



# حل تحلیلی معادلات انتقال حرارت کلاسیک و تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه در بافت پوست تحت گرمایش گذرا

حسین عسکری زاده<sup>۱</sup>، حسین احمدی کیا<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی ۷۳۴۴۱-۸۱۷۴۶، ahmadikia@eng.ui.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله برای بررسی آسیب گرمایی در بافت پوستی که در معرض شار گرمایی گذرا قرار گرفته است، مدل‌های کلاسیک و تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه معادله انتقال حرارت بیولوژیکی استفاده شده‌اند. بررسی تحلیلی انتقال حرارت در بافت پوست، تحت شرایط مرزی شار گذرا فقط توسط مدل‌های سهموی پنز و هذلولوی موج گرمایی انجام شده است. در این مطالعه حل تحلیلی مدل تأخیر فاز دوگانه معادله انتقال حرارت در بافت پوستی که در معرض گرمایش گذرا قرار گرفته است با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و تئوری وارونه‌سازی در فضای مختلط به دست آمده است. از آنجا که مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه تحت شرایط خاصی به مدل‌های پنز و موج گرمایی تبدیل می‌شود، نتایج حاصل از این سه مدل در پیش بینی توزیع دما و آسیب گرمایی بافت پوست با هم مقایسه شده‌اند. اثر ضرایب تخلخل و ترکیب توأم اثرات خون و بافت روی آسیب گرمایی بافت بررسی شده و نتایج حاکی از آن هستند که افزایش این ضرایب به ترتیب افزایش و کاهش آسیب گرمایی را به دنبال دارد و تأثیر این ضرایب در عمق بافت به مراتب از تأثیرشان در سطح کمتر است.

**کلیدواژه‌گان:** بافت پوست، گرمایش گذرا، تأخیر فاز دوگانه، تبدیل لاپلاس، آسیب گرمایی.

## Analytical solution of the classical and generalized dual phase lag heat transfer equations in skin tissue under transient heating

H. Askarizadeh<sup>1</sup>, H. Ahmadikia<sup>2\*</sup>

1- MSc Student, Mech. Eng., Isfahan Univ., Isfahan, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Isfahan Univ., Isfahan, Iran

\* P.O.B. 81746-73441, Isfahan, Iran. ahmadikia@eng.ui.ac.ir

**Abstract-** In this study, classical and generalized dual phase lag bioheat transfer models are applied for investigate thermal damage to skin tissue exposed to the transient heat flux. The analytical bioheat transfer analysis with transient heat flux on skin tissue has only been studied by Pennes and thermal wave models. This paper, for the first time, provides the analytical solution of the dual phase lag model in skin tissue under transient surface heating using Laplace transform method and inversion theorem. Since the dual phase lag model under certain circumstances reduces to the Pennes and thermal wave models, comparisons of the temperature responses and thermal damages between these three models are carried out. The influence of porosity factor and coupling factor between blood and tissue on the thermal damage of tissue is investigated and the results demonstrate that increases in these factors respectively leads to the higher and lower tissue thermal damage and the effects of these factors on the thermal damage in the depth of tissue is lower than near the surface.

**Keywords:** Skin Tissue, Transient Heating, Dual Phase Lag, Laplace Transform, Thermal Damage.

## ۱- مقدمه

معادله هدایت بررسی شده و در نهایت آسیب گرمایی بر اساس تغییر ماهیت پروتئین که توسط یک معادله شیمیایی ارزیابی می‌شود، تعیین شده است. بیشتر معادلات انتقال حرارت بیولوژیکی که برای بررسی آسیب گرمایی ناشی از تابش لیزر در بافت پوست تاکنون مورد استفاده قرار گرفته‌اند بر اساس قانون کلاسیک هدایت فوری هستند که سرعت نفوذ گرما را بی‌نهایت فرض می‌کند.

اگرچه قانون فوری برای بیشتر کاربردهای مهندسی قابل قبول است، اما برای انتقال حرارت در شرایطی که حاوی زمان‌های بسیار کوتاه یا شارهای گرمایی بالا هستند، مناسب نیست [۴-۸]. برای انتقال حرارت در مواد بیولوژیکی با ساختار داخلی ناهمگن، شار گرما با گرادیان دمای ایجاد شده از طریق یک مکانیزم زمان آسایش به تعادل می‌رسد [۹-۱۱]. برای بیان چنین مکانیزمی، مدل هذلولوی موج گرمایی ( $TW^4$ ) ارائه شده است [۷-۱۲، ۱۳]. اگرچه مدل موج گرمایی توانایی توصیف مکانیزم تأخیری بین شار گرما و گرادیان دما را دارد، ولی پاسخ بین گرادیان دما و انتقال انرژی را بسیار سریع فرض می‌کند. از نقطه نظر فیزیکی، به دلیل ساختار داخلی ناهمگن پوست، برای این پاسخ نیز باید یک زمان تأخیر وجود داشته باشد.

مدل تأخیر فاز دوگانه ( $DPL^5$ )، که توسط تاو [۱۴، ۱۵] ارائه شده است، حاوی دو زمان آسایش برای به حساب آوردن دو نوع مختلف از پاسخ تأخیری بین شار گرما، گرادیان دما و انتقال انرژی است. از آنجا که نتایج این مدل با نتایج آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد [۱۶] در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و علمی مورد توجه قابل ملاحظه‌ای قرار گرفته و اخیراً هم برای توصیف هدایت حرارت غیرفوری در گوشت فرآوری شده استفاده شده است [۱۷].

حل تحلیلی و عددی مدل‌های انتقال حرارت در بافت پوست تحت شار گرمایی گذرا مورد مطالعه زیادی قرار گرفته است که موارد زیر برای نمونه ذکر شده‌اند. لیو و همکاران [۱۸] جنبه‌های جدید موج گرمایی را در ارزیابی سوختگی پوستی که در معرض گرمایش گذرا و سریع قرار گرفته است، با استفاده از مدل‌های پنز و موج گرمایی ارائه کردند. آنها با استفاده از این دو مدل زمان‌های سوختگی درجه اول و دوم را برای بافت

بافت پوست بزرگ‌ترین ارگان بدن انسان است که نقش‌های مهم مختلفی را در بدن از قبیل احساس، تنظیمات دمایی، دفاع از بدن در برابر عوامل خارجی و غیره بازی می‌کند. پیشرفت تکنولوژی‌هایی مثل لیزر و میکروویو منجر به توسعه‌های اخیر در روش‌های گرمادرمانی بافت‌های آسیب دیده شده است. از تابش لیزر در علوم پزشکی برای کاربردهای تشخیص و درمان استفاده می‌شود. بسیاری از درمان‌های لیزری از قبیل جراحی، آنژیوپلاستی یا رگ‌گشایی، ایجاد تب شدید به طور مصنوعی برای درمان تومور و پیوند بافت به اثرات گرمایی بافت پوست مربوط هستند. به عنوان نمونه‌هایی از استفاده لیزر و بررسی گرمایش گذرا روی بافت در درمان‌های گرمایی می‌توان به مواردی که به دنبال می‌آیند اشاره کرد. صلواتی و میران‌بیگی [۱] روش گرمادرمانی بینابینی القا شده ( $LITT^1$ ) را با روش المان مرزی دوجانبه‌ای<sup>۲</sup>، برای بررسی افزایش دمای بافت کبد مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش مونت کارلو با گام متغیر و جذب تدریجی برای شبیه‌سازی انتشار نور در بافت استفاده و نتایج حاصل از روش المان مرزی دوجانبه‌ای را با روش المان محدود مقایسه کردند و دریافتند که روش المان مرزی دوجانبه‌ای روشی دقیق و سریع برای بررسی انتقال گرما در بافت در اثر تابش لیزر است. قالیچی و بهنیا [۲] نحوه تمرکز امواج فراصوتی برای گرمادرمانی بافت‌های سرطانی را مورد مطالعه قرار داده و تراگردانی را که قادر به متمرکز کردن امواج توسط سلول‌های پیزوالکتریک در کانون سرطان می‌باشد، معرفی کردند. آنها به منظور کنترل مسیر درمان معادله انتقال حرارت بیولوژیکی پنز<sup>۳</sup> را به صورت عددی حل کردند و نحوه توزیع فضایی انرژی گرمایی در ناحیه درمان را به دست آوردند. در تمامی روش‌های گرمادرمانی بهبود بخشیدن کارایی و ایمنی درمان و کنترل‌پذیر بودن آن امری الزامی است، در نتیجه بررسی دقیق انتقال حرارت و آسیب گرمایی از اهمیت بالایی برخوردار است. در این راستا ولچ [۳] یک مدل سه گامی برای پیش بینی آسیب گرمایی القا شده ناشی از تابش لیزر در بافت پوست ارائه کرده است. در مدل ولچ، ابتدا انرژی لیزر بر اساس نفوذ نور در بافت توصیف شده، سپس پاسخ گرمایی توسط حل

1. Laser Interstitial Thermo Therapy
2. Dual Reciprocity Boundary Element Method
3. Pennes

4. Thermal Wave  
5. Dual Phase Lag

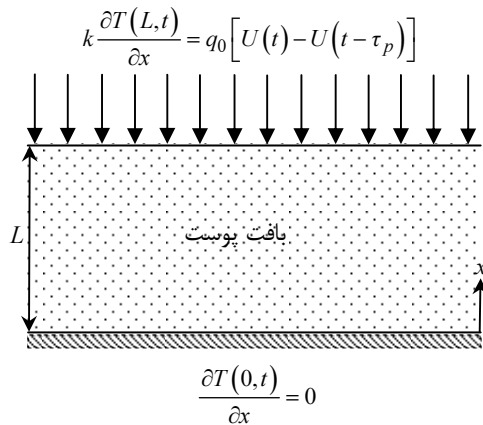
به ضخامت ناحیه‌ای از بافت که در طول مدت زمان گرمایش تحت تأثیر قرار می‌گیرد بزرگتر باشد، مدل یک بعدی برای تحلیل پاسخ دمایی مناسب است. شرط مرزی در پایین بافت عایق در نظر گرفته شده [۱۹،۲۰] و شرط مرزی روی سطح آن در بخش بعدی بررسی شده است.

## ۲-۱- نفوذ نور

هنگامی که تابش لیزر توسط بافت به خوبی جذب می‌شود (به عنوان مثال برای طول موج‌های فرابنفش و فروسرخ)، گرمایش لیزر را می‌توان به صورت شار گرمایی روی سطح پوست در نظر گرفت، زیرا در این موارد تابش لیزر در عمق بسیار کمی از سطح پوست جذب می‌شود. برخلاف این مورد، هنگامی که پدیده پراکندگی در طول موج‌های مرئی و نزدیک مادون قرمز قابل توجه باشد [۲۳]، گرمایش لیزری را نمی‌توان به صورت یک شار گرمایی روی سطح پوست در نظر گرفت. عوض، میرایی انرژی لیزر در بافت را باید با آگاهی از ویژگی‌های نوری و نفوذ نور تعیین کرد که آن را به صورت یک منبع حرارتی در بافت در نظر می‌گیرند. برای این کار، روش ارائه شده در مرجع [۲۴] برای محاسبه میرایی انرژی لیزر استفاده می‌شود. در این روش، توزیع نور  $\Phi(x)$  در جسم به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته شده است.

$$\Phi(x) = \Phi_{in} \left[ C_1 e^{-k_1 \frac{x}{\delta}} - C_2 e^{-k_2 \frac{x}{\delta}} \right] \quad (1)$$

که در آن ضرایب  $k_1$ ،  $k_2$ ،  $C_1$  و  $C_2$ ، بر اساس شبیه‌سازی مونت کارلو به دست می‌آیند.  $\delta$  عمق نفوذ مؤثر نوری است که بر اساس تئوری پخش توسط رابطه (۲) تعریف شده است.



شکل ۱ هندسه مسأله

پوست به روش عددی به دست آوردند. احمدی کیا و همکاران [۱۹] معادلات پنز و موج گرمایی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و تئوری وارونه سازی به صورت تحلیلی و دقیق برای شرایط مرزی شار ثابت و گذرا روی سطح پوست حل و زمان‌های سوختگی درجه اول و دوم را با استفاده از این دو مدل به صورت تحلیلی برای اولین بار ارائه دادند. فضلعلی و احمدی کیا [۲۰] مدل‌های پنز و موج گرمایی را تحت هر نوع شرط مرزی دمای پریودیک دلخواه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و تئوری وارونه‌سازی به صورت تحلیلی حل کرده و زمان‌های سوختگی مرتبه اول و دوم را برای بافت پوست تحت این نوع شرط مرزی به دست آوردند. احمدی کیا و همکاران [۲۱] توزیع دمای بافت پوست را با اعمال مدل‌های پنز و موج گرمایی برای دو نوع تابش لیزر، حاوی شدت‌های بالا و پایین با زمان‌های کوتاه و زیاد تابش، به صورت تحلیلی به دست آوردند. تاکنون بررسی توزیع دما و آسیب گرمایی در بافت پوست تحت گرمایش گذرا با استفاده از مدل DPL در تمامی مطالعات انجام شده مربوطه به روش عددی بوده‌اند. تنها موردی که در آن مدل DPL به صورت تحلیلی برای تعیین پاسخ دمایی پوست حل شده، توسط عسکری زاده و احمدی کیا [۲۲] صورت گرفته که در آن دمای بافت پوست تحت شار نوسانی مورد بررسی قرار گرفته و اثر فرکانس‌های مختلف گرمایش روی پاسخ دمایی سطح پوست محاسبه شده است.

در این مقاله، اثر رفتار تأخیر گرمایی دوگانه روی آسیب گرمایی بافت پوستی که تحت گرمایش گذرا قرار گرفته است، با در نظر گرفتن اثر تولید گرمای متابولیکی و گردش خون، برای اولین بار به روش تحلیلی و دقیق انجام شده است. دما و آسیب گرمایی بافت پوست به دست آمده از مدل DPL با نتایج مدل‌های پنز و موج گرمایی مقایسه شده‌اند. از آنجا که نتایج مدل DPL با نتایج تجربی تطابق خوبی دارند [۱۶]، نتایج حاصل از آن در مقایسه با مدل‌های دیگر دقیق‌تر و واقعی‌تر بوده است.

## ۲- شرح مسأله

در این مقاله پوست به عنوان محیطی محدود با ضخامت  $L$  و دمای اولیه یکنواخت  $T_0$  در نظر گرفته شده است. در زمان  $t = 0^+$  سطح پوست در معرض تابش لیزر با شدت یکنواخت  $\Phi_{in}$  قرار می‌گیرد (شکل ۱). هنگامی که محل تابش لیزر نسبت

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q_L + Q_{met} + w_b \rho_b c_b (T_b - T) \quad (5)$$

با ترکیب معادلات (۴) و (۵) و حذف شار گرما، مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه حاصل می‌شود:

$$\tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{w_b \rho_b c_b}{\rho c} \tau_q\right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{w_b \rho_b c_b}{\rho c} (T - T_b) = \alpha \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_L + Q_{met}}{\rho c} \quad (6)$$

### ۲-۳- مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه

مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه بر اساس انتقال حرارت غیر متعادل در بافت بیولوژیکی توسط ژانگ [۲۶] ارائه شده است. در این مدل زمان‌های تأخیر فاز به خواص خون و بافت، نرخ ریزش خون و انتقال حرارت جابجایی وابسته‌اند، در نتیجه هر نقطه از بدن زمان‌های تأخیر فاز مختلفی دارند. ژانگ با استفاده از مدل دو گامی خوان و روئزل [۲۷]، مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه را برای بافت بیولوژیکی به شکل رابطه (۷) به دست آورده است.

$$\tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{G}{(\rho c)_{eff}} (T - T_b) = \alpha_{eff} \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_L + (1 - \varepsilon) Q_{met}}{(\rho c)_{eff}} \quad (7)$$

که در این رابطه خواص مؤثر بین بافت و خون به صورت روابط (۸-۱۰) هستند.

$$(\rho c)_{eff} = \varepsilon \rho_b c_b + (1 - \varepsilon) \rho c \quad (8)$$

$$\alpha_{eff} = \frac{k_{eff}}{(\rho c)_{eff}}, \quad k_{eff} = \varepsilon k_b + (1 - \varepsilon) k \quad (9)$$

$$G = a_b h_b + w_b c_b \quad (10)$$

مهم‌ترین مزیت مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه نسبت به مدل کلاسیک آن این است که زمان‌های تأخیر فاز در مدل تعمیم یافته بر حسب خواص بافت و خون، نرخ ریزش خون و ضریب انتقال حرارت جابجایی بین بافت و خون هستند و به صورت رابطه (۱۱) بیان شده‌اند [۲۶].

$$\tau_q = \frac{C_{sb} \varepsilon (1 - \varepsilon) \rho_b c_b}{G [\varepsilon + (1 - \varepsilon) C_{sb}]}, \quad \tau_T = \frac{K_{sb} \varepsilon (1 - \varepsilon) \rho_b c_b}{G [\varepsilon + (1 - \varepsilon) K_{sb}]} \quad (11)$$

$$C_{sb} = \frac{\rho c}{\rho_b c_b}, \quad K_{sb} = \frac{k}{k_b}$$

که در آن

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{3 \mu_a [\mu_a + \mu_s (1 - g)]}} \quad (2)$$

که در آن  $\mu_s$  ضریب پراکندگی و  $g$  ضریب ناپیکنواختی است. برای راحتی ضریب پراکندگی کاهش یافته به صورت  $\mu'_s = \mu_s (1 - g)$  معرفی شده است. هنگامی که توزیع تابش نور در بافت پوست از رابطه (۱) تعیین شود، تابش لیزر به صورت منبع حرارتی حجمی در بافت از رابطه (۳) تعیین می‌شود.

$$Q_L(x) = \mu_a \Phi(x) \quad (3)$$

در این مقاله، حالت اول برای شبیه‌سازی تابش لیزر استفاده شده است. یعنی تابش لیزر به صورت یک شار گرمایی روی سطح پوست در نظر گرفته شده که بررسی تحلیلی و عددی این حالت با مدل‌های پنز و موج گرمایی توسط محققان مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۹، ۱۸]. حالت دوم شبیه‌سازی تابش لیزر (در نظر گرفتن آن به صورت یک منبع حرارتی در بافت) و بررسی تحلیلی آن با مدل تأخیر فاز دوگانه در کار بعدی نویسندگان ارائه می‌شود. بررسی تحلیلی این حالت نیز توسط مدل‌های پنز و موج گرمایی صورت گرفته است [۲۱].

### ۲-۲- مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه

رابطه یک بعدی مدل تأخیر فاز دوگانه که ارتباط بین شار گرما و گرادیان دما را بیان می‌کند توسط رابطه (۴) ارائه شده است [۱۵، ۱۴].

$$q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t} = -k \frac{\partial T}{\partial x} - k \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \quad (4)$$

واضح است که با جایگزینی  $\tau_q = \tau_T = 0$  در این رابطه به قانون هدایت فوریه و همچنین با اعمال  $\tau_T = 0$  به مدل هذلولوی موج گرمایی تبدیل می‌شود. در ضمن تاو [۱۵] نشان داده است که اگر  $\tau_T = \tau_q$  مدل DPL به مدل فوریه تبدیل می‌شود. زمان‌های تأخیر فاز شار گرما و گرادیان دما که برای گوشت فرآوری شده گزارش شده‌اند [۱۷] به ترتیب برابرند با: ۱۶s و ۰/۰۴۳s تاکنون برای زمان‌های تأخیر فاز بافت بیولوژیکی اندازه‌گیری دقیقی صورت نگرفته و به دلیل ناهمگن بودن بافت،  $\tau_q$  از مرتبه ثانیه گزارش شده است [۱۱، ۱۰] که در این مقاله زمان‌های تأخیر فاز بر اساس این مطالعات انتخاب شده‌اند. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، معادله انتقال حرارت بیولوژیکی با در نظر گرفتن تولید گرمای متابولیسی و اثر گردش خون توسط معادله (۵) بیان شده است [۲۵].

## ۴-۲- معادلات حاکم و شرایط اولیه و مرزی

معادلات (۶) و (۷) به عنوان معادله انرژی حاکم در بافت پوست برای شبیه‌سازی هدایت حرارت تأخیر فاز دوگانه در نظر گرفته شده‌اند. همان‌گونه که ذکر شد، گرمایش لیزر به صورت شار گرما روی سطح پوست اعمال شده است. در این مورد، عبارت  $Q_L$  از روابط (۵)، (۶) و (۷) حذف شده و شرایط مرزی توسط رابطه (۱۲) ارائه شده‌اند.

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = q_0 [U(t) - U(t - \tau_p)] \quad (12)$$

که در آن  $q_0 = \Phi_{in}(1 - R_d)$  برای این نوع شرط مرزی که حاوی گرمایش سطح برای مدت کوتاهی است، لیو و همکاران [۱۸] از تأثیر سرعت محدود نفوذ گرما (اثرات غیر فوریه) در شرایط مرزی صرف‌نظر کردند که در این مقاله نیز این فرض اعمال شده است. با توجه به معادلات هذلولوی حاکم شرایط اولیه توسط رابطه (۱۳) بیان شده‌اند.

$$T(x,0) = T_0, \quad T_i(x,0) = 0 \quad (13)$$

## ۵-۲- آسیب گرمایی

بافت پوست از سه قسمت تشکیل شده است: اپیدرم<sup>۱</sup>، درم<sup>۲</sup> و هایپودرم<sup>۳</sup>. آسیب گرمایی زمانی بوجود می‌آید که دما در لایه بین اپیدرم و درم (Basal Layer) به  $44^\circ\text{C}$  برسد [۲۸] و بر اساس معادله آرنیوس<sup>۴</sup> ارزیابی می‌شود [۳]:

$$\Omega(x,t) = \int_0^t A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) dt \quad (14)$$

مقادیر عددی برای ضریب فرکانس  $A$ ، انرژی اکتیواسیون واکنش تغییر ماهیت  $E$  و ثابت جهانی گازها  $R$  به ترتیب عبارتند از:  $A = 1/3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ،  $E = 6/28 \times 10^5 \text{ J/mol}$  و  $R = 8/314 \text{ K}$  [۳]. برای سوختگی درجه اول و دوم،  $T$  دما در لایه بین اپیدرم و درم است و برای سوختگی درجه سوم، دمای لایه بین درم و هایپودرم است. سوختگی درجه اول زمانی به وجود می‌آید که  $T > 44^\circ\text{C}$  و  $\Omega > 0/53$  در  $\text{BL}^5$  ارضا شوند. همچنین سوختگی درجه دوم با  $T > 44^\circ\text{C}$  و  $\Omega > 1$  در  $\text{BL}$  ایجاد می‌شود [۱۸].

1. Epidermis
2. Dermis
3. Hypodermis
4. Arrhenius
5. Basal Layer

## ۳- روش حل

## ۳-۱- متغیرهای بدون بعد

معادلات حاکم توسط پارامترهای زیر بدون بعد شده‌اند. توجه شود که در پارامترهای بدون بعد (۱۵)،  $W_b = \rho_b w_b$

$$\xi = \sqrt{\frac{W_b c_b}{k}} x, \quad \eta = \frac{W_b c_b}{\rho c} t, \quad \xi_L = \sqrt{\frac{W_b c_b}{k}} L$$

$$\Lambda = \frac{W_b c_b}{\rho c} \tau_q, \quad \theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_b}{q_0} \sqrt{k W_b c_b},$$

$$\Gamma = \frac{W_b c_b}{\rho c} \tau_T, \quad \Gamma_p = \frac{W_b c_b}{\rho c} \tau_p, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_{\text{eff}}}{\alpha},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{k}{W_b c_b}} \frac{Q_{\text{met}}}{q_0}, \quad \rho_1 = \frac{\rho c}{(\rho c)_{\text{eff}}}, \quad A_1 = \frac{G}{W_b c_b} \quad (15)$$

با اعمال این پارامترهای بدون بعد در معادلات (۱۳، ۱۲، ۷، ۶)، به ترتیب به روابط (۱۶) تا (۱۹) تبدیل شده‌اند.

$$\Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (1 + \Lambda) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \theta = \left(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \psi \quad (16)$$

$$\Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \rho_1 A_1 \theta = \alpha_1 \left(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \rho_1 (1 - \varepsilon) \psi \quad (17)$$

$$\theta_\xi(\xi_L, \eta) = U \left( \frac{\rho c}{W_b c_b} \eta \right) - U \left( \frac{\rho c}{W_b c_b} (\eta - \Gamma_p) \right) \times \theta_\xi(0, \eta) = 0 \quad (18)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \quad \theta_\eta(\xi, 0) = 0 \quad (19)$$

## ۳-۲- حل تحلیلی مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه

در این بخش، حل تحلیلی معادله (۱۶) با توجه به شرایط اولیه (۱۹) و شرایط مرزی (۱۸)، ارائه شده است.

تبدیل لاپلاس معادله (۱۶) با توجه به شرایط اولیه (۱۹) و تبدیل لاپلاس شرایط مرزی (۱۸) به ترتیب به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) است.

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} - \beta \bar{\theta} = \frac{\psi}{(1 + \Gamma s) \beta}, \quad \beta = \frac{\Lambda s^2 + (1 + \Lambda)s + 1}{(1 + \Gamma s)} \quad (20)$$

$$\frac{d\bar{\theta}(0,s)}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{\theta}(\xi_L,s)}{d\xi} = \frac{1 - e^{-\Gamma_p s}}{s} \quad (21)$$

حل معادله (۲۰) با اعمال شرایط مرزی (۲۱) توسط رابطه (۲۲) ارائه شده است.

$$\bar{\theta}(\xi, s) = \frac{(1 - e^{-\Gamma_p s}) \cosh(\sqrt{\beta} \xi)}{s \sqrt{\beta} \sinh(\sqrt{\beta} \xi_L)} + \frac{\psi}{s(1 + \Gamma s) \beta} \quad (22)$$

تابع  $\theta(\xi, \eta)$  معکوس تبدیل لاپلاس  $\bar{\theta}(\xi, s)$  است و از رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\gamma - il}^{\gamma + il} e^{\eta s} \bar{\theta}(\xi, s) ds \quad (23)$$

این رابطه به عنوان انتگرال گیری کانتوری براموچ<sup>۱</sup> [۲۹] شناخته می‌شود. این انتگرال در امتداد خط بی‌نهایت  $x = \gamma$  که همه قطب‌های  $\bar{\theta}(\xi, s)$  در سمت چپ این خط قرار دارند، و نیم دایره  $C_R$  به شعاع  $R_c$  گرفته می‌شود. اگر  $\bar{\theta}(\xi, s)$  در همه نقاط به جز در تعداد محدودی (قطب‌ها) تحلیلی باشد، خط  $x = \gamma$  را با نیم دایره بزرگ  $C_R$  به شعاع  $R_c$  به منظور پوشش تمام قطب‌های آن، کامل می‌کنیم. در صورتی که  $\bar{\theta}(\xi, s)$  در همه نقاط به جز در تعداد محدودی (قطب‌ها) تحلیلی باشد و در این نقاط محدود چند مقداری باشد (نقاط شاخه‌ای)، کانتور انتگرال گیری با معرفی یک حلقه دور نقاط شاخه‌ای در طول برشی که در سمت چپ خط  $x = \gamma$  زده می‌شود، کامل می‌شود (جزئیات بیشتر در [۲۹]). با اعمال تئوری وارونه‌سازی و استفاده از خواص تبدیل لاپلاس [۲۹]، لاپلاس معکوس معادله (۲۲) در دو بازه زمانی به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) است. برای بازه زمانی  $\eta \leq \Gamma_p$  توزیع دما توسط رابطه (۲۴) ارائه شده است.

$$\theta(\xi, \eta) = \Xi(\xi) + H_1(\eta) + H_2(\eta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\xi) \frac{(1 + \Gamma s_{nm}) e^{s_{nm} \eta}}{s_{nm} (2\Lambda s_{nm} + \Lambda + 1 + \Gamma v_n)} \quad (24)$$

برای بازه زمانی  $\eta > \Gamma_p$  توزیع دما از رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

$$\theta(\xi, \eta) = H_1(\eta) + H_3(\eta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\xi) \frac{(1 + \Gamma s_{nm}) (1 - e^{-s_{nm} \Gamma_p}) e^{s_{nm} \eta}}{s_{nm} (2\Lambda s_{nm} + \Lambda + 1 + \Gamma v_n)} \quad (25)$$

که در روابط (۲۴) و (۲۵)، معادلات (۲۶) تا (۳۰) برقرار

هستند.

$$s_{nm} = \frac{1}{2\Lambda} \left[ \pm \sqrt{(1 + \Lambda + \Gamma v_n)^2 - 4\Lambda(1 + v_n)} - (1 + \Lambda + \Gamma v_n) \right], \quad v_n = \left( \frac{\lambda_n}{\xi_L} \right)^2, \quad \lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$\Xi(\xi) = \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi_L}, \quad A_n(\xi) = \frac{2 \cos \left( \lambda_n \frac{\xi}{\xi_L} \right)}{\xi_L \cos \lambda_n} \quad (27)$$

$$H_1(\eta) = \psi \left( 1 + \frac{e^{-\eta} - \Lambda e^{-\frac{\eta}{\Lambda}}}{\Lambda - 1} \right) \quad (28)$$

$$H_2(\eta) = \frac{(1 - \Gamma) e^{-\eta} + (\Gamma - \Lambda) e^{-\frac{\eta}{\Lambda}}}{\xi_L (\Lambda - 1)} \quad (29)$$

$$H_3(\eta) = \frac{1}{\xi_L (\Lambda - 1)} \left[ (\Lambda - \Gamma) \left( e^{\frac{\Gamma_p}{\Lambda}} - 1 \right) e^{-\frac{\eta}{\Lambda} + (\Gamma - 1) (e^{\Gamma_p} - 1) e^{-\eta}} \right] \quad (30)$$

### ۳-۳- حل تحلیلی مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه

حل تحلیلی معادله (۱۷) با توجه به شرایط اولیه (۱۹) و شرایط مرزی (۱۸) نیز مانند روند قبلی است. در نتیجه حل این معادله توسط روابط (۳۱) تا (۳۷) ارائه شده است. برای بازه زمانی  $\eta \leq \Gamma_p$  توزیع دما به صورت رابطه (۳۱) است.

$$\theta(\xi, \eta) = \Xi'(\xi) + H_1'(\eta) + H_2'(\eta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\xi) \frac{\alpha_1 (1 + \Gamma S_{nm}) e^{S_{nm} \eta}}{S_{nm} (2\Lambda S_{nm} + 1 + \Gamma v_n)} \quad (31)$$

و برای  $\eta > \Gamma_p$  توزیع دما از رابطه (۳۲) به دست می‌آید.

$$\theta(\xi, \eta) = H_1'(\eta) + H_3'(\eta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\xi) \frac{(1 + \Gamma S_{nm}) (1 - e^{-S_{nm} \Gamma_p}) e^{S_{nm} \eta}}{\frac{1}{\alpha_1} S_{nm} (2\Lambda S_{nm} + 1 + \Gamma v_n)} \quad (32)$$

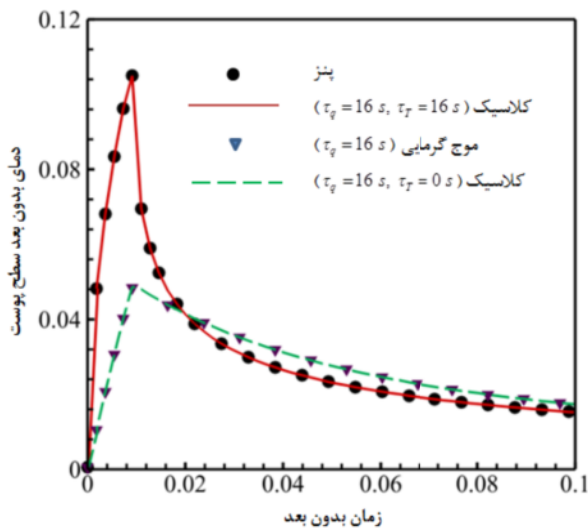
که در این روابط، معادلات (۳۳) تا (۳۷) برقرار هستند.

$$\Xi'(\xi) = \frac{\cosh(\sqrt{\beta_1} \xi)}{\sqrt{\beta_1} \sinh(\sqrt{\beta_1} \xi_L)}, \quad \beta_1 = \frac{\rho_1 A_1}{\alpha_1} \quad (33)$$

#### 1. Bromwich Contour Integration

## ۴-۱- صحت حل تحلیلی

لام [۳۳] حل تحلیلی مدل‌های سهموی و هذلولوی انتقال حرارت هدایتی را برای فیلم نازکی که وجوه آن در معرض منبع انرژی لیزری قرار دارند که با زمان و مکان تغییر می‌کند، ارائه کرده است. لام برای نشان دادن صحت کارش، دو نوع محدودیت را در نتایج حاصل از مدل DPL که آنها را به نتایج مدل فوریه و موج گرمایی تبدیل می‌کنند، اعمال کرده و نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از حل مدل‌های فوریه و موج گرمایی مقایسه کرده است. لام [۳۳] با ملاحظه یکسان بودن این نتایج صحت کار تحلیلی‌اش را نشان داده است. در این مقاله نیز فرایند نشان دادن صحت حل تحلیلی صورت گرفته مشابه با فرایند استفاده شده در مرجع [۳۳] است. برای این منظور، شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌گونه که از این شکل پیداست، هنگامی که محدودیت‌های مناسب روی نتایج حاصل از حل مدل DPL برای تبدیل آنها به نتایج مدل‌های پنز و موج گرمایی اعمال شده است، با نتایج حاصل از حل مدل‌های پنز و موج گرمایی مطابقت دارند. این محدودیت‌ها در شکل نشان داده شده‌اند. توجه شود که تاو [۱۵] نشان داده است که اگر  $\tau_T = \tau_q$ ، مدل DPL به مدل فوریه تبدیل می‌شود.



شکل ۲ صحت حل تحلیلی با نشان دادن یکسان بودن نتایج مدل DPL با نتایج مدل‌های موج گرمایی و پنز تحت شرایط خاص

## ۴-۲- آثار زمانی و مکانی

در این قسمت توانایی مدل تأخیر فاز دوگانه در پیش‌بینی رفتار

$$S_{nm} = \frac{1}{2\Lambda} \left[ \pm \sqrt{(1 + \alpha_1 \Gamma v_n)^2 - 4\Lambda(\rho_1 \Lambda_1 + \alpha_1 v_n)} - (1 + \alpha_1 \Gamma v_n) \right], \quad v_n = \left( \frac{\lambda_n}{\xi_L} \right)^2, \quad \lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

$$H'_1(\eta) = \frac{\psi(1-\varepsilon)}{\Lambda_1} \left\{ 1 - \left[ \cosh(\Lambda_0 \eta) + \frac{\sinh(\Lambda_0 \eta)}{2\Lambda \Lambda_0} \right] \times e^{-\frac{\eta}{2\Lambda}} \right\}, \quad \Lambda_0 = \frac{\sqrt{1 - 4\Lambda \Lambda_1 \rho_1}}{2\Lambda} \quad (35)$$

$$H'_2(\eta) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_1 (1 + \Gamma S_m) e^{S_m \eta}}{S_m \xi_L (2\Lambda S_m + 1)}, \quad S_m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\Lambda \Lambda_1 \rho_1}}{2\Lambda} \quad (36)$$

$$H'_3(\eta) = \sum_{m=1}^2 e^{S_m \eta} (1 - e^{-S_m \Gamma p}) \frac{\alpha_1 (1 + \Gamma S_m)}{S_m \xi_L (2\Lambda S_m + 1)} \quad (37)$$

## ۴- تحلیل نتایج

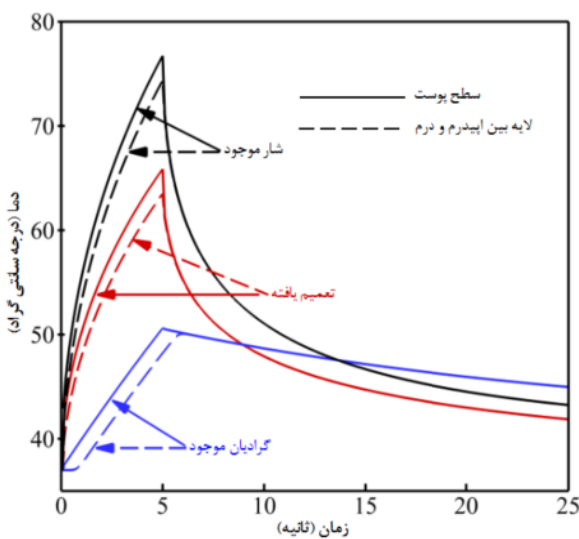
در این مقاله، برای اولین بار، حل تحلیلی مدل تأخیر فاز دوگانه معادله انتقال حرارت بیولوژیکی در بافت پوستی که تحت تابش لیزر قرار گرفته، ارائه شده است. برای شبیه‌سازی تابش لیزر روی سطح پوست دو رویکرد در مقالات وجود دارد: ۱- در نظر گرفتن تابش لیزر به صورت یک شرط مرزی شار گرمایی روی سطح پوست، ۲- اعمال تابش لیزر به صورت یک منبع حرارتی در بافت پوست. در اینجا تابش لیزر با رویکرد اول شبیه‌سازی شده است. اعمال رویکرد دوم با استفاده از مدل DPL نیز از کارهای بعدی نویسندگان است. به دلیل این که مدل DPL از نظر آزمایشگاهی اثبات شده است [۱۶]، تحلیل رفتار گرمایی بافت پوست با این مدل اهمیت بالایی دارد.

ویژگی‌های ترموفیزیکی بافت پوست و خون و دیگر پارامترهای موجود در این مقاله طبق مطالعات انجام شده در مراجع [۳۰، ۳۱، ۱۱، ۱۰] انتخاب شده‌اند:

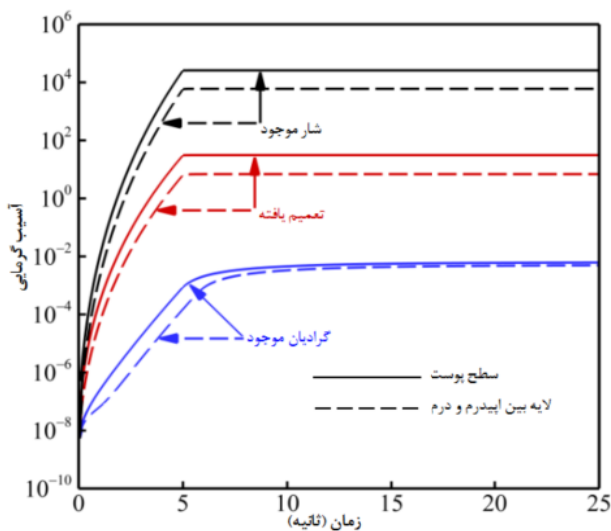
$$k_b = 0.5 \text{ W/(mK)}, \quad c_b = 3860 \text{ J/(kgK)}, \quad \rho_b = 1060 \text{ kg/m}^3 \\ c = 4187 \text{ J/(kgK)}, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad w_b = 1/87 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \\ Q_{\text{met}} = 19 \times 10^3 \text{ W/m}^3, \quad T_0 = T_b = 37 \text{ }^\circ\text{C}, \quad k = 0.628 \text{ W/(mK)} \\ \varepsilon = 0.0845, \quad 0.0250, \quad 0.0079 \\ G = 47488, \quad \text{شدت تابش لیزر برابر با } \Phi_{\text{in}} = 2 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \text{ و } R_0 = 0.05 \text{ در نظر گرفته شده‌اند.}$$

مدل کلاسیک DPL استفاده شده و نتیجه با مدل تعمیم یافته مقایسه شده است.

این مقادیر پیش‌بینی شده در مدل تعمیم یافته DPL عبارتند از:  $\tau_q = 0.4756s$  و  $\tau_T = 0.4763s$ . ملاحظه می‌شود که این مقادیر بسیار به هم نزدیک هستند. تاو [۱۵] نشان داده است که اگر  $\tau_T = \tau_q$  باشد، مدل DPL به مدل فوریه تبدیل می‌شود. این موضوع در شکل ۲ نیز نشان داده شده است.



شکل ۳- الف مقایسه پاسخ دمایی در سطح و BL بافت توسط مدل CDPL در رژیم‌های گرمایی GP و FP با مدل GDPL



شکل ۳- ب مقایسه آسیب گرمایی در سطح و BL بافت توسط مدل CDPL در رژیم‌های گرمایی GP و FP با مدل GDPL

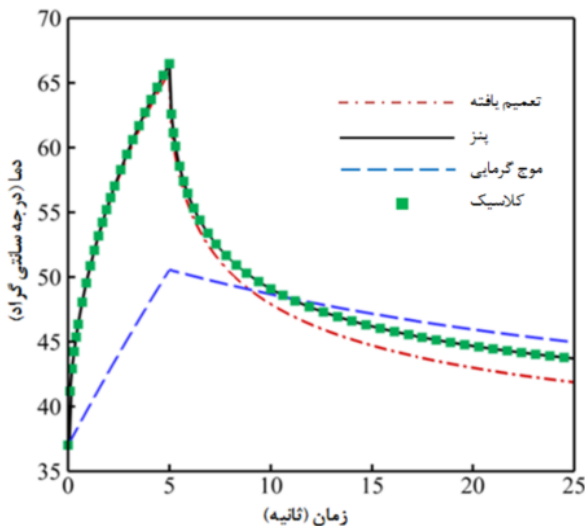
گرمایی بافت برای حالت‌هایی نشان داده شده است که مدل‌های پنز و موج گرمایی قادر به توصیف آنها نیستند.

به عبارت دیگر، تأثیر زمان‌های تأخیر فاز روی توزیع دما و آسیب گرمایی بافت، نشان داده شده است. آگاهی از این اثرات روی فرایند انتقال حرارت در بافت به ویژه هنگامی که توسط مدل تأخیر فاز دوگانه پیش‌بینی شده باشند (با فرض در دسترس بودن زمان‌های آسایش بافت پوست)، برای داشتن درمان مؤثر در روش‌های گرما درمانی بسیار مفید است، زیرا این مدل با نتایج تجربی تطابق خوبی دارد [۱۶]. برای این منظور، دما و آسیب گرمایی سطح پوست و BL بافت (که در فاصله  $8.0 \times 10^{-6}m$  از سطح پوست قرار دارد [۱۹]) در شکل‌های ۳- الف و ۳- ب نشان داده شده است. این شکل‌ها برای هنگامی که تابش لیزر به مدت ۵ ثانیه روی سطح پوست اعمال می‌شود ارائه شده‌اند. همان‌گونه که از این شکل‌ها پیداست، اگرچه مدل کلاسیک DPL در رژیم گرمایی گرادیان موجود ( $GP^1$ ) یعنی زمانی که  $\tau_T < \tau_q$  است، دمایی بالاتر از حد بحرانی آسیب گرمایی ( $44^\circ C$ ) برای سطح و BL بافت پیش‌بینی کرده است ولی مقدار آسیب گرمایی در سطح و BL بافت به ۱ نرسیده است و شرایط برای ایجاد سوختگی پوست فراهم نشده است. در رژیم گرمایی گرادیان موجود مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه، مقدار  $\tau_q = 16s$  و  $\tau_T = 0.43s$ ، که توسط آنتاکی برای گوشت فراوری شده به دست آمده‌اند، در نظر گرفته شده‌اند. این در حالی است که در رژیم گرمایی شار موجود ( $FP^2$ ) مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه یعنی زمانی که  $\tau_T > \tau_q$  و در مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه شرایط سوختگی برای پوست فراهم شده است. در رژیم گرمایی شار موجود مدل کلاسیک DPL، مقدار  $\tau_q = 16s$  و  $\tau_T = 32s$  و در مدل تعمیم یافته DPL مقادیر  $0.0079$  و  $67435 W/(m^3K)$  به ترتیب برای ضریب تخلخل  $\epsilon$  و ضریب کوپل  $G$  در نظر گرفته شده‌اند. هم‌چنین از شکل‌های ۳- الف و ۳- ب می‌توان دریافت که مدل تعمیم یافته DPL حالتی را بین رژیم‌های گرمایی GP و FP، که حالت‌هایی از مدل کلاسیک هستند، پیش‌بینی می‌کند. برای روشن شدن این موضوع مقادیر  $\tau_T$  و  $\tau_q$  که توسط مدل تعمیم یافته، برای خواص در نظر گرفته شده در اینجا، پیش‌بینی می‌شوند، به دست آمده و در شکل ۴ این مقادیر در

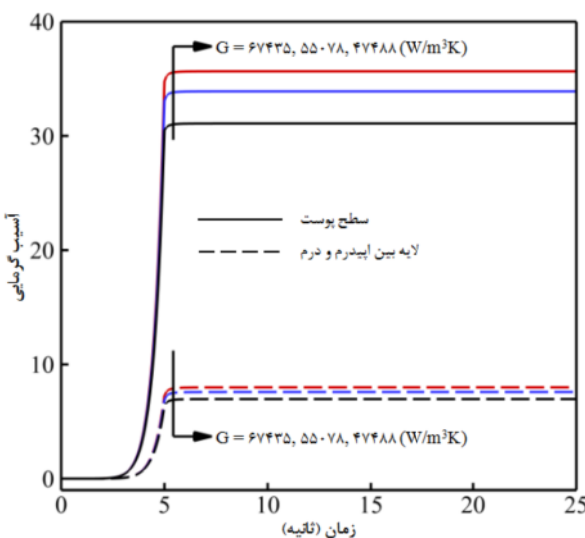
1. Gradient Precedence
2. Flux Precedence



است، از معادله (۱۰) نتیجه می‌شود که تغییر در پارامترهای  $a_b$  و  $h_b$  باعث تغییر  $G$  می‌شود. بنابراین افزایش انتقال حرارت جابجایی باعث کاهش آسیب گرمایی شده که مورد انتظار است.



شکل ۴ مقایسه نتیجه حاصل از مدل‌های GDPL و CDPL با تغییر زمان‌های آسایش



شکل ۵ تأثیر ضریب کوپلینگ روی آسیب گرمایی بافت در سطح و آن BL

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای اولین بار، حل تحلیلی مدل‌های تأخیر فاز دوگانه کلاسیک و تعمیم یافته معادله انتقال حرارت بیولوژیکی در بافت پوستی که تحت گرمایش گذرا قرار گرفته، با در نظر

در نگاه اول از این نتایج پیش‌بینی می‌شود که مدل تعمیم یافته نتیجه‌ای مشابه با مدل پنز پیش‌بینی می‌کند ولی همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، نتیجه‌ای که از مدل GDPL به دست می‌آید را نمی‌توان از مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه (CDPL)، پنز یا موج گرمایی به دست آورد. توجه شود که در شکل ۴ مقدار  $\tau_q = 16s$  در مدل موج گرمایی و در مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه (GDPL) مقادیر  $0.079$  و  $67435 W/(m^2K)$  به ترتیب برای ضریب تخلخل  $\varepsilon$  و ضریب کوپلینگ  $G$  در نظر گرفته شده‌اند.

هم‌چنین از شکل ۴ می‌توان برای داشتن مقایسه بین مدل‌های انتقال حرارت بیولوژیکی در پیش‌بینی دمای سطح پوست در طول فرایند گرمایش (۵ ثانیه) و بعد از آن استفاده کرد. واضح است که مدل پنز و مدل CDPL در رژیم FP دمای بالاتری را در طول گرمایش نسبت به مدل‌های GDPL و موج گرمایی پیش‌بینی می‌کنند ولی بعد از اتمام مدت زمان اعمال گرمایش (۵ ثانیه)، این رفتار برعکس می‌شود و مدل موج گرمایی در حالت پایا دمای بالاتری را نسبت به مدل‌های دیگر ارائه می‌دهد. دلیل چنین رفتاری وجود فرض سرعت بی‌نهایت نفوذ گرما در مدل پنز است. یعنی وجود این فرض باعث می‌شود که هر نقطه از بافت در یک بازه زمانی معین از شروع گرمایش (مثلاً ۵ ثانیه) انرژی بیشتری را نسبت به هنگامی که سرعت نفوذ گرما محدود است دریافت کند و دمای بالاتری داشته باشد و این فرض بعد از ۵ ثانیه باعث می‌شود که دمای هر نقطه سریع‌تر کاهش یابد. این رفتار گرمایی بافت با نتایج ارائه شده در مراجع [۳۱، ۱۹، ۱۸] هم‌خوانی دارد. هم‌چنین پیش‌بینی کمترین دما توسط مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه (GDPL) برای سطح پوست در حالت پایا یکی از نتایج مهم این مقاله است.

در شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب تأثیر ضرایب کوپلینگ بین بافت و خون  $G$  و ضریب تخلخل  $\varepsilon$  روی آسیب گرمایی بافت پوست هنگامی که بافت در معرض تابش لیزر به مدت ۵ ثانیه قرار می‌گیرد، ارائه شده است. همان‌گونه که از این شکل‌ها مشخص است، افزایش ضریب کوپل  $G$  و تخلخل  $\varepsilon$  به ترتیب باعث کاهش و افزایش آسیب گرمایی شده است. ضریب  $G$  بیان‌کننده تبادل انرژی بین بافت و خون است و عوامل تأثیرگذار روی این ضریب عبارتند از: نرخ گردش خون ( $w_b$ ) و انتقال حرارت جابجایی. از آنجا که در این مطالعه  $w_b$  ثابت فرض شده

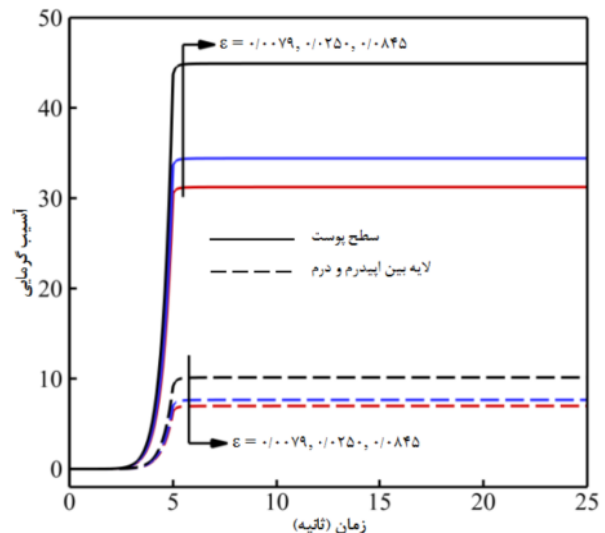
این در حالی است که مدل تأخیر فاز دوگانه می‌تواند نتایج به دست آمده از مدل‌های پنز و موج گرمایی را پیش‌بینی کند. هم‌چنین از نتایج حاصل می‌توان دریافت که مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه که زمان‌های آسایش حرارتی بافت را برای خواص فیزیکی خون و بافت در نظر گرفته شده در این مطالعه، نزدیک به هم پیش‌بینی می‌کند، در حالت پایا کمترین دما را برای بافت ارائه می‌دهد. البته زمان‌های آسایش حرارتی پیش-بینی شده توسط این مدل، در مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه استفاده شده و ملاحظه شد که رفتار این دو مدل حتی با زمان‌های تأخیر فاز یکسان در تعیین رفتار گرمایی بافت متفاوت است.

علاوه بر این، اثر ضرایب تخلخل و ترکیب توأم اثرات خون و بافت روی آسیب گرمایی بافت بررسی شده و نتایج حاصل حاکی از آن هستند که افزایش این ضرایب به ترتیب افزایش و کاهش آسیب گرمایی را به دنبال دارد هم‌چنین تأثیر تغییر آنها روی آسیب در عمق بافت کمتر از سطح است.

#### ۶- فهرست علائم

$a_b$	سطح ویژه انتقال حرارت ( $m^2/m^3$ )
$A$	ضریب فرکانس ( $s^{-1}$ )
$c$	ظرفیت گرمایی بافت ( $J/(kg K)$ )
$c_b$	ظرفیت گرمایی خون ( $J/(kg K)$ )
$C_1, C_2$	ضرایب ثابت
$E$	انرژی اکتیواسیون واکنش تغییر ماهیت ( $J/mol$ )
$g$	ضریب نایکنواختی
$G$	ضریب کوپلینگ بین بافت و خون ( $W/(m^3 K)$ )
$h_b$	ضریب انتقال حرارت جابجایی ( $W/(m^2 K)$ )
$k$	رسانندگی گرمایی ( $W/(mK)$ )
$k_1, k_2$	ضرایب ثابت
$L$	طول بافت (m)
$m$	شمارنده سری
$n$	شمارنده سری
$q$	شار گرمایی ( $W/m^2$ )
$Q_L$	منبع گرمایی ( $W/m^3$ )
$Q_{met}$	تولید گرمای متابولیکی ( $W/m^3$ )
$R$	ثابت جهانی گازها ( $J/(mol K)$ )

گرفتن اثر گردش خون و تولید گرمای متابولیکی، ارائه شده است.



شکل ۶ تأثیر ضریب تخلخل روی آسیب گرمایی بافت در سطح و BL آن

برای حل تحلیلی از روش تبدیل لاپلاس و تئوری وارونه‌سازی در فضای مختلط استفاده شده و برای نشان دادن صحت روش تحلیلی، محدودیت‌هایی روی نتایج حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه اعمال شده که آنها را به نتایج حاصل از حل مدل‌های موج گرمایی و پنز تبدیل می‌کنند. به دلیل اینکه مدل تأخیر فاز دوگانه با نتایج آزمایشگاهی تطابق دارد، تحلیل رفتار گرمایی بافت پوست با این مدل اهمیت بالایی دارد که از این تحلیل می‌توان برای بهبود روش‌های گرمادرمانی، اگر زمان‌های آسایش حرارتی بافت مورد نظر در دسترس باشند، استفاده کرد. در این مطالعه، حل تحلیلی برای مدل تعمیم یافته تأخیر فاز دوگانه که زمان‌های آسایش حرارتی بافت را به خواص خون و بافت مربوط می‌سازد، نیز ارائه شده است. پیش‌بینی مدل‌های ذکر شده در تعیین پاسخ دمایی و آسیب گرمایی بافت پوستی که در معرض شار گرمایی به مدت ۵ ثانیه قرار می‌گیرد با هم مقایسه شده‌اند و نتایج حاصل بیانگر این موضوع هستند که وجود زمان‌های آسایش برای شار گرما و گرادیان دما در مدل کلاسیک تأخیر فاز دوگانه باعث شده است که این مدل قادر به تعیین حالاتی در رفتار گرمایی بافت باشد که با مدل‌های پنز و موج گرمایی نمی‌توان آن‌ها را پیش‌بینی کرد.

- mutual boundary element method”, *Lasers in Medicine*, Vol. 8, No. 4, 1390, pp. 24-15. (In Persian)
- [2] Ghalichi F., Behnia S., “Tragrdan designed to focus the ultrasound waves to heat treatment of cancerous tissue”, *11th Iranian Conference on Biomedical Engineering*, 1382. (In Persian)
- [3] Welch A.J., “The thermal response of laser irradiated tissue”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 20, No. 12, 1984, pp. 1471-1481.
- [4] Omidvar A., Maerefat M., “Application of hyperbolic heat conduction equation with boundary conditions depending”, *Iranian Journal of Energy*, Vol. 8, No. 4, 1383, PP. 3-12. (In Persian)
- [5] Baumeister K.J., Hamill T.D., “Hyperbolic heat conduction equation-a solution for the semi-infinite body problem”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Series C, Vol. 93, No. 1, 1971, pp. 126-131.
- [6] Maurer M.J., Thompson H.A., “Non-Fourier effects at high heat flux”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Series C, Vol. 95, No. 2, 1973, pp. 284-286.
- [7] Chester M., “Second sound in solids”, *Physical Review*, Vol. 131, No. 5, 1963, pp. 2013-2015.
- [8] Kazimi M.S., Erdman C.A., “On the interface temperature of two suddenly contacting materials”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Series C, Vol. 97, No. 4, 1975, pp. 615-617.
- [9] Rastegar J.S., “Hyperbolic heat conduction in pulsed laser irradiation of tissue”, in: *M.J. Berry, G.M. Harpole (Eds.), Thermal and Optical Interactions with Biological and Related Composite Materials, Proceedings of the SPIE*, Vol. 1064, 1989, pp. 114-117.
- [10] Kaminski W., “Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, No. 3, 1990, pp. 555-560.
- [11] Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K., “Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, No. 3, 1995, pp. 568-573.
- [12] Tao D.D.J., “A numerical technique for dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times”, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 12, No. 4, 1989, pp. 483-487.
- [13] Ozisik M.N., Tzou D.Y., “On the wave theory in heat conduction”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 116, No. 3, 1994, pp. 526-535.
- [14] Tzou D.Y., *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, Washington, DC, Taylor & Francis, 1997.
- [15] Tzou D.Y., “A unified field approach for heat conduction from macro- to micro- scales”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, No. 1, 1995, pp. 8-16.
- [16] Tzou D.Y., “Experimental support for the lagging

$R_d$	ضریب بازتابندگی
$S$	پارامتر حوزه لاپلاس
$s_{nm}$	قطب
$S_m$	قطب
$S_{nm}$	قطب
$T$	زمان (s)
$T$	دمای بافت
$T_b$	دمای خون
$U$	تابع پله
$w_b$	نرخ گردش خون ( $s^{-1}$ )
$x$	پارامتر مختصات (m)

#### علامه یونانی:

$a$	پخشندگی حرارتی پوست ( $m s^{-1}$ )
$I$	زمان آسایش گرادیان دمای بدون بعد
$\Gamma_p$	مدت زمان بدون بعد اعمال گرمایش
$\delta$	عمق نفوذ مؤثر نوری (m)
$\varepsilon$	ضریب تخلخل
$\eta$	زمان بدون بعد
$\theta$	دمای بافت بدون بعد
$\lambda$	مقدار ویژه
$\Lambda$	زمان آسایش شار حرارتی بدون بعد
$\mu_a$	ضریب جذب ( $m^{-1}$ )
$\mu_s$	ضریب پراکندگی ( $m^{-1}$ )
$\mu'_s$	ضریب پراکندگی کاهش یافته
$\xi$	مختصات بدون بعد
$\xi_L$	طول بافت بدون بعد
$\rho$	چگالی بافت ( $kg/m^3$ )
$\rho_b$	چگالی خون ( $kg/m^3$ )
$\tau_p$	مدت زمان اعمال گرمایش (s)
$\tau_q$	زمان آسایش شار گرمایی (s)
$\tau_T$	زمان آسایش گرادیان دما (s)
$\psi$	تولید گرمای متابولیسی بدون بعد
$\Omega$	آسیب گرمایی

#### ۷- مراجع

- [1] Salavati M.E., Miran Baygi M.H., “Analysis and Simulation of LITT in biological tissues with a

- [24] Gardner C.M., Jacques S.L., Welch A.J., "Light transport in tissue: accurate, heuristic expressions for one dimensional fluence rate and escape function based upon Monte Carlo simulations", *Lasers in Surgery and Medicine*, Vol. 18, No. 2, 1996, pp. 129–138.
- [25] Pennes H.H., "Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting forearm", *Journal of Applied Physiology*, Vol. 85, No. 1, 1948, pp. 93–122.
- [26] Zhang Y., "Generalized Dual-Phase-Lag Bioheat Equations Based on Nonequilibrium Heat Transfer in Living Biological Tissues", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, No. 21, 2009, pp. 4829–4834.
- [27] Xuan Y., Roetzel W., "Bioheat Equation of the Human Thermal System", *Chemical Engineering Technology*, Vol. 20, No. 4, 1997, pp. 268–276.
- [28] Stoll A.M., Greene, L.C., "Relationship between pain and tissue damage due to thermal radiation", *Journal of Applied Physiology*, Vol. 14, No. 3, 1959, pp. 373–382.
- [29] Arpaci V.C., *Conduction Heat Transfer*, Addison Wesley Publication, 1966.
- [30] Yamada Y., Tien T., Ohta M., "Theoretical analysis of temperature variation of biological tissues irradiated by light", *ASME/JSME Thermal Engineering Conference*, Vol. 4, 1995, pp. 575–581.
- [31] Xu F., Seffen K.A., Lu T.J., "Non-Fourier analysis of skin biothermomechanics", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 9, 2008, pp. 2237–2259.
- [32] Ganong W.F., *Review of Medical Physiology*, Eighteenth Edition, pp. 537.
- [33] Lam T.T., "A unified solution of several heat conduction models", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 56, No. 1, 2013, pp. 653–666.
- response in heat propagation", *AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 9, No. 4, 1995, pp. 686–693.
- [17] Antaki P.J., "New interpretation of non-Fourier heat conduction in processed meat", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 127, No. 2, 2005, pp. 189–193.
- [18] Liu J., Chen X., Xu L.X., "New thermal wave aspects on burn evaluation of skin subjected to instantaneous heating", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 46, No. 4, 1999, pp. 420–428.
- [19] Ahmadikia H., Fazlali R., Moradi A., "Analytical solution of the parabolic and hyperbolic heat transfer equations with constant and transient heat flux conditions on skin tissue", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 1, 2012, pp. 121–130.
- [20] Fazlali R., Ahmadikia H., "Analytical solution of thermal wave models on skin tissue under arbitrary periodic boundary conditions", *Int. Journal of Thermophys*, Vol. 34, No. 1, 2013, pp. 139–159.
- [21] Ahmadikia H., Moradi A., Fazlali R., Parsa A.B., "Analytical solution of non-Fourier and Fourier bioheat transfer analysis during laser irradiation of skin tissue", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 6, 2012, pp. 1937–1947.
- [22] Askarizadeh H., Ahmadikia H., "Analytical solution of non-Fourier heat transfer equation with periodic heat flux conditions on skin tissue", *21st Annual International Conference on Mechanical Engineering*, 1392. (In Persian)
- [23] Welch A.J., van Gemert M.J.C., *Optical-Thermal Response of Laser-Irradiated Tissue*, New York, Plenum Press, 1995.