مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1393، دوره 14، شماره 12، ص‌ص 23-34

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

طراحی بهینه چندهدفه دیسک دوار با ساختار هدفمند آلومینیوم-سیلیکون‌کاربیدی با خواص وابسته به دما براساس رفتار خزشی

فرید وکیلی تهامی[1*]، محمد زهساز[2]، آرش محمدعلیزاده فرد[3]

1- دانشیار، دانشکده فنی‌مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
2- استاد، دانشکده فنی‌مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
3- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، دانشکده فنی‌مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز
* تبریز، صندوق پستی 5166614766، f_vakili@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 فروردین 1393
پذیرش: 26 اردیبهشت 1393
ارائه در سایت: 08 مهر 1393

کلید واژگان:
دیسک دوار
مواد هدفمند
خزش
الگوریتم ژنتیکی چندهدفه
جبهه پارتو

چکیده

در این مقاله پس از بررسی رفتار خزشی دیسک دوار ساخته شده از ترکیب هدفمند دو ماده آلومینیوم 6061 و سیلیکون‌کاربید، توزیع مواد و پروفیل ضخامت بهینه آن تعیین شده است. با گسترش معادله انتقال حرارت، توزیع دما در دیسک به‌دست آمده سپس با درنظر گرفتن توزیع دما، با گسترش معادله جابه‌جایی، رفتار ترمومکانیکی دیسک در خزش بررسی شده است. در معادلات فوق تمامی خواص فیزیکی تابع دما و درصد حجمی مواد فرض شده‌اند. خواص معادل با دو مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن به‌دست آمده و با نتایج موجود در ادبیات فن مقایسه شده است. معادلات ترمومکانیکی با روش شبه‌تحلیلی حل شده و برای اعتبارسنجی با پاسخ‌های تحلیلی در حالتی خاص مقایسه شده‌اند. پس از آن، طراحی بهینه در بخش‌های تک‌هدفه و چندهدفه و با استفاده از الگوریتم ژنتیکی انجام گرفته است. اهداف شامل افزایش ضریب اطمینان کمینه، کاهش وزن و کاهش بازه‌ی تغییرات ضریب اطمینان بیشینه و کمینه و متغیرهای طراحی نیز شامل درصد حجمی مواد در جدار داخلی و خارجی، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت هستند. نتایج نشان می‌دهند که دو روش حل تحلیلی و شبه‌تحلیلی مطابقت کاملی داشته و دیسک بهینه دارای غنای بیشتری از سیلیکون در جدار خارجی بوده و پروفیل ضخامت آن نیز به‌صورت نزولی است. نتایج پژوهش تناقض اهداف بهینه‌سازی را نیز آشکار می‌کنند و از این رو نتایج به‌صورت جبهه پارتو ارائه شده‌اند.

Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior

Farid Vakili-Tahami*, Mohammad Zehsaz, Arash Mohammad Alizadeh Fard

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
* P.O.B. 5166614766 Tabriz, Iran, f_vakili@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 April 2014
Accepted 16 May 2014
Available Online 30 September 2014

Keywords:
Rotating Disc
Functionally Graded Materials
Creep
Multi-objective Genetic Algorithm
Pareto Front

ABSTRACT

In this paper the creep behavior of a functionally graded (FG) rotating disc made of Aluminum 6061 and Silicon Carbide is investigated and the optimum volume fraction of FG disc and its profile has been obtained. For this purpose, the temperature gradiant along the disc radius is obtained by solving the govering heat transfer differential equation. All the thermal properties of the material are assumed to be the function of temperature and volume fraction. To obtain material properties, two models of Mori-Tanaka and Hashin-Schtrickman are used. To validate the results, they are compared with those given in the literature. Two solution methods: semi-analytical and closed form are employed and the results are compared. The optimum design is carried out with one, and multi-objective methods which are based on genetic algorithm. The objectives are increasing the factor of safety, reducing the weight of the disc and reducing the range between minimum and maximum safety factors. The design variables are percentage of volume fraction, the power of material distribution formula, and the thickness of the disc. The results show that two solution methods compare well. Also, it has been shown that high fraction of Silicon Carbide in the outer side the disc provide optimum results. Also, contradiction of the objectives is reviled, hence the results are presented as Pareto front.

1- مقدمه

دیسک‌های دوار، به‌دلیل کاربردهای فراوان آن در صنعت، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می‌توان به‌مواردی همچون موتورهای صنایع هوایی، اتومبیل‌ها، توربین‌ها، پمپ‌ها و کمپرسورها اشاره نمود. در بسیاری از این کاربردها نیاز به کاهش وزن سازه به‌خاطر وجود دلایلی همچون کاهش مصرف سوخت و نیز دستیابی به سازه‌ای با توزیع ضریب اطمینان مطلوب وجود دارد.

با افزایش تقاضا برای افزایش بازده تبدیل انرژی و نیز کاهش انتشار گازهای گلخانه‌ای در نیروگاه‌ها، سیستم‌های تولید انرژی و مواردی از این دست، دما و تنش در این سیستم‌ها افزایش یافته و از این‌رو، دلواپسی اصلی در طراحی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

F. Vakili-Tahami, M. Zehsaz, A. Mohammad Alizadeh Fard, Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 12, pp. 23-34, 2014 (In Persian)

اجزای سیستم‌ها به‌سمت ارزیابی کارایی ویسکوپلاستیک این قطعات برای جلوگیری از واماندگی در اثر وقوع خزش سوق یافته است[1]. دیسک‌های دوار نیز به‌عنوان جزئی از این سیستم‌ها، اغلب در گرادیان‌های دمایی و سرعت‌های زاویه‌ای بالا کار می‌کنند. سرعت زاویه‌ای و دمای زیاد باعث ایجاد تنش‌های ترمومکانیکی بالا در دیسک شده و همزمان با آن، وجود دمای بالا و زمان کاری طولانی شرایط را برای وقوع پدیده خزش فراهم می‌کند؛ بنابراین، بررسی پدیده خزش در دیسک‌های دوار اهمیت بیشتری می‌یابد.

با پیشرفت سریع تکنولوژی نیاز به استفاده از مواد جدید به‌عنوان اولویت مهندسی در سیستم‌های پیچیده پربازده مطرح شده است. در برخی از این موارد، نیاز به تأمین مقاومت توأمان ماده در برابر بارهای ترمومکانیکی متفاوت، منجر به معرفی و تولید مواد هدفمند با قابلیت تحمل بارهای متفاوت و تغییرات خواص پیوسته در جهات مختلف شده است.

مطالعات متنوعی در زمینه بررسی رفتار خزشی و ترموالاستیک دیسک‌های دوار در ادبیات فن ارائه شده است. در بیشتر این مطالعات، همچون مطالعات سینگ و همکارانش در سال 2001 میلادی[2]، محاسبه خواص معادل با استفاده از قانون اختلاط صورت گرفته و یا همچون بررسی‌های یو و همکارانش[3] و کردخیلی و نقدآبادی[4] در سال 2007 توزیعی از پیش تعیین شده برای خواص فرض شده است که مطالعه اخیر با ارائه یک روش حل شبه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند همراه بوده است. در سال 2005 میلادی، جاهد و همکارانش[5] به کمینه‌سازی وزن دیسک‌های دوار با وجود ناهمگونی مواد پرداخته‌اند. آن‌ها در مقاله خود به بررسی مجدد دو مورد موجود در ادبیات فن پرداخته‌اند. در مثال نخست تمامی خواص فیزیکی، ثابت فرض شده و تلاش شده تا تنش مؤثر دیسک به تنش تسلیم نزدیک‌تر گردد؛ در مثال دوم مدول الاستیسیته در راستای شعاع متغیر فرض شده و فرایند پیشین تکرار شده است. در سال 2006 میلادی، فرشی و فائزی[6] به بهینه‌سازی دیسک دوار غیرهمگن به‌روش غیرگرادیانی پرداخته‌اند. تابع هدف در این بهینه‌سازی، وزن دیسک درنظر گرفته شده است و کمینه‌سازی با درنظر گرفتن محدودیت‌های تنش (پایین‌تر بودن تنش از حد تحمل ماده در شرایط حرارتی ذکر شده) انجام شده و قیودی نیز برای هندسه دیسک تعیین شده است. در سال 2008 میلادی، فرشی و بیدآبادی[7] به بهینه‌سازی پروفیل ضخامت دیسک دوار با وجود خزش مرحله دوم پرداخته‌اند. آن‌ها رفتار خزشی را با استفاده از رابطه نورتون مدل نموده و با ارائه مثالی با ضرایب و تنش مجاز ثابت به بررسی کارایی روش خود پرداخته‌اند. در سال 2011 میلادی، لقمان و همکارانش[8] به بررسی تنش‌های خزشی و ترموالاستیک در یک دیسک دوار ساخته شده از ماده هدفمند آلومینیوم-سیلیکون‌کاربید[1] پرداخته‌اند. تمامی خواص به‌غیر از ضریب پواسون در راستای شعاعی تابع درصد حجمی مواد فرض شده و توسط قانون اختلاط محاسبه شده‌اند. رفتار خزشی نیز توسط قانون شربی توصیف شده است. در سال 2012 میلادی، قربانی[9] به بررسی شبه‌تحلیلی خزش دیسک دوار هدفمند ساخته شده از ترکیب St37 و زیرکونیوم با ضخامت متغیر به‌روش گسسته‌سازی پرداخته است. در این مقاله خواص به‌صورت توانی تغییر نموده و برای تعیین کرنش‌های خزشی از رابطه زمان‌سختی نورتون، با فرض ثابت بودن ضرایب این معادله استفاده شده است. در سال 2013 میلادی، کردخیلی و لیوانی[10] پاسخ‌های ترموالاستیک و خزشی را برای یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر و خواص وابسته به دما تعیین کرده‌اند. تغییرات خواص نیز به‌صورت توانی فرض شده است. آنان نشان داده‌اند درصورت مستقل از دما درنظر گرفتن خواص، ممکن است نتایج دچار خطای حدود 200 درصدی شوند. این پژوهش جزء معدود پژوهش‌ها در مورد دیسک‌های دوار هدفمند است که در آن خواص وابسته به دما فرض شده‌اند.

1- Al-SiC

با وجود پژوهش‌های متنوع ذکر شده در مورد دیسک‌های دوار، در بیشتر آن‌ها برای همگن‌سازی خواص فیزیکی یا از قانون اختلاط استفاده شده است و یا از تغییرات این خواص با دما صرف‌نظر شده است. از این رو، در پژوهش حاضر ابتدا به تحلیل خزشی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر و خواص فیزیکی وابسته به دما پرداخته شده، که در آن، خواص معادل با فرض توزیع مواد توانی و با استفاده از دو مدل موری-تاناکا[2] و هاشین-اشتریکمن[3] محاسبه شده‌اند. برای اعتبارسنجی، خواص فیزیکی معادل محاسبه شده با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن برای کامپوزیت‌های با درصد حجمی ثابت مقایسه شده‌اند. ضرایب معادلات اساسی خزشی نیز با استفاده از رگرسیون به‌دست آمده‌اند. برای تحلیل ترمومکانیکی، نخست معادله انتقال حرارت رسانش فوریه برای تعیین توزیع دما و سپس معادله دیفرانسیل جابه‌جایی برای تحلیل تنش-کرنش حل شده‌اند. برای حل معادلات از روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی استفاده شده است و به‌منظور اعتبارسنجی، پاسخ‌های تحلیل الاستیک با نتایج تحلیل ارئه شده برای حالت الاستیک با توزیع خواص توانی مقایسه شده‌اند. به‌علت وجود ضرایب وابسته به دما، در معادله دیفرانسیل توزیع دما و نیز وجود کرنش‌های خزشی در معادله دیفرانسیل جابه‌جایی هر دو معادله غیرخطی‌اند. پس از این مراحل، بهینه‌سازی در گام‌های تک‌هدفه و چندهدفه و با استفاده از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب انجام شده است تا توزیع مواد هدفمند و پروفیل ضخامت بهینه تعیین شوند. اهداف مطرح شامل کمینه‌سازی وزن دیسک و دستیابی به توزیع ضریب اطمینان مطلوب است. همچنین، متغیرهای طراحی شامل درصد حجمی مواد در جدار داخلی و خارجی دیسک، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت هستند.

2- تعیین خواص معادل

در پژوهش پیش رو از الگوی توزیع توانی مواد استفاده شده است. درصد حجمی مواد در این الگو را می‌توان با رابطه (1) توصیف کرد:

$$V(r)=V_i+(V_o-V_i)\left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i}\right)^{\eta} \tag{1}$$

که در آن Vi و Vo به‌ترتیب بیانگر درصد حجمی ذرات سیلیکون‌کاربید در جداره داخلی و خارجی دیسک و r_i، r_o و r به‌ترتیب نشان‌دهنده شعاع داخلی، خارجی و مطلوب و η نیز تعیین‌کننده پروفیل توزیع مواد هستند.

با توجه به اینکه مواد هدفمند از دو یا چند فاز متفاوت تشکیل شده‌اند و در اکثر مواقع اطلاعات دقیق راجع به مورفولوژی[4] از جمله شکل، اندازه و نحوه توزیع فازهای تشکیل‌دهنده در دسترس نیستند، خواص مؤثر این مواد تنها باید از طریق کسرهای حجمی و مشخصات فازهای تشکیل‌دهنده تعیین شوند. همان‌طور که ذکر شد، برخی از مطالعات صورت گرفته در این زمینه از قانون اختلاط برای تعیین خواص همگن شده استفاده نموده‌اند؛ اما این روش عموماً از دقت کافی برخوردار نیست، زیرا در آن، برهم‌کنش میان فازها در نظر گرفته نمی‌شود.

چندین مدل میکرومکانیکی به‌منظور محاسبه خواص همگن شده مواد

2- Mori-Tanaka
3- Hashin-Shtrikman
4- Morphology

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

کامپوزیتی ارائه شده است. باید خاطر نشان شد که مواد هدفمند نیز به‌عنوان مواد کامپوزیتی جدید با تغییرات خواص پیوسته شناخته می‌شوند. روش‌های خودسازگار[11] و موری-تاناکا[12-15] دو مدل میکرومکانیکی دقیق برای تعیین خواص این مواد هستند. روش دیگر برای محاسبه خواص همگن شده، استفاده از روش المان محدود و یا المان مرزی برای مدل‌سازی ریزساختارها است[16،17]. روش موری-تاناکا براساس فرض پیوسته بودن ماتریس و مدل خودسازگار با فرض پیوسته بودن فاز اضافه شده ارائه شده‌اند. در این بررسی با فرض پیوسته بودن ماتریس از مدل موری-تاناکا استفاده شده است. در این الگو، روابط مربوط به ضریب پواسون و مدول الاستیسیته به‌ترتیب مطابق روابط (2) و (3) بیان می‌شوند:

$$\nu=\frac{3K-2\mu}{6K+2\mu} \tag{2}$$

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu} \tag{3}$$

که در آن، K و μ به‌ترتیب برابر با مدول حجمی و برشی بوده و از روابط (4) و (5) محاسبه می‌شوند:

$$K=\frac{V(K_2-K_1)}{1+(1-\mathrm{V})\dfrac{K_2-K_1}{K_1+\frac{4}{3}\mu_1}}+K_1 \tag{4}$$

$$\mu=\frac{V(\mu_2-\mu_1)}{1+(1-\mathrm{V})\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+f_1}}+\mu_1 \tag{5}$$

که در این رابطه f_1 به‌صورت رابطه (6) تعریف می‌شود.

$$f_1=\frac{\mu_1(9K_1+8\mu_1)}{6(K_1+2\mu_1)} \tag{6}$$

ضرایب رسانش (k) و انبساط حرارتی (α) نیز به‌ترتیب توسط روابط (7) و (8) محاسبه می‌شوند:

$$\frac{k-k_1}{k_2-k_1}=\frac{3k_1V}{3k_1+(1-V)(k_2-k_1)} \tag{7}$$

$$\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\dfrac{1}{K}-\dfrac{1}{K_1}}{\dfrac{1}{K_2}-\dfrac{1}{K_1}} \tag{8}$$

در روابط (4) تا (8) مقادیر با زیرنویس یک مربوط به زمینه کامپوزیت و مقادیر با زیرنویس دو مربوط به ذرات اضافه شده به کامپوزیت است. برای بیان چگالی از قانون اختلاط و همچنین برای تعیین تنش تسلیم معادل در مقاطع مختلف ماده هدفمند، از مدل هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. این مدل دو حد بالا و پایین را پیش‌بینی می‌کند که به‌ترتیب در روابط (9) و (10) مشاهده می‌شوند[18]:

$$S_y=\frac{5V_2}{3+2V_2}S_y^{(2)}+\frac{3V_1}{3+2V_2}S_y^{(1)}\sqrt{1+\frac{2V_2}{3}[1-(\frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}})^2]} \tag{9}$$

$$S_y=\begin{cases} \text{اگر } V_1<1 \text{ و } 1\geq\dfrac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}}>\dfrac{2}{5}\sqrt{1+\dfrac{3V_1}{2}} \text{ باشد، آنگاه} \\ \dfrac{5V_1}{3+2V_1}S_y^{(1)}+\dfrac{3V_2}{3+2V_1}S_y^{(2)}\sqrt{1+\dfrac{2V_1}{3}[1-(\dfrac{S_y^{(1)}}{S_y^{(2)}})^2]} \\ S_y^{(2)}\sqrt{1+\dfrac{3V_1}{2}} \quad \text{اگر } V_1<1 \text{ و } \dfrac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}}\leq\dfrac{2}{5}\sqrt{1+\dfrac{3V_1}{2}} \text{ باشد، آنگاه} \\ S_y^{(1)} \quad \text{اگر } V_1=1 \text{ باشد، آنگاه} \end{cases} \tag{10}$$

در روابط (9) و (10) $S_y^{(1)}$ و $S_y^{(2)}$ به‌ترتیب تنش‌های تسلیم مربوط به فاز ضعیف و قوی بوده و V_1 و V_2 نیز درصدهای حجمی مربوط به هر یک از این مواد هستند. در این بررسی تمامی خواص تابع دما و درصد حجمی ذرات سیلیکون کاربید فرض شده‌اند. علاوه‌بر آن، فرض شده است که دیسک دوار مورد بررسی حاصل ترکیب هدفمند دو ماده آلومینیوم 6061 و سیلیکون‌کاربید باشد. برای توصیف تغییرات خواص فیزیکی این دو ماده با توجه به محدوده دمایی موجود، چندجمله‌ای‌های درجه‌سومی مطابق رابطه (11) برازش شده‌اند که ضرایب آن‌ها برای آلومینیوم و سیلیکون‌کاربید به‌ترتیب در جدول‌های 1 و 2 ارائه شده‌اند.

$$P=\sum_{i=1}^{j}q_i\left(\frac{T-b}{c}\right)^{i-1} \tag{11}$$

در این رابطه، T دما برحسب کلوین، j تعداد جمله‌ها و P نیز می‌تواند هریک از خواص باشد. ضرایب q، b و c نیز از طریق برازش داده‌ها به‌دست می‌آیند.

به‌علت پیچیده‌تر بودن تغییرات تنش تسلیم آلومینیوم با دما، در این مورد از چند جمله‌ای‌های درجه هشت استفاده شده است. ضرایب مربوط به تنش تسلیم نیز در جدول 3 آمده‌اند. بنابر گزارش منابع مختلف [19-21] رابطه شربی نتایج بهتری برای توصیف رفتار خزشی کامپوزیت‌های با پایه آلومینیوم دارد؛ بنابراین، برای توصیف رفتار خزشی از این قانون (رابطه 12) استفاده شده است[21]:

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{c}=[M(\sigma_e-\sigma_0)]^m \tag{12}$$

که در آن σ_e معرف تنش مؤثر است. رابطه شربی شامل ثابت‌های خزشی است که از میان آن‌ها، ثابت m برابر با هشت درنظر گرفته شده است. مقادیر M و σ_0 با رگرسیون براساس نتایج تجربی به‌دست آمده از پژوهش‌های پاندی و همکارانش[21] بر روی کامپوزیت‌های آلومینیوم-سیلیکون‌کاربید به‌دست آمده‌اند. داده‌های تجربی مورد استفاده در جدول 4 آورده شده و نتایج حاصل از رگرسیون در روابط (13) قابل مشاهده است:

$$M=\frac{4.723\ T^{4.98}}{10^{16}\ V^{0.622}}+0.0002096$$
$$\sigma_0=0.01T+0.9531V-0.6361 \tag{13}$$

که در آن T مقدار دمای مطلق به کلوین و V درصد حجمی ذرات SiC هستند. داده‌های لازم برای برازش خواص فیزیکی ارائه شده در جداول 1 تا 3 از منبع [22] برگرفته شده‌اند.

جدول 1 ضرایب و ثوابت چندجمله‌ای‌های برازش شده برای آلومینیوم 6061

P	α(1/K)	k (W/mK)	ρ(kg/m³)	E (GPa)	ν
q_1	$2/748\times10^{-5}$	196/1	2848	62/04	0/3633
q_2	$1/425\times10^{-6}$	2/645	-18/09	-8/675	0/0136
q_3	$-6/024\times10^{-8}$	-5/869	-0/4566	-3/137	0/01065
q_4	$-3/666\times10^{-10}$	-0/00015	-0/08859	-0/9465	$3/382\times10^{-3}$
b	477/2	588/8	483	569/5	569/5
c	77/91	142/5	81/61	133/4	133/4

جدول 2 ضرایب و ثوابت چندجمله‌ای‌های برازش شده برای سیلیکون‌کاربید

P	α(1/K)	k (W/mK)	ρ(kg/m³)	E (GPa)	ν
q_1	$3/825\times10^{-6}$	82/13	3176	$4/355\times10^{2}$	0/1704
q_2	$1/994\times10^{-6}$	-13	-6/347	-3/622	$-4/656\times10^{-4}$
q_3	$-1/079\times10^{-6}$	3/595	-0/1768	$2/153\times10^{-4}$	$-4/046\times10^{-4}$
q_4	$2/251\times10^{-7}$	-0/3391	0/04943	$-8/34\times10^{-4}$	$6/644\times10^{-4}$
b	628/7	618	605/7	608/6	623
c	238	160/2	159	159/2	151/5

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

جدول 3 ضرایب و ثوابت چندجمله‌ای‌های برازش شده برای مقاومت مواد (MPa)

	آلومینیوم 6061	سیلیکون‌کاربید
q_1	31/34	506/2
q_2	-20/21	7/96
q_3	-4/28	-1/98×10-3
q_4	-20/61	-9/16×10-4
q_5	32/48	0
q_6	17/94	0
q_7	-25/25	0
q_8	-3/71	0
q_9	5/34	0
B	587/1	618
C	148/6	160/2

جدول 4 نتایج تجربی مورد استفاده برای رگرسیون[20،23]

T (K)	V (%)	M ($s^{-1/n}$ / MPa)	σ_0 (MPa)
620	10	0/00963	15/24
620	20	0/00594	24/83
620	30	0/00518	34/32
675	20	0/00897	24/74
725	20	0/01295	25/72

3- تعیین توزیع دما

معادله انتقال حرارت رسانش در مختصات استوانه‌ای و در عدم وجود منبع حرارتی، به‌صورت رابطه (14) بیان می‌شود:

$$hk\frac{d^2T}{dr^2}+(\frac{hk}{r}+\frac{d}{dr}(hk))\frac{dT}{dr}=0 \tag{14}$$

که در آن T، h و k به‌ترتیب بیانگر دما، ضخامت دیسک و ضریب رسانش هستند.

با توجه به اینکه ضریب رسانش موجود در معادله دیفرانسیل (14) وابسته به دما و درصد حجمی مواد اضافه شده است ، معادله دیفرانسیل مذکور غیرخطی است. برای حل این معادله از روش تکرار با حدس اولیه توزیع خطی استفاده شده است. شرایط مرزی مفروض برای معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما، شرایط دما ثابت در جدار داخلی و خارجی است. همگرایی حل با استفاده از کنترل مقدار خطای نسبی مطابق رابطه (15) صورت می‌گیرد:

$$\left|\frac{\max(T_j-T_{j-1})}{T_j}\right|<\lambda \tag{15}$$

که در آن j نشانگر شمار تکرار و l مقدار خطای نسبی مورد قبول است که برابر 10^{-3} فرض شده است.

4- تعیین میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش - کرنش

به‌منظور تحلیل ترمومکانیکی، کرنش‌ها برابر مجموع کرنش‌های الاستیک، حرارتی و خزشی درنظر گرفته شده‌اند. تحلیل در مختصات استوانه‌ای با فرض وجود تقارن محوری انجام و با توجه به ضخامت کم دیسک شرایط تنش صفحه‌ای درنظر گرفته شده است. با توجه به این فرضیات می‌توان رابطه (16) را نوشت:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{1-\upsilon^2}[\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta}-\alpha(1+\nu)\Delta T-(\varepsilon_{rr}^c+\nu\varepsilon_{\theta\theta}^c)]$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{1-\upsilon^2}[\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr}-\alpha(1+\nu)\Delta T-(\varepsilon_{\theta\theta}^c+\nu\varepsilon_{rr}^c)] \tag{16}$$

در این رابطه σ، ε و ΔT به‌ترتیب معرف تنش، کرنش و اختلاف دما هستند؛ همچنین، زیرنویس‌های rr و θθ به‌ترتیب جهت‌های شعاعی و مماسی را نشان می‌دهند و حرف بالانویس c به مقادیر خزشی اشاره دارد.

روابط کرنش جابه‌جایی نیز به‌صورت رابطه (17) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r} \tag{17}$$

معادله تعادل نیز برای دیسک دواری با ضخامت متغیر با استفاده از رابطه (18) بیان می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rh\sigma_{rr})-\frac{h\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho rh\omega^2=0 \tag{18}$$

که در آن، ω و ρ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و چگالی هستند. با جانشانی روابط (17) در روابط (16) و سپس جانشانی حاصل در رابطه (18)، معادله دیفرانسیل (19) برای توصیف جابه‌جایی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارهای ترمومکانیکی به‌دست می‌آید. در این رابطه تمامی خواص ترمومکانیکی تابع دما و درصد حجمی مواد درنظر گرفته شده‌اند.

$$C_1\frac{d^2u}{dr^2}+C_2\frac{du}{dr}+C_3u+C_4=0 \tag{19}$$

ضرایب C_1 تا C_4 در رابطه (19) نیز به صورت رابطه (20) محاسبه می‌شوند:

$$C_1=hE$$

$$C_2=E\frac{dh}{dr}+\frac{hE}{r}+(1-\nu^2)h\frac{d}{dr}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)$$

$$C_3=\frac{\nu E}{r}\frac{dh}{dr}-\frac{hE}{r^2}+(1-\nu^2)\frac{\nu h}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)+\frac{hE}{r}\frac{d\nu}{dr}$$

$$C_4=-(1+\nu)[\alpha h\frac{dE}{dr}+\alpha E\frac{dh}{dr}+hE\frac{d\alpha}{dr}]T-\alpha(1+\nu)\mathrm{h}E\frac{dT}{dr}$$
$$-[\mathrm{E}\frac{dh}{dr}+\frac{hE(1-\nu)}{r}+(1-\nu^2)h\frac{d}{dr}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)]\varepsilon_{rr}^c$$
$$-[\nu E\frac{dh}{dr}+hE\frac{d\nu}{dr}-\frac{hE(1-\nu)}{r}+\nu(1-\nu^2)h\frac{d}{dr}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)]\varepsilon_{\theta\theta}^c$$
$$-Eh(\frac{d\varepsilon_{rr}^c}{dr}+\nu\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}^c}{dr})+(1-\nu^2)\rho\,\mathrm{r}h\omega^2 \tag{20}$$

شرایط مرزی درنظر گرفته شده برای حل معادله (19) به‌صورت جابه‌جایی آزاد در شعاع داخلی و خارجی دیسک هستند.

معادلات دیفرانسیل (14) و (19) در جهت افزایش دقت حل، بی‌بعدسازی شده‌اند. بدین منظور از تغییر متغیرهای رابطه (21) استفاده می‌شود:

$$\bar{T}=\frac{T}{\hat{T}}\ ,\ \hat{T}=\frac{\rho_0r_0^2\omega^2}{\alpha_oE_o}\ ,\ \bar{U}=\frac{u}{\hat{u}}\ ,\ \hat{u}=\frac{\rho_0r_0^3\omega^2}{E_o}$$

$$\bar{\varepsilon}^c=\frac{\varepsilon^c}{\hat{\varepsilon}^c}\ ,\ \hat{\varepsilon}^c=\frac{\rho_0r_0^2\omega^2}{E_o}$$

$$\bar{E}=\frac{E}{E_o},\ \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_o},\ \bar{k}=\frac{k}{k_o},\ \bar{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha_o},\ \bar{R}=\frac{r}{r_o},\ \bar{H}=\frac{h}{h_o} \tag{21}$$

پس از اعمال بی‌بعدسازی، معادله (14) به‌شکل رابطه (22) در می‌آید:

$$\bar{H}\bar{K}\frac{d^2\bar{T}}{d\bar{R}^2}+(\frac{\bar{H}\bar{K}}{\bar{R}}+\frac{d}{d\bar{R}}(\bar{H}\bar{K}))\frac{d\bar{T}}{d\bar{R}}=0 \tag{22}$$

همچنین، معادله دیفرانسیل (19) به رابطه (23) تبدیل می‌شود:

$$\bar{C}_1\frac{d^2\bar{U}}{d\bar{R}^2}+\bar{C}_2\frac{d\bar{U}}{d\bar{R}}+\bar{C}_3\bar{U}+\bar{C}_4=0 \tag{23}$$

که در آن ضرایب $\bar{C}_1$تا $\bar{C}_4$ به صورت رابطه (24) به‌دست می‌آیند:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

$$\bar{C}_1=\bar{H}\bar{E}$$
$$\bar{C}_2=\bar{E}\frac{d\bar{H}}{d\bar{R}}+\frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}}+(1-\nu^2)\bar{H}\frac{d}{d\bar{R}}\left(\frac{\bar{E}}{1-\nu^2}\right)$$
$$\bar{C}_3=\frac{\nu\bar{E}}{\bar{R}}\frac{d\bar{H}}{d\bar{R}}-\frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}^2}+(1-\nu^2)\frac{\nu\bar{H}}{\bar{R}}\frac{d}{d\bar{R}}\left(\frac{\bar{E}}{1-\nu^2}\right)+\frac{\bar{H}\bar{E}}{\bar{R}}\frac{d\nu}{d\bar{R}}$$
$$\bar{C}_4=-(1+\nu)[\bar{\alpha}\bar{H}\frac{d\bar{E}}{d\bar{R}}+\bar{\alpha}\bar{E}\frac{d\bar{H}}{d\bar{R}}+\bar{H}\bar{E}\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{R}}]\bar{T}-\bar{\alpha}(1+\nu)\bar{H}\bar{E}\frac{d\bar{T}}{d\bar{R}}$$
$$-[\bar{E}\frac{d\bar{H}}{d\bar{R}}+\frac{\bar{H}\bar{E}(1-\nu)}{\bar{R}}+(1-\nu^2)\bar{H}\frac{d}{d\bar{R}}\left(\frac{\bar{E}}{1-\nu^2}\right)]\ \bar{\varepsilon}_{rr}^{c}$$
$$-[\nu\bar{E}\frac{d\bar{H}}{d\bar{R}}+\bar{H}\bar{E}\frac{d\nu}{d\bar{R}}-\frac{\bar{H}\bar{E}(1-\nu)}{\bar{R}}+\nu(1-\nu^2)\bar{H}\frac{d}{d\bar{R}}\left(\frac{\bar{E}}{1-\nu^2}\right)]\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{c}$$
$$-\bar{E}\bar{H}(\frac{d\bar{\varepsilon}_{rr}^{c}}{d\bar{R}}+\nu\frac{d\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{c}}{d\bar{R}})+(1-\nu^2)\bar{\rho}\bar{R}\bar{H} \tag{24}$$

5- روش حل شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی

حل تحلیلی دو معادله دیفرانسیل غیرخطی (14) و (19) برای تمامی حالات بعید به‌نظر می‌رسد، بدین منظور، از روش‌های شبه‌تحلیلی یا عددی استفاده می‌شود. در این پژوهش از روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی[4] استفاده شده است. در این روش دیسک به n_d حلقه با ضخامت معلوم تقسیم شده و خواص مواد در هر حلقه ثابت درنظر گرفته می‌شود. این امر معادلات دیفرانسیل موجود را به مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند که حل تحلیلی آن موجود است. شکل 1 این تقسیم‌بندی را نشان می‌دهد. به‌منظور یافتن ثوابت انتگرال‌گیری حاصل از حل، باید در مرز المان‌ها، شرایط پیوستگی اعمال شود. این شرایط برای معادله دیفرانسیل (14) شرایط پیوستگی دمایی مرتبه اول و دوم هستند که شامل برابری مقادیر و شیب تغییرات دما در مرز المان‌هاست که با روابط (25) بیان می‌شوند:

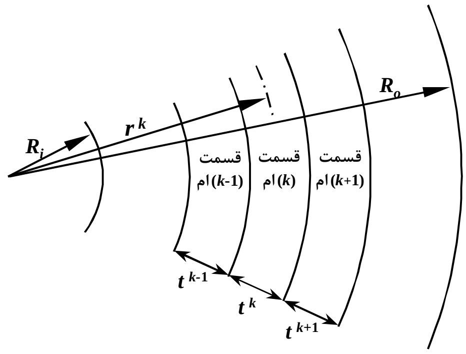
$$\bar{T}(\mathrm{r})\Big|_{r=r^k+\frac{t^k}{2}}=\bar{T}(\mathrm{r})\Big|_{r=r^{k+1}-\frac{t^{k+1}}{2}}$$
$$\frac{d\bar{T}(\mathrm{r})}{d\bar{R}}\bigg|_{r=r^k+\frac{t^k}{2}}=\frac{d\bar{T}(\mathrm{r})}{d\bar{R}}\bigg|_{r=r^{k+1}-\frac{t^{k+1}}{2}} \tag{25}$$

شرایط پیوستگی برای معادله دیفرانسیل (19) نیز شامل برابری جابه‌جایی‌ها و شیب جابه‌جایی‌ها در مرز المان‌هاست. این شرایط با روابط (26) بیان می‌شود:

$$\bar{U}(\mathrm{r})\Big|_{r=r^k+\frac{t^k}{2}}=\bar{U}(\mathrm{r})\Big|_{r=r^{k+1}-\frac{t^{k+1}}{2}}$$
$$\frac{d\bar{U}(\mathrm{r})}{d\bar{R}}\bigg|_{r=r^k+\frac{t^k}{2}}=\frac{d\bar{U}(\mathrm{r})}{d\bar{R}}\bigg|_{r=r^{k+1}-\frac{t^{k+1}}{2}} \tag{26}$$

با توجه به اینکه C4 در معادلات (20)، شامل کرنش‌های خزشی است، برای حل معادله دیفرانسیل (19) در طول زمان، معادله مذکور در گام‌های زمانی کوچک حل می‌شود. کرنش‌های خزشی در گام اول صفر بوده و در هر گام بعدی برابر حاصل‌جمع مقادیر کرنش در گام‌های قبلی به‌علاوه میزان رشد آن در گام مذکور است. مقدار رشد کرنش‌ها را می‌توان با رابطه پرندتل-راس به‌دست آورد. این روابط با معادلات (27) ارائه می‌شوند[8]:

$$\Delta\varepsilon_{rr}^{c}=\frac{\Delta\varepsilon^{c}}{2\sigma_e}[2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}]$$
$$\Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{c}=\frac{\Delta\varepsilon^{c}}{2\sigma_e}[2\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}]$$
$$\Delta\varepsilon_{zz}^{c}=-\Delta\varepsilon_{rr}^{c}-\Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{c} \tag{27}$$



شکل 1 تقسیم‌بندی شعاعی دیسک

در روابط (27)، $\Delta\varepsilon^c$ و σ_e به‌ترتیب، رشد کرنش خزشی معادل و تنش مؤثر بوده و از طریق معادلات (28) به‌دست می‌آیند:

$$\Delta\varepsilon^{c}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\Delta\varepsilon_{rr}^{c})^2+(\Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{c})^2+(\Delta\varepsilon_{zz}^{c})^2}$$
$$\sigma_e=\sqrt{{\sigma_{rr}}^2+{\sigma_{\theta\theta}}^2-\sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr}} \tag{28}$$

به‌منظور تعیین نرخ کرنش خزشی، از معادلات اساسی مختلف می‌توان استفاده نمود. با توجه به اینکه رفتار خزشی کامپوزیت‌های پایه آلومینیوم می‌تواند با رابطه شربی (رابطه 29) به‌خوبی پیش‌بینی شود، از این رابطه در این تحلیل استفاده شده است[21]:

$$\Delta\varepsilon^{c}=[M(\sigma_e-\sigma_0)]^m\Delta t \tag{29}$$

حل براساس روش عددی تکراری مندلسون انجام می‌شود تا تاریخچه تنش-کرنش دیسک به‌دست آید. برای این منظور، در هر مرحله زمانی، ابتدا یک مقدار حدس اولیه برای مقدار رشد کرنش خزشی تعیین می‌شود و پس از حل معادله جابه‌جایی، مقدار کرنش‌های کل و تنش‌های جاری به‌دست می‌آیند. با داشتن این مقادیر، تغییر کرنش خزشی به‌کمک روابط (28) و (29) به‌دست می‌آیند. با داشتن تنش موثر و کرنش خزشی، جزء موثر و تنش‌های جاری از معادلات پراندتل-راس (27)، مقدار کرنش‌های خزشی جزء جدید به‌دست آمده و کرنش‌های جزء خزشی گام پیشین اصلاح می‌شوند و تکرار این فرآیند تا همگرایی الگوریتم ادامه می‌یابد. پس از محاسبه تنش مؤثر، ضریب اطمینان به‌صورت رابطه (30) محاسبه می‌شود:

$$SF(r)=\frac{S_y(r)}{\sigma_e(r)} \tag{30}$$

6- اعتبارسنجی

6-1- بررسی اعتبار روش‌های همگن‌سازی مورد استفاده

برای اعتبارسنجی روش‌های همگن‌سازی، نتایج به‌دست‌آمده از آن‌ها با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن برای مواد کامپوزیتی با توزیع یکنواخت مواد مقایسه شده است. نخست به بررسی روش موری-تاناکا پرداخته می‌شود. داده‌های مقایسه شده در این مورد در جدول 5 خلاصه شده‌اند. باید توجه داشت، روش همگن‌سازی موری-تاناکا با فرض پیوسته بودن ماتریس و گسسته بودن ذرات اضافه شده صحت دارد و بررسی‌های متعددی در زمینه استفاده از مدل موری-تاناکا در تعیین خواص معادل در مواد کامپوزیتی نیز مؤید دقت بالای این مدل برای درصد حجمی پایین و پیوسته بودن ماتریس کامپوزیت است. برای پیش‌بینی تنش تسلیم در مقاطع مختلف ماده هدفمند از مدل هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. مقایسه نتایج پیش‌بینی شده توسط این مدل با نتایج تجربی نیز در جدول 6 قابل مشاهده است. با توجه به تطابق بهتر نتایج حد پایین مدل هاشین-اشتریکمن با نتایج تجربی و همچنین در جهت

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

اطمینان، از این حالت استفاده شده است. با توجه به حدود معرفی شده در مطالعات مختلف برای مدل موری-تاناکا و همچنین محدودیت داده‌های معتبر برای محاسبه ضرایب خزشی، بیشینه درصد حجمی مواد در این پژوهش برابر 35 درصد فرض شده است.

6-2- بررسی اعتبار روش‌های حل معادلات دیفرانسیل

باتوجه به اینکه وجود حل تحلیلی برای حالت کلی معادلات ترمومکانیکی غیرخطی در حالت کلی بعید به‌نظر می‌رسد، برای اعتباربخشی به روش‌های حل این معادلات به کمک روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی، ابتدا پاسخ‌های حل تحلیلی برای معادلات حرارتی و مکانیکی در حالت الاستیک و با صرف‌نظر از خواص وابسته به دما به‌دست آمده است. به‌منظور ساده‌سازی معادلات، در حل تحلیلی از روش‌های همگن‌سازی صرف‌نظر شده و تغییرات خواص فیزیکی به‌صورت توانی درنظر گرفته شده‌اند (رابطه 31):

$$P(r)=P_o\left(\frac{r}{r_o}\right)^{\varphi} \tag{31}$$

در رابطه (31)، P خاصیت دلخواه مورد نظر و P_o مقدار خاصیت مورد نظر در شعاع خارجی است. توان φ متناظر با هریک از خواص نیز در جدول 7 ارائه شده است. در این بخش و برای حل تحلیلی فرض شده است که تمامی خواص به‌غیر از ضریب پواسون به‌صورت توانی تغییر کنند. ضخامت دیسک دوار نیز به شکل توانی مطابق رابطه (32) تغییر می‌کند:

$$h(r)=h_o\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-\zeta} \tag{32}$$

که در آن، ho ضخامت دیسک در شعاع خارجی است. پاسخ‌های به‌دست آمده از حل تحلیلی با نتایج حاصل از حل شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی شده مقایسه شده‌اند.

7- حل تحلیلی معادله توزیع دما

با جانشانی روابط موجود برای خواص و ضخامت در معادله دیفرانسیل (22) می‌توان رابطه (33) را نوشت:

$$\frac{d}{dr}\left\{\bar{R}^{-\zeta+\beta+1}\frac{d\bar{T}}{d\bar{R}}\right\}=0 \tag{33}$$

جدول 5 مقایسه نتایج تجربی با نتایج مدل موری-تاناکا

خاصیت مورد مطالعه	درصد حجمی ذرات SiC	دما(K)	مقدار موجود در منابع	مقدار محاسبه شده	منبع
k (W/m.K)	20	288	162٫69	156٫44	[24]
k (W/m.K)	20	397	160٫2	165٫32	[24]
E (MPa)	10	300	81	86٫24	[25]
E (MPa)	15	300	89	92٫76	[25]
α (1/K)	15	300	$22٫3\times10^{-6}$	$19٫4\times10^{-6}$	[26]

جدول 6 مقایسه نتایج تجربی با نتایج مدل هاشین-اشتریکمن در پیش‌بینی تنش تسلیم

درصد حجمی ذرات SiC	نتایج مدل هاشین-اشتریکمن حد پایین (MPa)	نتایج مدل هاشین-اشتریکمن حد بالا (MPa)	مقدار موجود در منابع (MPa)	منبع
10	307٫32	311٫54	278	[25]
10	307٫32	311٫54	280٫3	[27]
15	316٫52	322٫88	343	[25]
20	325٫82	334٫35	340٫2	[27]
30	344٫71	357٫71	392	[27]

جدول 7 نمادهای مورد استفاده در حل تحلیلی

خاصیت	k	E	α	ρ
نماد توان	β	γ	χ	μ

با دو مرحله انتگرال‌گیری در راستای شعاع از رابطه (33) رابطه (34) به‌دست می‌آید:

$$\bar{T}(\bar{R})=\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}^{\zeta-\beta}+a_2 \tag{34}$$

در رابطه فوق مقادیر a_1 و a_2 ثوابت انتگرال‌گیری هستند که با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. با فرض شرایط دما ثابت در جدار داخلی و خارجی می‌توان رابطه (35) را نوشت:

$$\bar{T}(\bar{R}_i)=\bar{T}_i,\quad \bar{T}(\bar{R}_o)=\bar{T}_o \tag{35}$$

با اعمال این شرایط، ثوابت انتگرال‌گیری به‌صورت رابطه (36) خواهند بود:

$$a_1=\frac{\left(\bar{T}_o-\bar{T}_i\right)(\zeta-\beta)}{1-\left(\frac{\bar{R}_i}{\bar{R}_o}\right)^{\zeta-\beta}},\ a_2=\bar{T}_o-\frac{\left(\bar{T}_o-\bar{T}_i\right)}{1-\left(\frac{\bar{R}_i}{\bar{R}_o}\right)^{\zeta-\beta}} \tag{36}$$

به این ترتیب توزیع دمای به‌دست آمده را می‌توان با توزیع دمای به‌دست آمده از روش شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی مقایسه نمود.

8- حل تحلیلی معادله جابه‌جایی

با جانشانی خواص و پروفیل ضخامت مفروض در معادله دیفرانسیل (19) می‌توان ضرایب معادله مذکور را به‌صورت روابط (37) به‌دست آورد. شایان ذکر است که برای حالت الاستیک کرنش‌های خزشی صفرند.

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_1=\bar{R}^{-\zeta+\gamma}\\
&\bar{C}_2=(\gamma+1-\zeta)\bar{R}^{-\zeta+\gamma-1}\\
&\bar{C}_3=(\nu\gamma-\nu\zeta-1)\bar{R}^{-\zeta+\gamma-2}\\
&\bar{C}_4=-\left((\gamma+\chi-\zeta)\bar{T}+\bar{R}\frac{d\bar{T}}{d\bar{R}}\right)(1+\nu)\bar{R}^{-\zeta+\gamma+\chi-1}\\
&+(1-\nu^2)\bar{R}^{-\zeta+\mu+1}
\end{aligned} \tag{37}$$

در رابطه (37)، T توزیع دمای به‌دست آمده از رابطه (34) است. با جانشانی این مقدار می‌توان ضریب C_4 را به‌شکل رابطه (38) نوشت:

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_4=-\left(\frac{(\gamma+\chi-\beta)}{(\zeta-\beta)}a_1\bar{R}^{\zeta-\beta}+(\gamma+\chi-\zeta)a_2\right)\\
&\times(1+\nu)\bar{R}^{-\zeta+\gamma+\chi-1}+(1-\nu^2)\bar{R}^{-\zeta+\mu+1}
\end{aligned} \tag{38}$$

معادله دیفرانسیل (19) دارای دو قسمت جواب عمومی و خصوصی است که با درنظر گرفتن قسمت همگن این معادله می‌توان معادله (39) را نوشت:

$$\begin{aligned}
&\bar{R}^{-\zeta+\gamma}\frac{d^2\bar{U}}{d\bar{R}^2}+(\gamma+1-\zeta)\bar{R}^{-\zeta+\gamma-1}\frac{d\bar{U}}{d\bar{R}}\\
&+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)\bar{R}^{-\zeta+\gamma-2}\bar{U}=0
\end{aligned} \tag{39}$$

معادله دیفرانسیل (39) معادله دیفرانسیل اولر-کوشی است و با استفاده از تغییر متغیری به‌صورت رابطه (40) به معادله (41) می‌انجامد:

$$\bar{Z}=\ln(\bar{R}) \tag{40}$$

$$\frac{d^2\bar{U}}{d\bar{Z}^2}+(\gamma-\zeta)\frac{d\bar{U}}{d\bar{Z}}+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)\bar{U}=0 \tag{41}$$

معادله دیفرانسیل (41) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است که معادله مشخصه آن به شکل رابطه (42) است:

$$q^2+(\gamma-\zeta)q+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)=0 \tag{42}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

با حل این معادله جبری، ریشه‌های معادله مشخصه به‌صورت معادله (43) به‌دست می‌آیند:

$$q_{1,2}=\frac{-(\gamma-\zeta)\pm\sqrt{(\gamma-\zeta)^2-4(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}}{2} \tag{43}$$

برای تعیین حقیقی یا مختلط بودن ریشه‌های رابطه (42)، باید عبارت زیر رادیکال تعیین علامت شود. با توجه به بازه ضریب پواسون، عبارت زیر رادیکال در رابطه (43) همواره مثبت و ریشه‌های معادله مشخصه، اعدادی حقیقی خواهند بود. به‌دلیل حقیقی بودن ریشه‌های معادله مشخصه، جواب‌های قسمت همگن معادله به‌صورت رابطه (44) قابل بیان است:

$$\bar{U}_h=a_3\bar{U}_1+a_4\bar{U}_2=a_3\bar{R}^{q_1}+a_4\bar{R}^{q_2} \tag{44}$$

ضرایب a_3 و a_4 ثوابت انتگرال‌گیری هستند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. برای تعیین جواب‌های خصوصی، روش لاگرانژ به‌کار گرفته شده که برای استفاده از آن، نخست باید رونسکین جواب‌های همگن به‌دست آید (رابطه 45):

$$W=\begin{vmatrix}\bar{U}_1 & \bar{U}_2\\ \bar{U}_1' & \bar{U}_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{R}^{q_1} & \bar{R}^{q_2}\\ q_1\bar{R}^{q_1-1} & q_2\bar{R}^{q_2-1}\end{vmatrix}=(q_2-q_1)\bar{R}^{q_1+q_2-1} \tag{45}$$

با استفاده از روش لاگرانژ، جواب قسمت ناهمگن به‌صورت رابطه (46) قابل بیان است:

$$\bar{U}_p=-\bar{U}_1\int\frac{\bar{U}_2(-\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1})}{W}d\bar{R}+\bar{U}_2\int\frac{\bar{U}_1(-\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1})}{W}d\bar{R} \tag{46}$$

با جانشانی روابط مربوط و انتگرال‌گیری می‌توان رابطه (47) را نوشت:

$$\begin{aligned}\bar{U}_p=&\frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-q_1-\gamma+3)(\mu-q_2-\gamma+3)}\bar{R}^{\mu-\gamma+3}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi-q_1+1)(\chi-q_2+1)}\bar{R}^{\chi+1}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)(\zeta-\beta+\chi-q_1+1)(\zeta-\beta+\chi-q_2+1)}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi+1}\end{aligned} \tag{47}$$

با توجه به رابطه (42) می‌توان رابطه (48) را نوشت:

$$\begin{aligned}&q_1+q_2=-(\gamma-\zeta),\\&q_1\,q_2=(\nu\gamma-\nu\zeta-1)\end{aligned} \tag{48}$$

با جانشانی روابط (48) در رابطه (47) می‌توان رابطه (49) را داشت:

$$\begin{aligned}\bar{U}_p=&\frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+3}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\chi+1}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi+1}\end{aligned} \tag{49}$$

در نهایت جواب کل معادله دیفرانسیل به‌صورت رابطه (50) خواهد بود:

$$\bar{U}=a_1\bar{U}_1+a_2\bar{U}_2+\bar{U}_p \tag{50}$$

در این مرحله ثوابت انتگرال‌گیری را می‌توان با اعمال شرایط مرزی محاسبه نمود. با جانشانی جواب‌های معادلات دیفرانسیل توزیع دما و جابه‌جایی در روابط (16)، تنش‌های شعاعی و مماسی به‌صورت رابطه (51) هستند:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr}=&\Big\{\frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+2}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\chi}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi}\\&-\bar{R}^{\chi}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}^{\zeta-\beta}+a_2\right]+a_3(q_1+\nu)\bar{R}^{q_1-1}+a_4(q_2+\nu)\bar{R}^{q_2-1}\Big\}\frac{\bar{R}^{\gamma}}{1-\upsilon^2}\\\bar{\sigma}_{\theta\theta}=&\Big\{\frac{-(\mu\nu-\gamma\nu+3\nu+1)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\mu-\gamma+2}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi\nu+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}^{\chi}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta\nu-\beta\nu+\chi\nu+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\bar{R}^{\zeta-\beta+\chi}\\&-\bar{R}^{\chi}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}^{\zeta-\beta}+a_2\right]\\&+a_3(1+q_1\nu)\bar{R}^{q_1-1}+a_4(1+q_2\nu)\bar{R}^{q_2-1}\Big\}\frac{\bar{R}^{\gamma}}{1-\upsilon^2}\end{aligned} \tag{51}$$

شرایط مرزی جابه‌جایی آزاد در جداره داخلی و خارجی در رابطه (52) آورده شده است:

$$\begin{aligned}&\bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_i)=0,\\&\bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_o)=0\end{aligned} \tag{52}$$

با اعمال این رابطه شرایط مرزی تعیین می‌شوند. با توجه به وضعیت تنش صفحه‌ای، تنش مؤثر با استفاده از رابطه (28) محاسبه می‌شود (روابط (53 و 54).

$$\begin{aligned}a_4=&\frac{-1}{(q_2+\nu)\bar{R}_o^{\,q_2-1}}\\&\times\Big\{\frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}_o^{\,\mu-\gamma+2}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\bar{R}_o^{\,\chi+1}\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\\&\times\bar{R}_o^{\,\zeta-\beta+\chi+1}\\&+a_3(q_1+\nu)\bar{R}_o^{\,q_1-1}\Big\}\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}a_3=&\frac{-1}{(q_1+\nu)\left[\frac{\bar{R}_o^{\,q_1-1}}{\bar{R}_o^{\,q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\,q_1-1}}{\bar{R}_i^{\,q_2-1}}\right]}\\&\times\Big\{\frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\left[\frac{\bar{R}_o^{\,\mu-\gamma+2}}{\bar{R}_o^{\,q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\,\mu-\gamma+2}}{\bar{R}_i^{\,q_2-1}}\right]\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)}\left[\frac{\bar{R}_o^{\,\chi+1}}{\bar{R}_o^{\,q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\,\chi+1}}{\bar{R}_i^{\,q_2-1}}\right]\\&+\frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]}\\&\times\left[\frac{\bar{R}_o^{\,\zeta-\beta+\chi+1}}{\bar{R}_o^{\,q_2-1}}-\frac{\bar{R}_i^{\,\zeta-\beta+\chi+1}}{\bar{R}_i^{\,q_2-1}}\right]\\&-\frac{\bar{R}_o^{\,\chi}}{\bar{R}_o^{\,q_2-1}}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}_o^{\,\zeta-\beta}+a_2\right]\\&+\frac{\bar{R}_i^{\,\chi}}{\bar{R}_i^{\,q_2-1}}(1+\nu)\left[\frac{a_1}{(\zeta-\beta)}\bar{R}_i^{\,\zeta-\beta}+a_2\right]\Big\}\end{aligned} \tag{54}$$

9- بهینه‌سازی چندهدفه

معمولاً، طراحی مهندسی شامل مجموعه‌ای از اهداف و معیارهاست. در صورت تضاد اهداف، یک جواب بهینه یکتا برای بهینه‌سازی وجود نداشته و حل مسئله بهینه‌سازی مستلزم استفاده از روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه است. شکل کلی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به‌صورت رابطه (55) بیان می‌شود:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

$$
\begin{aligned}
&J(x,p)=[\ J_1,\dots,J_n]\\
&h(x,p)=0\\
&g(x,p)\le 0\\
&x_{i,LB}\le x_i\le x_{i,UB}\quad (i=1,\dots,m)\\
&x=[x_1,\dots,x_i,\dots,x_m]\\
&h=[h_1(x),\dots,h_{r1}(x)]\\
&g=[g_1(x),\dots,g_{r2}(x)]
\end{aligned}
\tag{55}
$$

که در آن J ، x ، p و n به‌ترتیب بردار توابع هدف، بردار متغیرهای طراحی، بردار ثوابت و تعداد اهداف هستند که هر متغیر طراحی بین دو حد پایین ($x_{i,LB}$) و بالا ($x_{i,UB}$) محدود شده است. بهینه‌سازی ممکن است شامل دسته‌ای از قیود تساوی (h) و نامساوی (g) باشد. در این روابط r_1 و r_2 به‌ترتیب نشان‌دهنده تعداد قیود تساوی و نامساوی هستند. در این بررسی، مسئله با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب[1] حل شده است.

9-1- الگوریتم ژنتیکی چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب

الگوریتم ژنتیکی یک روش جستجو و بهینه‌سازی بر پایه انتخاب طبیعی است که جمعیت داده‌ها را تحت قانون انتخابی مشخصی بهبود می‌دهد. در این بررسی برای حالت تک‌هدفه از الگوریتم ژنتیکی پیوسته تک‌هدفه و برای مسئله چندهدفه از الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب استفاده شده است. برای بهینه‌سازی با این الگوریتم ابتدا با توجه به دامنه طراحی باید یک جمعیت اولیه از متغیرهای طراحی تولید شود، سپس، توابع هدف به‌ازای جمعیت موجود محاسبه می‌شود. در مرحله بعدی مقادیر یکی از اهداف با توجه به نتیجه مورد انتظار مرتب شده، جمعیت و مقادیر هدف دیگر نیز متناظر با ترتیب مقادیر این هدف مرتب می‌شوند. سپس، داده‌های نامغلوب شناسایی، رتبه‌بندی و از میان جمعیت جدا می‌شوند و این روند برای تمام جمعیت اعمال می‌شود. برای توزیع یکنواخت‌تر داده‌ها، از اشتراک شایستگی[2] استفاده می‌شود. بدین منظور ابتدا باتوجه به رابطه (56) فاصله اقلیدسی بین جفت جواب x و y در فضای بی‌بعد بین صفر و یک محاسبه می‌شود[28]:

$$dj(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{J_i(x)-J_i(y)}{J_i^{\max}-J_i^{\min}}\right)^2}\tag{56}$$

که در آن، $J_i^{\max}$ و $J_i^{\min}$ به‌ترتیب برابر بیشینه و کمینه مقادیر تابع هدف J_i و n تعداد اهداف هستند. سپس، مقدار شایستگی[3] برای هر حل x در نسل t به‌صورت رابطه (57) محاسبه می‌شود[28]:

$$nc(x,t)=\sum\max\left\{\frac{\sigma_{share}-dj(x,y)}{\sigma_{share}},0\right\}\tag{57}$$

مقدار s_{share} با رابطه (58) تعیین می‌شود[29]:

$$\sigma_{share}=\frac{r}{\sqrt[n]{q}}=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(J_{k,\max}-J_{k,\min})^2}}{2\sqrt[n]{q}}\tag{58}$$

که در آن q تعداد نقاط اوج فضای حل است. پس از انجام محاسبات، تابع هدف جدید برای هر رتبه به شکل رابطه (59) تعریف می‌شود[28]:

$$f^*(x,t)=\frac{f(x,t)}{nc(x,t)}\tag{59}$$

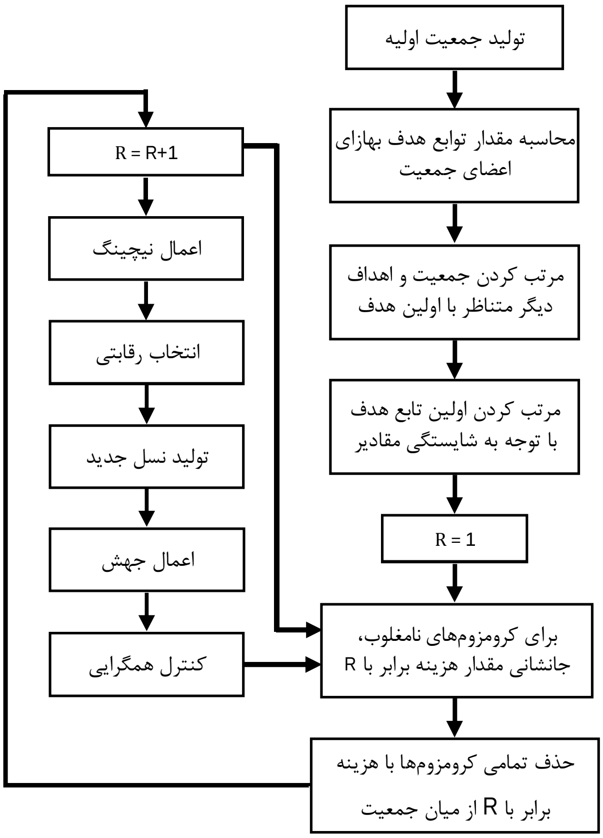
در مرحله بعد، نیمی از داده‌های با شایستگی کمتر حذف می‌شوند، برای تولید داده‌های جدید، نخست باید والدین انتخاب شوند که برای این منظور از روش انتخاب رقابتی استفاده شده است. پس از انتخاب والدین با استفاده از عملگر تقاطع تک‌نقطه‌ای[4] داده‌های جدید تولید می‌شوند. با اعمال عملگر جهش از همگرایی الگوریتم به کمینه محلی جلوگیری می‌شود. نرخ جهش در این پژوهش برابر با 0/02 درنظر گرفته شده است. پس از این مرحله، مقدار تابع هدف به‌ازای هریک از داده‌های جدید محاسبه شده و مراحل فوق تا همگرایی الگوریتم ادامه می‌یابد. شایان ذکر است تعداد اعضای جمعیت در بهینه‌سازی تک‌هدفه برابر با 600 و در بهینه‌سازی چندهدفه برابر با 1000 درنظر گرفته شده است. شکل 2 فلوچارت مراحل این الگوریتم را نشان می‌دهد که در آن R بیانگر رتبه منتسب به هر کروموزوم است.

10- فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی

در این بررسی با استفاده از روش الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب به تعیین توزیع بهینه مواد و پروفیل ضخامت دیسک پرداخته می‌شود. توابع هدف و قید مطرح در مسئله به‌صورت رابطه (60) هستند:

$$
\begin{aligned}
&J^{(1)}=\min\ m_{disc}\\
&\quad=\min\ \int 2\pi r h(r)\rho(r)t(r)dr\\
&J^{(2)}=\min\ (SF_{\max}(t)-SF_{\min}(t))\\
&J^{(3)}=\max\ (SF_{\min}(t))\\
&g_1:\min(SF(t))\ge\alpha\\
&g_1:\max(SF_{\max}(t)-SF_{\min}(t))\le\beta
\end{aligned}
\tag{60}
$$

که در آن، m جرم دیسک است. چنان‌که مشاهده می‌شود، توابع دوم و سوم و همچنین هر دو قید وابسته به زمان هستند.



شکل 2 فلوچارت الگوریتم ژنتیکی با مرتب‌سازی نامغلوب

1- Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)
2- Fitness sharing
3- Niche count
4- Single point crossover

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

وابستگی اهداف بهینه‌سازی از آن جهت مطرح می‌شود که بازآرایی تنش‌ها در اثر وقوع خزش، توزیع تنش و ضریب اطمینان را دچار تغییر می‌کند. این طراحی شامل دو قید کمینه ضریب اطمینان و بیشینه اختلاف ضرایب اطمینان بیشینه و کمینه است. قید دوم برای دستیابی به توزیع ضریب اطمینانی یکنواخت‌تر مطرح می‌شود. مقادیر مفروض برای حدود این قیود در جدول 8 ارائه شده است. برای اعمال قیود مطرح، تابع جریمه ($\hat{J}$) به‌کار گرفته شده است؛ برای قید نمونه (61) تابع جریمه به شکل رابطه (62) به‌کار رفته است:

$$g(x) \ge g_0 \tag{61}$$

$$\hat{J} = J + \kappa \max\{0,[g_0 - g(x)]\} \tag{62}$$

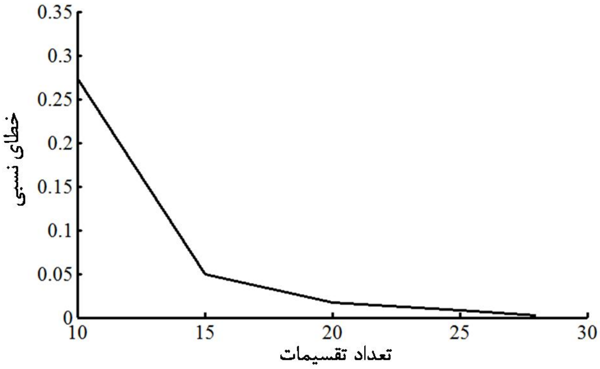
در این روابط g_0 مقدار حدی قید بوده و κ نیز نشان‌دهنده مقدار جریمه است که عددی نسبتاً بزرگ انتخاب می‌شود. متغیرهای طراحی نیز شامل درصد حجمی ذرات سیلیکون‌کاربید در جدار داخلی و خارجی، توان الگوی توزیع مواد و توان پروفیل ضخامت است. شایان ذکر است در تمامی مراحل پروفیل ضخامت مطابق رابطه (32) فرض شده است.

11- نتایج

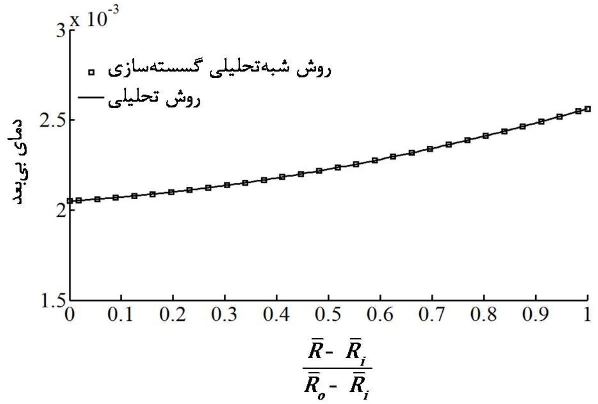
11-1- مقایسه نتایج تحلیلی و شبه‌تحلیلی در حالت الاستیک

مقایسه نتایج دو روش حل تحلیلی و شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی در حالت الاستیک (زمان اولیه) انجام یافته است. برای حصول اطمینان از همگرایی پاسخ روش حل شبه‌تحلیلی گسسته‌سازی، آزمون حساسیت به تعداد تقسیم‌بندی‌ها در سه نقطه انجام گرفته است. نخست با توجه به اینکه در این روش، تمامی محاسبات برای شعاع میانی هر زیربازه انجام می‌گیرد، شرایط مرزی در جدار داخلی و خارجی به‌ترتیب در شعاع میانی زیربازه ابتدایی و انتهایی اعمال می‌شود. از این رو ابتدا مقدار دما در جدار داخلی و خارجی با برون‌یابی تعیین شده و سپس همگرایی این مقادیر بررسی شده است. پس از این مرحله، آزمون برای شعاعی برابر با مقدار میانگین شعاع جداره داخلی و خارجی نیز انجام گرفته است. نتایج آزمون نشان داده‌اند که با افزایش تعداد تقسیمات به بیش از 20 تقسیم، تغییر چندانی در نتایج مربوط به توزیع دما دیده نمی‌شود و از این رو تعیین توزیع دما با این روش با 20 قسمت انجام شده است. شکل 3 این آزمون را برای جدار خارجی نشان می‌دهد. برای حل مکانیکی نیز همین روند تکرار شده و تعداد تقسیمات لازم 55 قسمت پیش‌بینی شده است. شکل‌های 4، 5 و 6 به‌ترتیب مقایسه انجام شده میان دو روش در حل معادلات دیفرانسیل (22) و (23) را ارائه می‌دهند.

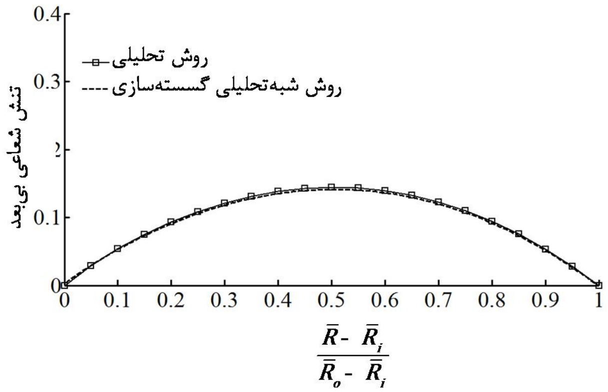
با توجه به استفاده از روش حل شبه‌تحلیلی برای بهینه‌سازی، در این قسمت به ارائه یک حل نمونه با استفاده از این روش پرداخته شده است. بدین منظور توزیع مواد مطابق رابطه (1) فرض شده است. دیسک از ترکیب دو جنس آلومینیوم 6061 و سیلیکون‌کاربید درنظر گرفته شده و خواص معادل با استفاده از مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن تعیین شده است. همچنین، تمامی خواص فیزیکی وابسته به دما و درصد حجمی مواد فرض شده‌اند. مشخصات دیسک در جدول 8 مشاهده می‌شود. برای تعیین تعداد تقسیمات لازم برای حل با این روش، آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات- چنان که توضیح آن پیشتر آمد- انجام گرفته است. نتایج حاکی از کافی بودن تعداد 85 قسمت برای هر دو حل تعیین توزیع دما و تحلیل ترمومکانیکی است. شکل 7 توزیع دمای به‌دست آمده را همراه با حدس اولیه نمایش می‌دهد. همچنین، توزیع تنش مماسی و شعاعی برای حالت مذکور در شکل 8 نشان داده شده است.



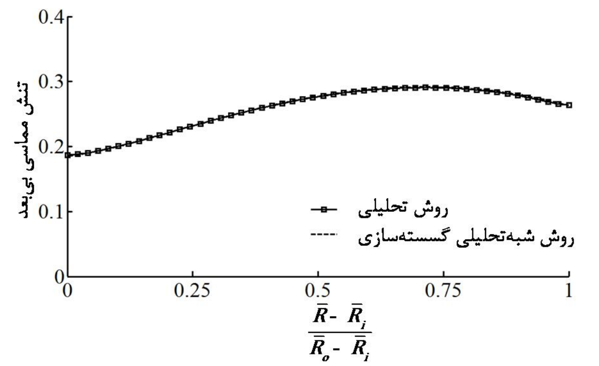
شکل 3 آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات در جدار خارجی برای حل الاستیک.



شکل 4 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع دمای بی‌بعد شده برای حل الاستیک

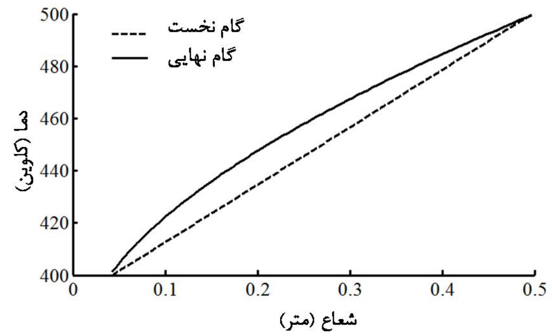


شکل 5 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده برای حل الاستیک

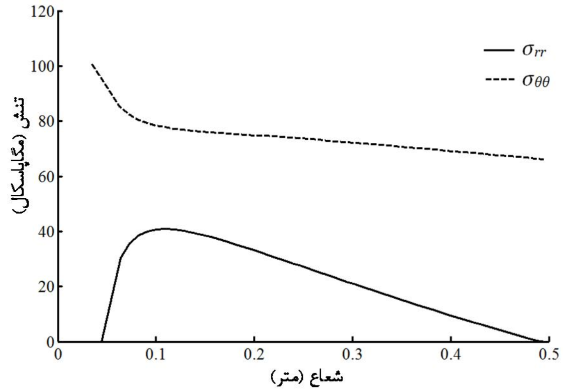


شکل 6 مقایسه نتایج دو روش حل در تعیین توزیع تنش مماسی بی‌بعد شده برای حل الاستیک

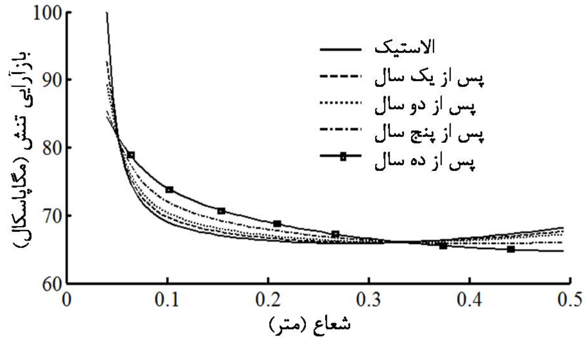
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]



شکل 7 توزیع دمای به‌دست آمده با خواص وابسته به دما



شکل 8 توزیع تنش به‌دست آمده با خواص وابسته به دما برای حل الاستیک

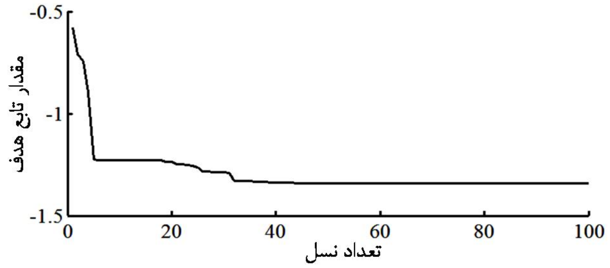


شکل 9 بازآرایی تنش معادل پس از بازه‌های مختلف زمانی

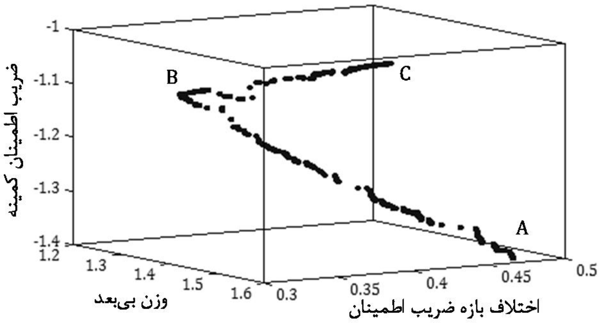
جدول 8 مشخصات و شرایط کاری دیسک دوار مورد مطالعه

مشخصه	مقدار مفروض
نسبت قطر خارجی به داخلی	12/5
قطر داخلی، d_i (mm)	80
سرعت دورانی (rpm)	1000
دما در جداره داخلی (K)	400
دما در جداره خارجی (K)	500
دمای مرجع (K)	300
کمینه ضریب اطمینان مطلوب، α	1/1
بیشینه اختلاف مجاز، β	0/5

برای انجام حل خزشی، باید گام زمانی مناسبی انتخاب شود. بدین منظور ضریب اطمینان کمینه با گام‌های زمانی مختلف با درنظر گرفتن پنج سال زمان برای وقوع خزش محاسبه شد. نتایج نشان می‌دهد افزایش تعداد تکرار به بیش‌تر از 365 تکرار تفاوت قابل توجهی در نتایج ایجاد نمی‌کند. این تعداد تکرار مؤید انتگرال‌گیری در هر پنج روز است. شکل 9 بازآرایی تنش موثر را در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد.



شکل 10 نمودار همگرایی به ازای $\kappa_1 = \kappa_2 = 7$



شکل 11 جبهه جواب‌های نامغلوب پارتوی سه‌بعدی

جدول 9 مقایسه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف ضرایب جریمه (κ_1 و κ_2)

κ_1	κ_2	تعداد نسل	مقدار تابع هدف	V_i	V_o	z	η
4	4	29	-1/183	7/74	29/78	2/55	-1/24
5	5	18	-1/178	10/68	31/83	2/66	-1/23
7	7	54	-1/339	2/19	39/05	0/48	-0/63
5	7	40	-1/174	11/72	32/60	2/56	-1/22
7	5	38	-1/188	5/54	28/24	2/53	-1/25
10	10	28	-1/185	5/53	28/26	2/46	-1/25
10	15	59	-1/190	4/78	27/70	2/57	-1/26
15	10	34	-1/168	15/19	35/05	2/66	-1/20
15	15	30	-1/169	14/93	38/84	2/75	-1/20

جدول 10 مقایسه همگرایی به‌ازای مقادیر مختلف ضرایب جریمه

	V_i	V_o	z	η
بیشترین ضریب اطمینان (A)	2/19	39/05	0/48	-0/62
کمترین اختلاف بازه ضریب اطمینان (B)	3/31	39/91	0/24	-0/41
کمترین وزن (C)	2/34	39/95	0/29	-0/30

با توجه به شرایط مرزی آزاد-آزاد برای دیسک مورد نظر و اثر کرنش خزشی، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به‌علت بازآرایی تنش، مقدار تنش موثر در جدار داخلی دیسک از 100 مگاپاسکال به حدود 84 مگاپاسکال می‌رسد. علاوه‌بر آن، در این شکل نقاط مرجع نیز، که در آن‌ها تنش تغییر قابل ملاحظه‌ای ندارد، ملاحظه می‌شوند. محدوده انتخاب شده برای سه متغیر نخست طراحی با توجه به سه مورد انتخاب شده است. نخست محدودیت ساخت دیسک‌های دوار، چنان که سنودین و همکارانش[30] در سال 2012 موفق به ساخت دیسک دوار هدفمندی با توزیع مواد 10 تا 30 درصد در دو سوی دیسک شده‌اند. از سوی دیگر چنان که ذکر شد، تحقیقات متعدد نشان‌دهنده برتری و صحت روش موری-تاناکا برای کامپوزیت‌های با ماتریس پیوسته است. سومین محدودکننده، وجود داده‌های تجربی خزش برای بازه‌ای از درصد حجمی مواد است. با توجه به تمامی موارد فوق محدوده متغیرها مطابق رابطه (63) انتخاب شده است:

$$0\% < V_i < 40\%, 0\% < V_o < 40\%, 0 < \zeta < 4, -2 < \eta < 2 \quad (63)$$

انتخاب مقادیر ضرایب جریمه در سرعت همگرایی الگوریتم مؤثر خواهد بود، بدین‌منظور، مقدار ضرایب جریمه مختلف با هم مقایسه شده‌اند. مقادیر مختلف ضرایب جریمه ($\kappa 1$ و $\kappa 2$) مورد آزمایش قرار گرفته در بهینه‌سازی تک‌هدفه ضریب اطمینان در جدول 9 موجود است. چنان که مشهود است ضرایب جریمه 7 و 7 مناسب‌ترند. نمودار همگرایی این مورد در شکل 10 مشاهده می‌شود.

پس از بهینه‌سازی تک‌هدفه، بهینه‌سازی در حالت سه‌هدفه انجام شده است. نتایج این مرحله به شکل نمودار پارتو در شکل 11 ارائه شده است، چنان که مشاهده می‌شود، اهداف با هم در تناقض هستند و از این رو بهینه‌سازی به مجموعه جواب‌ها نامغلوب منتهی می‌شود و پاسخی یکتا به‌دست نمی‌آید. با توجه به شکل 11، مشاهده می‌شود اهداف کاهش وزن و افزایش ضریب اطمینان همواره با هم در تناقض هستند، ولی تناقض دو هدف کاهش وزن با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان و همچنین دو هدف افزایش ضریب اطمینان کمینه با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان در طول دامنه طراحی دچار تغییر می‌شوند. برای تبدیل مسئله بیشینه‌سازی ضریب اطمینان به مسئله کمینه‌سازی، قرینه آن مورد بررسی قرار گرفته است (علت وجود علامت منفی در محور ضریب اطمینان در شکل 11). نمونه‌ای از پاسخ‌های به‌دست آمده برای متغیرهای طراحی در حالت‌های حدی مربوط به بیشترین ضریب اطمینان، کمترین اختلاف بازه ضرایب اطمینان و کمترین وزن که به‌ترتیب با سه نقطه A، B و C در شکل 11 مشخص شده‌اند، در جدول 10 آمده است. چنان که مشاهده می‌شود تغییرات توان الگوی توزیع مواد و پروفیل ضخامت اهمیت ویژه‌ای دارد.

12- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش با گسترش معادلات تحلیل ترمومکانیکی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر، به بهینه‌سازی تک‌هدفه و چندهدفه‌ی آن با درنظر گرفتن رفتار خزشی پرداخته شده است. بدین منظور تمامی خواص فیزیکی تابع دما و درصد حجمی مواد فرض شده‌اند و برای یافتن خواص معادل از دو مدل موری-تاناکا و هاشین-اشتریکمن استفاده شده است. به‌منظور اعتبارسنجی این دو مدل مواد، خواص به‌دست آمده از این دو روش با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن مقایسه شده است که نشان‌دهنده توافق نتایج است. با توجه به اینکه حل تحلیلی معادلات در تمامی حالات بعید به‌نظر می‌رسد، معادلات با استفاده از روش شبه‌تحلیلی حل شده‌اند و با تعیین پاسخ تحلیلی برای حالتی خاص، نتایج دو روش با هم مقایسه شدند که از دقت بالای روش شبه‌تحلیلی حکایت دارد. بهینه‌سازی توزیع مواد و پروفیل ضخامت در دو مرحله انجام گرفته است و با توجه به بازآرایی تنش‌ها با وقوع خزش، بهینه‌سازی در طی زمان و وابسته به زمان درنظر گرفته شده است. با توجه به بهره‌گیری از تابع جریمه برای اعمال قیود، اهمیت مقدار ضرایب جریمه مورد بحث قرار گرفته و مقدار ضریب جریمه مناسب از میان چند حالت انتخاب شده است. نتایج برای حالت مورد بررسی حاکی از نیاز به وجود درصد حجمی ذرات سیلیکون‌کاربید در جدار خارجی دیسک دوار و همچنین لزوم وجود پروفیل ضخامت نزولی با شعاع است. نتایج بهینه‌سازی چندهدفه حاکی از تناقض اهداف کاهش وزن و افزایش ضریب اطمینان در تمام دامنه طراحی است، ولی تناقض دو هدف کاهش وزن با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان و همچنین دو هدف افزایش ضریب اطمینان کمینه با کاهش اختلاف بازه ضریب اطمینان در طول دامنه طراحی دچار تغییر می‌شوند.

13- مراجع

[1] F. Vakili Tahami, A. H. Daei-Sorkhabi, F. R. Biglari, Creep constitutive equations for cold-drawn 304L stainless steel, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 527, No. 18, pp. 4993-4999, 2010.

[2] S. Singh, S. Ray, Steady-state creep behavior in an isotropic functionally graded material rotating disc of Al-SiC composite, *Metallurgical and Materials Transactions A,* Vol. 32, No. 7, pp. 1679-1685, 2001.

[3] L. You, X. You, J. Zhang, J. Li, On rotating circular disks with varying material properties, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik,* Vol. 58, No. 6, pp. 1068-1084, 2007.

[4] S. Kordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structures,* Vol. 79, No. 4, pp. 508-516, 2007.

[5] H. Jahed, B. Farshi, J. Bidabadi, Minimum weight design of inhomogeneous rotating discs, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 82, No. 1, pp. 35-41, 2005.

[6] B. Farshi, J. Bidabadi, Optimum design of inhomogeneous rotating discs under secondary creep, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 85, No. 7, pp. 507-515, 2008.

[7] B. Farshi, M. Faezi, Optimization of inhomogeneous rotating discs by the ingredient method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol.9, No.7, pp. 107-119, 2010. (In Persian)

[8] A. Loghman, A. G. Arani, A. Shajari, S. Amir, Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al–SiC composite, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 81, No. 12, pp. 1853-1864, 2011.

[9] M. T. Ghorbani, A semi-analytical solution for time-variant thermoelastic creep analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness and properties, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology,* Vol. 5, No. 2, pp. 41-50, 2012.

[10] S. Hosseini Kordkheili, M. Livani, Thermoelastic creep analysis of a functionally graded various thickness rotating disk with temperature-dependent material properties, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 111, pp. 63-74, 2013.

[11] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica,* Vol. 21, No. 5, pp. 571-574, 1973.

[12] T. Chen, G. J. Dvorak, Y. Benveniste, Mori-Tanaka estimates of the overall elastic moduli of certain composite materials, *ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics,* Vol. 59, pp. 539-546, 1992.

[13] J. Čadek, H. Oikawa, V. Šustek, Threshold creep behaviour of discontinuous aluminium and aluminium alloy matrix composites: An overview, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 190, No. 1, pp. 9-23, 1995.

[14] Y. Li, F. Mohamed, An investigation of creep behavior in an SiC 2124 Al composite, *Acta materialia,* Vol. 45, No. 11, pp. 4775-4785, 1997.

[15] S. S. Vel, Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells, *Composite Structures,* Vol. 92, No. 11, pp. 2712-2727, 2010.

[16] J. Guedes, N. Kikuchi, Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 83, No. 2, pp. 143-198, 1990.

[17] J. Čadek, H. Oikawa, V. Šustek, Threshold creep behaviour of discontinuous aluminium and aluminium alloy matrix composites: An overview, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 190, No. 1, pp. 9-23, 1995.

[18] A. J. Goupee, S. S. Vel, Multi-objective optimization of functionally graded materials with temperature-dependent material properties, *Materials & design,* Vol. 28, No. 6, pp. 1861-1879, 2007.

[19] S. C. Tjong, Z. Ma, Microstructural and mechanical characteristics of in situ metal matrix composites, *Materials Science and Engineering: R: Reports,* Vol. 29, No. 3, pp. 49-113, 2000.

[20] Z. Ma, S. Tjong, Creep deformation characteristics of discontinuously reinforced aluminium-matrix composites, *Composites Science and Technology,* Vol. 61, No. 5, pp. 771-786, 2001.

[21] A. Pandey, R. Mishra, Y. Mahajan, High-temperature creep of Al TiB_2 particulate composites, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 189, No. 1, pp. 95-104, 1994.

[22] JAHM Software, *Material Properties Database MPDB,* v7.59, 2012.

[23] V. Gupta, S. Singh, H. Chandrawat, S. Ray, Modeling of creep behavior of a rotating disc in the presence of both composition and thermal gradients, *Journal of Engineering Materials and Technology,* Vol. 127, No. 1, pp. 97-105, 2005.

[24] A. Geiger, D. Hasselman, K. Donaldson, Effect of reinforcement particle size on the thermal conductivity of a particulate silicon carbide-reinforced aluminium-matrix composite, *Journal of Materials Science Letters,* Vol. 12, No. 6, pp. 420-423, 1993.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.12.16.7]

[25] T. Srivatsan, M. Al-Hajri, M. Petraroli, B. Hotton, P. Lam, Influence of silicon carbide particulate reinforcement on quasi static and cyclic fatigue fracture behavior of 6061 aluminum alloy composites, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 325, No. 1, pp. 202-214, 2002.

[26] R. U. Vaidya, K. Chawla, Thermal expansion of metal-matrix composites, *Composites Science and Technology,* Vol. 50, No. 1, pp. 13-22, 1994.

[27] H. Kim, T. Kobayashi, H. Yoon, E. Yoon, Micromechanical fracture process of SiC-particle-reinforced aluminium alloy 6061-T6 metal matrix composites, *Materials Science and Engineering: A,* Vol. 154, No. 1, pp. 35-41, 1992.

[28] A. Konak, D. W. Coit, A. E. Smith, Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial, *Reliability Engineering & System Safety,* Vol. 91, No. 9, pp. 992-1007, 2006.

[29] K. Deb, D. E. Goldberg, An investigation of niche and species formation in genetic function optimization, *in Proceeding of Morgan Kaufmann Publishers Inc*., pp. 42-50, 1989.

[30] A. Sanuddin, A. Ali, M. A. Hanim, Fabrication of Al/Al2O3 FGM rotating disc, *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering (IJAME),* Vol. 5, pp. 622-629, 2012.