



## بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده مشبک مخروطی تحت بار محوری

محمد امین قاسمی<sup>1</sup>، مجتبی یزدانی<sup>2\*</sup>، احسان سلطان‌آبادی<sup>1</sup>

1- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

2- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

\* تبریز، صندوق پستی 51335/1996، m.yazdani@sut.as.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 اردیبهشت 1393

پذیرش: 02 تیر 1393

ارائه در سایت: 30 مهر 1393

کلیدواژگان:

پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده مشبک مخروطی

بار محوری

روش معادل‌سازی

حل اجزاء محدود

امروزه پوسته‌های تقویت شده مشبک کامپوزیتی، کاربردهای بسیاری در صنایع هوافضا دارند. این سازه‌ها شامل یک پوسته خارجی کامپوزیتی است که برای تقویت آن از ریب‌هایی که به صورت مارپیچ و محیطی، به طور معمول در سطح داخلی پوسته قرار می‌گیرند، استفاده می‌شود. یکی از انواع این سازه‌ها که در ساخت بدنه پرتابه‌های فضایی استفاده می‌شود، پوسته‌های مخروطی است. در این پژوهش به بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده مشبک مخروطی تحت بار محوری پرداخته شده‌است. برای این منظور از روش تحلیلی-تقریبی معادل‌سازی و اجزاء محدود استفاده شده و اثر پارامترهای زاویه الیاف در پوسته خارجی، زاویه ریب‌های مارپیچ، تعداد ریب‌ها و زاویه رأس مخروط بر روی بار کمانشی این سازه‌ها بررسی شد. در روش تحلیلی - تقریبی، مجموعه تقویت‌کننده‌ها با یک پوسته که از نظر سفتی معادل با یکدیگر هستند، جایگزین شدند. بر این اساس، ماتریس‌های سفتی کشش، کوپلینگ و خمشی معادل برای تقویت‌کننده‌ها محاسبه شدند. در نهایت با استفاده از روش ریتز، بار کمانشی آنها محاسبه شد. در روش اجزاء محدود نیز با استفاده از نرم‌افزار انسیس پوسته مخروطی مدل‌سازی و تحلیل شد. در تحلیل اجزاء محدود، دو نوع مود کمانشی برای این سازه‌ها مشاهده شد. همچنین نتایج حاصل از روش معادل‌سازی نیز نشان داد که سازه با زاویه ریب‌های 30 درجه و زاویه الیاف بین 70 تا 80 درجه می‌تواند حالتی بهینه برای طراحی سازه باشد.

## Buckling behavior investigation of grid stiffened composite conical shells under axial loading

Mohammad Amin Ghasemi, Mojtaba Yazdani\*, Ehsan Soltan Abadi

Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran.

\* P.O.B. 51335/1996 Tabriz, Iran, m.yazdani@sut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 06 May 2014

Accepted 23 June 2014

Available Online 22 October 2014

### Keywords:

Grid stiffened Composite Conical Shell

Axial Load

Smeared Method

Finite Element Solution

### ABSTRACT

Nowadays, grid stiffened composite shells have many applications in aerospace. These structures include an external shell in which some helical and circumferential ribs placed in the inner surface of the shell are being used to reinforce it. Conical shells are one type of these structures that is used in the construction of space projectile body. In this study, buckling behavior of grid stiffened composite conical shells under axial loading have been investigated. For this purpose, both smeared and finite element methods have been used and effects of external shell winding, helical ribs angle, ribs number and vertex angle of cone parameters on the buckling load of these structures were investigated. In analytical method, stringers by a shell that have equivalent stiffness were smeared. Based on this analysis, the extensional, coupling and bending matrices associated with the stiffeners were determined. Then, by use of Ritz method, buckling load was calculated. Also, in the finite element method, conical shells by use of ANSYS software were modeled and analyzed. In finite element analysis, two kinds of mode shape for these structures were observed. Also, the results from smeared method showed that the structure with ribs of 30 degrees and shell winding angle between 70 to 80 degrees can be a modify case for design.

### 1- مقدمه

دارند. واسیلیف [1-3] روش‌های طراحی، تحلیل و ساخت سازه‌های مشبک و کاربرد آنها در صنایع هوافضا را ارائه داد.

مودهای کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند. کمانش کلی<sup>1</sup>، کمانش موضعی در پوسته خارجی<sup>2</sup> و

پوسته‌های تقویت شده مشبک، شامل یک پوسته استوانه‌ای یا مخروطی است که تقویت‌کننده‌هایی در سطح داخلی، خارجی یا هر دو طرف این پوسته قرار گرفته‌اند. این تقویت‌کننده‌ها از جنس کامپوزیت‌های تک جهته هستند. بر طبق تحقیقات صورت گرفته این سازه‌ها بار کمانشی بالا و جرم نسبتاً پایینی

1- Global Buckling

2- Skin Buckling

Please cite this article using:

M. A. Ghasemi, M. Yazdani, E. Soltan Abadi, Buckling behavior investigation of grid stiffened composite conical shells under axial loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 170-176, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. A. Ghasemi, M. Yazdani, E. Soltan Abadi, Buckling behavior investigation of grid stiffened composite conical shells under axial loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 170-176, 2015 (In Persian)

- 2- کرنش به صورت یکنواخت بر سطح مقطع اعمال می‌شود، لذا تنش نیز در مقطع یکنواخت است.
- 3- بار بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت نیروی برشی انتقال می‌یابد.

2-1- تحلیل نیرو

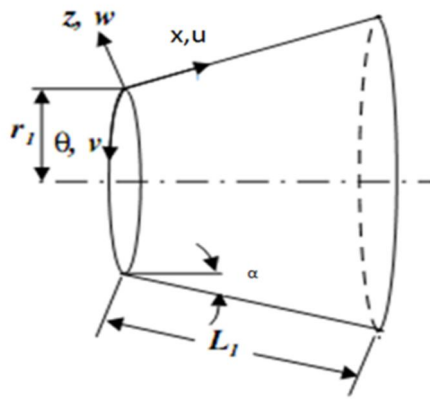
مؤلفه‌های کرنش در سطح داخلی پوسته و در اتصال با تقویت‌کننده‌ها نسبت به دستگاه اصلی مطابق رابطه (1) خواهد بود. در این رابطه  $\epsilon_x^0, \epsilon_\theta^0, \gamma_{x\theta}^0$  کرنش لایه میانی و  $K_x, K_\theta, K_{x\theta}$  انحناهای لایه میانی در پوسته خارجی می‌باشند و  $t$  ضخامت آن است.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + \left(\frac{t}{2}\right) K_x \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta^0 + \left(\frac{t}{2}\right) K_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + \left(\frac{t}{2}\right) K_{x\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

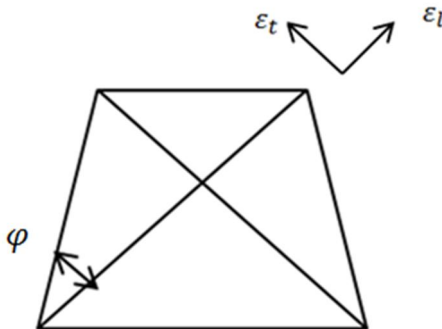
این کرنش‌ها برابر با کرنش در مقطع تقویت‌کننده‌ها هستند. رابطه (2) کرنش‌های رابطه (1) را به راستای تقویت‌کننده‌ها تصویر می‌کند.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \epsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در این رابطه،  $c = \cos(\varphi)$  و  $s = \sin(\varphi)$  می‌باشد. شکل 3 نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان را نشان می‌دهد. همان‌طور که اشاره شد، تقویت‌کننده‌ها تنها در راستای محوری خود نیرو تحمل می‌کنند. با قرار دادن زاویه مناسب برای هر یک از تقویت‌کننده‌ها در رابطه (2)، نیروی محوری هر یک از آنها مطابق رابطه (3) به دست می‌آید.



شکل 1 دستگاه مختصات واقع بر پوسته مخروطی



شکل 2 المان تقویت‌کننده‌ها

شکست در تقویت‌کننده‌ها<sup>1</sup> [4]. با توجه به هندسه پیچیده این سازه‌ها برای تحلیل کمانش آنها روش‌های تقریبی - تحلیلی و عددی متفاوتی ارائه شده است که در این میان روش پوسته‌های معادل، نخستین بار در سال 1996 توسط جانکی برای محاسبه بار کمانش صفحات تقویت شده مشبک کامپوزیتی ارائه شد. او در پژوهش خود، سفتی معادل را بر مبنای صفحه میانی تقویت‌کننده‌ها نوشت [5]. جانکی در سال 2001 به محاسبه‌ی یک طرح بهینه برای کمانش صفحات تقویت شده بر اساس الگوریتم ژنتیک پرداخت [6]. در واقع هدف آنها به دست آوردن شکلی از تقویت‌کننده‌ها، در صفحه‌ای با ابعاد، بارها و شرایط مرزی معلوم بود که حداقل وزن را داشته باشد. یزدانی و رحیمی [8,7] به بررسی تجربی مقاومت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده تحت بار محوری پرداختند. آنها در بررسی‌های خود به این نتیجه رسیدند که برای استفاده مطلوب از این سازه‌ها نیاز به حداقل مقداری از چگالی شبکه است. همچنین به این نتیجه رسیدند که در بارگذاری محوری، اثر ریب‌های مارپیچ از ریب‌های محیطی بیشتر است. موروزوف و همکاران [9] به بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های مشبک مخروطی تحت بارگذاری‌های مختلف پرداختند. آنها در بررسی خود به این نتیجه رسیدند که با افزایش زاویه ریب‌های مارپیچ، و همچنین افزایش سفتی ریب‌های محیطی نزدیک به مقطع پایینی مخروط، مقاومت کمانشی افزایش می‌یابد. قاسمی و یزدانی [10] روش پوسته‌های معادل را برای پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس تئوری مرتبه اول برشی توسعه دادند و سپس پارامترهای مؤثر بر بار کمانش پوسته تقویت شده با شبکه لوزی را بررسی کردند.

در این پژوهش رفتار کمانشی پوسته‌های مخروطی تقویت شده مشبک کامپوزیتی تحت فشار محوری بررسی شده است. برای این منظور ابتدا مجموعه تقویت‌کننده‌ها با یک پوسته که از نظر سفتی با یکدیگر معادل هستند جایگزین شدند. روابط ارائه شده تنها در حالتی که مود کمانشی سازه کمانش کلی باشد معتبر است. سپس به تحلیل پارامترهای مؤثر در رفتار کمانشی پوسته تقویت شده با تقویت‌کننده‌های لوزی شکل پرداخته شد. همچنین مدل اجزاء محدود نیز برای تحلیل مودهای کمانشی غالب برای سازه استفاده شد.

2- محاسبه سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها

روش معادل‌سازی برای محاسبه بار بحرانی کمانش در مود کمانش کلی سازه معتبر است. برای محاسبه سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها، ابتدا یک المان از مجموعه تقویت‌کننده‌ها جدا می‌شود. ویژگی اصلی المان تقویت‌کننده‌ها در پوسته مخروطی این است که از قسمت پایین مخروط به سمت بالای مخروط به دلیل تجمع بیشتر تقویت‌کننده‌ها، سفتی سازه در قسمت بالایی بیشتر از قسمت پایین است و لذا سفتی معادل باید نسبت به مؤلفه  $x$  در دستگاه مخروط تغییر کند. شکل 1 دستگاه مختصات واقع بر پوسته مخروطی را نشان می‌دهد.

شکل 2 المانی دلخواه از تقویت‌کننده‌ها را نشان می‌دهد. برای محاسبه مؤلفه‌های سفتی در این المان، عکس‌العمل‌های بین پوسته خارجی و تقویت‌کننده‌ها در نظر گرفته شد. سپس سفتی معادل بر مبنای مؤلفه‌های کرنش و انحنا لایه میانی پوسته خارجی محاسبه شد. برای این تحلیل ابتدا فرض‌های زیر در نظر گرفته شد:

- 1- تقویت‌کننده‌ها تنها نیروی محوری را تحمل می‌کنند.

2-2- تحلیل گشتاور

به واسطه نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها، گشتاور خمشی بر آن‌ها وارد می‌شود. شکل 4 گشتاور خمشی مختلفی را که به واسطه این نیروها به وجود می‌آید را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است گشتاور  $M$  در مجموعه پوسته و تقویت‌کننده‌ها به وجود می‌آید. تنها  $M_{sh}$  در معادلات وارد می‌شود زیرا این گشتاور ناشی از نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها بر روی صفحه میانی پوسته خارجی است. شکل 5 نیز نمودار آزاد گشتاورهای وارد بر المان مخروطی را نشان می‌دهد. رابطه (8) گشتاورهای وارد بر صفحه‌های  $x$  و  $\theta$  و گشتاور پیچشی وارد بر المان مخروطی را نشان می‌دهد.

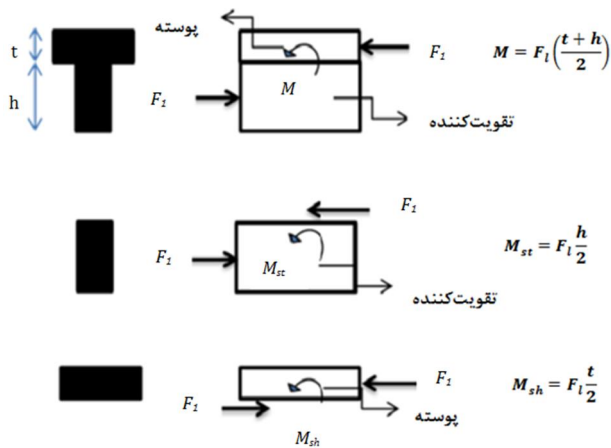
$$\begin{aligned} M_x &= (M_1 + M_2)c \\ M_\theta &= (M_1 + M_2)s \\ M_{x\theta} &= (M_2 - M_1)s \end{aligned} \quad (8)$$

که در این روابط،  $M_1$  و  $M_2$  مطابق رابطه (9) تعریف می‌شوند.

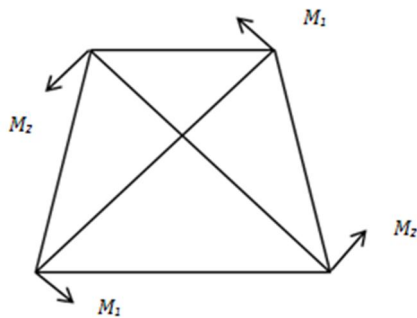
$$\begin{aligned} M_1 &= F_{11}(t/2) \\ M_2 &= F_{12}(t/2) \end{aligned} \quad (9)$$

با تقسیم گشتاورهای رابطه (8) بر طول ضلع مورد نظر در المان مخروطی و جایگذاری رابطه (3) در آن، منته‌های گشتاور مطابق رابطه (10) به دست می‌آیند.

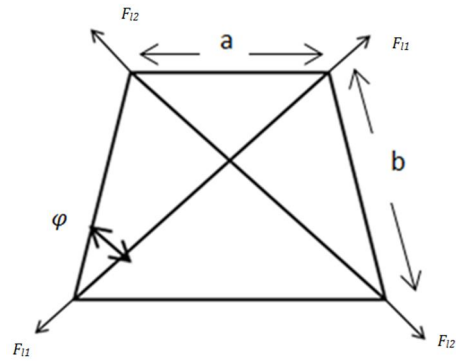
$$\begin{aligned} M_x &= \frac{2AE_1 t}{2a} \left( \varepsilon_x^0 c^2 + \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) c^2 + \varepsilon_\theta^0 s^2 + \kappa_\theta \left( \frac{t}{2} \right) s^2 \right) c \\ M_\theta &= \frac{2AE_1 t}{2b} \left( \varepsilon_x^0 c^2 + \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) c^2 + \varepsilon_\theta^0 s^2 + \kappa_\theta \left( \frac{t}{2} \right) s^2 \right) s \\ M_{x\theta} &= \frac{2AE_1 t}{2b} \left( \gamma_{x\theta}^0 sc + \kappa_{x\theta} \left( \frac{t}{2} \right) sc \right) c \end{aligned} \quad (10)$$



شکل 4 گشتاور خمشی ناشی از نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها



شکل 5 نمودار آزاد گشتاورهای وارد بر المان



شکل 3 نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان

$$\begin{aligned} F_{11} &= AE_1 \varepsilon_{11} = AE_1 (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_\theta s^2 - \gamma_{x\theta} sc) \\ F_{12} &= AE_1 \varepsilon_{12} = AE_1 (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_\theta s^2 + \gamma_{x\theta} sc) \end{aligned} \quad (3)$$

که در این رابطه،  $E_1$  مدول الاستیسیته تقویت‌کننده‌ها در راستای طولی و  $A$  سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها است. لذا نیروهای نرمال وارد بر صفحه‌های  $x$  و  $\theta$  و نیروی برشی مطابق رابطه (4) خواهد بود.

$$\begin{aligned} F_x &= (F_{11} + F_{12})c \\ F_\theta &= (F_{11} + F_{12})s \\ F_{x\theta} &= (F_{12} - F_{11})c \end{aligned} \quad (4)$$

منتجه‌های نیرو در صفحات  $x$  و  $\theta$  و منته نیروی برشی برای المان مورد نظر از تقسیم کردن نیروهای هر صفحه بر طول ضلع مورد نظر برای معادل کردن با یک صفحه به دست می‌آیند. در واقع وجه تمایز پوسته مخروطی با پوسته استوانه‌ای برای به دست آوردن سفتی معادل در همین قسمت است. طول ضلع برای پوسته مخروطی از قسمت پایین تا بالای مخروط متغیر و تابعی از مؤلفه‌ی طولی دستگاه مختصات مخروط می‌باشد. لذا سفتی معادل به دست آمده نیز تابعی از  $x$  خواهد بود. با جایگذاری رابطه (3) در (4) و تقسیم آنها بر طول ضلع مورد نظر، منته‌های نیرو برای المان مخروطی مطابق رابطه (5) خواهد بود.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{2AE_1}{a} (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2) c \\ N_\theta &= \frac{2AE_1}{b} (\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2) s \\ N_{x\theta} &= \frac{2AE_1}{b} (\gamma_{x\theta} sc) c \end{aligned} \quad (5)$$

در این رابطه،  $a$  و  $b$  در شکل 3 نشان داده شده و مطابق رابطه (6) قابل محاسبه خواهند بود.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\pi(r_t + x \sin(\beta))}{n} \\ b &= \frac{2\pi(r_t + x \sin(\beta))}{n} \cot(\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

در این رابطه،  $r_t$  شعاع قسمت بالایی مخروط،  $x$  مؤلفه طولی،  $\beta$  زاویه رأس مخروط و  $n$  تعداد جفت ریب‌های مارپیچ است. همان‌طور که در این رابطه مشخص است با نزدیک شدن به قسمت پایین مخروط،  $x$  افزایش یافته و لذا سفتی معادل کاهش می‌یابد. لذا با جایگذاری رابطه (3) در (5)، منته‌های نیرو برای المان مخروطی بر مبنای کرنش و انحنای صفحه میانی مطابق رابطه (7) می‌باشد.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{2AE_1}{a} \left( \varepsilon_x^0 c^2 + \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) c^2 + \varepsilon_\theta^0 s^2 + \kappa_\theta \left( \frac{t}{2} \right) s^2 \right) c \\ N_\theta &= \frac{2AE_1}{b} \left( \varepsilon_x^0 c^2 + \kappa_x \left( \frac{t}{2} \right) c^2 + \varepsilon_\theta^0 s^2 + \kappa_\theta \left( \frac{t}{2} \right) s^2 \right) s \\ N_{x\theta} &= \frac{2AE_1}{b} \left( \gamma_{x\theta}^0 sc + \kappa_{x\theta} \left( \frac{t}{2} \right) sc \right) c \end{aligned} \quad (7)$$

مخروطی بر اساس تئوری کلاسیک لایه‌ها مطابق رابطه (15) است [11].

$$\varepsilon^T = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w\cos(\beta)}{R} + \frac{u\sin(\beta)}{R} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R\partial\theta} - \frac{v\sin(\beta)}{R} \end{array} \right\}$$

$$\kappa^T = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2} - \frac{\sin(\beta)}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{R\partial\theta} \right) \end{array} \right\} \quad (15)$$

که در این رابطه،  $R$  با توجه به شکل 1 به صورت رابطه (16) تعریف می‌شود.

$$R = r_1 + x\sin(\alpha) \quad (16)$$

انرژی کرنشی مطابق رابطه (17) ارائه شده است [13].

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon[A]\varepsilon^T + \kappa[D]\kappa^T + 2\varepsilon[B]\kappa^T \} R d\theta dx \quad (17)$$

کار انجام شده نیز از رابطه‌ی (18) محاسبه می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} \int (\sigma_{x0}\varepsilon_x^{NL} + \sigma_{y0}\varepsilon_y^{NL} + \tau_{xy0}\gamma_{xy}^{NL}) dv \quad (18)$$

از آنجایی که شرایط مرزی مسئله تکیه‌گاه ساده است، لذا میدان جابجایی مناسب که شرایط مرزی هندسی را ارضا کند مطابق معادله‌ی (19) می‌باشد.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos(\bar{m}x) \sin(\bar{n}\theta)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin(\bar{m}x) \cos(\bar{n}\theta)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(\bar{m}x) \sin(\bar{n}\theta) \quad (19)$$

در این روابط،  $\bar{m} = m\pi/L_1$  می‌باشد که  $L_1$  طول مخروط (شکل 1) است و  $\bar{n}$  و  $m$  اعداد صحیح هستند.

با قرار دادن این میدان جابجایی در معادلات (17) و (18)، انرژی پتانسیل کل بر حسب مجهولات میدان جابجایی  $a_{mn}$ ،  $b_{mn}$ ،  $c_{mn}$  به دست می‌آید. برای این که تعادل پایدار باشد باید انرژی پتانسیل کل حداقل شود. این امر زمانی اتفاق می‌افتد که مشتق اول انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب مجهول میدان جابجایی برابر صفر شود. این کار باعث ایجاد یک مسئله مقدار ویژه می‌شود. با حل این مسأله تعداد زیادی مقدار ویژه به دست می‌آید که کمترین مقدار آنها برابر با بار بحرانی کمانش پوسته مخروطی مورد نظر است.

### 5- نتایج و بحث

جدول 1 برخی خواص هندسی پوسته را نشان می‌دهد. همچنین خواص مکانیکی مواد در پوسته خارجی و ریب‌ها در پیوست ارائه شده است. همچنین زاویه الیاف در پوسته خارجی در تمام مراحل تحلیل به صورت  $[\pm\alpha, -\alpha]_{55}$  و زاویه ریب‌های مارپیچ به صورت  $\pm\delta$  می‌باشد. لذا منظور از زاویه الیاف در این مقاله، مقدار  $\alpha$  و منظور از زاویه‌ی ریب‌ها، مقدار  $\delta$  می‌باشد. مدل‌سازی اجزاء محدود پوسته تقویت‌شده مشبک مخروطی در نرم‌افزار انسیس<sup>1</sup> انجام شد. برای مدل‌سازی پوسته خارجی از المان پوسته 99 و برای

حال با توجه به روابط (7) و (10)، ماتریس سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها بر مبنای کرنش و انحنای صفحه میانی پوسته خارجی مطابق رابطه (11) به دست می‌آید. این ماتریس تابعی از مؤلفه طولی مخروط است.

$$A^{st} = 2AE_1 \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{s^2c}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$B^{st} = AE_1 \begin{bmatrix} \frac{c^3t}{a} & \frac{s^2ct}{a} & 0 \\ \frac{sc^2t}{b} & \frac{s^3t}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2t}{b} \end{bmatrix}$$

$$D^{st} = AE_1 \begin{bmatrix} \frac{c^3t^2}{2a} & \frac{s^2ct^2}{2a} & 0 \\ \frac{sc^2t^2}{2b} & \frac{s^3t^2}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2t^2}{2b} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در این رابطه،  $A^{st}$  و  $B^{st}$  و  $D^{st}$  به ترتیب ماتریس‌های سفتی کششی، کوپلینگ و خمشی برای پوسته معادل تقویت‌کننده‌ها است.

### 3- معادلات پوسته خارجی

برای پوسته خارجی، رابطه بین منته‌های پوسته و گشتاور نسبت به کرنش و انحنای لایه میانی مطابق رابطه (12) است [11].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{sh} & B^{sh} \\ B^{sh} & D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (12)$$

در این روابط ماتریس‌های  $A^{sh}$ ،  $B^{sh}$  و  $D^{sh}$ ، به ترتیب سفتی کششی، کوپلینگ و سفتی خمشی پوسته خارجی است که مطابق رابطه (13) محاسبه می‌شوند.

$$A_{ij}^{sh} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$B_{ij}^{sh} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$D_{ij}^{sh} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (13)$$

لذا برای کل سازه، ماتریس‌های کشش، کوپلینگ و خمشی مطابق رابطه (14) خواهد بود.

$$A^{tot} = A^{sh} + A^R$$

$$B^{tot} = B^{sh} + B^R$$

$$D^{tot} = D^{sh} + D^R \quad (14)$$

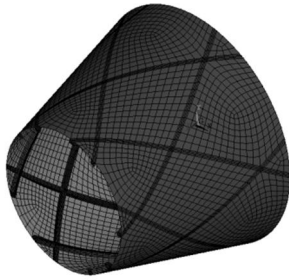
### 4- محاسبه بار بحرانی کمانش

برای محاسبه بار کمانش از روش ریتز استفاده شده است. در این روش، توابعی که شرایط مرزی هندسی مسأله را ارضا می‌کنند به عنوان جابجایی سیستم در تابع انرژی پتانسیل کل مورد استفاده قرار می‌گیرند. با این فرض، یک سیستم با درجات آزادی بی‌نهایت، به سیستمی با درجات آزادی محدود کاهش می‌یابد. انرژی پتانسیل کل برابر مجموع انرژی کرنش و کار ناشی از نیروهای خارجی می‌باشد [12]. مؤلفه‌های خطی کرنش برای پوسته

1- Ansys

جدول 1 مشخصات هندسی ثابت در پوسته مخروطی

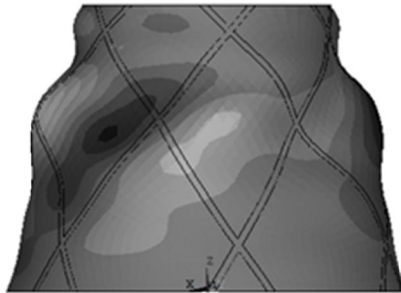
200mm	ارتفاع پوسته مخروطی
86 mm	شعاع قسمت بالایی مخروط
140 mm	شعاع قسمت پایینی مخروط
30 deg	زاویه رأس مخروط
6×6 mm <sup>2</sup>	سطح مقطع تقویت کننده‌ها



شکل 6 مدل اجزاء محدود پوسته مخروطی تقویت شده مشبک



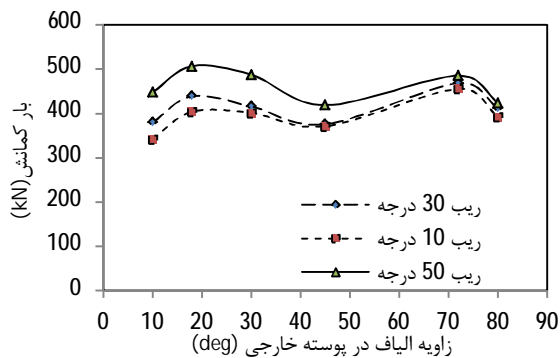
شکل 7 کمانش موضعی در پوسته خارجی



شکل 8 کمانش کلی در سازه

جدول 2 مقایسه حل اجزاء محدود و تحلیلی - تقریبی

تقریبی - تحلیلی (kN)	اجزاء محدود (kN)	ضخامت پوسته خارجی (mm)
217	193	2
458	410	3



شکل 9 نمودار تغییرات بار کمانش بر حسب تغییر زاویه یاف در پوسته خارجی به ازای زوایای مختلف ریبه‌های مارپیچ

نشان می‌دهد. ضخامت 3 میلی‌متری که کمانش کلی و دیگری ضخامت 0/3 میلی‌متر که کمانش موضعی در سازه اتفاق می‌افتد. اگرچه در ضخامت 0/3 میلی‌متر روابط ارائه شده با خطای زیادی بار کمانش را پیش‌بینی می‌کند،

تقویت‌کننده‌ها نیز از المان جامد 191 استفاده شده است. دستگاه مختصات گره‌ها نیز به صورت دستگاه استوانه‌ای تنظیم شد. برای شرایط مرزی نیز در هر دو انتها، جابجایی‌های محیطی و شعاعی،  $W$  و  $V$ ، بسته شد. همچنین جابجایی در راستای  $X$  نیز در قسمت پایین بسته و در قسمت بالایی مخالف صفر در نظر گرفته شد.

### 1-5- مقایسه حل اجزاء محدود و حل تحلیلی - تقریبی

برای پوسته تقویت شده مشبک مخروطی تحت فشار محوری، دو نوع مود کمانشی مشاهده شد. کمانش محلی برای پوسته خارجی در فضای بین تقویت‌کننده‌ها و همچنین کمانش کلی در سازه. شکل 6 مدل اجزاء محدود این سازه را نشان می‌دهد. شکل 7 کمانش موضعی در پوسته خارجی را نشان می‌دهد. این حالت به ازای ضخامت پوسته خارجی تا حدود 1/5 میلی‌متر اتفاق افتاد و به ازای ضخامت‌های بالاتر، مود کمانش به صورت کمانش کلی است که در شکل 8 نشان داده شده‌است.

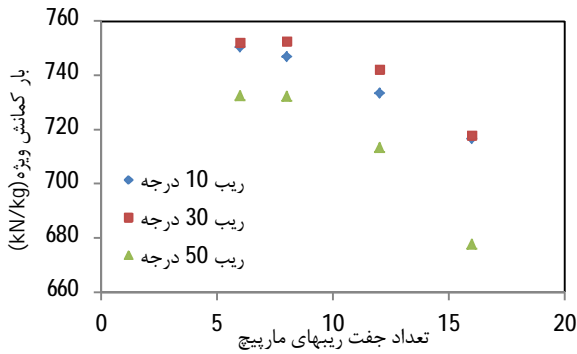
جدول 2 مقایسه حل حاصل از اجزاء محدود و حل تحلیلی-تقریبی را به ازای ضخامت‌های 2 و 3 میلی‌متر در پوسته خارجی را نشان می‌دهد. خواص مواد برای پوسته و ریبه‌ها مطابق جدول 3 و جدول 4 در پیوست است. زاویه الیاف در پوسته خارجی 72 درجه و زاویه ریبه‌های مارپیچ نیز 30 درجه در نظر گرفته شد. در هر دو حالت کمانش کلی در سازه اتفاق افتاد.

اگر چه تقریب زدن ریبه‌ها که رفتاری شبیه به تیر را از خود بروز می‌دهد با یک صفحه خطای تحلیل را افزایش می‌دهد، اما از این روش می‌توان برای تخمین پارامترهای مهم در طراحی این سازه‌ها استفاده کرد زیرا که این روش می‌تواند روند تغییرات این پارامترها را پیش‌بینی نماید. در ادامه اثر برخی پارامترها در بار کمانش پوسته تقویت‌شده مشبک با استفاده از روش تحلیلی-تقریبی ارائه می‌شود.

### 2-5- اثر زاویه الیاف در پوسته خارجی

شکل 9 تغییرات بار کمانش پوسته تقویت شده مشبک مخروطی نسبت به زاویه الیاف در پوسته خارجی به ازای زوایای مختلف تقویت‌کننده‌های مارپیچ برای شبکه به شکل لوزی را نشان می‌دهد. ضخامت پوسته خارجی 3 میلی‌متر ثابت در نظر گرفته شد و بقیه خواص مطابق جدول 1 می‌باشد. همان‌طور که در نمودار نیز مشخص است، برای زاویه ریبه‌های 10 و 30 درجه، زاویه الیاف بهینه در حدود 75 درجه اتفاق می‌افتد که به نظر می‌رسد که در این حالت ریبه‌ها بیشتر وظیفه تحمل بار محوری را بر عهده دارند و سفتی محوری سازه را تأمین می‌کنند و پوسته خارجی بیشتر وظیفه جلوگیری از بشکاف شدن سازه را بر عهده دارد اما در حالت زاویه ریبه‌های 50 درجه، به نظر می‌رسد که پوسته خارجی سفتی محوری سازه را تأمین می‌کند زیرا که زاویه الیاف بهینه در حدود 25 درجه به دست آمده است.

شکل 10 نمودار تغییرات بار کمانش سازه به ازای زاویه الیاف در پوسته خارجی برای دو ضخامت مختلف از پوسته را به ازای 6 جفت ریب 30 درجه

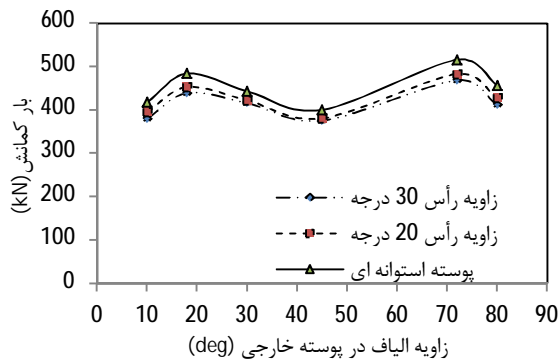


شکل 12 نمودار تغییرات بار کمانش ویژه بر حسب تعداد جفت ریبهای ماریچ به‌ازای زوایای مختلف ریب ماریچ

گرفته شد. ضخامت پوسته نیز 3 میلی‌متر ثابت است. ارتفاع مخروط در این حالت ثابت در نظر گرفته شد و زاویه رأس از 30 درجه به سمت صفر درجه، که بیانگر پوسته استوانه‌ای تقویت شده است، کاهش یافت. همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، پایداری پوسته مخروطی نسبت به پوسته استوانه‌ای کاهش یافته است.

### 6- نتیجه‌گیری

روابط تحلیلی برای معادل کردن پوسته تقویت شده مشبک کامپوزیتی مخروطی با یک پوسته تقویت‌نشده که از نظر سفتی معادل یکدیگر باشند، ارائه شد. بار کمانش پوسته معادل تحت فشار محوری محاسبه و با بار حاصل از حل اجزاء محدود، برای پوسته دارای شبکه لوزی، مقایسه شد. روابط ارائه شده فقط در محدوده کمانش کلی سازه معتبر است. برای این سازه تحت فشار محوری، دو نوع مود کمانشی ظاهر شد. کمانش موضعی در پوسته که به ازای ضخامت‌های پایین در آن به وجود آمد و کمانش کلی که به ازای ضخامت‌های بالاتر از 2 میلی‌متر پوسته، در سازه ظاهر شد. همچنین اثر زاویه الیاف در پوسته خارجی، زاویه تقویت‌کننده‌های ماریچ و تعداد آنها و همچنین زاویه رأس مخروط در بار کمانش سازه بررسی شد. بررسی‌ها نشان داد که زاویه ریبهای ماریچ 30 درجه با زاویه الیاف در پوسته خارجی بین 70 تا 80 درجه می‌تواند حالتی بهینه در طراحی این سازه باشد. به ازای 8 جفت ریب ماریچ، سازه از نظر بار کمانشی ویژه در حالتی بهینه قرار گرفت. مقایسه پوسته مخروطی با پوسته استوانه‌ای نیز نشان می‌دهد که با کاهش یافتن زاویه رأس مخروط و نزدیک شدن به پوسته استوانه‌ای، بار کمانشی سازه افزایش می‌یابد و در واقع پایداری پوسته مخروطی از پوسته استوانه‌ای کمتر است.



شکل 13 نمودار تغییرات بار کمانش بر حسب تغییر زاویه الیاف خارجی برای زوایای مختلف رأس مخروط

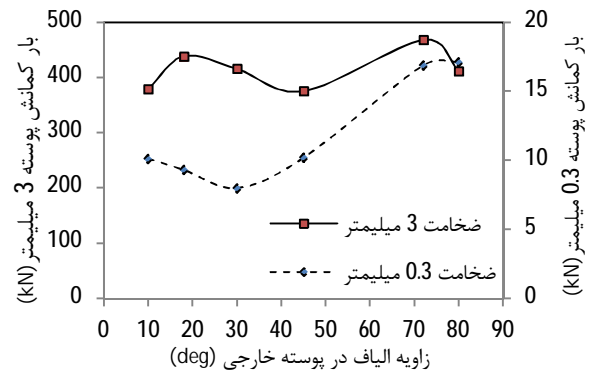
اما می‌توان روند تغییرات نمودار را با استفاده از روابط به‌دست آورد. در هر دو حالت زاویه بهینه در حدود 70 تا 80 درجه اتفاق می‌افتد که نشان از مقاومت پوسته در برابر بشکته‌ای شدن است.

### 5-3- اثر تعداد و زاویه ریبهای ماریچ

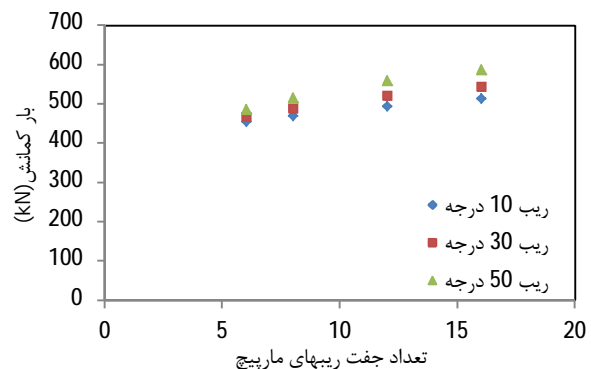
شکل 11 نمودار تغییرات بار کمانش بر حسب تعداد ریبهای ماریچ به ازای زوایای مختلف ریبهای ماریچ نشان می‌دهد. در این تحلیل، ضخامت پوسته 3 میلیمتر و زاویه الیاف 72 درجه ثابت در نظر گرفته شد و بقیه خواص مطابق جدول 1 می‌باشد. تعداد ریبهای ماریچ نیز 6، 8، 12 و 16 جفت در نظر گرفته شد. همان‌طور که از نمودار مشخص است، با افزایش تعداد ریبها، بار کمانش نیز افزایش می‌یابد که البته بدیهی است. اما شکل 12 نمودار تغییرات بار کمانش بر واحد جرم (بار کمانش ویژه) را برای سازه با تعداد مختلف ریب ماریچ نشان می‌دهد. از آنجایی که در صنایع هوافضا، جرم سازه از اهمیت زیادی برخوردار است، لذا بار کمانش ویژه بسیار با اهمیت است. همان‌طور که از نمودار شکل 12 مشخص است، به ازای افزایش تعداد ریبهای ماریچ از 6 به 8 جفت، بار کمانشی ویژه افزایش یافته ولی با افزایش بیشتر آنها، بار کمانشی ویژه کاهش یافته‌است. از طرفی زاویه بهینه برای ریبهای ماریچ نیز 30 درجه به‌دست آمد.

### 5-4- اثر زاویه رأس مخروط

شکل 13 نمودار تغییرات بار کمانش پوسته مخروطی را به ازای تغییر در زاویه الیاف در پوسته خارجی برای زوایای مختلف رأس مخروط نشان می‌دهد. زاویه ریبهای ماریچ 30 درجه و تعداد آن نیز 6 جفت در نظر



شکل 14 نمودار تغییرات بار کمانش بر حسب زاویه الیاف در پوسته خارجی برای 2 ضخامت مختلف



شکل 15 نمودار تغییرات بار کمانش بر حسب تعداد جفت ریبهای ماریچ به ازای زوایای مختلف ریب ماریچ



7- پیوست

جدول 3 خواص مکانیکی پوسته خارجی [14]

مقدار (واحد)	خاصیت
34/3 (GPa)	مدول الاستیسیته طولی ( $E_1$ )
8/16 (GPa)	مدول الاستیسیته عرضی ( $E_2$ & $E_3$ )
0/255	ضریب پواسون صفحه 1-2 ( $\nu_{12}$ )
0/104	ضریب پواسون صفحه 2-3 ( $\nu_{23}$ )
0/255	ضریب پواسون صفحه 1-3 ( $\nu_{13}$ )
2/81 (GPa)	مدول برشی صفحه 1-2 ( $G_{12}$ )
3/696 (GPa)	مدول برشی صفحه 2-3 ( $G_{23}$ )
2/81 (GPa)	مدول برشی صفحه 1-3 ( $G_{13}$ )
1553 (kg/m <sup>3</sup> )	چگالی

جدول 4 خواص مکانیکی ریبها [14]

مقدار (واحد)	خاصیت
27/6 (GPa)	مدول الاستیسیته طولی ( $E_1$ )
6/22 (GPa)	مدول الاستیسیته عرضی ( $E_2$ & $E_3$ )
0/268	ضریب پواسون صفحه 1-2 ( $\nu_{12}$ )
0/082	ضریب پواسون صفحه 2-3 ( $\nu_{23}$ )
0/268	ضریب پواسون صفحه 1-3 ( $\nu_{13}$ )
2/19 (GPa)	مدول برشی صفحه 1-2 ( $G_{12}$ )
2/87 (GPa)	مدول برشی صفحه 2-3 ( $G_{23}$ )
2/19 (GPa)	مدول برشی صفحه 1-3 ( $G_{13}$ )
1423 (kg/m <sup>3</sup> )	چگالی

8- مراجع

- [1] V. V. Vasiliev, A. F. Razin, Anisogrid composite lattice structures for spacecraft and aircraft applications, *Composite Structures*, Vol. 76, No. 1-2, pp. 182-189, 2006.
- [2] V. V. Vasiliev, V. A. Barynin, A. F. Razin, Anisogrid composite lattice structures - Development and aerospace applications, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1117-1127, 2012.
- [3] V. V. Vasiliev, V. A. Barynin, A. F. Razin, Anisogrid lattice structures - Survey of development and application, *Composite Structures*, Vol. 54, No. 2-3, pp. 361-370, 2001.
- [4] S. Kidane, G. Li, J. Helms, S. S. Pang, E. Woldesenbet, Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-9, 2003.
- [5] N. Jaunky, N. F. Knight Jr, D. R. Ambur, Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 27, No. 5, pp. 519-526, 1996.
- [6] D. R. Ambur, N. Jaunky, Optimal design of grid-stiffened panels and shells with variable curvature, *Composite Structures*, Vol. 52, No. 2, pp. 173-180, 2001.
- [7] M. Yazdani, H. Rahimi, A. A. Khatibi, S. Hamzeh, An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading, *Scientific Research and Essays*, Vol. 4, No. 9, pp. 914-920, 2009.
- [8] M. Yazdani, G. H. Rahimi, The effects of helical ribs number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 29, No. 17, pp. 2568-2575, 2010.
- [9] E. V. Morozov, A. V. Lopatin, V. A. Nesterov, Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3150-3162, 2011.
- [10] M. A. Ghasemi, M. Yazdani, S. M. Hoseini, Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, pp. 51-61, 2013.
- [11] L. Y. Tong, T. K. Wang, Simple Solutions for Buckling of Laminated Conical Shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 34, No. 2, pp. 93-111, Feb, 1992. English
- [12] W.F.Chen, E.M.Lei, *Energy and Numerical Methods, Structural Stability*, 6, Elsevier Science Publishing Co, 1987, pp. 414-435.
- [13] M.Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates, Nonlinear Theories of Doubly Curved Shells for Conventional and Advanced Materials*, Cambridge University Press, 2008, pp. 52-89.
- [14] M.A.Ghasemi, *Analysis of buckling behavior of grid stiffened composite cylinders under axial loading*, MSc thesis, Department of mechanical engineering, Sahand university of technology, Tabriz, 2013(In Persian).