مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 16، ص‌ص 134-142

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# تحلیل فرکانسی صفحات مستطیلی سوراخ‌دار با تابع هدفمند سه‌بعدی با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و روش بدون المان

رضا پیل‌افکن[1*]، سید جاوید زکوی[1]، سوده بخشی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل
* اردبیل، صندوق پستی 179، rezapilafkan@uma.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 08 تیر 1393
پذیرش: 19 شهریور 1393
ارائه در سایت: 10 آبان 1393

*کلید واژگان:*
تئوری سه‌بعدی الاستیسیته
تحلیل فرکانسی
روش بدون المان
ماده با تابع هدفمند سه‌بعدی

**چکیده**

در کار حاضر تحلیل فرکانسی صفحه نسبتا ضخیم با در نظر گرفتن اثر سوراخ دایره‌ای با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و روش حل عددی بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای، ارائه شده است. با استفاده از این روش عددی، میان‌یابی متغیر میدان با استفاده از فقط گره‌های توزیع شده در حجم صفحه انجام می‌گیرد. به‌طوری‌که به دلیل نبود ارتباط میان گره‌ها، توزیع مورد نظر به هر صورت دلخواه انجام پذیر می‌باشد. جنس صفحه، ماده با تابع هدفمند، متشکل از دو فاز فلز و سرامیک می‌باشد. به‌طوری‌که خواص مکانیکی آن در هر سه جهت طول، عرض و ضخامت صفحه، به‌طور مستقل از هم با استفاده از مدل موری- تاناکا تغییر می‌کند. تأثیر شعاع سوراخ، توان‌های مختلف کسر حجمی در هر سه جهت طول، عرض و ضخامت صفحه و همچنین تاثیر شرایط مختلف مرزی روی فرکانس‌های طبیعی صفحه با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم‌افزار متلب و شبیه سازی صورت گرفته در نرم‌افزار آباکوس مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل با نتایج مقالات موجود مقایسه شده و نشان از دقت بالای روش مورد استفاده در کار حاضر دارد.

# Frequency analysis of rectangular holed FG plates using three dimensional elasticity theory and meshless method

Reza Pilafkan[1*], Seyed Javid Zakavi[1], Soudeh Bakhshi[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran
* P.O.B. 179 Ardabil, Iran, rezapilafkan@uma.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 June 2014
Accepted 10 September 2014
Available Online 01 November 2014

*Keywords:*
Frequency Analysis
Meshless Method
Three- dimensional Elasticity Theory
Three- dimensional Functionally Graded Material

ABSTRACT

In this paper, frequency analysis of moderately thick plate, taking the effect of a circular hole into consideration is presented by use of Three Dimensional Elasticity theory and a meshless method with radial point interpolation. Using this numerical method, the field variable is interpolated just using nodes scattered in the plate domain. As no relation between nodes exists, they can be scattered arbitrarily. The plate is made of a functionally graded material consisted of two different phases of metal and ceramic. Mechanical properties of the plate change independently in the length, width and thickness directions according to Mori-Tanaka model. The effect of the radius of the hole, different volume fraction exponents in three directions and different boundary conditions on natural frequencies of the plate are investigated using the code written in MATLAB and simulation in ABAQUS. The results have been compared with results in available papers and the high accuracy of the method used in the present work is shown.

## 1- مقدمه

مواد با مقاومت مکانیکی بالا و وزن کم همواره توجه مهندسین و محققین را به خود جلب کرده‌اند. چرا که مواد با این مشخصات نیاز روزافزون صنایع مختلف از جمله هوا و فضا، حمل و نقل، ساختمان و موارد متعدد دیگر هستند. آلیاژها و مواد کامپوزیتی بسیاری، جهت استفاده در این صنایع ارائه شده است. کامپوزیت‌ها موادی هستند که نسبت مقاومت مکانیکی به وزن آنها بالا است. اما مقاومت کم آن‌ها در برابر بارهای بزرگ و لایه‌لایه شدگی، استفاده از آن‌ها را در بسیاری از صنایع مذکور با مشکل مواجه می‌سازد. خصوصا در مواردی که بارهای حرارتی قابل توجهی به سازه وارد می‌شود، امکان استفاده از کامپوزیت‌ها بسیار محدود خواهد شد. بنابراین ایده ساخت ماده جدیدی که ظرفیت بالایی برای تحمل بار مکانیکی و حرارتی داشته و خواص آن به‌طور تدریجی و پیوسته در داخل ماده تغییر کند، منجر به ارائه مواد با تابع هدفمند در سال 1980 گردید. مواد با تابع هدفمند نوع جدیدی از مواد کامپوزیتی غیر همگن می‌باشند که از حداقل دو فاز مختلف ماده،

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
R. Pilafkan, S. J. Zakavi, S. Bakhshi, Frequency analysis of rectangular holed FG plates using three dimensional elasticity theory and meshless method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 134-142, 2015 (In Persian)

[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]

معمولا فلز و سرامیک، ساخته می‌شوند. به‌طوری‌که با استفاده از مقاومت مکانیکی فلز و مقاومت حرارتی سرامیک، در شرایط محیطی با دمای بالا قابل استفاده هستند. از دیگر مزایای مواد با تابع هدفمند نسبت به سایر مواد غیرهمگن، می‌توان به مقاومت بالای شکست و ضریب تمرکز تنش پایین آن اشاره کرد.

بررسی رفتار مکانیکی و خصوصا تحلیل فرکانسی صفحات، با توجه به کاربرد وسیع آن‌ها که ضرورت شناخت و طراحی صحیح آن‌ها را ایجاب می‌کند، سابقه طولانی دارد. اما توجه به دو نکته اساسی ضروری است. اول اینکه در اکثر کارهای ارائه شده از تئوری‌های ساده شده صفحات مانند تئوری کلاسیک صفحه[1] [1]، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحه[2] [2] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر صفحه[3] [3] استفاده شده است. استفاده از این تئوری‌ها در صورت نازک بودن ضخامت صفحه، نتایجی با خطای قابل قبول ارائه می‌دهند. اما برای تحلیل صفحات ضخیم و یا حتی نسبتا ضخیم استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته امکان ارائه نتایج دقیقی را امکان‌پذیر می‌سازد. نکته دوم این‌که جهت استفاده مناسب از ماده جدید با تابع هدفمند در صنایع مختلف، شناخت رفتار مکانیکی آن امری ضروری است. برای کاربردی شدن صفحات با ماده با تابع هدفمند در صنایع، لازم است رفتار مکانیکی آن، خصوصا تحلیل فرکانسی که در کار حاضر ارائه شده است، مورد مطالعه قرار بگیرد. از این رو جهت ارائه نتایج دقیق‌تر در کار حاضر تحلیل سه‌بعدی صفحات با مواد با تابع هدفمند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کارهای متعددی در خصوص تحلیل ارتعاش آزاد و فرکانسی صفحات ارائه شده است. مشخصات فرکانسی صفحات با تابع هدفمند حلقوی با ضخامت متغیر، توسط افریم و ایزنبرگر [2] تحلیل شده است. که برای استخراج ماتریس سفتی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش المان دقیق[4] استفاده کردند. متسوناگا [3] تحلیل ارتعاش آزاد صفحات هدفمند را با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالاتر دوبعدی انجام داد. یک حل سه‌بعدی برای ارتعاش آزاد و اجباری صفحات هدفمند با تکیه‌گاه ساده توسط ول و باترا [4] با استفاده از تئوری‌های مختلف صفحه فراهم شده است. تحلیل ارتعاشی صفحات مستطیلی ضخیم با استفاده از چند جمله‌ای چبیشف[5] و روش ریتز[6] توسط ژو و همکاران [5] انجام شده است.

توجه گردد که کاربرد صفحات در صنایع معمولا با نقص هندسی همراه است و اغلب به‌صورت صفحات برش خورده، سوراخ‌دار و ضخامت غیر یکنواخت مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این‌رو بررسی رفتار مکانیکی این‌گونه صفحات امری ضروری در جهت طراحی و کاربرد صحیح و مناسب آن می‌باشد. لارا و همکاران [6] یک روش نیمه‌تحلیلی را برمبنای روش بهینه شده ریلی- ریتز[7]، برای تحلیل ارتعاشی صفحات مستطیلی با تکیه‌گاه ساده و با برش‌های مستطیلی پیشنهاد کردند. آکسو و علی [7] از روش دیفرانسیل محدود[8] برای تحلیل صفحه مستطیلی با بیش از دو سوراخ استفاده کردند. راجامانی و پرابهاکاران [8] فرض کردند که تاثیر یک سوراخ، معادل با یک بار اعمالی خارجی است و تحلیلی عددی را برای یک صفحه کامپوزیتی بر مبنای این فرض انجام دادند. لم و همکاران [9] یک صفحه مستطیلی با یک سوراخ را به چند زیرناحیه تقسیم و روش ریلی- ریتز اصلاح شده را اعمال کردند. لیو و همکاران [10] برای مطالعه پاسخ‌های ارتعاشی صفحات مستطیلی نازک آیزوتروپ با برش‌های مرکزی، پیکره‌بندی پیچیده صفحه را به زیرناحیه‌های مناسب تجزیه و از چندجمله‌ای‌های مجاز به عنوان توابع جابه‌جایی استفاده کردند. تاکاهاشی [11] بعد از استخراج انرژی کل مربوط به صفحه سوراخ‌دار توسط کسر کردن انرژی مربوط به ناحیه سوراخ از انرژی صفحه بدون سوراخ، روش ریلی- ریتز کلاسیک را به کاربرد. کسر انرژی سوراخ از انرژی کل منجر به محاسبات عددی پیچیده می‌شود. کواک و هان [12] روش جدیدی برای تحلیل صفحات مستطیلی با سوراخ دایره‌ای یا مستطیلی ارائه دادند. این روش براساس روش ریلی- ریتز کلاسیک است اما از دو سیستم مختصات مجزا برای صفحه و سوراخ استفاده می‌کند.

برخی روش‌های تحلیلی برای تحلیل صفحات هدفمند ارائه شده‌اند. با این حال حل‌های تحلیلی محدود به هندسه‌های ساده، انواع خاصی از گرادیان خواص مواد، انواع خاصی از شرایط مرزی و موارد بارگذاری خاص هستند. در نتیجه تکنیک‌های عددی با طرح‌های گسسته‌سازی متفاوت از قبیل روش المان محدود به‌طور گسترده در حل مسائل عملی استاتیکی و دینامیکی مورد استفاده قرار گرفتند. اخیرا روش‌های بدون المان[9] توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است[13-20]. در این روش‌ها مدل محاسباتی توسط یک مجموعه از گره‌ها که نیازی به اتصال به المان‌ها ندارند، توصیف می‌شود. بنابراین برای رسیدن به دقت دلخواه، گره‌ها می توانند به راحتی در هر جهتی افزوده یا حذف شوند.

در برخی از روش‌های بدون المان نظیر روش بدون المان گالرکین[10] و روش بدون المان محلی پترو گالرکین[11] توابع شکل فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر[12] هستند و به تکنیک‌های خاصی جهت ارضای شرایط مرزی اساسی نیاز است که زمان محاسبات را افزایش می‌دهد. جیان‌دانگ و همکاران [13,14] مساله خمشی و ارتعاشی آزاد صفحه نسبتا ضخیم را با استفاده از روش بدون المان گالرکین حل کرده‌اند. کیان و همکاران [15,16] تغییر شکل‌های الاستواستاتیک ارتعاش آزاد و اجباری صفحه ضخیم را با استفاده از روش بدون المان محلی پترو گالرکین تحلیل کرده‌اند. یک پروسه بدون المان محلی پتروگالرکین کاملا سه‌بعدی، برای تحلیل الاستواستاتیک صفحات هدفمند ضخیم با شرایط مرزی مختلف، توسط واقفی و همکاران [17] توسعه داده شده است. اخیرا در روش‌های بدون المان، از توابع پایه شعاعی[13] استفاده می‌شود. توابع شکل حاصل دارای خاصیت تابع دلتای کرونکر هستند. بنابراین شرایط مرزی اساسی به راحتی اعمال می‌شود.

لیو و همکاران [18] دریافتند که وقتی چندجمله‌ای‌های خطی به تابع پایه میان‌یابی اضافه می‌شود، میان‌یابی بسیار دقیق‌تر انجام می‌شود. زایو و همکاران [19] صفحات ضخیم را با استفاده از روش بدون المان محلی پترو گالرکین با توابع پایه شعاعی تحلیل کرده‌اند. شیا و همکاران [20] خمش و ارتعاش آزاد صفحات نسبتا ضخیم غیر همگن را با استفاده از روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای محلی بدون مش تحلیل کردند.

در کار حاضر تحلیل فرکانسی صفحات مستطیلی نسبتا ضخیم سوراخ‌دار با تابع هدفمند سه‌بعدی با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و روش بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر حرکت صفحه با استفاده از اصل انرژی

1- Classical Plate Theory
2- First Order Shear Deformation Theory
3- Higher Order Shear Deformation Theory
4- Exact Element Method
5- Chebyshev Polynomial
6- Ritz Method
7- Optimized Rayleigh–Ritz Method
8- Finite Difference Method

9- Meshless Methods
10- Meshless Galerkin Method
11- Meshless Local Petrove Galerkin Method(MLPG)
12- Kroneker Delta Function Property
13- Radial Basis Function(RBF)



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]

استخراج شده است. برای تحلیل مورد نظر، برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب[1] نوشته شد. نتایج مربوط به صفحه نسبتا ضخیم و بدون سوراخ، با نتایج مقاله شیا و همکاران [20] و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس[2] مقایسه و برنامه نوشته شده از این طریق اعتبار بخشی شده است. تاثیر شرایط مختلف مرزی و توان‌های کسر حجمی[3] ماده با تابع هدفمند روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تاثیر شعاع سوراخ در شرایط مرزی مختلف، روی فرکانس طبیعی صفحات سوراخ‌دار ارائه شده است. نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده و نشان از دقت بالای روش مورد استفاده دارد.

## 2- روش بدون المان

جهت میان‌یابی یک تابع میدان مانند جابه‌جایی $u(x)$ در نقطه $x_Q$، از فضای $\Omega$ که مرز و داخل آن با استفاده از توزیع دلخواه $N$ گره بصورت $x_i(i = 1,2,\cdots,N)$ مشخص می‌شود، ناحیه ای به نام ناحیه محافظ[4] به مرکز $x_Q$ با شکل و اندازه دلخواه در نظر گرفته می‌شود. به‌طوری‌که تعداد مشخصی از گره‌های توزیع شده در داخل آن قرار می‌گیرند. در این روش، جهت تخمین تابع میدان مورد نظر در نقطه $x_Q$، از گره‌های قرار گرفته در ناحیه محافظ آن استفاده شده و سایر گره‌ها تاثیری در مقدار تابع میدان مربوط به نقطه $x_Q$ نخواهند داشت. روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای با استفاده از گره‌های داخل ناحیه محافظ $x_Q$ و توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای، مقدار $u(x,x_Q)$ را به کمک رابطه 1میان‌یابی می‌کند[21].

$$u^h(x,x_Q) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(x)b_j = \bar{R}^{\mathrm{T}}(x)\bar{a} + \bar{P}^{\mathrm{T}}(x)\bar{b} \quad (1)$$

به‌طوری‌که $R_i(x)$ و $P_j(x)$ به ترتیب معرف توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای، $n$ تعداد گره‌های داخل ناحیه محافظ $x_Q$ ، $m$ تعداد جملات تابع پایه چندجمله‌ای و $a_i$ و $b_j$ ضرایبی هستند که تعیین خواهند شد. بردارهای $\bar{R}^{\mathrm{T}}$، $\bar{P}^{\mathrm{T}}$، $\bar{a}$ و $\bar{b}$ با روابط 2 تا 5 تعریف شده‌اند.

$$\bar{R}^{\mathrm{T}}(x) = [R_1(x), R_2(x), \cdots, R_n(x)] \quad (2)$$

$$\bar{P}^{\mathrm{T}} = [P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots, P_m(x)] \quad (3)$$

$$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^{\mathrm{T}} \quad (4)$$

$$\bar{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]^{\mathrm{T}} \quad (5)$$

توابع پایه شعاعی متعددی وجود دارد که از بین آنها دو نوع تربیعی چند مرتبه‌ای[5] و گوسی[6] به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در کار حاضر از نوع تربیعی چند مرتبه‌ای (رابطه 6) استفاده شده است:

$$R_i(x,y,z) = [r_i{}^2 + (\alpha_c d_c)^2]^q \quad (6)$$

به‌طوری‌که $\alpha_c$ و $q$ پارامترهای تابع پایه شعاعی و $d_c$ میانگین فاصله گرهی است. تابع پایه شعاعی، تابعی از فاصله بین نقطه $x_Q$ و گره $x_i$ است.

در رابطه 7 تابع پایه چندجمله‌ای برای حالت سه بعدی و $m = 4$ نشان داده شده است.

$$\bar{P}^{\mathrm{T}}(x) = [1 \quad x \quad y \quad z] \quad (7)$$

ضرایب $a_i$ و $b_j$ در رابطه 1، برای نقطه $x_Q$ با احراز این معادله در $n$ گره داخل ناحیه محافظ این نقطه به‌صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(x_k)a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(x_k)b_j = u_k = u(x_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n) \quad (8)$$

$u_k$ مقدار تابع $u$ در گره $k$ام است. معادله اخیر در رابطه 9 به شکل ماتریسی بیان شده است:

$$R_Q\bar{a} + P_m\bar{b} = \hat{u} \quad (9)$$

$\hat{u}$ برداری شامل جابه‌جایی‌های تمام گره‌های درون ناحیه محافظ است (رابطه 10):

$$\hat{u} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^{\mathrm{T}} \quad (10)$$

$R_Q$ و $P_m$ با روابط 11 و 12 تعریف می‌شود:

$$R_Q = \begin{bmatrix} R_1(x_1,y_1,z_1) & R_2(x_1,y_1,z_1) & \dots & R_n(x_1,y_1,z_1) \\ R_1(x_2,y_2,z_2) & R_2(x_2,y_2,z_2) & \dots & R_n(x_2,y_2,z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(x_n,y_n,z_n) & R_2(x_n,y_n,z_n) & \dots & R_n(x_n,y_n,z_n) \end{bmatrix}_{n\times n} \quad (11)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1,z_1) & P_2(x_1,y_1,z_1) & \dots & P_m(x_1,y_1,z_1) \\ P_1(x_2,y_2,z_2) & P_2(x_2,y_2,z_2) & \dots & P_m(x_2,y_2,z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(x_n,y_n,z_n) & P_2(x_n,y_n,z_n) & \dots & P_m(x_n,y_n,z_n) \end{bmatrix}_{n\times m} \quad (12)$$

دستگاه معادله رابطه 9 دارای $n$ معادله و $n + m$ مجهول است که برای حل آن از $m$ معادله مکمل که در رابطه 13 آورده شده استفاده شده است:

$$P_m^{\mathrm{T}}\bar{a} = 0 \quad (13)$$

با استفاده از معادلات 9 و 13، $\bar{a}$ و $\bar{b}$ به صورت رابطه 14 بدست می‌آید[22]:

$$\bar{a} = S_a\hat{u} \ , \ \bar{b} = S_b\hat{u} \quad (14)$$

که در آن $S_a$ و $S_b$ با روابط 15 و 16 تعریف می‌شود:

$$S_a = R_Q^{-1}[I - P_m S_b] \quad (15)$$

$$S_b = \left[P_m^{\mathrm{T}} R_Q^{-1} P_m\right]^{-1} P_m^{\mathrm{T}} R_Q^{-1} \quad (16)$$

با جاگذاری $\bar{a}$ و $\bar{b}$ در معادله 1، بردار توابع شکل $\Psi$ تعیین خواهد شد (روابط 17 و 18):

$$u^h(x,x_Q) = [\bar{R}^{\mathrm{T}}(x)S_a + \bar{P}^{\mathrm{T}}(x)S_b]\hat{u} = \Psi\hat{u} \quad (17)$$

$$\Psi(x) = \bar{R}^{\mathrm{T}}(x)S_a + \bar{P}^{\mathrm{T}}(x)S_b = [\emptyset_1 \quad \emptyset_2 \quad \cdots \quad \emptyset_n] \quad (18)$$

مشتق بردار توابع شکل نسبت به متغیرهای مستقل $l = x,y,z$ بصورت رابطه 19 بیان می‌شود:

$$\Psi_{,l} = \bar{R}^{\mathrm{T}}{}_{,l}(x)S_a + \bar{P}^{\mathrm{T}}{}_{,l}(x)S_b \quad (19)$$

که اندیس $l$، نشان دهنده مشتق نسبت به $l$ است.

در شکل 1 شمای کلی از صفحه مستطیلی سوراخ‌دار و ناحیه محافظ مکعبی یک نقطه $x_Q$ نشان داده شده است. در شکل، گره‌های اطراف سوراخ فقط در سطوح بالا و پایین صفحه نشان داده شده است.

## 3- معادلات حاکم

صفحه مستطیلی به طول $a$، عرض $b$ و ارتفاع $h$ در نظر گرفته شده است. دستگاه مختصات کارتزین $(x,y,z)$ برای توصیف هندسه و ابعاد صفحه و همچنین جابه‌جایی‌های کوچک صفحه الاستیک به‌کار گرفته شده است (شکل 2).

میدان جابه‌جایی متناظر با این سیستم مختصات به‌صورت رابطه 20 است:

$$u = [u \ v \ w]^{\mathrm{T}} \quad (20)$$

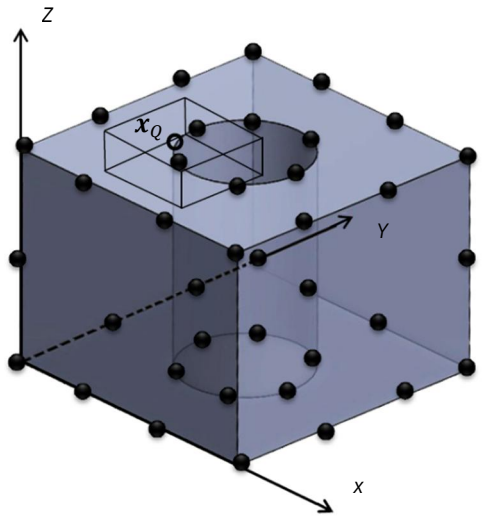
به‌طوری‌که $u$، $v$ و $w$ بترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی در جهات $x$، $y$ و $z$ است. رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها به‌صورت رابطه 21 است:

1- MATLAB
2- ABAQUS
3- Volume Fraction Exponent
4- Support Domain
5- Multiquadrics Functions
6- Gaussian Functions

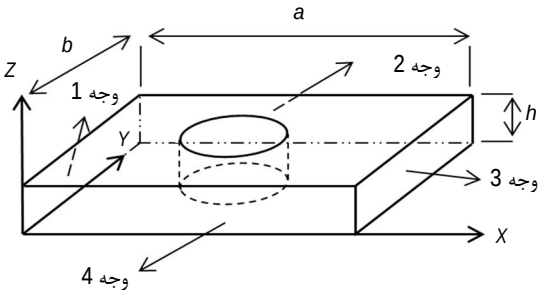


[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]




**شکل 1** گره‌های سازنده هندسه صفحه و ناحیه محافظ مکعبی نقطه $x_Q$




**شکل 2** ابعاد صفحه مستطیلی و سیستم مختصات استفاده شده

$$\sigma = D\epsilon \tag{21}$$

طبق تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مولفه‌های تنش و کرنش با روابط 22 و 23 بیان شده است [4,17]:

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

$$\epsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

D ماتریس الاستیک بوده و برای مواد همگن به‌صورت رابطه 24 است [20,23]:

$$D = \frac{E}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \times \begin{bmatrix} 1-\vartheta & \vartheta & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & 1-\vartheta & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & \vartheta & 1-\vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\vartheta \end{bmatrix} \tag{24}$$

در رابطه 24، $E$ ضریب الاستیتسیته و $\vartheta$ نسبت پواسون است. رابطه بین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها با رابطه 25 نشان داده شده است:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{25}$$

که در رابطه 26 به صورت ماتریسی بازنویسی شده است:

$$\epsilon = Lu \tag{26}$$

ماتریس عملگر $L$ با رابطه 27 تعریف می‌شود:

$$L^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

با استفاده از اصل انرژی برای تحلیل ارتعاش آزاد و بدون مستهلک‌کننده صفحه، رابطه 28 برقرار است:

$$\frac{d}{dt}(\Pi + T) = 0 \tag{28}$$

به‌طوری‌که انرژی کرنشی الاستیک خطی $\Pi$ و انرژی جنبشی $T$ برای یک صفحه مستطیلی، به ترتیب با روابط 29 و 30 به فرم انتگرالی بیان می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^h \epsilon^{\mathrm{T}}\,\sigma\,dz\,dy\,dx \tag{29}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^h \rho\dot{u}^{\mathrm{T}}\dot{u}dz\,dy\,dx \tag{30}$$

که $\rho$ چگالی صفحه است. میدان جابه‌جایی صفحه به صورت رابطه 31 در نظر گرفته شده است:

$$u(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x,y,z) \\ V(x,y,z) \\ W(x,y,z) \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \bar{U}\,e^{i\omega t} \tag{31}$$

$\omega$ فرکانس دایره‌ای و $\bar{U}$ بردار دامنه جابه‌جایی‌های صفحه است.

حال با فرض وجود n گره درون ناحیه محافظ یک نقطه خاص درون صفحه، دامنه میدان جابه‌جایی با رابطه 32 تخمین زده می‌شوند:

$$\bar{U} = N\bar{\bar{U}} \tag{32}$$

که در آن $N$ و $\bar{\bar{U}}$ به ترتیب ماتریس توابع شکل و بردار دامنه جابه‌جایی‌های گره‌های درون ناحیه محافظ بوده و با روابط 33 و 34 نشان داده شده است:

$$N = \begin{bmatrix} \emptyset_1 & 0 & 0 & \emptyset_2 & 0 & 0 & \dots & \emptyset_n & 0 & 0 \\ 0 & \emptyset_1 & 0 & 0 & \emptyset_2 & 0 & \dots & 0 & \emptyset_n & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_1 & 0 & 0 & \emptyset_2 & \dots & 0 & 0 & \emptyset_n \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\bar{\bar{U}} = [U_1\ V_1\ W_1\ \dots\ U_n\ V_n\ W_n]^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

با تعریف اپراتور ماتریسی کرنش- جابه‌جایی $B$، جابه‌جایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها به صورت روابط 35 تا 37 بازنویسی می‌شوند:

$$u(x,y,z,t) = N\,\bar{\bar{U}}\,e^{i\omega t} \tag{35}$$

$$\epsilon(x,y,z,t) = B\,\bar{\bar{U}}\,e^{i\omega t} \tag{36}$$

$$\sigma(x,y,z,t) = DB\,\bar{\bar{U}}\,e^{i\omega t} \tag{37}$$

با جاگذاری معادلات ۳۵ تا ۳۷ در روابط ۲۹ و ۳۰ و بسط رابطه 28، طی یک فرایند همگذاری برای نواحی محافظِ تمام نقاط نمونه‌ی در نظر گرفته شده درون صفحه، یک معادله مقدار ویژه استاندارد به‌صورت رابطه 38 بدست خواهد آمد:

$$(K - M\omega^2)\bar{\bar{U}} = 0 \tag{38}$$

که در آن $M$ و $K$، ماتریس‌های جرم و سفتی، به ترتیب به‌صورت روابط 39 و 40 هستند:

$$M = \int_0^a\int_0^b\int_0^h \rho\,N^{\mathrm{T}}\,N\,dz\,dy\,dx \tag{39}$$



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]

$$K = \int_0^a \int_0^b \int_0^h B^{\mathrm{T}} D\, B\, dz\, dy\, dx \tag{40}$$

همان‌طور که دیده شد، در روش حاضر، برای استخراج معادله حرکت نیازی به روش‌هایی که تاکنون در تحلیل صفحات سوراخ‌دار استفاده می‌شد، مانند کسر انرژی مربوط به ناحیه سوراخ از انرژی کل [6] و یا تجزیه ناحیه اطراف سوراخ به چند زیرناحیه [4] نخواهد بود.

در روش بدون المان، به دلیل استفاده از فقط گره‌ها برای مدل‌سازی هندسه صفحه، به سادگی امکان حذف و یا افزودن گره‌ها در هر جهت دلخواه وجود دارد. بنابراین بررسی صفحه سوراخ‌دار با شعاع‌های مختلف، با روش بدون المان بسیار ساده‌تر است. علاوه بر آن روش حل عددی با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای، روشی با پایداری عددی بالا بوده و در آن شرایط مرزی اساسی به‌راحتی با رهیافت حذف اعمال می‌شود.

## 4- مدل ماده با تابع هدفمند

ماده مورد استفاده از دو فاز فلز و سرامیک تشکیل شده است. کسر حجمی فلز $v_m$ و کسر حجمی سرامیک متناظر $v_c = 1 - v_m$ است. در کار حاضر، برای مدل‌سازی $v_m$ از رابطه 41 استفاده شده است:

$$v_m(x,y,z) = \left(\frac{a-x_q}{a}\right)^{l_x} \times \left(\frac{b-y_q}{b}\right)^{l_y} \times \left(\frac{h-z_q}{h}\right)^{l_z} \tag{41}$$

توان‌های کسر حجمی $l_x$ و $l_y$ و $l_z$ اعداد حقیقی مثبتی فرض می‌شوند.

روش‌های مختلفی برای تعیین خواص ماده هدفمند وجود دارد. در کار حاضر از مدل موری- تاناکا 1 استفاده شده است. در مدل موری- تاناکا چگالی موثر از رابطه 42 به‌دست می‌آید[23]:

$$\rho = \rho_c v_c + \rho_m v_m \tag{42}$$

در حالی‌که متغیرهای الاستیک با روابط 43 تا 48 محاسبه می‌شوند:

$$\hat{K} = v_m(\hat{K}_m - \hat{K}_c)/\left(1 + (1-v_m)\left(\frac{3(\hat{K}_m - \hat{K}_c)}{3\hat{K}_c + 4\mu_c}\right)\right) + \hat{K}_c \tag{43}$$

$$\mu = v_m(\mu_m - \mu_c)/1 + (1-v_m)\left(\frac{\mu_m - \mu_c}{\mu_c + f}\right) + \mu_c \tag{44}$$

$$\mu_m = {E_m}/{2(1+v_m)} \tag{45}$$

$$\hat{K}_c = {E_c}/{3(1-2v_c)} \tag{46}$$

$$\hat{K}_m = {E_m}/{3(1-2v_m)} \tag{47}$$

$$f = \mu_m(9\hat{K}_c + 8\mu_c)/6(\hat{K}_c + 2\mu_c) \tag{48}$$

$\hat{K} = \lambda + {2\mu}/{3}$ مدول بالک[2] و $\lambda$ و $\mu$ ضرایب لامه[3] هستند.

مدول الاستیسیته و نسبت پواسون برای ماده با تابع هدفمند، به ترتیب با روابط 49 و 50 به دست می‌آید:

$$E = 9\hat{K}\mu/3\hat{K} + \mu \tag{49}$$

$$\vartheta = (3\hat{K} - 2\mu)/2(3\hat{K} + \mu) \tag{50}$$

## 5- بحث و نتیجه‌گیری

### 5-1-محاسبات عددی

در روش میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای برای محاسبه انتگرال‌ها به سلول‌های زمینه نیاز است. در کار حاضر از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده شده است. صفحه به سلول‌های زمینه شش وجهی تقسیم شده و برای هر سلول زمینه، نقاط گوسی در هر سه جهت $x$، $y$ و $z$ تعیین شده است(شکل 3).

در کار حاضر از ناحیه محافظ مکعبی استفاده شده است. ابعاد ناحیه محافظ در سه جهت با روابط 51 تا 53 محاسبه می‌شود [21]:

$$r_{sx} = \alpha_{sx} d_{cx} \tag{51}$$

$$r_{sy} = \alpha_{sy} d_{cy} \tag{52}$$

$$r_{sz} = \alpha_{sz} d_{cz} \tag{53}$$

که در آن $\alpha_{si}$ $(i = x,y,z)$ اندازه بی‌بعد ناحیه محافظ در جهات $x$، $y$ و $z$ است. $d_{ci}$ $(i = x,y,z)$ میانگین فاصله گرهی در جهات $x$، $y$ و $z$ است. در کار حاضر در هر سه جهت، $\alpha_s = 2$ در نظر گرفته شده است.

ناحیه محافظ تمام نقاط گوسیِ درون صفحه محاسبه و برای میان‌یابی مورد استفاده قرار گرفته‌است. بعد از امتحان کردن چند ترکیب متفاوت از $\alpha_c$ و $q$ و مقایسه نتایج با مقاله شیا و همکاران [20]، پارامترهای تابع پایه شعاعی $\alpha_c = 7$ و $q = 1.03$ در نظر گرفته شده‌اند. هر شرط مرزی با چهار حرف لاتین که هر حرف نشان دهنده شرط مرزی یکی از وجوه جانبی صفحه است، نشان داده شده است. C وS به ترتیب نشان‌دهنده شرط مرزی گیردار و ساده هستند و حرف F نشان‌دهنده وجه آزاد است. در شکل2 وجوهی از صفحه که تحت شرایط مرزی مختلف قرار می‌گیرند نشان داده شده است. مثلا در شرط مرزی SCSC وجوه 1 و 3 دارای تکیه‌گاه ساده و وجوه 2 و 4 گیردار هستند. در کار حاضر شش شرط مرزی CCCC، SCSC، SSSS، SSSF، SFSF و CFFF برای صفحه در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی با استفاده از رهیافت حذف اعمال شده است. شرط مرزی برای وجوه با تکیه‌گاه ساده به صورت روابط 54 و 55 و برای وجوه گیردار به صورت رابطه 56 بیان شده است:

$$v(x,y,z,t) = w(x,y,z,t) = 0\ , \qquad x = 0, a \tag{54}$$

$$u(x,y,z,t) = w(x,y,z,t) = 0\ , \qquad y = 0, b \tag{55}$$

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z,t) = w(x,y,z,t) = 0\ , \quad x = 0, a\ \ ,\ \ y = 0, b \tag{56}$$

در هر شرط مرزی، درجات آزادی با جابه‌جایی معین مشخص شده است. با حذف سطر و ستون مربوط به این درجات آزادی از ماتریس‌های جرم و سفتی، ماتریس‌های جرم و سفتی اصلاح‌شده $\tilde{M}$ و $\tilde{K}$ حاصل شده و معادله $(K - M\omega^2)\bar{U} = 0$ به صورت $(\tilde{K} - \tilde{M}\omega^2)\tilde{U} = 0$ بازنویسی شده است. واضح است که $\tilde{U}$ بردار دامنه جابه‌جایی‌های تمام گره‌ها، پس از حذف سطرهای مربوط به درجات آزادی با جابه‌جایی معین است.

### 5-2- ارتعاش آزاد یک صفحه نسبتا ضخیم همگن و بدون سوراخ

صفحه مستطیلی نسبتا ضخیم همگن، به طول 10 متر، عرض 5 متر و ضخامت 0/5 متر در نظر گرفته شده است. جنس صفحه آلومینیوم است که خواص آن در جدول 1 آورده شده است.

برای تحلیل فرکانسی صفحه، برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب نوشته‌شد. همچنین صفحه در نرم‌افزار المان محدود آباکوس مدل‌سازی شد. فرکانس‌های پایه صفحه مستطیلی نسبتا ضخیم همگن برای شش شرط مرزی مختلف در جدول 2 آورده شده است. مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود در مقاله شیا و همکاران [20] و جواب‌های حاصل از نرم‌افزار المان محدود آباکوس، نشان‌دهنده‌ی دقت بالای کار حاضر است.

روند همگرایی خوبی با استفاده از روش حاضر مشاهده می‌شود. در جدول 2، $N_x$، $N_y$ و $N_z$ تعداد گره‌ها به ترتیب در جهات $x$،$y$ و $z$ است. در این مرحله برنامه نوشته شده اعتبار بخشی شده است.

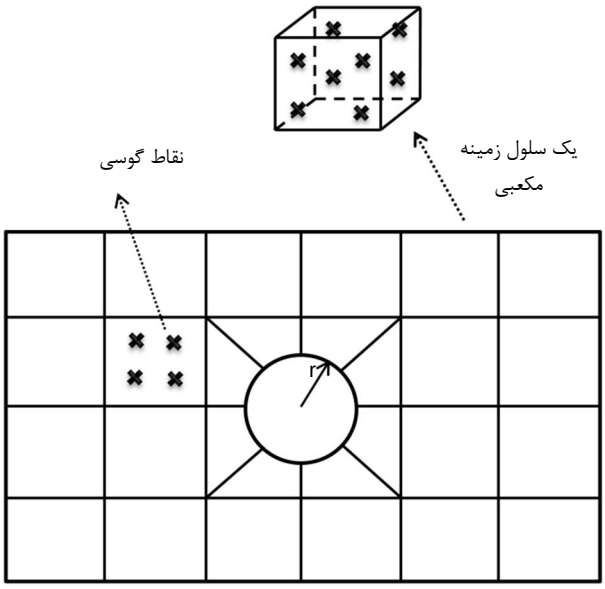
1- Mori-Tanaka
2- Bulk modulus
3- Lamé Parameters



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]

**جدول 1** خواص مواد سازنده صفحه [23]

| ماده | $E$ (GPa) | $\rho(\mathrm{kg/m^3})$ | $\vartheta$ |
|---|---|---|---|
| Al | 70 | 2700 | 0/3 |
| SiC | 420 | 3100 | 0/15 |




**شکل 3** صفحه و سلول‌های زمینه شش‌وجهی از نمای بالا

### 5-3- ارتعاش آزاد صفحه مستطیلی سوراخ‌دار نسبتا ضخیم

#### 5-3-1- صفحه مستطیلی همگن

در این بخش از کار یک سوراخ دایره‌ای به شعاع $r$ در مرکز صفحه قرار داده شده است. در جدول3 روند همگرایی نتایج، با تغییر تعداد گره‌ها در اطراف سوراخ برای شرط مرزی CCCC و سه شعاع مختلف سوراخ ارائه شده است. گره‌های اطراف سوراخ در فواصل مساوی از هم قرار داده شده‌اند. جواب حاصل از روش حاضر در توافق خوبی با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس است.

در جدول 4 فرکانس‌های پایه بی‌بعد به ترتیب با استفاده از نرم‌افزار آباکوس و روش حاضر برای شش شرط مرزی مختلف و سه شعاع مختلف سوراخ آورده شده است. با بررسی جدول 4 مشاهده شد که نحوه تغییر فرکانس پایه با تغییر شعاع سوراخ، به شرط مرزی صفحه بستگی دارد. دلیل این امر می‌تواند نحوه تغییر نسبت سفتی به جرم صفحه $(K/M)$ در شعاع‌ها و شرایط مرزی مختلف باشد. ایجاد سوراخ در صفحه همزمان سفتی و جرم صفحه را کاهش می‌دهد. به نظر می‌رسد نحوه تغییر نسبت سفتی به جرم صفحه در شعاع‌های مختلف به شرط مرزی صفحه بستگی دارد. در شرایط مرزی که صفحه در آن‌ها مقیدتر است، نظیر شرط مرزی چهار وجه گیردار CCCC، با افزایش شعاع سوراخ نسبت سفتی به جرم افزایش می‌یابد. می‌توان گفت حضور سوراخ در صفحه، جرم را بیش از سفتی تحت تاثیر قرار داده‌است و این امر باعث افزایش در فرکانس پایه شده است. در شرایط مرزی با آزادی بیشتر نظیر CFFF، افزایش شعاع سوراخ باعث کاهش در اندازه فرکانس پایه شده است. بنابراین به نظر می‌رسد در این حالت، سفتی صفحه بیش از جرم آن تحت تاثیر قرارگرفته و نسبت سفتی به جرم کاهش یافته است. کواک و هان [12] نیز در نتایج کار خود روند مشابه‌ای را مشاهده کردند. به‌طوری‌که با افزایش شعاع سوراخ، فرکانس پایه‌ی صفحه مربعی مورد بررسی آن‌ها، در شرط مرزی CCCC افزایش و در شرط مرزی FFFF کاهش یافت.

#### 5-3-2- صفحه مستطیلی از جنس ماده با تابع هدفمند

فرض شده که صفحه با ماده با تابع هدفمند از دو فاز فلز و سرامیک ساخته شده است. خواص مواد مذکور در جدول 1 آورده شده است.

کسر حجمی فلز به صورت رابطه 41 در نظر گرفته شده است. با صفر بودن همه توان‌های کسر حجمی، فاز فلز خالص بدست خواهد آمد. با صفر بودن یک یا دو توان کسر حجمی، صفحه به ترتیب در دو و یک جهت هدفمند خواهد شد. با افزایش مختصات در جهات $x$، $y$ و $z$ ، کسر حجمی فلز کاهش خواهد یافت. به‌طوری‌که وجه بالایی صفحه و وجوه 2 و 3 سرامیک خالص است. بنابراین، این ترکیب از مواد برای مواردی که وجوه بالای صفحه یا دو وجه جانبی مجاور در محیط‌های با دمای بالا قرار می‌گیرد مناسب است.

در شکل 4 فرکانس پایه بی‌بعد برای صفحه بدون سوراخ با تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$ برای شش شرط مرزی مختلف آورده شده است. توان‌های کسر حجمی در جهات $x$ و $y$ در شکل 4- الف برابر صفر و در شکل 4-ب برابر 5 در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل 4- الف و 4- ب مشاهده می‌شود، در هر شش شرط مرزی، افزایش توان کسر حجمی در جهت $z$ فرکانس پایه را افزایش می‌دهد. افزایش توان کسر حجمی (در هر جهت دلخواه) باعث افزایش میزان جزء سرامیک سازنده‌ی صفحه می‌شود. نتیجه این امر افزایش سفتی و نیز افزایش جرم صفحه است. با بررسی نمودارها به نظر می‌رسد همواره افزایش توان کسر حجمی، نسبت سفتی به جرم صفحه $(K/M)$ و در نتیجه فرکانس را افزایش می‌دهد. البته میزان افزایش این نسبت، به شرط مرزی صفحه و همچنین اندازه توان‌های کسر

**جدول 2** همگرایی و مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد صفحه بدون سوراخ همگن با شش شرط مرزی مختلف $\omega(\times a^2\sqrt{\rho h/\hat{D}})$

| روش | تعداد گره‌ها $N_x$ | $N_y$ | $N_z$ | CCCC | SSSS | SCSC | SSSF | SFSF | CFFF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حاضر | 17 | 9 | 3 | 93/678 | 48/258 | 90/867 | 15/850 | 9/469 | 3/407 |
| | 19 | 10 | 3 | 91/998 | 48/098 | 89/363 | 15/768 | 9/399 | 3/401 |
| | 21 | 11 | 3 | 91/828 | 47/474 | 89/113 | 15/593 | 9/325 | 3/362 |
| | 23 | 12 | 3 | 91/617 | 47/253 | 88/936 | 15/482 | 9/286 | 3/365 |
| آباکوس | | | | 90/895 | 47/830 | 88/363 | 15/702 | 9/363 | 3/391 |
| شیا و همکاران[20] | | | | 91/482 | 48/523 | 88/897 | 15/916 | 9/576 | 3/437 |

$* \hat{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}$



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]

حجمی در دو جهت دیگر بستگی دارد. با مقایسه شکل‌های 4-الف و 4-ب مشاهده می‌شود، در حالتی‌که توان‌های کسر حجمی در جهات $x$ و $y$ برابر 5 باشد، نسبت به حالتی‌که $l_x = l_y = 0$ است، فرکانس پایه مقدار بزرگتری دارد. این امر به‌دلیل بیش‌تر بودن جزء سرامیک در حالت $l_x = l_y = 5$ و در نتیجه افزایش نسبت سفتی به جرم رخ می‌دهد. همچنین برای شرایط مرزی مقیدتر مثل CCCC و SCSC، با تغییرات $l_z$ فرکانس پایه در حالت $l_x = l_y = 0$ نسبت به حالت $l_x = l_y = 5$ با سرعت بیشتری تغییر می‌کند. و اصولا در حالت $l_x = l_y = 5$ برای تمام شرایط مرزی، با افزایش توان کسر حجمی در جهت z تغییر محسوسی در اندازه فرکانس پایه رخ نمی‌دهد و میزان افزایش فرکانس پایه بسیار اندک است. بنابراین همان‌طور که ذکر شد میزان افزایش فرکانس پایه با افزایش توان کسر حجمی در جهت $z$، به شرط مرزی صفحه و همچنین اندازه توان‌های کسر حجمی در دو جهت دیگر بستگی دارد. برای صفحات سوراخ‌دار با شعاع‌های 1 و 1/5 متر نیز روندی مشابه آنچه درباره صفحه بدون سوراخ در دو حالت الف و ب ذکر شد مشاهده می‌شود(شکل 5 و 6).

در شکل 7، به‌طور هم‌زمان تاثیر تغییرات توان کسر حجمی در جهت $z$، شرایط مرزی مختلف و شعاع‌های مختلف سوراخ، بر فرکانس‌های پایه بی‌بعد صفحه نشان داده شده است. توان‌های کسر حجمی در جهات $x$ و $y$ برابر صفر است. به ازای تمام مقادیر $l_z$ در شرط مرزی CCCC، مشابه آنچه در جدول ۴ برای صفحه همگن در این شرط مرزی آورده شد، با افزایش شعاع سوراخ فرکانس پایه افزایش می‌یابد. همچنین برای شرایط مرزی SSSS و SFSF نیز، در توان‌های کسر حجمی مختلف، روند تغییر فرکانس با افزایش شعاع سوراخ، مشابه روند مربوط به صفحه همگن است.

در شکل 8 توان‌های کسر حجمی در جهات $x$ و $y$ برابر 5 در نظر گرفته شده‌اند. در این حالت نیز روندی مشابه آنچه در شکل 7 ذکر شد مشاهده می‌شود. با این تفاوت که در تمام شرایط مرزی، سرعت تغییرات فرکانس با افزایش توان کسر حجمی کمتر است. و فرکانس‌ها در تمام شرایط مرزی نسبت به $l_x = l_y = 0$ مقدار بزرگتری دارند.

## 6- نتیجه‌گیری

در کار حاضر تحلیل فرکانسی صفحه مستطیلی نسبتا ضخیم با در نظر گرفتن اثر سوراخ دایره‌ای با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و روش حل عددی بدون المان با میان‌یابی شعاعی نقطه‌ای ارائه شده است. جنس صفحه، ماده با تابع هدفمند متشکل از دو فاز فلز و سرامیک بوده که خواص آن با استفاده از مدل موری- تاناکا در سه جهت تغییر می‌کند. تاثیر شعاع‌های مختلف سوراخ، شرایط مرزی و توان‌های کسر حجمی مختلف روی فرکانس-های طبیعی صفحه بررسی شد. مشاهده شد که نحوه تغییر فرکانس پایه با تغییر شعاع سوراخ، به شرط مرزی صفحه بستگی دارد. چگونگی تغییر فرکانس‌های پایه با افزایش توان‌های کسر حجمی در قالب نمودارهایی ارائه و بحث شد. افزایش توان کسر حجمی در شعاع‌ها و شرایط مرزی مختلف فرکانس پایه را افزایش می‌دهد. مشاهده شد که میزان این افزایش به شرط مرزی صفحه و نیز اندازه توان‌های کسر حجمی در دو جهت دیگر بستگی دارد. مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود و نیز نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس، نشان‌دهنده دقت بالای کار حاضر است.

**جدول3** همگرایی و مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد صفحه سوراخ‌دار برای شرط مرزی CCCC ($\omega(\times a^2\sqrt{\rho h/\hat{D}})$)

| شعاع (متر) | روش | تعداد گره‌ها اطراف سوراخ | $\omega_1$ |
|---|---|---|---|
| 0/5 | حاضر | 4 | 92/711 |
| | | 5 | 91/055 |
| | | 6 | 92/107 |
| | | 7 | 91/850 |
| | | 8 | 91/821 |
| | | 9 | 91/286 |
| | | 10 | 90/951 |
| | آباکوس | | 91/273 |
| 1 | حاضر | 11 | 97/266 |
| | | 12 | 96/509 |
| | | 13 | 97/468 |
| | | 14 | 97/076 |
| | | 15 | 96/251 |
| | | 16 | 97/451 |
| | آباکوس | | 98/356 |
| 1/5 | حاضر | 16 | 106/121 |
| | | 17 | 102/846 |
| | | 18 | 103/341 |
| | | 19 | 104/498 |
| | | 20 | 101/105 |
| | | 21 | 103/903 |
| | آباکوس | | 108/030 |

**جدول4** مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد صفحه سوراخ‌دار با شعاع‌ها و شرایط مرزی مختلف ($\omega(\times a^2\sqrt{\rho h/\hat{D}})$)

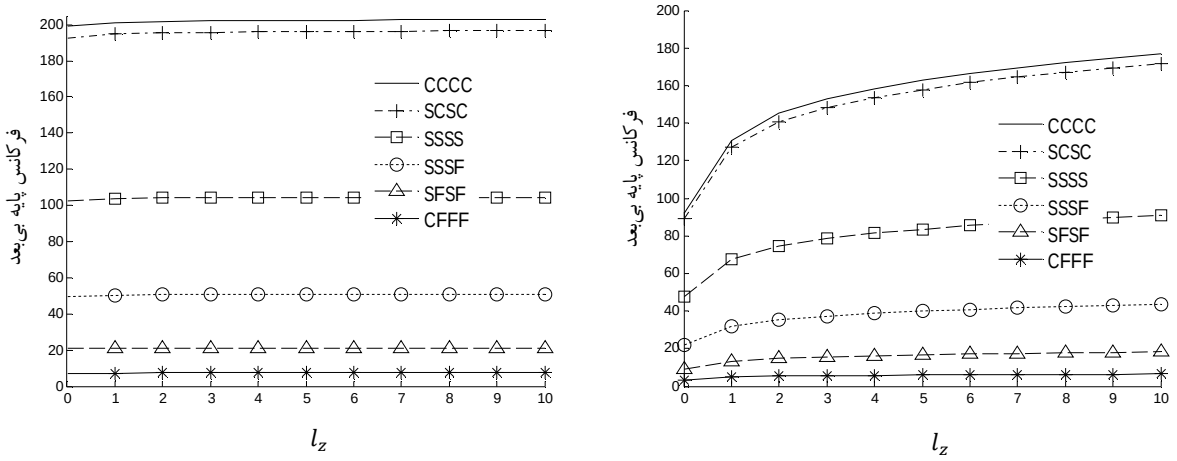
| روش | شعاع (متر) | CCCC | SSSS | SCSC | SSSF | SFSF | CFFF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حاضر | 0 | 91/828 | 47/474 | 89/113 | 15/593 | 9/325 | 3/362 |
| | 0/5 | 92/107 | 46/039 | 89/366 | 15/423 | 8/869 | 3/318 |
| | 1 | 97/076 | 44/835 | 92/784 | 15/460 | 8/532 | 3/229 |
| | 1/5 | 103/341 | 47/951 | 96/983 | 15/771 | 7/968 | 3/072 |
| آباکوس | 0 | 90/895 | 47/830 | 88/363 | 15/702 | 9/363 | 3/391 |
| | 0/5 | 91/373 | 46/863 | 88/576 | 15/716 | 9/219 | 3/377 |
| | 1 | 98/356 | 46/576 | 93/951 | 15/833 | 8/875 | 3/317 |
| | 1/5 | 108/030 | 49/116 | 100/357 | 16/208 | 8/390 | 3/164 |

$* \hat{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}$



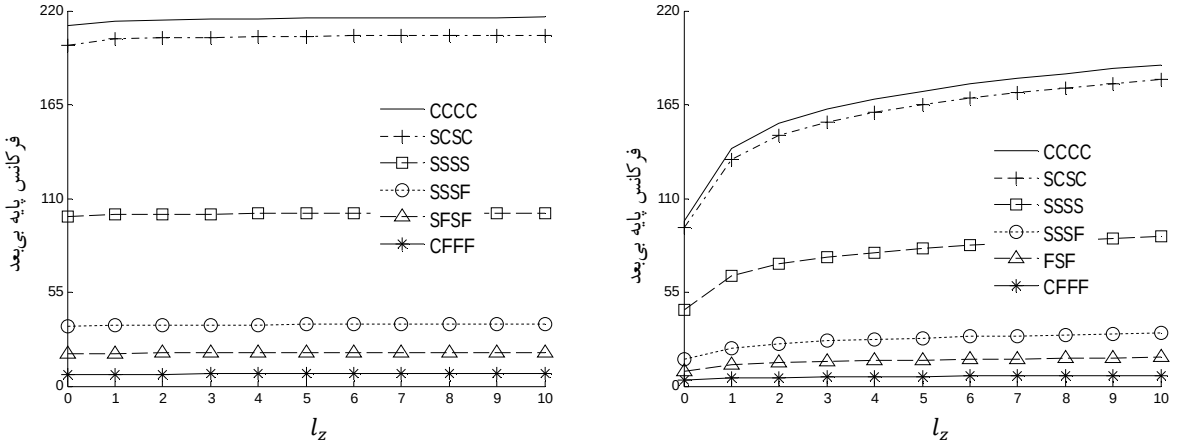
[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]



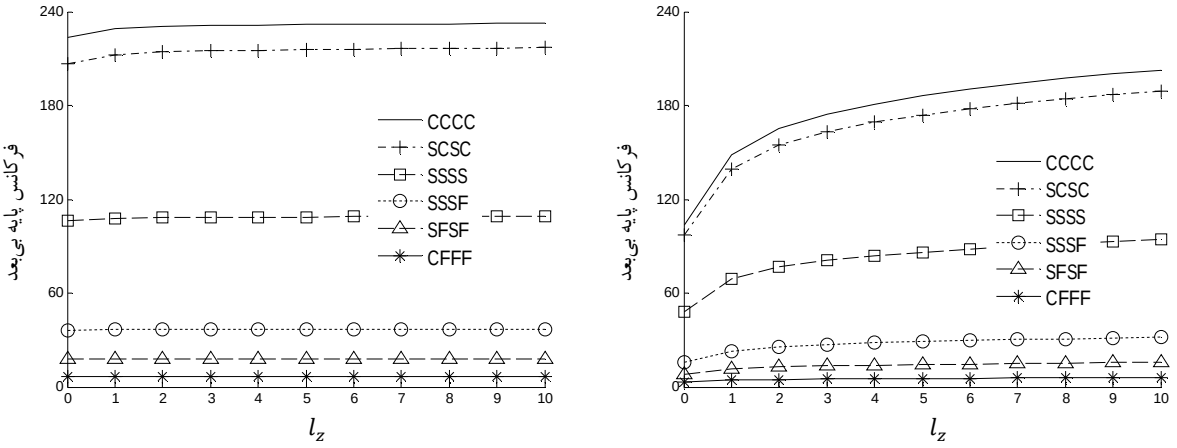

(الف) (ب)

**شکل 4** تغییرات فرکانس پایه بی بعد صفحه هدفمند با تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$ الف) $l_x = l_y = 0$ ب) $l_x = l_y = 5$




(الف) (ب)

**شکل 5** تغییرات فرکانس پایه بی بعد صفحه هدفمند با سوراخ مرکزی به شعاع 1 متر با تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$ الف) $l_x = l_y = 0$ ب) $l_x = l_y = 5$

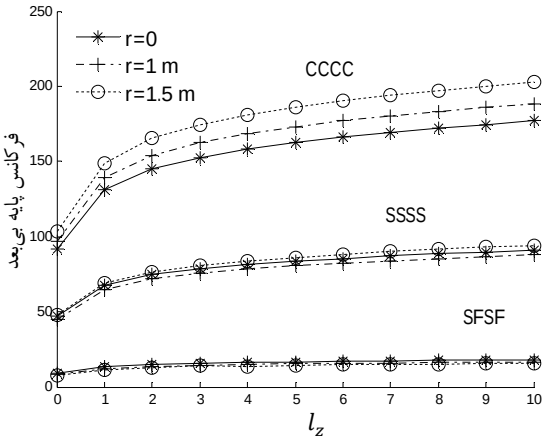



(الف) (ب)

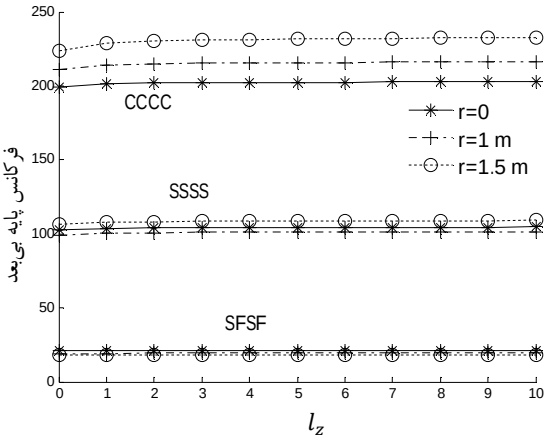
**شکل 6** تغییرات فرکانس پایه بی بعد صفحه هدفمند با سوراخ مرکزی به شعاع 1/5 متربا تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$ الف) $l_x = l_y = 0$ ب) $l_x = l_y = 5$



[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]
[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]




**شکل 7** فرکانس پایه بی بعد برای 3 شرط مرزی و 3 شعاع مختلف سوراخ با تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$، $l_x = l_y = 0$




**شکل 8** فرکانس پایه بی بعد برای 3 شرط مرزی و 3 شعاع مختلف سوراخ با تغییر توان کسر حجمی در جهت $z$، $l_x = l_y = 5$

## 7- مراجع


[1] F. Ebrahimi, A. Rastgo, An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 12, pp. 1402-1408, 2008.

[2] E. Efraim, M. Eisenberger, Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 4–5, pp. 720-738, 2007.

[3] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008.

[4] S. S. Vel, R. C. Batra, Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, No. 3–5, pp. 703-730, 2004.

[5] D. Zhou, Y. K. Cheung, F. T. K. Au, S. H. Lo, Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 26, pp. 6339-6353, 2002.

[6] P. A. A. Laura, E. Romanelli, R. E. Rossi, Transverse vibrations of simply supported rectangular plates with rectangular cutouts, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 202, No. 2, pp. 275-283, 1997.

[7] G. Aksu, R. Ali, Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44, No. 1, pp. 147-158, 1976.

[8] A. Rajamani, R. Prabhakaran, Dynamic response of composite plates with cut-outs, part I: Simply-supported plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 54, No. 4, pp. 549-564, 1977.

[9] K. Y. Lam, K. C. Hung, S. T. Chow, Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method, *Applied Acoustics*, Vol. 28, No. 1, pp. 49-60, 1989.

[10] K. M. Liew, S. Kitipornchai, A. Y. T. Leung, C. W. Lim, Analysis of the free vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, No. 5, pp. 941-959, 2003.

[11] S. Takahashi, Vibration of rectangular plates with circular holes, *Bulletin of JSME* Vol. 1, No. 4, pp. 380-385, 1958.

[12] M. K. Kwak, S. Han, Free vibration analysis of rectangular plate with a hole by means of independent coordinate coupling method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 306, No. 1–2, pp. 12-30, 2007.

[13] S. Jiandong, Z. Weixing, T. Lewei, Bending problem of moderately thick plates solved by mesh-free method, *Chinese Quarterly of Mechanics* Vol. 27, No. 2, pp. 348-353, 2006.

[14] S. Jiandong, Z. Weixing, T. Lewei, Modal analysis of moderately thick plates by element-free method, *China Civil Engineering Journal* Vol. 39, No. 10, pp. 29-33, 2006.

[15] L. F. Qian, R. C. Batra, L. M. Chen, Elastostatic deformations of a thick plate by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and two meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) methods, *Computer Modeling in Engineering and Sciences* Vol. 4, No. 1, pp. 161–175, 2003.

[16] L. F. Qian, R. C. Batra, L. M. Chen, Free and forced vibrations of thick rectangular plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov–Galerkin (MLPG) method, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 4, No. 5, pp. 519–534, 2003.

[17] R. Vaghefi, G. H. Baradaran, H. Koohkan, Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, No. 6, pp. 564-573, 2010.

[18] GR. Liu, L. Yan, JG. Wang, Y. Gu, Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions, *Structural Engineering and Mechanics* Vol. 14, No. 6, pp. 713-732, 2002.

[19] J. R. Xiao, R. C. Batra, D. F. Gilhooley, J. W. Gillespie Jr, M. A. McCarthy, Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 4–6, pp. 979-987, 2007.

[20] P. Xia, S. Y. Long, H. X. Cui, G. Y. Li, The static and free vibration analysis of a nonhomogeneous moderately thick plate using the meshless local radial point interpolation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 6, pp. 770-777, 2009.

[21] G. R. Liu, Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Berlin: Springer, 2005.

[22] G. R. Liu, K. Y. Dia, K. M. Lim, Y. T. Gu, A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures, *Smart Materials and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 171-180, 2003.

[23] R. Pilafkan, P. D. Folkow, M. Darvizeh, A. Darvizeh, Three dimensional frequency analysis of bidirectional functionally graded thick cylindrical shells using a radial point interpolation method (RPIM), *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 39, No. 0, pp. 26-34, 2013.


[ Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25 ]

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.16.29.8 ]