



## کنترل ربات متحرک چرخ‌دار برای تعقیب مسیر به روش الگوریتم کنترلی غیر مبتنی بر مدل با خطاهای فیلتر شده PD-action

مجتبی رحیمی بیدگلی<sup>1</sup>، علی کیماسی خلجی<sup>2</sup>، سید علی اکبر موسویان<sup>3\*</sup>

1- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانش آموخته دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* صندوق پستی 19395-1999، تهران، moosavian@kntu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 اسفند 1392

پذیرش: 31 اردیبهشت 1393

ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:

ربات متحرک چرخ‌دار

قید غیر هولونومیک

تعقیب مسیر مرجع زمانی

کنترل کننده غیر مدل مینا

پایداری مجانبی

### چکیده

در این مقاله، کنترل تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط یک ربات متحرک چرخ‌دار، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. ربات متحرک چرخ‌دار، یک سیستم غیرخطی بوده و دارای سه مختصه تعمیم‌یافته  $(x, y, \phi)$  و یک قید غیر هولونومیک، است. در ابتدا، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ربات استخراج می‌شود. یک الگوریتم کنترلی غیر مدل مینا با استفاده از خطاهای فیلتر شده PD-action برای کنترل ربات متحرک چرخ‌دار ارائه شده است. مدل‌های کنترلی غیر مدل مینا به دلیل عدم وابستگی به مدل دینامیکی ربات، پایین بودن هزینه محاسباتی و همچنین مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت‌های مدل، نسبت به مدل‌های کنترلی مدل مینا مناسب‌تر هستند. با استفاده از تابع لیاپانوف مناسب و همین‌طور بکار بردن لم باربالات، پایداری مجانبی کنترل‌کننده مدار بسته برای تعقیب مسیر مرجع زمانی، اثبات می‌شود. در نهایت، نتایج شبیه‌سازی و پیاده‌سازی آزمایشگاهی روش کنترلی پیشنهادی ارائه می‌شود. نتایج حاصل نشان می‌دهد که بدون نیاز به اطلاعات مربوط به مدل دینامیکی و با کاهش دادن بار محاسباتی، عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی، قابل قبول است. بنابراین، الگوریتم کنترلی پیشنهادی یک الگوریتم ساده است که نسبت به تئوری‌های پیچیده با بار محاسباتی بالا نتایج قابل قبولی می‌دهد، در نتیجه این الگوریتم صنعتی‌تر است.

## Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based control algorithm using PD-action filtered errors

Mojtaba Rahimi Bidgoli, Ali Keymasi Khalaji, S. Ali. A. Moosavian\*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, moosavian@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 15 March 2014  
Accepted 21 May 2014  
Available Online 04 October 2014

### Keywords:

Wheeled Mobile Robot  
Nonholonomic Constraint  
Trajectory Tracking  
Non-Model-Based Controller  
Asymptotic Stability

### ABSTRACT

In this paper, trajectory tracking control of a wheeled mobile robot is analyzed. Wheeled mobile robot is a nonlinear system. This system including three generalized coordinates  $(x, y, \phi)$ , and a nonholonomic constraint. First, system kinematic and dynamic equations are obtained. A non-model-based control algorithm using PD-action filtered errors has been used in order to control the wheeled mobile robot. Non-model-based controllers are always more appropriate than model-based algorithms due to independency from dynamic models, lower computational costs and also robustness to uncertainties. Asymptotic stability of the closed loop system for trajectory tracking control of wheeled mobile robot has been investigated using appropriate Lyapunov function and also Barbalat's lemma method. Finally, in order to show the effectiveness of the proposed approach simulation and experimental results have been presented. Obtained results show that without requiring a priori knowledge of plant dynamics, and with reduced computational burden, the tracking performance of the presented algorithm is quite satisfactory. Therefore, the proposed control algorithm is well suited to most industrial applications where simple efficient algorithms are more appropriate than complicated theoretical ones with massive computational burden.

در مکان‌هایی که امکان دسترسی به آن‌ها دشوار است و یا در وضعیت خطرناک (فضا، ارتش، دفع پسماندهای هسته‌ای) و همچنین سرگرمی (فوتبال، جنگ‌های ربات‌ها)، اشاره کرد [1-6]. مطالعه دقیق و بررسی کامل روی مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات‌های متحرک چرخ‌دار در [7] انجام

### 1- مقدمه

امروزه ربات‌های متحرک چرخ‌دار<sup>1</sup> در زندگی انسان‌ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. از جمله کاربردهای این نوع ربات‌ها، می‌توان به استفاده از آن‌ها در صنعت، کاربردهای خانگی (جارو برقی، ماشین‌های چمن‌زنی و غیره)، استفاده

1- Wheeled Mobile Robot

ممکن است بدست آوردن مدل ریاضی فوق‌العاده سخت و یا حتی غیرممکن باشد. به هر حال، در میان الگوریتم‌های کنترلی مختلف، آن دسته از روش‌هایی که وابستگی کمتری به مدل دینامیکی ربات داشته و همچنین بار محاسباتی کمتری داشته باشند، در اولویت قرار می‌گیرند. بنابراین، طراحی روش کنترلی غیر مدل مبتنا<sup>10</sup> نسبت به الگوریتم کنترلی مدل مبتنا مناسب‌تر است [22]. تحقیقات متعددی پیرامون روش کنترل دینامیک غیر مدل مبتنا برای کنترل ربات‌های متحرک چرخ‌دار صورت گرفته است. در [23]، یک کنترل‌کننده فازی<sup>11</sup> برای تعقیب مسیر مرجع توسط ربات دو چرخ دیفرانسیلی طراحی شده است. در [24]، با استفاده از شبکه عصبی، کنترل موقعیت و تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات متحرک چرخ‌دار صورت گرفته است. در [25]، با استفاده از روش غیر مدل مبتنا ترانهاده ماتریس ژاکوبین<sup>12</sup> تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات ترک‌تور-تریلر انجام شده است. در روش کنترلی غیر مدل مبتنا پیشنهادی، فرمان‌های کنترلی براساس خطاهای فیلتر شده PD-action<sup>13</sup> تولید می‌شود. الگوریتم کنترلی پیشنهادی یک روش کنترلی جدید است که نتایج قابل قبولی برای تعقیب مسیر مرجع توسط ربات متحرک چرخ‌دار، می‌دهد.

در این مقاله، یک الگوریتم کنترلی غیر مدل مبتنا با استفاده از خطاهای فیلتر شده PD-action برای کنترل تعقیب مسیر مرجع زمانی ربات متحرک چرخ‌دار ارائه می‌شود. با استفاده از تابع لیاپانوف<sup>14</sup> و لم باربالات<sup>15</sup>، پایداری مجانبی<sup>16</sup> سیستم مدار بسته استنتاج می‌شود. در نهایت، نتایج شبیه‌سازی و پیاده‌سازی روش کنترلی پیشنهادی ارائه می‌شود. نتایج حاصل نشان می‌دهد که بدون نیاز به اطلاعات مربوط به مدل دینامیکی و با کاهش دادن بار محاسباتی، عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی، قابل قبول می‌باشد [26].

## 2- مدل سینماتیکی و دینامیکی ربات متحرک چرخ‌دار

ربات متحرک چرخ‌دار که از نوع دو چرخ دیفرانسیلی می‌باشد در شکل 1 نشان داده شده است.

جرم ربات  $m$  و ممان اینرسی ربات حول محور  $z$  گذرنده از مرکز جرم آن  $J$  است. بردار مختصات تعمیم یافته ربات با  $q = [x \ y \ \phi]^T$  نشان داده می‌شود. مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخ‌دار شکل 1 را می‌توان به صورت رابطه (1) نوشت.

$$\dot{q} = S(q)v \quad (1)$$

ماتریس ژاکوبین است و به صورت رابطه (2) بیان می‌شود.

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

و همچنین  $v$  بردار ورودی مدل سینماتیکی، شامل سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات می‌باشد که به شکل رابطه (3) تعریف می‌شود.

$$v = [v_1 \ v_2]^T \rightarrow \begin{cases} v_1 = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ v_2 = \dot{\phi} \end{cases} \quad (3)$$

با استفاده از روش لاگرانژ، معادله دینامیکی ربات حاصل می‌شود.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (4)$$

که در آن،  $M(q)$  ماتریس جرمی و متقارن و مثبت معین است؛  $C(q, \dot{q})$

گرفته است. در مورد ربات‌های متحرک چرخ‌دار بحث قید غیر هولونومیک<sup>1</sup> مطرح است [8,9]. روش‌های تجزیه، تحلیل و کنترل سیستم‌های غیر هولونومیک براساس مدل ریاضی شناخته شده در [10] ارائه شده است. با استفاده از روش لاگرانژ، می‌توان مدل دینامیکی ربات‌های متحرک همراه با قیود غیر هولونومیک را بدست آورد [10-12].

تعقیب مسیر مرجع زمانی<sup>2</sup> توسط ربات متحرک چرخ‌دار، یکی از مهم‌ترین مباحثی است که طی سال‌های اخیر به آن پرداخته شده است. مدل‌های مختلف زیادی از ربات‌های متحرک چرخ‌دار و همچنین روش‌های کنترلی مختلفی برای تعقیب مسیر مرجع زمانی این ربات‌ها مطرح شده است. روش‌های کنترلی برای کنترل این ربات‌ها به دو دسته کلی کنترل سینماتیک و کنترل دینامیک، دسته‌بندی می‌شود.

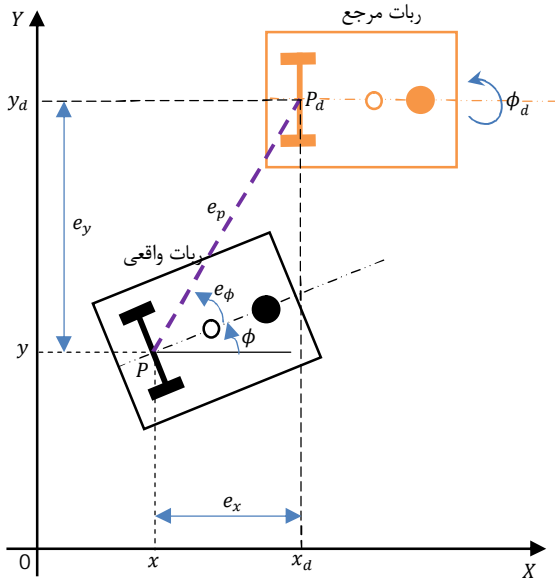
روش‌های کنترلی زیادی برای کنترل سینماتیک ربات‌های متحرک چرخ‌دار طراحی شده است. در [13]، کنترل فیدبک ربات شبه‌خودرو<sup>3</sup> که دارای قیود غیر هولونومیک می‌باشد، مطالعه شده است. در [14]، یک روش کنترلی برای تعقیب مسیر مرجع توسط ربات متحرک چرخ‌دار برای مدل‌های سینماتیکی در دستگاه قطبی دو بعدی ارائه شده است. در [15]، از مدل کنترل پیش‌بین<sup>4</sup> برای کنترل ربات‌های متحرک استفاده شده است. در [16]، از روش کنترلی خطی‌ساز فیدبک دقیق<sup>5</sup> برای کنترل ربات متحرک چرخ‌دار به همراه دو تریلر استفاده شده است.

در چند دهه اخیر، مطالعات زیادی روی کنترل سینماتیک ربات‌های متحرک چرخ‌دار انجام شده است و به نسبت، تحقیقات کمتری روی کنترل دینامیک این ربات‌ها صورت گرفته است. در کاربردهای مهندسی، به دلیل ورودی گشتاور برای موتورهای کنترل‌کننده‌های دینامیک ربات، واقعی‌تر و ارزشمندتر از کنترل‌کننده‌های سینماتیک هستند. بنابراین، بهتر است که کنترل دینامیک ربات‌های متحرک چرخ‌دار مورد بررسی قرار بگیرد. در زمینه کنترل دینامیک این سیستم‌ها با استفاده از روش کنترلی مدل مبتنا، کارهای ارزشمند زیادی انجام گرفته است. در [17]، از روش کنترل تطبیقی<sup>6</sup> برای کنترل ربات متحرک با قید غیر هولونومیک که دارای پارامترهای دینامیکی ناشناخته می‌باشد، بهره گرفته شده است. در [12]، یک کنترل‌کننده تطبیقی ساده مبتنی بر نرون<sup>7</sup> برای تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات متحرک چرخ‌دار، بدون اندازه‌گیری سرعت طراحی شده است. در [18]، یک کنترل‌کننده تطبیقی برای تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات متحرک چرخ‌دار پیشنهاد شده است. در [19]، یک کنترل مود لغزشی عصبی تطبیقی<sup>8</sup> برای تعقیب مسیر مرجع توسط ربات متحرک چرخ‌دار طراحی شده است. در [20]، با ترکیب روش کنترل مود لغزشی و روش دینامیک معکوس<sup>9</sup>، تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات متحرک چرخ‌دار که دارای عدم قطعیت در مدل و اغتشاشات خارجی می‌باشد، انجام گرفته است. در [21]، کنترل‌کننده دینامیک خطی‌ساز فیدبک تطبیقی مقاوم با استفاده از تخمین محدود بالایی عدم قطعیت‌ها، برای کنترل ربات ترک‌تور-تریلر ارائه شده است.

کنترل‌کننده‌های مدل مبتنا، به مدل دقیق ریاضی سیستم نیاز دارند که

- 1- Nonholonomic Constraint
- 2- Trajectory Tracking
- 3- Car-Like
- 4- Model Predictive Control
- 5- Exact Feedback Linearization
- 6- Adaptive Control
- 7- Neuron-Based
- 8- Adaptive Neural Sliding Mode Control
- 9- Inverse Dynamic

10- Non-Model Based  
11- Fuzzy Controller  
12- Transpose Jacobian Matrix  
13- Filtered Errors  
14- Lyapunov Function  
15- Barbalat's Lemma  
16- Asymptotic Stability



شکل 2 ربات متحرک چرخ دار در دو حالت واقعی و مرجع

براساس خطاهای فیلتر شده PD-action نشان داده شده است. گشتاورهای موتورهای راست و چپ ربات به شکل رابطه (9) تعریف می‌شوند.

$$\tau_r = \begin{cases} K_{p1}e_p + K_{v1}\dot{e}_p + K_{p2}e_\phi + K_{v2}\dot{e}_\phi & |e_\phi| < \delta \\ K_{p2}e_\phi + K_{v2}\dot{e}_\phi & |e_\phi| \geq \delta \end{cases}$$

$$\tau_l = \begin{cases} K_{p1}e_p + K_{v1}\dot{e}_p - K_{p2}e_\phi - K_{v2}\dot{e}_\phi & |e_\phi| < \delta \\ -K_{p2}e_\phi - K_{v2}\dot{e}_\phi & |e_\phi| \geq \delta \end{cases} \quad (9)$$

با توجه به رابطه (9)،  $K_{pi}$  و  $K_{vi}$  بهره‌های کنترل کننده پیشنهادی و  $\delta$  مقداری ناچیز می‌باشد.

اگر اندازه خطای زاویه ربات بزرگ باشد ( $|e_\phi| \geq \delta$ )، کنترل کننده پیشنهادی ربات را می‌چرخاند تا مقدار خطای زاویه ربات کاهش پیدا کند. در غیر این صورت خطای موقعیت و زاویه جهت گیری ربات به طور همزمان کنترل می‌شود.

#### 4- تحلیل پایداری برای تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط ربات

در این قسمت، تابع لیاپانوف مناسب برای اثبات پایداری الگوریتم کنترلی پیشنهادی، انتخاب می‌شود. خطای تعقیب مسیر مرجع زمانی، به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$\tilde{q} = q - q_d \quad (10)$$

در این قسمت، معادلات دینامیکی ربات برای دو حالت واقعی و مرجع به شکل رابطه (11) قابل بیان است.

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \\ M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d = B(q_d)\tau_d + A^T(q_d)\lambda \end{cases} \quad (11)$$

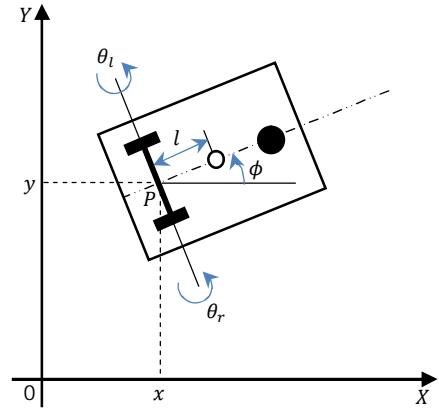
در رابطه (11)، می‌توان فرض کرد که  $A(q) = A(q_d)$  و  $B(q)\tau_d = 0$ ،  $C(q_d, \dot{q}_d)$  تابع کاندیدای لیاپانوف به شکل رابطه (12) در نظر گرفته می‌شود.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T M(q)\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_P \tilde{q} \quad (12)$$

مشق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (13) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q)\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q)\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T K_P \tilde{q} \quad (13)$$

با توجه به (11)، متغیر  $\ddot{\tilde{q}}$  به شکل رابطه (14) بیان می‌شود.



شکل 1 ربات متحرک چرخ دار

ماتریس کریولیس<sup>1</sup>؛  $B(q)$  ماتریس تبدیل ورودی؛  $\tau$  بردار گشتاورها، شامل گشتاورهای اعمالی به موتورهای راست و چپ که روی چرخ‌های راست و چپ عقب ربات قرار گرفته‌اند؛  $A(q)$  ماتریس قیدی ربات و  $\lambda$  بردار ضرایب لاگرانژ است. ماتریس‌های موجود در مدل دینامیکی ربات به شکل (5) می‌باشند.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m l \sin \phi \\ 0 & m & m l \cos \phi \\ -m l \sin \phi & m l \cos \phi & J + m l^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m l \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 & 0 & -m l \dot{\phi} \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ h & -h \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (5)$$

چرخ‌های عقب ربات از نوع محور ثابت بوده و دارای قید غیرهولونومیک می‌باشد. معادله قیدی ربات و در نتیجه ماتریس قیدی ربات به شکل رابطه (6) حاصل می‌شود.

$$A(q)\dot{q} = 0 \rightarrow A(q) = [-\sin \phi \quad \cos \phi \quad 0] \quad (6)$$

#### 3- الگوریتم کنترلی غیر مدل مینا

در این قسمت، یک الگوریتم کنترلی غیر مدل مینا براساس خطاهای فیلتر شده PD-action برای کنترل تعقیب ربات متحرک چرخ دار ارائه می‌شود. در شکل 2، ربات متحرک چرخ دار در دو حالت واقعی و مرجع نشان داده شده است.

با توجه به شکل 2، خطاهای موقعیت و زاویه ربات به صورت رابطه (7) تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} e_p = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \\ e_\phi = \text{Atan2}(e_y, e_x) - \phi \end{cases} \quad (7)$$

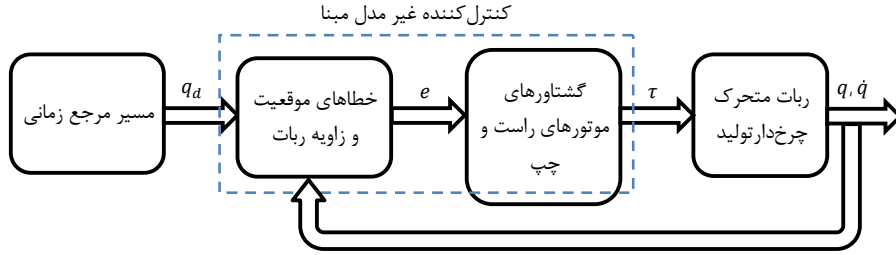
جایی که:

$$\begin{cases} e_x = x_d - x = e_p \cos(\phi + e_\phi) \\ e_y = y_d - y = e_p \sin(\phi + e_\phi) \end{cases} \quad (8)$$

خطاهای موقعیت ( $e_p$ ) و زاویه جهت گیری ( $e_\phi$ ) ربات، بایستی حول نقطه صفر پایدار شود. در ابتدا باید ربات واقعی، ربات مرجع را پیدا کرده و سپس تعقیب مسیر ربات مرجع را انجام دهد.

در دیاگرام بلوکی شکل 3، نحوی عملکرد کنترل کننده غیر مدل مینا

1- Coriolis Matrix



شکل 3 روند کلی روش کنترلی غیر مدل مبنا براساس خطاهای فیلتر شده PD-action

$$B(q)\tau = \frac{2}{r} \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & hK_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\phi \end{bmatrix} + \frac{2}{r} \begin{bmatrix} K_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{v1} & 0 \\ 0 & 0 & hK_{v2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_x + e_p \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{e}_y - e_p \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{e}_\phi \end{bmatrix} \quad (21)$$

با توجه به رابطه (8)، برای محدوده خطای زاویه پایین،  $e_x$  و  $e_y$  را می توان به صورت رابطه (22) بیان کرد.

$$\begin{cases} e_x = e_p \cos \phi \\ e_y = e_p \sin \phi \end{cases} \quad (22)$$

با توجه به روابط (21) و (22)، سرانجام ماتریس ورودی  $B(q)\tau$  به شکل رابطه (23) بیان می شود.

$$B(q)\tau = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + \begin{bmatrix} -K_{v1} e_p \dot{\phi} \sin \phi \\ K_{v1} e_p \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

جایی که  $\tilde{q} = -e$  و  $\dot{\tilde{q}} = -\dot{e}$  در رابطه (24) آمده است.

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & hK_{p2} \end{bmatrix}, K_v = \begin{bmatrix} K_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{v1} & 0 \\ 0 & 0 & hK_{v2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

با قرار دادن رابطه (23) در (17)، مشتق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (25) بیان می شود.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T \begin{bmatrix} -K_{v1} e_p \dot{\phi} \sin \phi \\ K_{v1} e_p \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

جایی که طبق رابطه (26):

$$\dot{\tilde{q}}^T \begin{bmatrix} -K_{v1} e_p \dot{\phi} \sin \phi \\ K_{v1} e_p \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} = K_{v1} e_p \dot{\phi} \{ (-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi) + (\dot{x}_d \sin \phi - \dot{y}_d \cos \phi) \} \quad (26)$$

با توجه به عبارت (26)،  $-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi$  به غیرهولونومیک چرخ های عقب ربات می باشد که برابر با صفر است. فرض می شود که کنترل کننده طراحی شده به خوبی عمل کند و تعقیب مسیر مرجع زمانی خیلی خوب انجام شود. بنابراین می توان فرض کرد  $\dot{x}_d \sin \phi - \dot{y}_d \cos \phi$  عبارت  $\dot{q}(t) \approx \dot{q}_d(t)$  و  $q(t) \approx q_d(t)$  برابر با صفر می شود [27]. سرانجام مشتق تابع لیاپانوف به شکل رابطه (27) بیان می شود.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} \leq 0. \quad (27)$$

تابع لیاپانوف انتخابی مثبت معین می باشد و همین طور با توجه به رابطه (27)، مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین است، در نتیجه تابع لیاپانوف

$$\ddot{\tilde{q}} = M^{-1}(q) \{ -C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} + B(q)\tau \} \quad (14)$$

با قرار دادن رابطه (14) در (13)، مشتق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (15) نوشته می شود.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T B(q)\tau + \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q} \quad (15)$$

در رابطه (15)، عبارت  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  دارای خاصیت تقارن مورب<sup>1</sup> است. طبق رابطه (16) داریم:

$$\dot{\tilde{q}}^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{\tilde{q}} = 0 \quad (16)$$

در نتیجه، رابطه (17) حاصل می شود.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = \dot{\tilde{q}}^T B(q)\tau + \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q} \quad (17)$$

بردار ورودی  $B(q)\tau$  به شکل رابطه (18) قابل بیان است.

$$B(q)\tau = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \phi (\tau_r + \tau_l) \\ \sin \phi (\tau_r + \tau_l) \\ h(\tau_r - \tau_l) \end{bmatrix} \quad (18)$$

تحلیل پایداری برای دو محدوده بررسی می شود: الف)  $|e_\phi| \geq \delta$ ، ب)  $|e_\phi| < \delta$  (الف)  $|e_\phi| \geq \delta$

در این محدوده، با توجه به رابطه (9)، مجموع و اختلاف گشتاورهای موتورهای راست و چپ به شکل رابطه (19) بیان می شود.

$$\begin{cases} \tau_r + \tau_l = 0 \\ \tau_r - \tau_l = 2(K_{p2} e_\phi + K_{v2} \dot{e}_\phi) \end{cases} \quad (19)$$

اگر اندازه خطای زاویه ربات زیاد باشد، ابتدا بایستی فقط خطای زاویه ربات اصلاح شود تا اندازه خطای زاویه کاهش پیدا کند زیرا اگر در این حالت، فرمانی در جهت کنترل موقعیت ربات صادر شود، سبب ناپایداری ربات می شود. با توجه به رابطه (19)، فرمان های کنترلی به گونه ای هستند که ربات حول محور خود دوران می کند تا جایی که خطای زاویه ربات کاهش یابد.

ب) محدوده  $(|e_\phi| < \delta)$

در این محدوده، با توجه به رابطه (9)، مجموع و اختلاف گشتاورهای موتورهای راست و چپ به شکل رابطه (20) بیان می شود.

$$\begin{cases} \tau_r + \tau_l = 2(K_{p1} e_p + K_{v1} \dot{e}_p) \\ \tau_r - \tau_l = 2(K_{p2} e_\phi + K_{v2} \dot{e}_\phi) \end{cases} \quad (20)$$

در این قسمت، اندازه خطای زاویه ربات کم است و خطاهای موقعیت و زاویه جهت گیری ربات، به طور همزمان اصلاح می شوند. با استفاده از رابطه های (18) و (20)، ماتریس ورودی  $B(q)\tau$  به شکل رابطه (21) بیان می شود.

1- Skew Symmetric

$$q_0 = \left[ 0.32 \quad -0.11 \quad \frac{3\pi}{2} \right]^T \quad (31)$$

مسیر مرجع زمانی مربوط به ربات مرجع، به شکل دایره‌ای و مطابق رابطه (32) فرض می‌شود.

$$\begin{cases} x_d(t) = 0.4 \cos(t) \\ y_d(t) = 0.4 \sin(t) \end{cases} \quad (32)$$

ضرایب کنترلی در نظر گرفته شده با مطالعات شبیه‌سازی به منظور رسیدن به عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته، اجتناب از داشتن پاسخ‌های نوسانی و اجتناب از رسیدن به حد اشباع عملگرها، تعیین گردیده است و به شکل رابطه (33) بیان می‌شود.

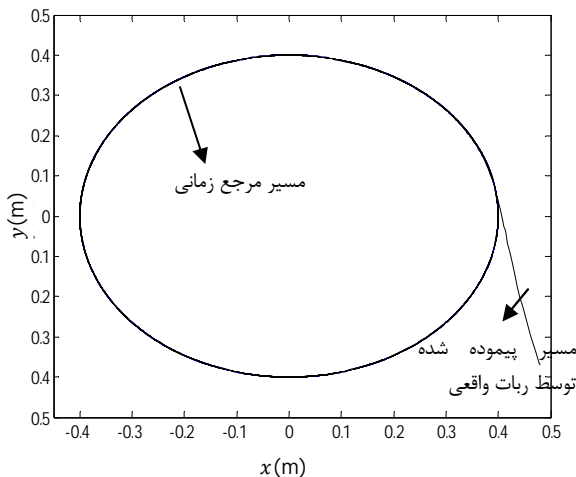
$$K_{p1} = 0.5, \quad K_{v1} = 1, \quad K_{p2} = 0.5, \quad K_{v2} = 1 \quad (33)$$

در شکل 4، تعقیب مسیر دایره‌ای توسط ربات نشان داده شده است. در شکل 5، خطاهای موقعیت و زاویه ربات و در شکل 6، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات نمایش داده شده است.

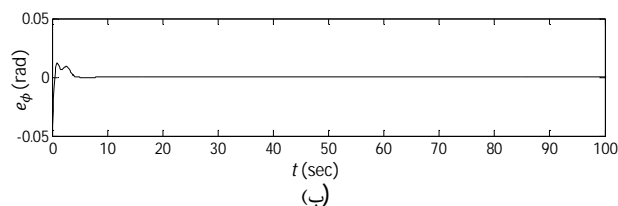
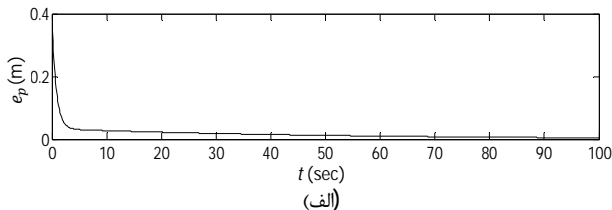
### 5-2- پیاده‌سازی و مطالعات آزمایشگاهی

#### 5-2-1- سیستم آزمایشگاهی

سیستم آزمایشگاهی مورد بررسی، تشکیل شده از یک دوربین نصب شده به سقف و یک کامپیوتر میزبان است. در شکل 7، ربات متحرک چرخ‌دار با برچسب‌های آبی و سفید نشان داده شده است. این برچسب‌ها موقعیت و زاویه جهت‌گیری ربات متحرک چرخ‌دار را برای تعقیب مسیر مرجع زمانی،



شکل 4 تعقیب مسیر مرجع زمانی دایره‌ای توسط ربات متحرک چرخ‌دار



شکل 5 الف) خطای موقعیت ربات، ب) خطای زاویه جهت‌گیری ربات

$V(q, \dot{q})$  به یک محدوده همگرا می‌شود یا به عبارتی  $V(q, \dot{q})$  محدود<sup>1</sup> است. و همچنین با توجه به رابطه (12)،  $\dot{q}$  و  $\ddot{q}$  نیز محدود هستند. برای اثبات پایداری مجانبی ربات، می‌توان از لم باربلات استفاده کرد. چون دینامیک سیستم غیر مستقل<sup>2</sup> است، نمی‌توان همگرایی  $\dot{q}$  را نتیجه گرفت. برای این که بتوان ثابت کرد مشتق تابع لیاپانوف بطور یکنواخت پیوسته زمانی<sup>3</sup> است، بایستی محدود بودن مشتق دوم تابع لیاپانوف  $(\ddot{V}(q, \dot{q}))$  را نشان داد.

$$\ddot{V}(q, \dot{q}) = -2\dot{q}^T K_V \ddot{q} \quad (28)$$

که با قرار دادن (23) در (14)، معادله متغیر  $\ddot{q}$  به شکل رابطه (29) بیان می‌شود.

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \left\{ -C(q, \dot{q})\dot{q} - K_V \dot{q} - K_P \ddot{q} + \begin{bmatrix} -K_{v1} \phi e_y \\ K_{v1} \phi e_x \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (29)$$

با قرار دادن (29) در (28)، مشتق دوم تابع لیاپانوف حاصل می‌شود. طبق رابطه (30) داریم:

$$\begin{aligned} \ddot{V}(q, \dot{q}) = & -2\dot{q}^T K_V M^{-1}(q) \left( -C(q, \dot{q})\dot{q} - K_V \dot{q} - K_P \ddot{q} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} -K_{v1} \phi e_y \\ K_{v1} \phi e_x \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

متغیرهای  $\dot{q}$  و  $\ddot{q}$  محدود هستند، در نتیجه با توجه به رابطه (12)،  $\dot{q}$  محدود می‌باشد و در نتیجه به استفاده از (5)،  $C(q, \dot{q})$  و  $M(q)$  نیز محدود می‌باشند و همین‌طور  $\ddot{V}(q, \dot{q})$  بطور یکنواخت پیوسته است. در نتیجه  $\ddot{V}(q, \dot{q})$  نیز محدود بوده و با استفاده از لم باربلات  $\dot{V}(q, \dot{q}) \rightarrow 0$  میل می‌کند وقتی که  $t \rightarrow \infty$  میل کند.

با توجه به رابطه (27)،  $\dot{q}$  و همین‌طور  $\ddot{q}$  نیز به سمت صفر میل می‌کنند. با استفاده از رابطه (29)، متغیر  $\ddot{q}$  به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه وقتی  $t \rightarrow \infty$  میل می‌کند  $q \rightarrow q_d$  و  $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_d$  می‌کنند. بنابراین، سیستم مدار بسته پایدار مجانبی است.

### 5- نتایج حاصله

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی و پیاده‌سازی ارائه می‌شود. در ابتدا، فرضیات مربوط به مشخصات هندسی و جرمی ربات به صورت جدول 1 در نظر گرفته می‌شود.

#### 5-1- نتایج شبیه‌سازی

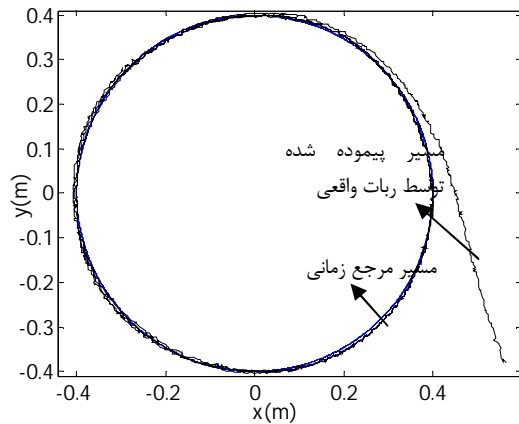
شبیه‌سازی‌ها در محیط نرم‌افزار مت‌لب<sup>4</sup> انجام گرفته است. شرایط اولیه برای سیستم، به صورت رابطه (31) در نظر گرفته می‌شود.

جدول 1 مشخصات هندسی و جرمی ربات متحرک چرخ‌دار

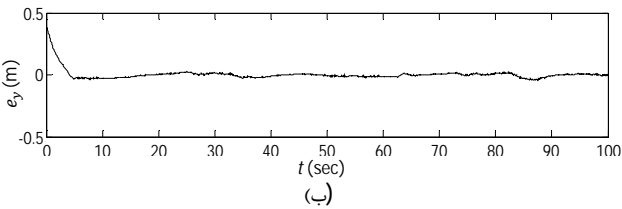
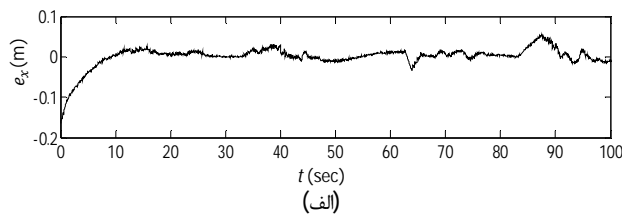
مقدار	پارامتر
0/9	$m$ (kg)
0/0025	$J$ (kg.m <sup>2</sup> )
2/6	$r$ (cm)
5/95	$h$ (cm)
29	$l$ (mm)

1- Bounded  
2- Non-autonomous  
3- Uniformly Continues  
4- MATLAB

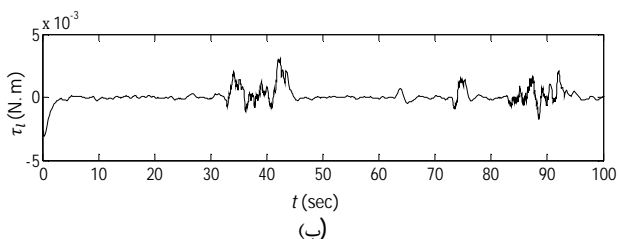
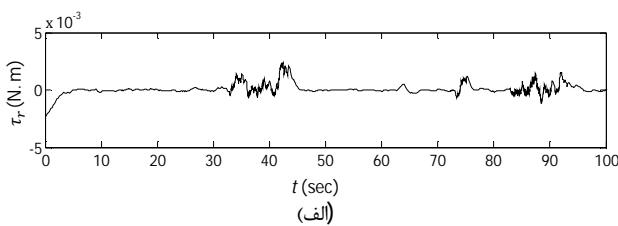
برای پیاده سازی، ربات متحرک چرخ دار از شرایط اولیه  $q_0$  (31)، شروع شکل 8، تعقیب مسیر مرجع دایره ای توسط ربات متحرک چرخ دار نشان داده شده است.



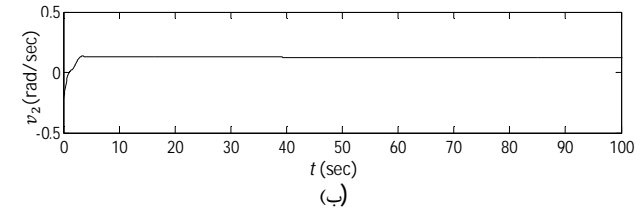
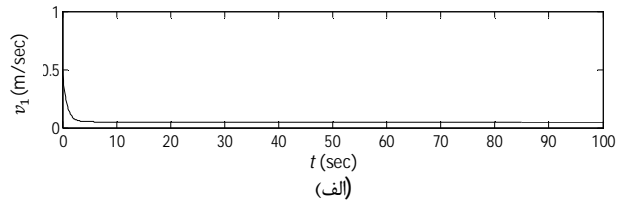
شکل 8 تعقیب مسیر مرجع زمانی دایره ای توسط ربات متحرک چرخ دار در حالت تجربی



شکل 9 خطای موقعیت ربات؛ (الف) در راستای افقی، (ب) در راستای عمودی



شکل 10 گشتاورهای سرو موتورها بر حسب زمان؛ (الف) گشتاور سرو موتور سمت راست ( $\tau_r$  (N.m))، (ب) گشتاور سرو موتور سمت چپ ( $\tau_l$  (N.m))



شکل 6 ورودی مدل سینماتیکی بر حسب زمان؛ (الف) سرعت خطی ربات  $v_1$  (m/s)، (ب) سرعت زاویه ای ربات  $v_2$  (rad/s)

مشخص می کند. موتورهای انتخابی، از نوع سرو موتور با ولتاژ عملکردی 12 ولت و گشتاور راه اندازی 1/5 نیوتن متر است، که روی چرخ های عقب ربات نصب می شوند.

در پیاده سازی آزمایشگاهی، به منظور اندازه گیری متغیرهای سیستم از روش پردازش تصویر استفاده شده است، بدین منظور با استفاده از برچسب های آبی و سفید رنگ نصب شده بر روی ربات، موقعیت آن توسط دوربین به کامپیوتر میزبان انتقال داده می شود. الگوریتم پردازش تصویر، بر مبنای جستجو به منظور یافتن نقاط رنگی در صفحه حرکت عمل می کند. دوربین مورد استفاده در این آزمایش، دارای دقت  $640 \times 480$  پیکسل با سرعت پردازش 30 فریم بر ثانیه می باشد. از آنجا که موقعیت ربات فقط از طریق پردازش تصویر مشخص می شود، سرعت پردازش تصویر به زمان نمونه برداری کنترل کننده محدود می شود. در این آزمایش، زمان نمونه برداری برابر با 33 میلی ثانیه می باشد که با سرعت پردازش تصویر تقریباً یکسان است. فرمان های کنترلی توسط کامپیوتر تولید شده و از طریق کابل ارتباطی، اطلاعات به ربات انتقال داده می شود. نرم افزار مورد استفاده برای پیاده کردن الگوریتم کنترلی، متلب-سیمولینک<sup>1</sup> می باشد.

### 2-2-2- نتایج تجربی

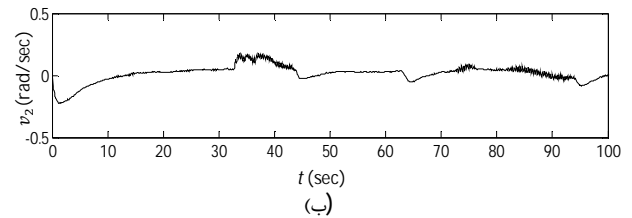
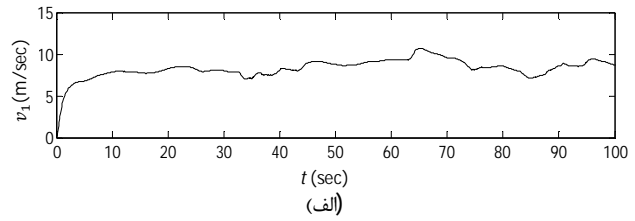
در این قسمت، ربات متحرک چرخ دار شکل 7، بایستی مسیر مرجع زمانی را تعقیب نماید. مسیرهای مرجع زمانی تولیدی برای ربات متحرک چرخ دار، در صفحه مختصات کارتزین می باشد.



شکل 7 نمونه ساخته شده ربات متحرک چرخ دار

1- MATLAB/SIMULINK

$M(q)$	ماتریس جرمی
$q$	بردار مختصات تعمیم یافته
$q_d$	بردار مختصات تعمیم یافته ربات مرجع
$r$	شعاع چرخ های ربات
$S(q)$	ماتریس ژاکوبین
$v$	بردار سرعت شامل سرعت های خطی و دورانی ربات
$V(q, \dot{q})$	تابع لیپانوف
$x, y$	موقعیت افقی و عمودی ربات
<b>علایم یونانی</b>	
$\lambda$	ضرایب لاگرانژ
$\phi$	زاویه جهت گیری ربات
$\tau$	بردار گشتاور
$\delta$	مقداری ناچیز برای سنجش اندازه خطای زاویه ربات



شکل 11 ورودی مدل سینماتیکی بر حسب زمان در حالت تجربی؛ الف) سرعت خطی ربات  $v_1$  (m/s)، ب) سرعت زاویه ای ربات  $v_2$  (rad/s)

خطاهای موقعیت ربات در راستاهای افقی و عمودی در شکل 9 نشان داده شده است و شکل های 10 و 11، به ترتیب گشتاورهای موتورهای راست و چپ ربات و همچنین ورودی های مدل سینماتیکی که شامل سرعت های خطی و زاویه ای ربات می باشد، نمایش داده شده است.

## 6- نتیجه گیری

در این مقاله، کنترل تعقیب مسیر مرجع زمانی توسط یک ربات متحرک چرخ دار که دارای قید غیر هولونومیک می باشد، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. در ابتدا، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ربات استخراج شده و سپس یک روش کنترلی غیر مدل مینا با استفاده از خطاهای فیلتر شده PD-action برای کنترل ربات متحرک چرخ دار ارائه شد. مدل های کنترلی غیر مدل مینا به دلیل عدم وابستگی به مدل دینامیکی ربات، پایین بودن هزینه محاسباتی و مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت های مدل، نسبت به مدل های کنترلی مدل مینا مناسب تر هستند. با استفاده از تابع لیپانوف و لم باربالات، پایداری مجانبی سیستم مدار بسته، استنتاج شد. در نهایت، نتایج شبیه سازی و پیاده سازی روش کنترلی پیشنهادی ارائه شد. نتایج حاصل نشان می دهد که بدون نیاز به اطلاعات مربوط به مدل دینامیکی و با کاهش دادن بار محاسباتی، عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی قابل قبول می باشد.

## 7- فهرست علایم

$A(q)$	ماتریس قیدی
$B(q)$	ماتریس تبدیل ورودی
$C(q, \dot{q})$	ماتریس کریولیس
$e$	بردار خطا
$e_x, e_y$	خطاهای موقعیت افقی و عمودی ربات
$e_\phi$	خطای زاویه جهت گیری ربات
$e_p$	خطای موقعیت ربات
$h$	نصف فاصله بین چرخ های عقب ربات
$J$	اینرسی ربات حول محور Z گذرنده از آن
$K_p, K_v$	ماتریس های ضرایب کنترل کننده
$l$	فاصله عمودی چرخ های عقب تا مرکز جرم ربات
$m$	جرم ربات

- [23] F., M. Raimondi and M., Melluso, A new fuzzy robust dynamic controller for autonomous vehicles with nonholonomic constraints, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 52, No. 2-3, pp. 115-131, 2005.
- [24] J., N. Osmic and B. Lacevic, Neural Network Controller for Mobile Robot Motion Control, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 23, pp. 166-171, 2008.
- [25] A., Keymasi, and S. Ali. A., Moosavian, Modified Transpose Jacobian for Control of a Tractor-Trailer Wheeled Robot, in *Proc. Of the RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM 2013)*, Tehran, Iran, 2013.
- [26] S. Ali A. Moosavian and Evangelos, Modified transpose Jacobian control of robotic systems, *Automatica*, Vol. 43, No. 7, pp. 1226-1233, 2007.
- [27] H., D. Taghirad, *Parallel Robots: Mechanics and Control*, Second Edition, pp. 334-463, USA: CRC Press, 2012.
- [19] Bong Seok Park, Sung Jin Yoo, Jin Bae Park and Yoon Ho Choi, Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots With Model Uncertainty, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 17, No. 1, pp. 207-214, 2009.
- [20] E., Samer El'youssef, Nardênio Almeida Martins, Edson Roberto de Pieri and Douglas Wildgrube Bertol, On a Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking Control: 1st and 2nd Order Sliding Modes Applied to a Compensated Inverse Dynamics, in *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics- PACAMXI*, PR, Brazil, 2010.
- [21] A., Keymasi Khalaji, and S. Ali A., Moosavian, Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot, *IEEE-ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, Vol. 19, No. 3, pp. 943-953, 2014.
- [22] M., Karimi and S. Ali A. Moosavian, Control and Manipulability Management of Underactuated Manipulators, *Journal of Advanced Robotics*, Vol. 24, No. 4, pp. 605-626, 2010.