



## شناسایی برخط تانسور اینرسی ماهواره مجهز به چرخ عکس‌العملی با استفاده از روش حداقل مربعات مقاوم شده در برابر نویز اندازه‌گیری

محمد علی امینی<sup>۱</sup>، حسن سالاریه<sup>۲\*</sup>، آریا الستی<sup>۳</sup>

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
  - ۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
  - ۳- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
- \* تهران، صندوق پستی ۹۵۶۷-۱۱۱۵۵، salarieh@sharif.ir

**چکیده-** در این مقاله، بر پایه روش حداقل مربعات بازگشتی، روشی بر خط، برای شناسایی مؤلفه‌های تانسور ممان اینرسی یک ماهواره ارائه شده است. فرض بر این است که عملگرهای ماهواره، سه چرخ عکس‌العملی عمود به یکدیگر می‌باشند. تنها سنسور مورد استفاده، سنسور ژایرو نرخی سه محوره می‌باشد که سرعت‌های دورانی ماهواره را در مختصات متصل به جسم اندازه‌گیری می‌کند. به دلیل وجود نویز در این سنسور، ماتریس برازش‌گر مورد استفاده در روش حداقل مربعات دارای نویز بوده و در نتیجه روش حداقل مربعات کلاسیک، قابل استفاده نبوده و همگرا نخواهد شد. برای حل این مشکل، روشی مقاوم به نویز ارائه و پایداری این روش با استفاده از روش پایداری لیاپانوف اثبات شده است. روش ارائه شده می‌تواند به صورت برخط در حضور نویز و دیگر خطاهای موجود در سنسورها، مورد استفاده قرار گیرد. نتایج حاصله از شبیه‌سازی این روش، نشان می‌دهد که این روش توانسته است با خطایی کمتر از ۳ درصد مقدار واقعی، پارامترهای اینرسی ماهواره را قبل و بعد از تغییر پارامترها، شناسایی کند.

**کلیدواژگان:** شناسایی، تانسور ممان اینرسی، ماهواره، روش مقاوم به نویز، روش حداقل مربعات بازگشتی.

## Online identification of inertia tensor in a reaction wheel equipped satellite using a robust least squares method

M.A. Amini<sup>1</sup>, H. Salarieh<sup>2\*</sup>, A. Alasty<sup>3</sup>

- 1- MSc. of Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran
  - 2- Assis. Prof. of Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran.
  - 3- Prof. of Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran.
- \* P. O. B. 11155-9567 Tehran, Iran. salarieh@sharif.ir

**Abstract-** In this paper a method for online identification of satellite moment of inertia tensor parameters based on recursive least squares method, is presented. It is assumed that the satellite actuators are three orthogonal reaction wheels. Dynamic equations of the satellite are extracted in a special manner. The only available sensor is a three axes rate gyro which measures the angular velocity of satellite in the body coordinate system. Due to existence of noise in this sensor, the regressor matrix used in least squares method, changes stochastically. So in this case, the classic least squares method is not useful, and it cannot converge. For solving this problem, a modified least squares method with robust scheme is presented and its stability is proved using Lyapunov stability theory. The presented method can be used online in presence of measurement noise and other sensor imperfections. Simulation results have shown that this method can identify inertia parameters of the satellite with less than 3 percent error comparing to real parameters before and after parameter changes.

**Keywords:** Identification, Moment of Inertia Tensor, Satellite, Robust Method, Recursive Least Squares Method.

## ۱- مقدمه

امروزه شاهد آن هستیم که طراحی، پرتاب و کنترل ماهواره و فضاپیما، یکی از عرصه‌های مهم تکنولوژی در سرتاسر دنیا محسوب می‌شود و بودجه‌های کلانی در این مسیر صرف می‌شود. در کشور ما نیز در دهه گذشته، اقدام‌های ویژه‌ای در این بخش صورت گرفته است. به دلیل پر هزینه بودن پروژه‌های فضایی و در نتیجه ریسک‌پذیری بسیار کم آن، یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های موجود، اطمینان از وضعیت ماهواره یا فضاپیما و توانایی کنترل و عیب‌یابی آنها است. به عبارت دیگر، با توجه به هزینه‌های بالای ساخت یک ماهواره، هر روشی که بتواند خطرپذیری مأموریت ماهواره را کاهش دهد، دارای ارزش توجه و بررسی می‌باشد.

اطلاع دقیق از ویژگی‌های اینرسی یک ماهواره برای توانایی در کنترل وضعیت و همچنین عیب‌یابی یک ماهواره، امری بسیار ضروری است. به عبارت دیگر، در صورت مشاهده عیوب ناشناخته در ماهواره در مدار، می‌توان از اطلاعات بر خط خواص جرمی، برای کمک به عیب‌یابی ماهواره استفاده کرد. اگر تنها از خواص جرمی اندازه‌گیری شده بر روی زمین در کنترل ماهواره استفاده شود، در صورت هر گونه عیب و یا خطا در ساختمان فیزیکی ماهواره، پارامترهای مفروض اعتبار خود را از دست خواهند داد. حتی در صورت خلل وارد نشدن در کنترل ماهواره، آگاهی از خواص ماهواره، به صورت برخط، می‌تواند در عیب‌یابی خطاهای غیر منتظره کارا باشد.

دلایل گوناگونی می‌تواند باعث تغییر خواص جرمی ماهواره و یا فضاپیما شوند که به اختصار بر شمرده می‌شوند:

- تغییر توزیع جرم ماهواره به دلایل گوناگون از جمله تغییر وضعیت پانل‌های خورشیدی و یا در مقیاسی بزرگتر، حرکت سرنشینان یک فضاپیما در داخل آن.
- اضافه شدن فازها و قسمت‌های تکمیلی ماهواره، پس از پرتاب آن.

- اجسام سرگردان فضایی که ممکن است به ماهواره الصاق شوند و موجب تغییر خواص جرمی آن شوند.

- تغییر جرم مستمر ایستگاه‌های پرتاب ماهواره در فضا. امروزه به دلیل این که پرتاب ماهواره، یک فرایند بسیار پر هزینه است، یکی از راه‌حل‌های مطرح، پرتاب کردن ماهواره‌ها از فضا- به جای زمین- به سوی مدارهایشان می‌باشد. یعنی در

ابتدا ماهواره‌ها به صورت تجمیعی به یک ایستگاه منتقل شده و سپس از ایستگاه به سوی مدارهایشان پرتاب شوند. در این فرایند به دلیل تغییر دائمی خواص این ایستگاه، اندازه‌گیری خواص باید به صورت برخط انجام گیرد.

- تغییر مقدار سوخت در فضاپیماها. با توجه به موارد فوق، استفاده از روش‌های برخط برای اندازه‌گیری خواص جرمی این گونه سیستم‌ها، با گذر زمان امری اجتناب‌ناپذیر است.

برگمن و همکاران در سال ۱۹۸۷، برای یک ماهواره که دارای شکل نامتقارن بود و از جت پیش‌ران<sup>۱</sup> برای حرکت استفاده می‌کرد، یک روش تخمین پارامتر برخط ارائه کردند [۱]. در این روش مکان مرکز جرم و تانسور ممان اینرسی معکوس، از روی سنسور نویز دار سرعت دورانی که از یک فیلتر درجه دوم می‌گذرد، محاسبه شده و اندازه جرم، از روی سنسور خطی نویزدار که از یک فیلتر کالمن می‌گذرد، استخراج می‌شود. آنها به این نتیجه رسیدند که سرعت همگرایی جواب، کاملاً بسته به نوع مانوری است که برای انجام این کار به اجرا در می‌آید. به همین منظور کارهایی در این زمینه توسط این گروه برای انتخاب مانورهای مناسب‌تر نیز انجام شده است [۲].

بیشاپ و همکاران در سال ۱۹۹۲، روشی برای کنترل وضعیت یک ایستگاه فضایی ارائه کردند که در آن از ژيروسکوپ‌های کنترل کننده گشتاور<sup>۲</sup> به عنوان ورودی استفاده شده است [۳]. در قسمت شناسایی پارامترها، از یک کالمن فیلتر تعمیم یافته بازگشتی<sup>۳</sup> جهت تخمین پارامترهای اینرسی استفاده شده است.

پالیماکا و همکاران، روشی شبیه روش برگمن را در پیش گرفتند [۴]. ولی به جای روش آنها، از روش حداقل مربعات وزن‌دار<sup>۴</sup> استفاده کردند.

تانجین در سال ۱۹۹۷، مسأله تخمین زدن خواص جرمی با مانورهای ویژه را بررسی کرد [۵] و با استفاده از آنالیزهای تصادفی، مانورهای بهینه برای این کار را پیشنهاد داد.

احمد و همکاران، در سال ۱۹۹۸، روشی تطبیقی ارائه کردند و در آن ادعا نمودند که می‌توانند بدون داشتن اطلاعات

1. Thruster  
2. Control Moment Gyro  
3. Recursive Extended Kalman Filter  
4. Weighted Least Squares

فیلتر کردن ورودی‌ها با استفاده از کالمن فیلتر، ماتریس ممان اینرسی را با استفاده از روش حداقل مربعات تخمین زده است. دسوزا و همکاران، در سال ۲۰۰۸، بر روی یک شبیه‌ساز ماهواره سه درجه آزادی که دارای سه چرخ عکس‌العملی<sup>۵</sup> است، روشی تجربی برای پیدا کردن خواص اینرسی ارائه کردند [۱۴]. در واقع در این روش، ابتدا خروجی‌ها به ازای گشتاورهای مختلف ثبت می‌شود و سپس به طور جداگانه، خواص اینرسی محاسبه می‌شود.

در سال ۲۰۱۰، جون و همکاران، روشی بر اساس مدل حداقل همبستگی ارائه کردند. دلیل این کار را هم، بالا بودن حساسیت روش حداقل مربعات به نویز عنوان کرده‌اند.

در همین سال کیم و همکاران، یک روش ترکیبی را برای تخمین پارامتر ماهواره STSAT 3 مورد استفاده قرار دادند [۱۵]. آنها ابتدا سنسورهای ورودی را با استفاده از سه روش مختلف (فیلتر کالمن، باتورث<sup>۶</sup>، انتقال مرتبه صفر<sup>۷</sup>) فیلتر کرده و مقایسه نموده‌اند و سپس با یک روش حداقل مربعات دسته‌ای، ماتریس اینرسی را تخمین زده‌اند.

در تمام کارهای ذکر شده، آن دسته از کارهایی که بر پایه روش حداقل مربعات بوده‌اند، یا به نویز توجه نکرده‌اند و یا در صورت توجه، الگوریتم مقاوم‌ارائه نکرده و اثبات پایداری ارائه ندادند.

ماهواره مورد بررسی در این مقاله، ماهواره چرخ عکس‌العملی سه محوره است. اصول کار این ماهواره‌ها، استفاده از قانون بقای مومنتم برای حرکت دورانی است. به این ترتیب که که موتورهای متصل به چرخ‌های عکس‌العملی، باعث گردش این چرخ‌ها شده و در نتیجه، به دلیل قانون بقای مومنتوم زاویه‌ای در کل مجموعه، کل ماهواره در جهت مخالف، شروع به حرکت خواهد کرد. در شکل ۱ نمای چرخ‌های عکس‌العملی مورد استفاده در یک شبیه‌ساز ماهواره به نمایش در آمده است. لازم به ذکر است که از وسایل مشابهی به نام چرخ مومنتم<sup>۸</sup> در ماهواره‌ها استفاده می‌شود که با چرخ‌های عکس‌العملی مشابه عملکردی دارند. تفاوت این دو در آن است که چرخ‌های عکس‌العملی در سرعت‌های دورانی پایین‌تر و حول سرعت صفر

خواص جرمی، وضعیت ماهواره را کنترل کنند و حتی ماتریس اینرسی را هم تخمین بزنند [۶]. آنها در فاز تخمین ماتریس اینرسی از فرمان‌های پیرویدیک استفاده کردند.

در سال ۲۰۰۱، لی و همکاران، تجربه عملی خود در زمینه تخمین سنسور اینرسی فضایی کاسینی را ارائه کردند [۷]. آنها از یک روش تخمین حداقل مربعات برای تخمین ماتریس اینرسی استفاده کردند. این کار در هنگام مأموریت این فضاپیما، در هنگامی که این فضاپیما چند مانور حول محورهایش انجام داد، انجام شده است.

در سال ۲۰۰۲، ویلسون و همکاران، با استفاده از روش حداقل مربعات بازگشتی، خواص جرمی یک فضاپیما که با جت پیش‌ران کنترل می‌شود را تخمین زدند [۸]. البته روش مدل سازی آنها با روش برگمن، متفاوت بود. آنها در نهایت الگوریتم خود را روی دو شبیه‌ساز ماهواره آزمایش کردند.

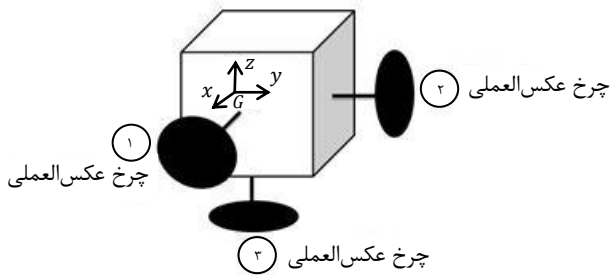
شوارتز و همکاران در سال ۲۰۰۳، روش‌های مختلف کالمن فیلترینگ (مثل کالمن فیلتر تعمیم یافته و کالمن فیلتر تعمیم یافته بازگشتی) را برای تخمین حالت‌ها و پارامترهای یک شبیه‌ساز ماهواره را با یکدیگر مقایسه کردند [۹]. همین گروه در سال ۲۰۰۵ برای تخمین همان شبیه‌ساز از یک روش حداقل مربعات دسته‌ای<sup>۱</sup> استفاده کرد [۱۰] و توضیح داد که در کارهایی که هزینه‌ها پایین‌تر است و دقت بالا نیز مورد نیاز نیست، استفاده از روش حداقل مربعات، به صرفه است. همچنین در سال ۲۰۰۵، ون دایک با کمک شوارتز، روش UKF<sup>۲</sup> را نیز بررسی کردند و نتایج مقایسه آن با EKF<sup>۳</sup> را در تخمین پارامترهای یک فضاپیما شبیه‌سازی شده مقایسه کردند [۱۱].

کیم در سال ۲۰۰۶ برای تخمین ماتریس ممان اینرسی فضاپیما، از یک روش حداقل مربعات مقید<sup>۴</sup> استفاده کرد [۱۲]. برای آزمایش این روش، از یک شبیه‌ساز ماهواره پنج درجه آزادی، استفاده شده است. او ادعا می‌کند در هنگام محدود بودن داده‌ها، این روش مزیت دارد.

کوتلو در سال ۲۰۰۷، یک مدل شبیه‌سازی شده با نرم‌افزار متلب، برای ماهواره‌های LEO ارائه کرده است [۱۳] و پس از

5. Reaction Wheel  
6. Butterworth  
7. Zero shift order  
8. Momentum wheel

1. Batch Least Squares Method  
2. Unscented Kalman Filter  
3. Extended Kalman Filter  
4. Constrained Least Squares Method



شکل ۲ شمای کلی سیستم و جهت فرارگیری چرخ‌های عکس‌عملی

که  $I_{RW}$ ، ماتریس ممان اینرسی چرخ عکس‌عملی نسبت به مرکز جرم مجموعه چرخ عکس‌عملی و  $\omega_{RW_i}$  سرعت دوران نسبی چرخ عکس‌عملی  $i$ ام نسبت به دستگاه قرار گرفته بر روی ماهواره می‌باشد.

رابطه (۱) در واقع تعمیم رابطه اوپلر برای چند جسم صلب است که به یکدیگر متصل هستند و نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند. در ماهواره، بدنه و چرخ‌های عکس‌عملی اجزای صلبی هستند که نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند. البته در عمل، ماهواره دارای اجزایی است که انعطاف‌پذیر هستند. بررسی اثر این انعطاف‌پذیری از حیثه این مقاله خارج است.

برای به دست آوردن رابطه گشتاور موتور چرخ عکس‌عملی با سرعت زاویه‌ای سیستم، باید معادلات اوپلر چرخ‌های عکس‌عملی به صورت جداگانه نوشته شوند.

دیگرام آزاد هرکدام از چرخ‌های عکس‌عملی در شکل ۳ مشاهده می‌شود.

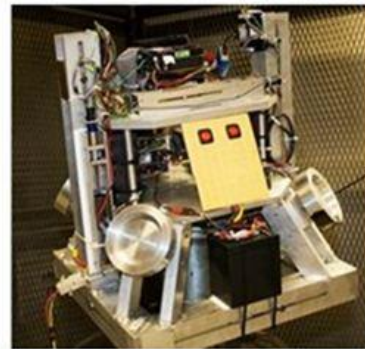
در ضمن قابل ذکر است که دستگاه  $\alpha\beta\gamma$  بر روی مرکز جرم چرخ عکس‌عملی قرار دارد ولی با سرعت زاویه‌ای بدنه (و نه چرخ عکس‌عملی) حرکت می‌کند.

با نوشتن معادلات اوپلر حول مرکز جرم مجموعه چرخ عکس‌عملی و با فرض حرکت دستگاه مختصات با بدنه ماهواره، رابطه (۳) به دست می‌آید.

$$T_i + \sum r_j \times F_j = \omega \times (I_{RW_i}(\omega + \omega_{RW_i})) + I_{RW_i}(\dot{\omega} + \dot{\omega}_{RW_i}) \quad (3)$$

همان طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود،  $T_i$  گشتاور وارد بر چرخ عکس‌عملی  $i$ ام توسط موتور  $i$ ام می‌باشد. شماره هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی را می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد.

کار می‌کنند. در حالی که چرخ‌های مومنتم، در سرعت‌های دورانی بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند و در حالت پیش فرض، سرعت غیر صفر دارند [۱۶].



شکل ۱ نمایی از چرخ‌های عکس‌عملی بر روی یک شبیه‌ساز ماهواره (شبیه‌ساز ماهواره دانشگاه کالیفرنیا پلی تکنیک)

## ۲- استخراج دینامیک ماهواره

در کلیه روابط این بخش زیروند  $i$ ، نشان دهنده شماره چرخ عکس‌عملی می‌باشد.

شکل ۲ شمای کلی ماهواره، چرخ‌های عکس‌عملی و دستگاه مختصات روی جسم را نمایش می‌دهد. همان طور که در شکل ۲ قابل ملاحظه است، محورهای مختصات موازی محورهای دوران چرخ‌های عکس‌عملی در نظر گرفته شده‌اند و همچنین مرکز مختصات، بر روی مرکز جرم کل سیستم می‌باشد.

در این حالت رابطه (۱) بیانگر معادله دینامیکی سیستم خواهد بود [۱۷].

$$T_{ext} = \omega \times (I\omega + h) + I\dot{\omega} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

$T_{ext}$  برآیند گشتاورهای خارجی وارد بر کل سیستم می‌باشد. همچنین  $I$  ممان اینرسی کل سیستم حول مرکز جرم آن و  $\omega$  سرعت دورانی دستگاه مختصات متصل به بدنه ماهواره می‌باشد.

لازم به تذکر است که دستگاه مختصات، تنها به بدنه سیستم متصل است و در نتیجه سرعت دورانی نسبی چرخ‌های عکس‌عملی نسبت به بدنه ماهواره را ندارد. رابطه (۲) روش محاسبه  $h$  را مشخص می‌کند.

$$h = \sum_{i=1}^3 I_{RW_i} \omega_{RW_i} \quad (2)$$

$$T_1 = J_1(\dot{\omega}_{RW_1} + \dot{\omega}_x) \quad (9-الف)$$

$$T_2 = J_2(\dot{\omega}_{RW_2} + \dot{\omega}_y) \quad (9-ب)$$

$$T_3 = J_3(\dot{\omega}_{RW_3} + \dot{\omega}_z) \quad (9-ج)$$

در روابط (۹)،  $T_1$ ،  $T_2$  و  $T_3$  در واقع مقادیر ممان‌های وارده از موتورهای چرخ‌های عکس‌عملی ۱، ۲ و ۳، که در شکل ۲ نشان داده شده‌اند، می‌باشند.

$J_1$ ،  $J_2$  و  $J_3$  نیز مؤلفه‌های سوم ارائه شده در رابطه (۵) برای هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی هستند.

تعریف سه عبارت  $J$ ،  $T$  و  $\omega_{RW}$  از طریق روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) انجام می‌شود.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\omega_{RW} = \begin{bmatrix} \omega_{RW_1} \\ \omega_{RW_2} \\ \omega_{RW_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

با توجه به تعاریف رابطه‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲)، می‌توان روابط (۹-الف) تا (۹-ج) به فرم رابطه (۱۳) نشان داد.

$$T = J(\dot{\omega}_{RW} + \dot{\omega}) \quad (13)$$

همچنین با استفاده از این تعاریف، می‌توان متغیر  $h$  که در رابطه شماره (۲) آورده شده است را باز نویسی کرد. از این طریق رابطه (۱۴) به دست می‌آید.

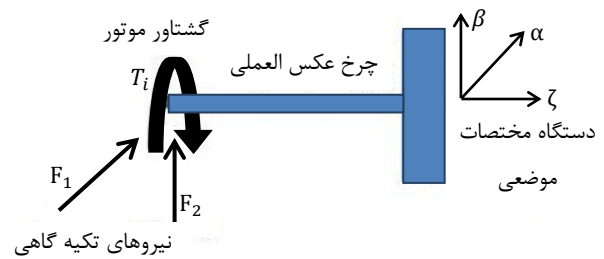
$$h = J\omega_{RW} \quad (14)$$

در نتیجه رابطه (۱) به شکل رابطه (۱۵) درخواهد آمد.

$$T_{ext} = \omega \times (I\omega + J\omega_{RW}) + I\dot{\omega} + J\dot{\omega}_{RW} \quad (15)$$

روابط (۱۳) و (۱۵) در واقع خلاصه‌ای از دینامیک دورانی سیستم ماهواره می‌باشد.

قابل ذکر است که ماتریس  $I$  ممان اینرسی کل سیستم با در نظر گرفتن مجموعه چرخ‌های عکس‌عملی می‌باشد. با توجه به این موضوع و همچنین این واقعیت که راستاهای  $\zeta$  در هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی، همراستا با یکی از محورهای مختصات اصلی  $xyz$  هستند، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس  $J-I$  یک ماتریس مثبت معین است. زیرا اگر ممان اینرسی ماتریس [حول دستگاه  $xyz$  نوشته شود. مقدار آن برابر مجموع ماتریس  $J$  و یک ماتریس مثبت معین دیگر خواهد بود. جمع



شکل ۳ دیاگرام آزاد چرخ عکس‌عملی

بردارهای  $F_j$  و  $T_j$ ، بردارهای نیروهای عکس‌عملی یا تاقان‌های چرخ عکس‌عملی و بردار محل اثر آنها تا مرکز جرم می‌باشند. در این مقاله فرض شده است که یا تاقان‌ها دارای اصطکاک نیستند و در نتیجه این دو نیروی متعامد، محور  $\zeta$  را قطع می‌کنند و لذا حول این محور گشتاوری تولید نمی‌کنند. در دستگاه موضعی  $\alpha\beta\zeta$ ، بردار  $T_i$  به شکل رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

همچنین ماتریس ممان اینرسی در دستگاه موضعی  $\alpha\beta\zeta$ ، به شکل رابطه (۵) خواهد بود.

$$I_{RW_i} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\beta\beta_i} & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

بردار  $\omega_{RW_i}$  و سرعت دورانی سیستم ماهواره ( $\omega$ ) نیز در دستگاه مختصات  $\alpha\beta\zeta$  به صورت روابط (۶) و (۷) تعریف می‌شوند.

$$\omega_{RW_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{RW_i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (7)$$

با باز کردن رابطه (۳) و با استفاده از تعاریف ارائه شده، مؤلفه حول محور  $\zeta$  برای هر کدام از چرخ‌های عکس‌عملی به شکل رابطه (۸) خواهد شد.

$$T_i = J_i(\dot{\omega}_{RW_i} + \dot{\omega}_\zeta) + (I_{\beta\beta_i} - I_{\alpha\alpha_i})\omega_\alpha\omega_\beta \quad (8)$$

با انتقال رابطه (۸) به دستگاه اصلی سیستم و نوشتن آن برای هر سه چرخ عکس‌عملی و همچنین با فرض تقارن این چرخ‌ها حول محور  $\zeta$  روابط (۹-الف) تا (۹-ج) بدست می‌آیند:

در خروجی، خللی در روش حداقل مربعات ایجاد نمی‌کند. تابع هدفی که در روش حداقل مربعات کمینه می‌شود از رابطه (۱۷) قابل تعریف است.

$$K = \int_0^t \frac{1}{2} \|e(\tau)\|^2 d\tau \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $e$  خطای موجود بین خروجی مدل تخمین زده شده و خروجی واقعی بر حسب زمان می‌باشد.

در روش حداقل مربعات، فرض بر این است که خروجی مدل نسبت به پارامترهای بهینه‌سازی خطی است. یعنی به صورت رابطه (۱۸) قابل توصیف است.

$$y(t) = \theta_1 \varphi_1(t) + \theta_2 \varphi_2(t) + \dots + \theta_n \varphi_n(t) = \varphi^T(t) \theta \quad (18)$$

روابط (۱۹) و (۲۰) شکل کلی بردار  $\theta$  و ماتریس  $\varphi$  را در رابطه (۱۸) نشان می‌دهند.

$$\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)^T \quad (19)$$

$$\varphi^T(i) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad (20)$$

در این روابط، پارامترهای  $\theta$ ، پارامترهای واقعی سیستم می‌باشند. ماتریس  $\varphi$  که به نام برازشگر شناخته می‌شود، می‌تواند شامل ترکیب‌هایی کاملاً غیرخطی از ورودی‌ها باشد، زیرا در این روش تنها رابطه خروجی بر حسب پارامترها است که باید خطی باشد. به عبارت ساده‌تر رابطه خطا باید به شکل رابطه (۲۱) بازنویسی شود.

$$e = y - \hat{y} = y - \varphi^T(i) \hat{\theta} \quad (21)$$

که در آن  $\hat{\theta}$  بردار پارامترهای تخمینی شناساگر است. با جایگذاری رابطه (۲۱) در تابع هدف ارائه شده در رابطه (۱۷)، و انجام عملیات مشتق‌گیری و ساده‌سازی، می‌توان نشان داد که جواب بهینه در هر زمان، با استفاده از قوانین تطبیق ذکر شده در رابطه (۲۲) حاصل می‌شود.

$$\dot{\hat{\theta}} = P \phi e$$

$$\dot{P} = -P \phi \phi^T P \quad (22)$$

در این رابطه،  $P$  یک ماتریس  $n \times n$  است که با انتخاب یک مقدار اولیه، در فرایند تطبیق قرار می‌گیرد. قابل ذکر است که این ماتریس، در واقع ماتریس کواریانس مقادیر خطا در طول زمان می‌باشد.

یکی از نکات قابل توجه در روش حداقل مربعات، این

این ماتریس مثبت معین و مقادیر اینرسی بقیه اجزای ماهواره (به غیر از چرخ‌های عکس‌العملی) حول محور اصلی، بدون حضور ماتریس  $J$  نیز مثبت معین است.

برای به دست آوردن سرعت دورانی دستگاه اصلی مختصات با ترکیب رابطه‌های (۱۳) و (۱۵) رابطه (۱۶) حاصل می‌شود.

$$\dot{\omega} = (I - J)^{-1} [T_{\text{ext}} - T - \omega \times (I\omega + J\omega_{\text{RW}})] \quad (16)$$

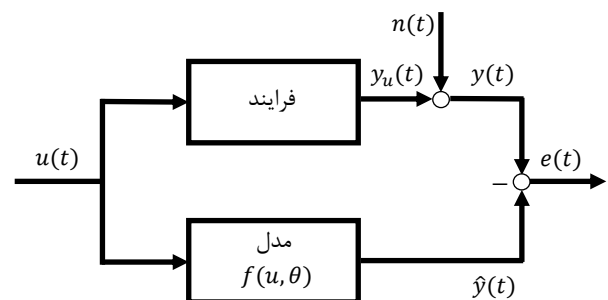
قابل ذکر است که از رابطه (۱۶) برای شبیه‌سازی سیستم استفاده می‌شود و نه در شناسایی پارامترهای اینرسی.

در سیستم ماهواره، فرض بر این است که می‌توان مقدار  $\omega_{\text{RW}}$  را با استفاده از سنسور نصب شده بر روی موتورها (مثلاً انکودر) بدست آورد. در صورتی که این امر ممکن نباشد، می‌توان از رابطه (۱۳) و به کمک انتگرال‌گیری از گشتاور عکس‌العملی برای این کار استفاده کرد. قابل ذکر است که با توجه به نداشتن سنسور و یا عملگر خطی، جرم و مرکز جرم ماهواره، قابل تعیین نیستند.

### ۳- روش حداقل مربعات

همان طور که از نام این روش مشخص است، روش حداقل مربعات، بر پایه کمینه کردن مجموع مربعات خطای تخمین خروجی سیستم است.

همان طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، منظور از خطا، اختلاف بین خروجی مدل و سیستم واقعی می‌باشد. البته سیستم اصلی دارای نویز در قسمت خروجی است.



شکل ۴ نمای کلی شناسایی به روش حداقل مربعات

با محاسبات آماری مشخص می‌شود که روش حداقل مربعات برای کمینه کردن خطا در شرایط وجود نویز سفید در خروجی نیز مؤثر می‌باشد [۱۸]. به عبارت دیگر، وجود این نویز

#### 1. Regressor

$$\theta^T = [I_{xx} \quad I_{yy} \quad I_{zz} \quad I_{xy} \quad I_{xz} \quad I_{yz}] \quad (28)$$

$$\phi^T(:, 1:3) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y \omega_z & \omega_y \omega_z \\ \omega_z \omega_x & \dot{\omega}_y & -\omega_z \omega_x \\ -\omega_x \omega_y & \omega_x \omega_y & \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\phi^T(:, 4:6) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x & \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y & \omega_y^2 - \omega_z^2 \\ \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z & \omega_z^2 - \omega_x^2 & \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y \\ \omega_x^2 - \omega_y^2 & \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z & \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x \end{bmatrix} \quad (30)$$

در این روابط  $\phi^T(:, m: n)$  به معنای ستون‌های  $m$  تا  $n$  ماتریس  $\phi^T$  می‌باشد.

لازم به یادآوری است که ماتریس  $J$  به صورت یک پارامتر معلوم در نظر گرفته شده است و معنای آن این است که فرض تغییر ممان اینرسی، به همه نقاط ماهواره به جز بخش مجموعه چرخ عکس‌عملی باز می‌گردد. به عبارت دیگر فرض شده است که خواص اینرسی چرخ عکس‌عملی تغییر نمی‌کند؛ که البته به دلیل کوچک بودن حجم این مجموعه و ماهیت کار آن، فرض نامعقولی نیست.

همچنین برای بدست آوردن  $\omega_{RW}$  در قسمت سمت چپ رابطه (۲۶)، همان طور که در بخش قبل اشاره شد، یا باید مستقیماً این مقدار با استفاده از سنسورهای موتور، نظیر انکودرها اندازه گرفته شود و یا از رابطه شماره (۱۳) استفاده شود. با بازنویسی این رابطه، رابطه (۳۱) بدست می‌آید.

$$\dot{\omega}_{RW} = J^{-1}T - \dot{\omega} \quad (31)$$

در نتیجه سرعت زاویه‌ای را می‌توان از رابطه (۳۲) محاسبه کرد.

$$\omega_{RW} = J^{-1} \left( \int T dt \right) - \omega \quad (32)$$

با توجه به رابطه (۳۲)، می‌توان با استفاده از رابطه بین گشتاور موتور و سرعت دورانی مجموعه، که قابل اندازه‌گیری هستند، سرعت دورانی چرخ‌های عکس‌عملی را به دست آورد. البته به دلیل ورود نویز سنسورها در این اندازه‌گیری، اندازه‌گیری مستقیم مثلاً از طریق انکودر مناسب‌تر است.

همان طور که در رابطه (۱۵) قابل مشاهده است، گشتاورهای مؤثر در حرکت دورانی ماهواره با دو اسم  $T_{ext}$  و  $T$  نشان داده شده‌اند. گشتاور  $T$  در واقع گشتاور محوری وارد بر چرخ عکس‌عملی می‌باشد. این مقدار، شامل گشتاور وارد از طرف موتور و همچنین گشتاور اصطکاکی یاتاقان‌ها می‌باشد (رابطه (۳۳)).

$$T = T_{motor} - T_{friction} \quad (33)$$

واقعیت است که اثر<sup>۱</sup> ماتریس  $P$  با گذر زمان کوچک می‌شود و در نتیجه اگر پس از گذشت زمانی قابل توجه، پارامتری در سیستم تغییر کند، الگوریتم، کارایی خود را برای تعقیب مجدد جواب از دست می‌دهد. برای جبران این نقص، از دو روش استفاده می‌شود. روش اول، روش مقداردهی مجدد ماتریس  $P$  می‌باشد. به عبارت دیگر، وقتی اثر این ماتریس از حدی کوچک‌تر شود، این ماتریس به مقدار اولیه اش برگردانده شده و این الگوریتم، دوباره از مقادیر اولیه اش راه اندازی خواهد شد. روش دوم، روش استفاده از فاکتور فراموشی است. در این روش به جای استفاده از تابع هدف ارائه شده در رابطه (۱۷)، از تابع هدفی به شکل رابطه (۲۳) استفاده می‌شود.

$$K = \int_0^t \frac{1}{2} e^{\lambda(t-\tau)} \|y - \phi^T \hat{\theta}(\tau)\|^2 d\tau \quad (23)$$

به پارامتر  $\lambda$ ، فاکتور فراموشی گفته می‌شود. همان طور که مشخص است، اگر در رابطه (۲۳) مقدار این پارامتر برابر صفر قرار داده شود، تابع هدف، همان تابع هدف قبلی خواهد شد. با زیاد کردن این پارامتر، تابع هدف تاثیر خطاهای قدیمی‌تر را کمتر خواهد کرد و در نتیجه مشکل قبلی حل خواهد شد. در این حالت پس از محاسبه حالت بهینه، قوانین تطبیق به شکل رابطه (۲۴) حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= P\phi e \\ \dot{P} &= \lambda P - P\phi\phi^T P \end{aligned} \quad (24)$$

#### ۴- پیاده سازی روش بر روی دینامیک ماهواره

در این بخش، رابطه‌ها برای استفاده در روش حداقل مربعات، نسبت به پارامترها خطی خواهند شد.

با اضافه کردن رابطه شماره (۱۳) به رابطه شماره (۱۵) رابطه‌ای به شکل رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

$$T_{ext} = \omega \times (I\omega + J\omega_{RW}) + I\dot{\omega} + T - J\dot{\omega} \quad (25)$$

در نتیجه می‌توان رابطه (۲۶) را عنوان کرد.

$$T_{ext} - T + J\dot{\omega} - \omega \times J\omega_{RW} = \omega \times I\omega + I\dot{\omega} \quad (26)$$

سمت راست رابطه (۲۶) را می‌توان به صورت خطی نسبت به پارامترها نوشت. در نتیجه رابطه (۲۷) ایجاد خواهد شد.

$$T_{ext} - T + J\dot{\omega} - \omega \times J\omega_{RW} = \phi^T \theta \quad (27)$$

روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰)، پارامترهای بردار  $\theta$  و ماتریس  $\phi$  را تبیین می‌کنند.

#### 2. Trace

خروجی را اگر به صورت نویز سفید باشد تحمل کند [۱۸]. برای بر طرف کردن این مشکل سعی شده است با تغییر قانون تطبیق، الگوریتم نسبت به نویز مقاوم شود. برای آشنایی با نحوه اثبات پایداری این روش، ابتدا اثبات پایداری روش حداقل مربعات معمولی که ماتریس برازشگر آن قطعی است آورده می‌شود.

#### ۵-۱- اثبات پایداری روش حداقل مربعات (بدون حضور نویز در برازشگر)

با توجه آن چه در بخش دوم گفته شد، در روش حداقل مربعات، رابطه (۳۵) برای قانون تطبیق برقرار است.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= P\phi e \\ \dot{P} &= -P\phi\phi^T P \end{aligned} \quad (35)$$

$\theta$  بردار پارامترهای واقعی،  $\hat{\theta}$  بردار پارامترهای تخمینی،  $\phi$  ماتریس برازشگر،  $P$  ماتریس کواریانس خطا و  $e$  خطای تخمین شناساگر می‌باشد.

برای اثبات پایداری، از تابع لیاپانوفی به شکل قید شده در رابطه (۳۶) استفاده می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta} \quad (36)$$

$\tilde{\theta}$  در این تابع لیاپانوف از رابطه (۳۷) قابل محاسبه است.

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \quad (37)$$

در نتیجه مشتق تابع لیاپانوف به فرم رابطه (۳۸) خواهد بود.

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta} \quad (38)$$

با توجه به رابطه‌های (۳۵) و (۳۷) می‌توان مشتق را به صورت رابطه (۳۹) بازنویسی کرد.

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1} (-P\phi e) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta} \quad (39)$$

همان طور که در رابطه (۴۰) اشاره شده است، حاصل ضرب هر ماتریس در معکوس خود، ماتریس همانی است.

$$PP^{-1} = \text{Identity matrix} \quad (40)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴۰)، رابطه (۴۱) حاصل می‌شود.

$$PP^{-1} + \dot{P}P^{-1} = 0 \quad (41)$$

این رابطه را می‌توان به شکل رابطه (۴۲) بازنویسی کرد.

$$P^{-1} \dot{P} = -P^{-1} \dot{P} P^{-1} \quad (42)$$

حال با جایگذاری رابطه (۳۵) در رابطه (۴۲)، می‌توان به رابطه (۴۳) رسید.

$$P^{-1} \dot{P} = \phi\phi^T \quad (43)$$

در این مقاله فرض بر این است که گشتاور اصطکاکی یاتاقان‌های چرخ عکس‌العملی ناچیز است. در نظر گرفتن و شناسایی پارامترهای اصطکاکی، موضوع تحقیقات بعدی خواهد بود. گشتاور  $T_{\text{ext}}$ ، در واقع کلیه گشتاورهای خارجی وارد بر کل سیستم حول مرکز جرم آن می‌باشد. با توجه به معلق بودن ماهواره در فضا، در این مقاله، این گشتاور به صورت یک اختلال با توزیع گوسی مدل شده است.

با توضیحات ذکر شده، ساختار شناساگر و سیستم مشخص شده است. در شکل ۵ شمای کلی این ساختار به نمایش در آمده است.

لازم به یادآوری است که گشتاور سیستم باید سیگنالی غنی باشد. در این گزارش این سیگنال به صورت یک موج سینوسی شامل چندین فرکانس در نظر گرفته شده است. همچنین شتاب دورانی با استفاده از یک فیلتر بدست می‌آید. فرم لاپلاس این فیلتر به صورت رابطه (۳۴) است.

$$y = \frac{s}{\lambda_a s + 1} u \quad (34)$$

$\lambda_a$  یک عدد کوچک است و با توجه به میزان نویز موجود در اندازه‌گیری، قابل تنظیم است.

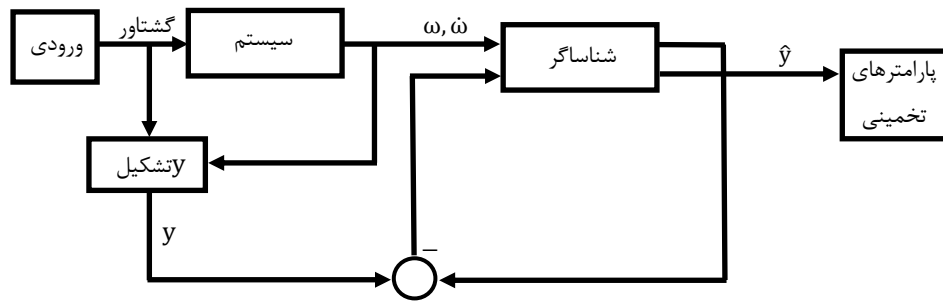
با توجه به مسائل ذکر شده، رابطه (۲۷) یک عبارت آماده برای ورود به الگوریتم حداقل مربعات می‌باشد. تنها مشکل استفاده از این روش، وجود نویز در ماتریس برازشگر است. همان طور که در رابطه‌های (۲۹) و (۳۰) قابل مشاهده است، ماتریس برازشگر تابعی از سرعت‌های دورانی و شتاب‌های دورانی می‌باشد. در حالی که همه این متغیرها دارای نویز بوده و اثبات پایداری در الگوریتم کلاسیک را دچار مشکل می‌کند. در بخش بعدی روشی برای غلبه بر این مشکل ارائه شده است.

#### ۵- مقاوم‌سازی الگوریتم کمترین مربعات خطا

##### نسبت به نویز اندازه‌گیری

همان طور که در فصل ۴ اشاره شد، روش حداقل مربعات ارائه شده، نسبت به نویز در سنسورهای اندازه‌گیری حساس می‌باشد. در واقع فرض روش مربعات خطا، بدون خطا بودن ماتریس برازشگر است و اثبات پایداری این روش تنها وقتی اعتبار دارد که در اندازه‌گیری ماتریس برازشگر خطایی وجود نداشته باشد. البته روش حداقل مربعات می‌تواند اختلال در





شکل ۵ شمای کلی سیستم و شناساگر

فیلتر کردن این داده‌های نویزی به دست می‌آید که مشکل را مضاعف می‌کند. در ادامه سعی شده است با بهبود دادن قانون تطبیق، مقاومت روش در برابر نویز افزایش یابد.

#### ۵-۲- مقاومت‌سازی روش حداقل مربعات

به دلیل وجود نویز، به جای ماتریس  $\Phi$ ، ماتریس  $\Phi'$  قابل اندازه‌گیری است که تعریف آن با رابطه (۴۷) صورت می‌گیرد.

$$\Phi' = \Phi + \sigma \quad (47)$$

ماتریس  $\sigma$  دربردارنده نویزهایی است که به ماتریس برازشگر اضافه می‌شود. تعریف دو متغیر خطا از طریق روابط (۴۸) و (۴۹) انجام می‌شود.

$$e_r = y - \Phi^T \hat{\theta} = \Phi^T \tilde{\theta} \quad (48)$$

$$e_s = y - \Phi'^T \hat{\theta} \quad (49)$$

همان طور که مشخص است، از میان این دو خطا، بردار  $e_s$  قابل اندازه‌گیری است. با استفاده از رابطه (۴۷)، رابطه بین این دو خطا از رابطه (۵۰) قابل دستیابی است.

$$e_s = \Phi^T \tilde{\theta} - \sigma^T \hat{\theta} = e_r - \sigma^T \hat{\theta} \quad (50)$$

الگوریتم اصلاحی، ابتدا به صورت یک قضیه مطرح می‌شود و سپس اثبات آن ارائه خواهد شد.

**قضیه:** قانون تطبیق شناساگر به شکل رابطه (۵۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= P\Phi' e_s + u \\ \dot{P} &= -P\Phi'\Phi'^T P \end{aligned} \quad (51)$$

حد بالای  $\theta$  که بردار متغیرهای واقعی است برابر  $\beta$  در نظر گرفته می‌شود.

$$\|\theta\| < \beta \quad (52)$$

حد بالای  $\sigma$  نیز، که ماتریس نویزهای برازشگراست، برابر  $\beta$

با استفاده از رابطه (۴۳) در رابطه (۳۹) و بازنویسی مشتق تابع لیاپانوف و استفاده از تعریف  $e$ ، طبق روند زیر، رابطه (۴۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tilde{\theta}^T \Phi e + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Phi \Phi^T \tilde{\theta} \\ \Phi^T \tilde{\theta} &= y - \Phi^T \hat{\theta} = e \\ \dot{V} &= -e^T e + \frac{1}{2} e^T e \\ \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T e \end{aligned} \quad (44)$$

با توجه به رابطه (۴۴) و استفاده از قضیه لاسال-یوشیزاوا [۱۹] می‌توان نتیجه گرفت که  $\dot{V}$  و در نتیجه  $e$  به سمت صفر میل خواهند کرد.

لازم به ذکر است که با جایگذاری تعریف  $e$  در رابطه (۴۴)، می‌توان آن را به صورت رابطه (۴۵) بازنویسی کرد.

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Phi \Phi^T \tilde{\theta} \quad (45)$$

با توجه به رابطه (۴۵) و این واقعیت که حد  $\dot{V}$  به صفر میل می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که اگر ماتریس  $\Phi \Phi^T$  دارای مرتبه کامل باشد، خطای پارامترها نیز به سمت صفر میل خواهد کرد. به طور دقیق‌تر، می‌توان نشان داد [۲۰]، اگر وجود داشته باشند  $T$  و  $\alpha$  مثبتی که در نابرابری رابطه (۴۶) صدق کنند متغیر  $\tilde{\theta}$  نیز به سمت صفر میل می‌کند.

$$\int_t^{t+T} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau > \alpha I \quad (46)$$

به این نابرابری، شرط غنای ورودی گفته می‌شود. همان طور که قبلاً ذکر شد، بر خلاف فرض روش حداقل مربعات، ماتریس برازشگر در این مسأله دارای نویز می‌باشد. علاوه بر این که اندازه مؤلفه‌های سرعت دورانی از سنسورهای نویزی گرفته می‌شود، شتاب دورانی نیز با استفاده از

شده است.

$$\|\sigma\| < \zeta \quad (53)$$

u به صورت رابطه (54) تعریف شده و u<sub>0</sub> از حل رابطه

(55) حاصل می‌شود.

$$u = Pu_0 \quad (54)$$

$$u_0^T \tilde{\theta} = C\gamma \quad (55)$$

اگر بتوان تابعی به قدر کافی هموار مانند  $\alpha$  پیدا کرد که در

رابطه (56) صدق کند، می‌توان نشان داد که خطای اندازه‌گیری

به صفر میل خواهد کرد.

$$\|u_0\| < \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma) \quad (56)$$

پارامترهای  $\gamma$  و  $C$  موجود در رابطه (56) از روابط (57) و

(58) قابل محاسبه هستند.

$$\gamma = \frac{1}{2}(\beta\zeta)^2 \quad (57)$$

$$(1 - C)\gamma + \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)\beta = 0 \quad (58)$$

**اثبات:**

تابع لیاپانوف به فرم رابطه (59) انتخاب می‌شود.

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T P^{-1}\tilde{\theta} \quad (59)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (59)، رابطه (60) بدست می‌آید.

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} \quad (60)$$

با توجه به قانون تطبیق ارائه شده در رابطه (51)، رابطه

(61) برای مشتق تابع لیاپانوف برقرار خواهد بود:

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1}(P\phi'e_s + u) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} \quad (61)$$

با توجه به رابطه (42)، رابطه (62) بدست می‌آید.

$$P^{-1} = P^{-1}\dot{P}P^{-1} \quad (62)$$

با جایگذاری رابطه (51) در رابطه (62)، رابطه (63) بدست

می‌آید.

$$P^{-1} = \phi'\phi'^T \quad (63)$$

در ادامه با جایگذاری رابطه (63) در رابطه (61)، رابطه

(64) شکل می‌گیرد.

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T P^{-1}(P\phi'e_s + u) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \phi'\phi'^T \tilde{\theta} \quad (64)$$

با توجه به روابط مذکور، رابطه (65) معادله حاکم بر مشتق

تابع لیاپانوف را به دست می‌دهد.

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T \phi'e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \phi'\phi'^T \tilde{\theta} \quad (65)$$

با جایگذاری رابطه (47) در رابطه فوق، رابطه (66) بدست

خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\theta}^T \phi e_s + \tilde{\theta}^T \sigma e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T (\phi\phi^T + \phi\sigma^T + \sigma\phi^T + \sigma\sigma^T)\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (66)$$

با توجه به روابط (50) و (48)، می‌توان رابطه (66) را به

شکل رابطه (67) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T(e_s + \sigma^T\hat{\theta}) - \tilde{\theta}^T \sigma e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u \\ &+ \frac{1}{2}e_r^T e_r + \tilde{\theta}^T \phi\sigma^T\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma\sigma^T\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (67)$$

با استفاده دوباره از رابطه (50) و نیز بکارگیری رابطه (37)،

می‌توان مشتق تابع لیاپانوف را طبق روند ذکر شده در روابط

(68) الی (73) ساده‌سازی کرد و به رابطه (74) رسید.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} - e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T P^{-1}u \\ &+ \frac{1}{2}(e_s + \sigma^T \hat{\theta})^T (e_s + \sigma^T \hat{\theta}) + \tilde{\theta}^T \phi \sigma^T \tilde{\theta} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \theta + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}e_s^T e_s \\ &+ \frac{1}{2}e_s^T \sigma^T \hat{\theta} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma e_s + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} \\ &+ (e_s + \sigma^T \hat{\theta})^T \sigma^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \theta + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + e_s^T \sigma^T \hat{\theta} \\ &+ \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s - e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T P^{-1}u \\ &+ \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} + e_s^T \sigma^T \tilde{\theta} + \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T (\theta - \hat{\theta}) \\ &+ \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \sigma \sigma^T (\theta - \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u - \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} \\ &+ \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta - \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} \\ &- \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \hat{\theta} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta \\ &+ \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta - \hat{\theta}^T \sigma \sigma^T \theta \end{aligned} \quad (73)$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \tilde{\theta}^T P^{-1}u + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta \quad (74)$$

برازشگر مقاوم شده است و می‌توان از پایداری مشاهده‌گر مطمئن بود. البته با استفاده از روش ارائه شده، اثبات صفر شدن خطای پارامترها به آسانی حالت قبل نیست و احتیاج به بررسی‌های بیشتر در کارهای آینده دارد.

## ۶- نتایج

شبیه‌سازی در ۵۰ ثانیه انجام شده است و در ثانیه بیستم، پارامترهای سیستم تغییر می‌کنند. دلیل در نظر گرفتن این دو مقدار آن است که به اندازه کافی زمان برای تکمیل همگرایی وجود داشته باشد.

بازه‌های زمانی شبیه‌سازی (پله‌های انتگرال‌گیری عددی)، ۰/۰۱ ثانیه می‌باشند. مقادیر بکار گرفته شده در شبیه‌سازی‌ها برای ماتریس ممان اینرسی اولیه و ثانویه (پس از تغییر خواص جرمی) و ماتریس  $J$  آورده شده است.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

در مورد منطق انتخاب این اعداد، باید گفت که میزان واقعی ممان اینرسی یک ماهواره، کاملاً به ابعاد و چیدمان ماهواره بستگی دارد. در ماهواره‌های مختلف، این مقدار خیلی متفاوت است. مقدار انتخابی در این مقاله، در بازه این تغییرات است.

برای مدل‌سازی اختلال ورودی و نویز، از مجموع چند تابع سینوسی با فرکانس بالا استفاده شده است. دلیل این کار، فرض اصلی مقاله در محدود بودن مقدار نویز می‌باشد.

دامنه اختلال ورودی، ۱ درصد گشتاورهای خارجی و دامنه نویز اندازه‌گیری سرعت دورانی نیز، ۰/۱ درصد مقدار متوسط سرعت زاویه‌ای سیستم در نظر گرفته شده است.

در این شبیه‌سازی، تابع  $u_0$  ارائه شده در رابطه (۵۴)، برای صدق در رابطه (۵۵) به فرم رابطه (۸۴) انتخاب شده است.

$$\begin{cases} u_{0_i} = C\gamma/\hat{\theta}_i & i = \operatorname{argmax}(\hat{\theta}) \\ u_{0_i} = 0 & i \neq \operatorname{argmax}(\hat{\theta}) \end{cases} \quad (84)$$

در نتیجه تابع  $\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)$  ارائه شده در رابطه (۵۶) به فرم

با جایگذاری رابطه (۵۴) که در شروط قضیه ذکر شد، در این رابطه، رابطه (۷۵) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s + \hat{\theta}^T u_0 + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta \quad (75)$$

در نهایت با استفاده دوباره از رابطه (۳۷)، رابطه (۷۶) بدست می‌آید.

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e_s^T e_s - \hat{\theta}^T u_0 + \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta + \theta^T u_0 \quad (76)$$

حال با توجه به فرضیات موجود در روابط (۵۲) و (۵۳) و همچنین تعریف  $\gamma$  در رابطه (۵۷)، نابرابری ذکر شده در رابطه (۷۷) برقرار است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta^T \sigma \sigma^T \theta &= \frac{1}{2}(\theta^T \sigma)(\theta^T \sigma)^T = \frac{1}{2}\|\theta^T \sigma\|^2 \\ &< \frac{1}{2}(\beta\zeta)^2 < \gamma \end{aligned} \quad (77)$$

در این صورت اگر  $u_0$  به نحوی انتخاب شود که رابطه (۵۵) برقرار شود و به عبارتی دیگر تساوی موجود در رابطه (۷۸) صادق باشد، رابطه (۷۹) حاصل خواهد شد.

$$u_0^T \hat{\theta} = C\gamma \quad (78)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e_s^T e_s - C\gamma + \gamma + \theta^T u_0 \quad (79)$$

در این دو رابطه، فعلاً  $C$  یک پارامتر مجهول است.

با توجه به رابطه (۷۸)، باید بتوان تابع  $\alpha$  ای پیدا کرد که شرط موجود در رابطه (۸۰) را ارضا کند.

$$\|u_0\| < \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma) \quad (80)$$

با استفاده از رابطه (۸۰) و نامساوی کوشی، طبق روند زیر رابطه (۸۱) اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta^T u_0 &\leq \|\theta\| \|u_0\| \leq \beta\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma) \\ \dot{V} &\leq -\frac{1}{2}e_s^T e_s + (1-C)\gamma + \beta\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma) \end{aligned} \quad (81)$$

واضح است که اگر شرط مطرح شده در رابطه (۵۸) در فرضیات قضیه برقرار باشد، یعنی متغیر  $C$  به نحوی انتخاب شود که در رابطه (۸۲) صدق کند، رابطه (۸۳) برقرار خواهد شد.

$$(1-C)\gamma + \alpha(\hat{\theta}, C, \gamma)\beta = 0 \quad (82)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e_s^T e_s \quad (83)$$

این نتیجه طبق قضیه لاسال-یوشیزاوا تضمین می‌کند که خطای تخمینی ( $e_s$ ) به صفر میل خواهد کرد و با توجه به تابع لیاپانوف، خطای تخمین پارامترها نیز محدود باقی خواهد ماند [۱۹].

با قضیه ارائه شده، روش حداقل مربعات نسبت به نویز

رابطه (۸۵) خواهد بود.

$$\alpha(\hat{\theta}, C, \gamma) = \max |C\gamma / \hat{\theta}_i| \quad (85)$$

در صورت باقی ماندن مشکل صفر شدن مقدار مخرج در رابطه (۸۵)، عدد کوچک و مثبتی به مخرج کسر اضافه می شود. اگر چه این کار اثبات همگرایی را در استفاده از قضیه مطرح شده خدشه دار می کند، ولی عملاً در شبیه سازی ها تأثیری بر روی کیفیت همگرایی ندارد.

تابع تحریک ورودی مورد استفاده، به صورت رابطه (۸۶) است.

$$T = \begin{bmatrix} \sin(t) + \sin(2t) + \sin(5t) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(2t + \pi) + \sin(5t) \end{bmatrix} \quad (86)$$

در جدول ۱ مقادیر بقیه پارامترهای مورد استفاده در شبیه سازی آورده شده است.

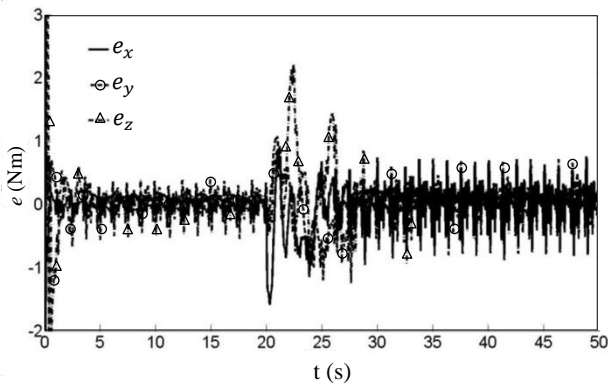
نتایج حاصله در ادامه مشاهده می شوند. در شکل ۶ میزان خطای شناساگر به نمایش درآمده است. در شکل ۷ نحوه همگرایی پارامترهای قطری اینرسی توسط شناساگر و در شکل ۸ نحوه همگرایی پارامترهای ضریبی اینرسی تخمینی توسط شناساگر مشاهده می شوند.

قابل ملاحظه است که این الگوریتم توانسته است که با دقت خوبی پارامترها را قبل و بعد از تغییر ردگیری نماید. در جدول ۲ مقایسه مقادیر تخمین و مقادیر واقعی و درصد خطا، قبل از تغییر پارامترها و همچنین در انتهای شبیه سازی آورده شده است. به دلیل صفر بودن برخی از مقادیر واقعی، و در نتیجه معنا نداشتن درصد خطا، در این گونه موارد، عددی در جدول ۲ درج نشده است. قابل ذکر است که بزرگ ترین منشاء خطا در تخمین پارامترها، فیلتر محاسبه شتاب می باشد.

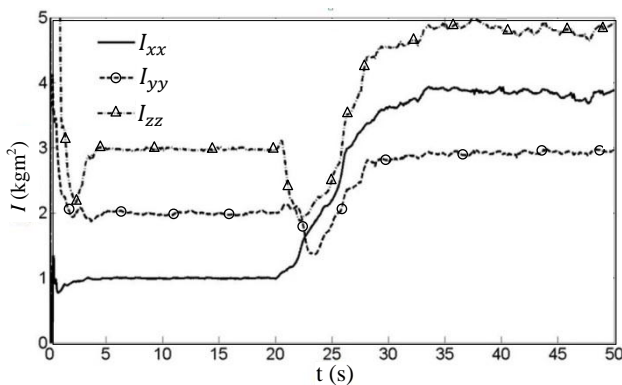
جدول ۱ مقادیر پارامترهای استفاده شده در الگوریتم

مقدار	پارامتر
۱۰	$\beta$
۰/۰۱	$\zeta$
$10^{-7}I$	$P(0)$
۰/۵	$\lambda$
۰/۰۲	$\lambda_a$

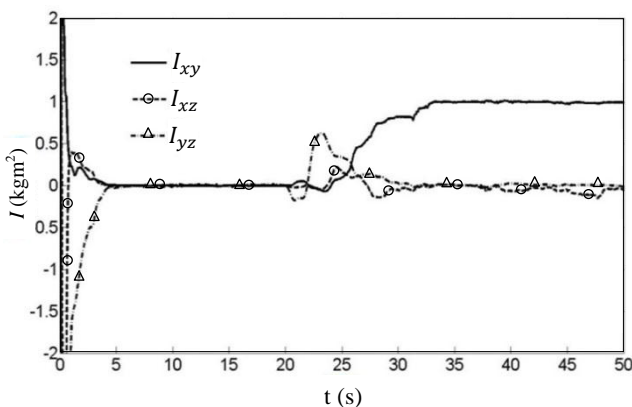
هرچه نویز بر روی سنسور ژایرو بیشتر باشد، این فیلتر خطای بیش تری خواهد داشت. به دلیل ماهیت جمع شونده گی این خطا در ماتریس کواریانس، دقت اندازه گیری به شدت افت خواهد کرد.



شکل ۶ نمودار خطای تخمین بر حسب زمان



شکل ۷ نمودار پارامترهای قطری تخمینی ماتریس ممان اینرسی



شکل ۸ نمودار پارامترهای ضریبی تخمینی ماتریس ممان اینرسی

- Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 11, 1988, pp. 207-212.
- [3] Bishop R. H., Paynter S. J., and Sunkel J. W., "Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros", *Control Systems Magazine, IEEE*, Vol. 12, 1992, pp. 23-28.
- [4] Palimaka J. and Burlton B. V., "Estimation of Spacecraft Mass Properties using Angular Rate Gyro Data", in *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, Hilton Head Island, 1992, pp. 21-26.
- [5] Tanygin S. and Williams T., "Mass Property Estimation Using Coasting Maneuvers", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, 1997, pp. 625-632.
- [6] Ahmed J., Coppola V. T., and Bernstein D. S., "Adaptive Asymptotic Tracking of Spacecraft Attitude Motion with Inertia Matrix Identification", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, 1998, pp. 684-691.
- [7] Lee A. Y. and Wertz J., "In-flight Estimation of The Cassini Spacecraft's Inertia Tensor", *Journal of spacecraft and rockets*, Vol. 39, 2001, pp. 153-155.
- [8] Wilson E., Lages C., and Mah R., "On-Line, Gyro-Based, Mass-Property Identification for Thruster-Controlled Spacecraft Using Recursive Least Squares", in *IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Tulsa, OK, 2002, pp. II334-II337.
- [9] Schwartz J. L. and Christopher D. H., "Comparison of System Identification Techniques for a Spherical Air-Bearing Spacecraft Simulator", in *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, no. AAS 03-611, Big Sky, MT, 2003, pp. 1725-1741.
- [10] Schwartz J. L. and Hall C. D., "System Identification of a Spherical Air-Bearing Spacecraft Simulator", in *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, 2005, pp. 333-350.
- [11] VanDyke M. C., Schwartz J. L., and Hall C. D., "Unscented Kalman Filtering for Spacecraft Attitude State and Parameter Estimation", in *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, 2005, pp. 217-228.
- [12] Keim J. A., Behçet Açikmeşe A., and Shields J. F., "Spacecraft Inertia Estimation via Constrained Least Squares", in *Aerospace Conference*, Big Sky, MT, 2006, p. 6.
- [13] Kutlu A., Hacıyev C., and Tekinalp O., "Attitude Determination and Rotational Motion Parameters Identification of a LEO Satellite Through Magnetometer and Sun Sensor Data", in *Recent Advances in Space Technologies*, Istanbul, 2007, pp. 458-461.
- [14] Desouza L., "Experimental Parameters Estimation of Satellite Attitude Control Simulator", *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 1, 2008, p. 14.
- [15] Kim D. H., Yang S., Cheon D. I., Lee S., and Oh H. S., "Combined Estimation Method for Inertia Properties

یکی از کارهای قابل انجام، استفاده از مشاهده‌گرهای تطبیقی برای محاسبه شتاب جسم می‌باشد که در کارهای بعدی ارائه خواهد شد.

جدول ۲ جدول مقایسه مقادیر واقعی با مقادیر تخمینی

پس از تغییر پارامتر (kgm <sup>2</sup> )		واقعی		تخمینی		خطا %	
$I_{xx}$	۱	۱۹۸۶۷	۱/۳۰	۳/۸۷۰۷	۴	۳	۰/۱۶
$I_{yy}$	۲	۲/۰۰۵	۰/۳۰	۲/۹۸۲۶	۳	۰/۱۶	۰/۱۶
$I_{zz}$	۳	۱/۹۶۳۱	۱/۲۰	۴/۹۰۰۳	۵	۲	۰/۱۶
$I_{xy}$	۰	۱/۰۰۱۴	-	۰/۹۸۹۲	۱	۱	۰/۱۶
$I_{xz}$	۰	۱/۰۰۳۲	-	۰/۰۶۳۸	۰	-	۰/۱۶
$I_{yz}$	۰	۱/۰۰۵۳	-	۰/۰۱۲۹	۰	-	۰/۱۶

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی مقاوم در برابر نویز، بر پایه روش حداقل مربعات بازگشتی برای شناسایی مؤلفه‌های تانسور اینرسی ماهواره مجهز به چرخ عکس‌العملی ارائه و پایداری آن به وسیله روش لیانوف اثبات شد. این روش توانست پارامترها را با مجموعه خطایی کمتر از ۳ درصد، قبل و بعد از تغییر پارامترها، شناسایی کند. در نتیجه می‌توان از این روش در ماهواره‌ها، فضاییماها و هر وسیله فضایی که دارای چرخ‌های عکس‌العملی باشد استفاده نمود. همچنین این روش، با تغییرات اندکی می‌تواند در شبیه‌سازهای ماهواره، برای اندازه‌گیری خواص جرمی اجسام، مورد استفاده قرار گیرد. البته، با افزایش مقدار نویز، به دلیل مشکل شدن تخمین شتاب، خطا در محاسبات بالا خواهد رفت. برای رفع این مشکل، در کارهای آتی نسبت به طراحی یک شناساگر تطبیقی و یا استفاده از ترکیب داده‌های<sup>۱</sup> سنسورهای کمکی اقدام خواهد شد.

## ۸- مراجع

- [1] Bergmann E. V., Walker B. K., and Levy B. K., "Mass Property Estimation for Control of Asymmetrical Satellites", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, 1987, pp. 483-491.
- [2] Richfield R., Walker B., and Bergmann E., "Input Selection for a Second-Order Mass Property Estimator ((for Satellite Attitude Control))",

### 1. Data Fusion

- [18] Nelles O., *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*: Springer, 2001.
- [19] Khalil H. K., *Nonlinear Systems*: Prentice Hall, 2002.
- [20] Åström K. J. and Wittenmark B., *Adaptive Control*: Dover Publications, 2008.
- of STSAT-3”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, 2010, pp. 1737-1741.
- [16] Hall C. D., “Integrated Spacecraft Power and Attitude Control Systems Using Flywheels”, *Airforce Institute of Technology, Tech. Rep. AFIT/ENY/TR-000*, 2000.
- [17] Chobotov V. A., *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*: Krieger, 2008.