. P., Diffusion through Laminated Orthotropic Cylinders, Tokyo, Proceeding of the 5th International Heat Transfer Conference, 1974, pp. 250-254.

[4] Golovchan, V. T. and Artemenko A. G., Heat Conduction of Orthogonally Reinforced Composite Material, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 51, No. 2, 2004, pp. 944-949.

[5] Shi-qiang, D., Jia-chan, L., Homogenized Equations for Steady Heat Conduction in Composite Materials with Dilutely-Distributed Impurities, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 4, No. 2, 2005, pp. 167-173.

[6] Greengard, L., Lee, J. Y., Electrostatics and Heat Conduction in High Contrast Composite Materials, Journal of Computational Physics, 2006, pp. 64-76.

[7] Hassan, N., Thompson, J. E., Batra, R. C., Hulcher, A.B., Song, X. and Loos, A. C., A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process, Journal of Reinforced Plastics And Composites, 2005, Vol. 24, No. 8, pp. 869-888.

[8] Newnham, P. and Abrate, S., Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids: Application to Manufacturing Problems, Journal of Reinforced Composites and Plastics, 1993, Vol. 12, No. 1, pp. 854-864.

[9] Sun, Y., Wichman, I. S., On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, Vol. 47, pp. 1555-1559.

[10] Oseloka, O., Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach, Journal of Computers & Chemical Engineering, 2002, Vol. 26, No. 1, pp. 1621-1632.

[11] Lu, X., Tervola, P. and Viljanen, M., Transient Analytical Solution to Heat

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]

Conduction in Composite Circular Cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, Vol. 49, pp. Lu, X., Tervola, P. and Viljanen, M., Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab, International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, Vol. 49, pp. 1107-1114.

[12] Özisik, M. N., Heat Conduction, NewYork, John Wiley and Sons, INC., 1993, 692.

[13] Herakovich, C. T., Mechanics of Fibrous Composites, NewYork, John Wiley and Sons, INC., 1998, 460.

[14] Halpin, J. C., Primer on Composite Materials Analysis, CRC Press, 1992, 229.

[15] Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., Conduction of Heat in Solids, London, Oxford University Press, 1971, 510.

[16] Arpaci, V. S., Conduction Heat Transfer, USA, Addison-Wesley publishing Company, 1966, 550.

[17] Touloukian, Y. S., and C. Y. Ho, E., Thermophysical Properties of Matter, NewYork, Plenum Press, Vol. 2, Thermal Conductivity of Nonmetallic Solids, 1972, 740.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1388.9.1.13.7]