



# تحلیل دینامیک وضعی - مداری آشوبناک ماهواره ژيروساتات به روش هندسه منیفلد ریچی و نمای لیاپانف

سید مهدی ابطحی<sup>۱</sup>، سید حسین ساداتی<sup>۲\*</sup>، حسن سالاریه<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

\* تهران، کدپستی ۱۹۹۱۹-۴۳۳۴۴، sadati@kntu.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله، تأثیر حرکت مداری در دینامیک آشوبناک دورانی ماهواره ژيروساتات سه محوره تحت اثر گشتاور گرادیان جاذبه بررسی شده است. مدل ریاضی ماهواره ژيروساتات در حرکت وضعی-مداری به روش همیلتون استخراج شد. به دلیل پیچیدگی معادلات کوپله شده حرکت وضعی-مداری، کاهش مرتبه مدل ریاضی سیستم با استفاده از تبدیل توسعه یافته دپریت توسط مختصات سرت-آندویر برای پارامترهای وضعی-مداری انجام گرفت. پس از تبدیل، بخش مربوط به حرکت مداری و گشتاورهای گرادیان جاذبه به صورت ترمهای اغتشاشی در معادله همیلتونین ظاهر شدند. سپس معیار انحناء ریچی بر اساس هندسه منیفلدهای ریمانی به تحلیل آشوب در معادلات اغتشاشی سیستم می‌پردازد. نتایج حاصل از انحناء ریچی در کنار مقادیر نمای لیاپانف، جاذب شگفت و رخداد آشوب را در سیستم اثبات می‌نماید. همچنین روش‌های عددی مانند مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخ‌های سری زمانی، دوشاخگی هیتروکلینیک و نتایج روش انحناء ریچی را تأیید می‌کند.  
**کلیدواژگان:** آشوب، ماهواره ژيروساتات، منیفلد ریمانی، انحناء ریچی، نمای لیاپانف.

## Chaotic dynamics of spin-orbit motion in a gyrostat satellite using ricci method

S. M. Abtahi<sup>1</sup>, S. H. Sadati<sup>2\*</sup>, H. Salarieh<sup>3</sup>

1- PhD. Student, Mech. Eng., K. N. Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran

2- Assist. Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi Univ. of Tech., Tehran, Iran

3- Assist. Prof., Mech. Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran

\* P.O.B. 43344-19919 Tehran, Iran. sadati@kntu.ac.ir

**Abstract-** Chaotic dynamics of spin-orbit motion of a triaxial gyrostat satellite under the gravity gradient perturbations is considered. The Hamiltonian approach is used for modeling of the coupled spin-orbit equations of motion. The complex Hamiltonian of the system is reduced via the extended Deprit canonical transformation. This reduction yields to the derivation of the perturbation form of the Hamiltonian which can be used in the Ricci curvature criterion based on the Riemannian manifold geometry for the analysis of chaos. The results obtained from Ricci method as well as the values from the Lyapunov exponent demonstrate the presence of a strange attractor and chaos phenomenon in the perturbed system. The simulation results based on the numerical methods such as Poincare' section, trajectories of phase portrait, and time series responses confirm the heteroclinic bifurcation and chaos in the system.

**Keywords:** Chaos, Gyrostat Satellite, Riemannian Manifold, Ricci Curvature, Lyapunov Exponent.

## ۱- مقدمه

ماهواره ژيروسات با وجود چرخ‌های عکس‌العملی<sup>۱</sup> پایدارساز، در ماموریت‌های حساس مورد استفاده قرار می‌گیرد. رخداد پدیده آشوب<sup>۲</sup> در ماهواره ژيروسات موجب بی‌نظمی در پاسخ‌های مربوط به سیستم ماهواره می‌شود. بنابراین تحلیل دینامیک غیر خطی آشوبناک ماهواره ژيروسات در پیش‌بینی و جلوگیری از آشوب ضروری است. از آنجا که سیستم ماهواره ژيروسات دارای دینامیک همیلتونی می‌باشد، تأثیر گشتاورهای اغتشاشی می‌تواند منجر به آشوبناک شدن سیستم شود. از جمله تأثیرات اغتشاشی اعمالی بر ماهواره می‌توان به اضافه کردن حرکت مداری به دینامیک غیر خطی دورانی ماهواره ژيروسات اشاره کرد که می‌تواند احتمال آشوب در سیستم را افزایش دهد [۷-۱].

سیستم ماهواره ژيروسات تنها در حرکت دورانی به دلیل وجود پایدار سازهای چرخ عکس‌العملی در ساختار مکانیکی‌اش، از دینامیک پیچیده‌ای برخوردار است. در صورت اضافه نمودن دینامیک حرکت مداری به دینامیک دورانی ماهواره، معادلات حرکت سیستم بسیار پیچیده‌تر شده و تحلیل مدل ریاضی به مراتب مشکل‌تر می‌شود. بنابراین استفاده از روش‌های کاهش مرتبه<sup>۳</sup> معادلات سیستم برای انجام آنالیز ریاضی روی مدل ضروری به نظر می‌رسد. برای این منظور از تبدیل کانونی دپریت<sup>۴</sup> استفاده می‌شود که قبلاً برای دینامیک‌های دورانی استفاده شده بود و در اینجا برای دینامیک انتقالی-دورانی<sup>۵</sup> توسعه داده می‌شود [۸].

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعددی در بررسی دینامیک آشوبناک ماهواره تنها در حرکت دورانی انجام شده است. اما در هیچ یک از آنها به بررسی تأثیرات حرکت مداری بر دینامیک آشوبی ماهواره پرداخته نشده است. در این مقالات برای تحلیل پدیده آشوب در سیستم همیلتونی ماهواره، عمدتاً از روش ریاضی دقیق انتگرال ملنیکف<sup>۶</sup> در کنار روش‌های عددی مانند نمای لیاپانف<sup>۷</sup>، بررسی مقاطع پوانکاره و مسیرهای فاز استفاده شده است. در این میان بکارگیری روش ملنیکف

در تحلیل دینامیک آشوبناک نیازمند حل دقیق مدارات هیتروکلینیک<sup>۸</sup> است که برای مدل پیچیده ماهواره ژيروسات در حرکت وضعی-مداری کار دشواری اشد [۹-۱۴]. با کمک تحلیل آشوب به روش ریچی می‌توان این مشکل را برطرف نمود. روش انحناء ریچی<sup>۹</sup> بر اساس هندسه منیفلدهای ریمانی<sup>۱۰</sup> به تحلیل ریاضی آشوب در سیستم‌های همیلتونی می‌پردازد.

در روش تحلیلی ریچی، یک تبدیل از فضای فاز دینامیکی به فضای هندسی بدون نیاز به حل دقیق مدارات سیستم استفاده می‌شود. با استفاده از این تبدیل، دو مدار نزدیک به هم در فضای دینامیکی حالت فاز سیستم با ژئودزیک<sup>۱۱</sup>هایی روی منیفلد ریمانی در محیط هندسی منطبق می‌شوند. بنابراین، در سیستم‌های آشوبناک، کشیدگی<sup>۱۲</sup> و تاخوردگی<sup>۱۳</sup> ژئودزیک‌ها در فضای هندسی توسط انحناء منیفلدهای ریمانی قابل تفسیر می‌شود. برای این منظور، با تعریف پارامتری بنام اسکالر ریچی<sup>۱۴</sup> در مقایسه با مقادیر نمای لیاپانف می‌توان وجود آشوب در سیستم را بررسی و اثبات کرد [۱۵-۲۰].

در این مقاله، حرکت وضعی-مداری ماهواره ژيروسات سه محوره شامل بدنه اصلی صلب به همراه سه عدد چرخ عکس‌العملی به روش همیلتون مدل‌سازی شد. با توجه به پیچیدگی معادلات سیستم، کاهش مرتبه معادلات سیستم با استفاده از تبدیل توسعه یافته دپریت توسط متغیرهای جدید سرت-آندویر<sup>۱۵</sup> در حرکت وضعی-مداری انجام گرفت. استخراج معادلات همیلتونین سیستم به صورت اغتشاشی، راه را برای استفاده از روش تحلیلی ریچی در بررسی آشوب در سیستم ماهواره هموار می‌سازد. مقادیر منفی مربوط به اسکالر ریچی در کنار مقادیر مثبت نمای لیاپانف، رفتار آشوبناک در سیستم را اثبات می‌کند. همچنین به منظور بررسی اعتبار نتایج به دست آمده از روش تحلیلی ریچی، روش‌های عددی همچون بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فاز و پاسخ‌های سری زمانی حاصل از شبیه‌سازی عددی سیستم مؤید آشوب در سیستم می‌باشند.

8. Heteroclinic Orbits

9. Ricci Curvature Method

10. Riemannian Manifold Geometry

11. Geodesic

12. Stretching

13. Folding

14. Ricci Scalar

15. Serret-Andoyer Variables

1. Reaction Wheels

2. Chaos

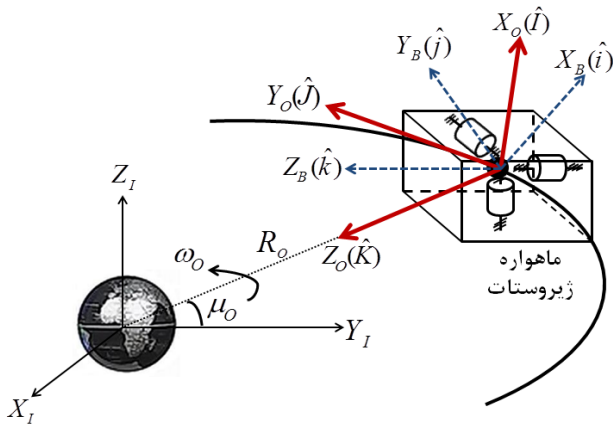
3. Reduction

4. Deprit Canonical Transformation

5. Spin-Orbit Motion

6. Melnikov Method

7. Lyapunov Exponents



شکل ۱ دستگاه‌های مختصات حرکت وضعی-مداری ماهواره

$$\omega_x = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \psi \quad (1)$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \psi \quad (2)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta \quad (3)$$

که در آن که  $\omega_x$ ،  $\omega_y$  و  $\omega_z$  سرعت زاویه‌ای بدنه اصلی ماهواره در دستگاه بدنی است. سینتیک حرکت وضعی-مداری ماهواره ژيروسات با استفاده از روش همیلتون استخراج می‌شود. بدین منظور، ابتدا لاگرانژین ( $L$ ) سیستم به صورت تفاضل انرژی جنبشی و پتانسیل نوشته شده. انرژی جنبشی ماهواره ژيروسات در حرکت وضعی-دورانی شامل ترم‌های انتقالی و دورانی به صورت معادله (۴) می‌باشد.

$$T = T_{\text{Translation}} + T_{\text{Rotation}} \quad (4)$$

که انرژی جنبشی حرکت مداری ماهواره به صورت رابطه (۵) می‌باشد.

$$T_{\text{Translation}} = \frac{1}{2} m_B V_{G_B}^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_g V_{G_i}^2 \quad (5)$$

که  $m_B$  جرم بدنه اصلی ماهواره،  $m_g$  جرم هر یک از چرخ‌های عکس‌العملی است،  $\vec{V}_{G_B} = \vec{V}_G + (\vec{\omega}_T \times \vec{\rho})$  و  $\vec{V}_{G_i} = \vec{V}_G + (\vec{\omega}_T \times \vec{\rho}_i)$  به ترتیب سرعت مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره و سرعت مطلق مرکز جرم هر یک از چرخ‌های عکس‌العملی است که در آن  $\rho$  فاصله بین مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره  $G_B$  با مرکز جرم کل ماهواره  $G$  است،  $\rho_i$  فاصله بین مرکز جرم هر یک از چرخ‌های عکس‌العملی  $G_i$  با  $G$ ، همچنین  $V_G$  سرعت مرکز جرم کل ماهواره ژيروسات شامل بدنه اصلی و چرخ‌های عکس‌العملی است که برابر با  $V_G^2 = \dot{R}_O^2 + R_O^2 \omega_0^2$  بوده و  $\vec{\omega}_T$  بردار سرعت زاویه‌ای کل ماهواره ژيروسات شامل ترم‌های سرعت زاویه‌ای دورانی و

## ۲- مدل ریاضی سیستم

ساختار ماهواره ژيروسات شامل بدنه اصلی صلب به همراه سه چرخ عکس‌العملی است. چرخ‌های عکس‌العملی، رتورهای هستند که در سیستم‌های مدار بسته به عنوان پایدارساز کنترلی استفاده می‌شوند. با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژيروسات، تانسور ممان اینرسی کل ماهواره قطری می‌شود.

در مدل‌سازی دینامیک کوبله شده وضعی-مداری در ماهواره ژيروسات سه محوره، سه دستگاه مختصات متعامد مطابق شکل ۱ استفاده شده است. در دستگاه مختصات اینرسی  $I\{X_I, Y_I, Z_I\}$ ، مرکز دستگاه بر مرکز جرم زمین منطبق بوده و محور  $X_I$  از محور اعتدال بهاری<sup>۱</sup> می‌گذرد. دستگاه مختصات مداری  $O\{X_0, Y_0, Z_0\}$  با بردارهای  $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$  که مرکز آن بر مرکز جرم ماهواره ژيروسات واقع است، محور  $X_0$  عمود بر صفحه مدار در راستای مثبت مومنتم زاویه‌ای حرکت مداری، محور  $Y_0$  مماس بر راستای حرکت مداری و محور  $Z_0$  در جهت خط واصل مرکز جرم ماهواره و مرکز جرم زمین<sup>۲</sup> می‌باشد. دستگاه مختصات بدنی  $B\{X_B, Y_B, Z_B\}$  متصل به ماهواره با بردارهای  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  شناخته می‌شود که مرکز آن در مرکز جرم ماهواره ژيروسات قرار دارد و محورهای متعامد آن منطبق بر محورهای اصلی ماهواره ژيروسات می‌باشد.

دینامیک وضعی ماهواره توسط زوایای اولر  $\varphi, \theta, \psi$  با ترتیب کلاسیک بیان شده که مبین جهت‌گیری زاویه‌ای بین دستگاه‌های مختصات مداری و بدنی است. دینامیک مداری ماهواره نیز در مدار دایروی تحت گشتاورهای اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین انجام می‌شود. در حرکت مداری،  $R_0$  فاصله بین مرکز جرم ماهواره و زمین و  $\omega_0$  سرعت زاویه‌ای ماهواره حول زمین تحت رابطه  $\omega_0 = d\mu_0 / dt$  است که در آن  $\mu_0$  معادل آنومالی خارج از مرکز تعریف می‌شود که در شکل ۱ نمایش داده شده است [۲۱]. در این مدل‌سازی، از عوامل استهلاکی مانند تأثیرات آیرودینامیکی و غیره بر روی سیستم ماهواره ژيروسات صرف‌نظر شده است.

با توجه به فرضیات انجام شده، مدل سینماتیکی ماهواره ژيروسات به صورت معادلات (۱-۳) به دست می‌آید.

1. Vernal Equinox
2. Nadir

مداری ماهواره است که دارای مولفه‌هایی به صورت معادلات (۶-۸) می‌باشد.

$$\omega_{xx} = \omega_x + \omega_0 \cos \theta \cos \psi \quad (6)$$

$$\omega_{yy} = \omega_y - \omega_0 \cos \theta \sin \psi \quad (7)$$

$$\omega_{zz} = \omega_z + \omega_0 \sin \theta \quad (8)$$

طبق فرضیات فوق، انرژی جنبشی مربوط به حرکت انتقالی ماهواره به صورت معادله (۹) ساده می‌شود.

$$T_{\text{Translation}} = \frac{1}{2} m_s (\dot{R}_O^2 + R_O^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{m_g r^2}{m_s} \right) (2m_g + m_B)(\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega_{zz}^2) + I_p (\omega_{yy} \omega_{zz} + \omega_{xx} \omega_{zz} + \omega_{xx} \omega_{yy}) \right\} \quad (9)$$

که در آن  $m_s$  جرم کل ماهواره به صورت  $m_s = m_B + 3m_g$ ،  $r$  فاصله بین مرکز جرم هر چرخ عکس‌العملی با مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره است. انرژی جنبشی دورانی ماهواره هم به صورت رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$T_{\text{Rotation}} = \frac{1}{2} \left\{ (I_x + 3I_w) \omega_{xx}^2 + (I_y + 3I_w) \omega_{yy}^2 + (I_z + 3I_w) \omega_{zz}^2 \right\} + \frac{1}{2} I_w (\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2) + I_w (\omega_{xx} \Omega_x + \omega_{yy} \Omega_y + \omega_{zz} \Omega_z) \quad (10)$$

که در آن،  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$  ممان اینرسی بدنه صلب ماهواره نسبت به مرکز جرمش،  $I_w$  ممان اینرسی هر یک از چرخ‌های عکس‌العملی نسبت به مرکز جرمشان است که در هر سه محور با هم مساوی فرض شده‌اند و  $\Omega_x$ ،  $\Omega_y$  و  $\Omega_z$  سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی نسبت به بدنه اصلی ماهواره هستند که محور دوران آنها منطبق بر محورهای دستگاه بدنی است.

با مجموع روابط (۹) و (۱۰)، انرژی جنبشی حرکت وضعی-مداری ماهواره ژبروستات به صورت معادله (۱۱) بیان می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} m_s (\dot{R}_O^2 + R_O^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} \left\{ I_x' \omega_{xx}^2 + I_y' \omega_{yy}^2 + I_z' \omega_{zz}^2 \right\} + I_p (\omega_{yy} \omega_{zz} + \omega_{xx} \omega_{zz} + \omega_{xx} \omega_{yy}) + \frac{1}{2} I_w (\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2) + I_w (\omega_{xx} \Omega_x + \omega_{yy} \Omega_y + \omega_{zz} \Omega_z) \quad (11)$$

که  $I_i'$  به صورت معادله (۱۲) تعریف می‌شود.

$$I_i' = I_i + 3I_w + \frac{m_g r^2}{m_s} (2m_g + m_B); \quad i = x, y, z \quad (12)$$

در معادله انرژی جنبشی، از آنجا که مرتبه ترم‌های  $\omega_0$  و  $\omega_0^2$  نسبت به سایر ترم‌ها بسیار کوچک‌تر است، بنابراین معادله (۱۱) به منظور سادگی در محاسبات و تحلیل به صورت اغتشاشی نوشته می‌شود. در حالت مدار باز به ازای مقایسه ثابت سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی، معادله انرژی جنبشی می‌شود.

$$T = T_0(q_i, \dot{q}_i) + \omega_0 T_1(q_i, \dot{q}_i) + \omega_0^2 T_2(q_i) \quad (13)$$

که در آن  $q_i$  ها مختصات تعمیم یافته سیستم در حرکت وضعی-مداری است که شامل پنج مختصه می‌باشد که سه مختصه  $\varphi, \theta, \psi$  برای حرکت دورانی و دو مختصه  $R_0, \mu_0$  نیز برای حرکت مداری با فرض صفحه‌ای بودن مدار در نظر گرفته شده است و در آن روابط (۱۴-۱۶) برقرارند.

$$T_0 = \frac{1}{2} [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] [\tilde{I}] [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T + \frac{1}{2} m_s R_0^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{R}_0^2 + \frac{1}{2} I_w (\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2) + I_w (\omega_x \Omega_x + \omega_y \Omega_y + \omega_z \Omega_z) \quad (14)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} [C_\theta C_\psi \quad -C_\theta S_\psi \quad S_\theta] [\tilde{I}] [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T + I_w [C_\theta C_\psi \quad -C_\theta S_\psi \quad S_\theta] [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T \quad (15)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} [C_\theta C_\psi \quad -C_\theta S_\psi \quad S_\theta] [\tilde{I}] [C_\theta C_\psi \quad -C_\theta S_\psi \quad S_\theta]^T \quad (16)$$

که در معادلات بالا و تمامی معادلات دیگر  $S_{(\cdot)} \triangleq \sin(\cdot)$  و  $C_{(\cdot)} \triangleq \cos(\cdot)$ ، همچنین ماتریس  $\tilde{I}$  به صورت (۱۷) بیان می‌شود.

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_p & I_p \\ I_p & I_y & I_p \\ I_p & I_p & I_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

همچنین انرژی پتانسیل گرانشی ماهواره بدون در نظر گرفتن ترم‌های مربوط به گرادبان جاذبه زمین به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود.

$$U_g = \frac{-GMm_s}{R_0} \quad (18)$$

که در آن  $G$  ثابت جهانی گرانش و  $M$  جرم زمین می‌باشد. با توجه به معادلات انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در معادلات (۱۱) و (۱۸)، به منظور استخراج مدل دینامیکی سیستم طبق روش همیلتون، ابتدا لاگرانژین سیستم تحت رابطه  $L = T - U_g$  محاسبه می‌شود. سپس مومنت‌های تعمیم یافته

سیستم برای هر متغیر به کمک روابط (۱۹) به دست می‌آیند.

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}, P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}},$$

$$P_{\mu_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}_0}, P_{R_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_0} \quad (19)$$

نهایتاً همیلتونین سیستم در حرکت وضعی-مداری به صورت معادله (۲۰) استخراج می‌شود.

$$H = \dot{\phi}P_\phi + \dot{\theta}P_\theta + \dot{\psi}P_\psi + \dot{\mu}_0P_{\mu_0} + \dot{R}_0P_{R_0} - L \quad (20)$$

با محاسبه مومنت‌های تعمیم یافته طبق روابط (۱۹) و قرار دادن در رابطه (۲۰)، همیلتونین سیستم به صورت معادله (۲۱) ساده می‌شود [۲۲].

$$H = T_0 + (\omega_0)T_1 + (\omega_0^2)T_2 + U_g \quad (21)$$

با استفاده از محورهای اصلی دستگاه مختصات  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  که منجر به قطری‌سازی ماتریس (۲۰) می‌شود، همیلتونین سیستم بر حسب سرعت‌های تعمیم یافته در مختصات جدید به ازای  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z \neq \epsilon$  به صورت معادله (۲۲) محاسبه می‌شود.

$$H_n = H_0 + (\omega_0)H_1 + (\omega_0^2)H_2 \quad (22)$$

که در آن:

$$H_0 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{R}_0^2$$

$$+ \frac{1}{2}(m_sR_0^2)\omega_0^2 + \frac{GMm_s}{R_0} \quad (23)$$

$$H_1 = I_1C_\Theta C_\Psi \omega_1 - I_2C_\Theta S_\Psi \omega_2 + I_3S_\Theta \omega_3 \quad (24)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}I_1C_\Theta^2C_\Psi^2 - \frac{1}{2}I_2C_\Theta^2S_\Psi^2 + \frac{1}{2}I_3S_\Theta^2 \quad (25)$$

که  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  سرعت‌های زاویه‌ای در راستای محورهای اصلی ماتریس  $\bar{A}$  است و  $I_1, I_2, I_3$  ممان‌های اینرسی کل ماهواره در محورهای اصلی اند که معادل مقادیر ویژه ماتریس  $\bar{A}$  می‌باشند. همچنین پس از تبدیل به مختصات جدید مجموعه زوایای اولر جدید  $\Phi, \Theta, \Psi$  در راستای محورهای اصلی  $\bar{I}$  جایگزین زوایای اولر اولیه سیستم  $\phi, \theta, \psi$  می‌شوند. همچنین مومنت‌های تعمیم یافته را بر اساس متغیرهای جدید  $\Phi, \Theta, \Psi$  تحت رابطه (۱۹) محاسبه کرده، سپس با حل سرعت‌های تعمیم یافته بر حسب مومنت‌های تعمیم یافته، همیلتونین معادله (۲۲) تنها بر حسب مومنت‌های تعمیم یافته در فرم اغتشاشی معادله (۲۶) ساده می‌شود.

$$H_n = H_{up} + \epsilon_1 H_{p1} + \epsilon_2 H_{p2} \quad (26)$$

که در آن روابط زیر برقرارند:

$$H_{up} = \frac{P_\Psi^2}{2I_3} + \frac{P_{R_0}^2}{2m_s} + P_\Theta^2 \left( \frac{C_\Psi^2}{2I_2} + \frac{S_\Psi^2}{2I_1} \right)$$

$$+ \frac{GMm_s}{R_0} + \left( \frac{P_\Phi}{C_\Theta} - P_\Psi \tan \Theta \right)^2 \left( \frac{C_\Psi^2}{2I_1} + \frac{S_\Psi^2}{2I_2} \right)$$

$$+ \left( \frac{P_\Phi}{C_\Theta} - P_\Psi \tan \Theta \right) P_\Theta S_\Psi C_\Psi \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \quad (27)$$

$$H_{p1} = \frac{1}{2}I_1C_\Theta^2C_\Psi^2 - \frac{1}{2}I_2C_\Theta^2S_\Psi^2 + \frac{1}{2}I_3S_\Theta^2 \quad (28)$$

$$H_{p2} = 2P_\Phi P_\Psi S_\Theta - 4P_\Phi P_\Psi S_\Theta S_\Psi^2 - P_\Phi^2 S_\Psi^2$$

$$+ \frac{1}{2}(P_\Phi - P_{\mu_0})^2 \quad (29)$$

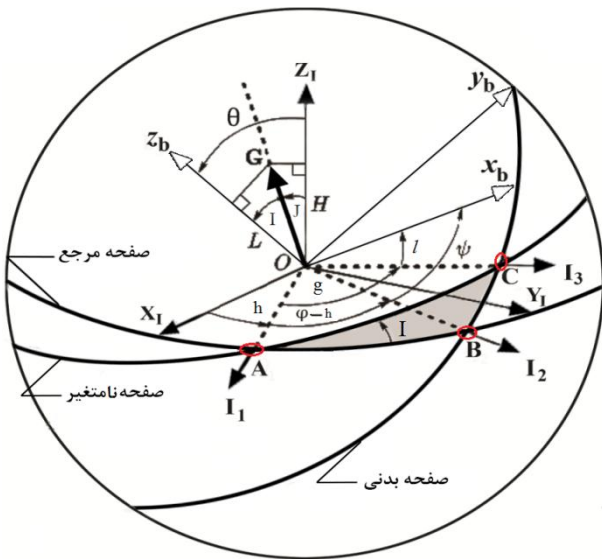
$\epsilon_1 = \omega_0^2$  و  $\epsilon_2 = 1/m_s R_0^2$  پارامترهای اغتشاشی سیستم هستند و ترم‌های اغتشاشی  $H_{p1}$  و  $H_{p2}$  مربوط به حرکت مداری ماهواره می‌باشند. بنابراین تأثیر حرکت مداری نسبت به دینامیک دورانی ناچیز بوده و به صورت ترم‌های اغتشاشی بیان می‌شود.

با وجود تمام ساده‌سازی‌های انجام شده در رابطه همیلتونین سیستم و نوشتن به فرم معادلات اغتشاشی، همچنان دینامیک وضعی-مداری از پیچیدگی زیادی در تحلیل برخوردار است. وجود ثوابت حرکتی مانند معادله انرژی (به دلیل پایستار بودن سیستم) و مومنتم زاویه‌ای کل سیستم (در سیستم مدار باز بدون ورودی کنترلی)، راه را برای کاهش مرتبه سیستم به منظور تحلیل ریاضی ساده‌تر هموار می‌سازد.

### ۳- کاهش مرتبه معادلات سیستم

با توجه به معادله همیلتونین سیستم طبق معادله (۲۶)، متغیر  $\Phi$  بطور صریح در رابطه همیلتونین وارد نشده، در نتیجه  $\Phi$  یک متغیر تناوبی<sup>۱</sup> سیستم بوده و  $P_\Phi$  یکی از ثوابت حرکت سیستم محسوب می‌شود. در نتیجه امکان کاهش مرتبه<sup>۲</sup> همیلتونین سیستم وجود دارد که با استفاده از تبدیل کانونی دپریت توسعه داده شده برای حرکت وضعی-مداری انجام می‌گیرد. در این روش کاهش، متغیرهای سرت-آندویر بر اساس روابط مثلث کروی تعریف می‌شود. با استفاده از تبدیل کانونی دپریت تعمیم یافته، متغیرهای دورانی و مداری سیستم شامل متغیرهای قدیم  $\Phi, \Theta, \Psi, \mu_0, R_0, P_\Phi, P_\Theta, P_\Psi, P_{\mu_0}, P_{R_0}$  به ترتیب به متغیرهای جدید  $\lambda_0, P_\lambda, P_\mu, P_\nu, P_\rho, P_\sigma, P_\tau, P_\omega, P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_\delta, P_\epsilon, P_\zeta, P_\delta, P_\epsilon$  تبدیل می‌شود.

1. Cyclic Coordinate
2. Reduction



شکل ۲ متغیرهای سرت-آندویر در تبدیل توسعه یافته دپریت [۸]

$$\dot{q} = \frac{\partial H'_n}{\partial P_q}, \quad \dot{P}_q = -\frac{\partial H'_n}{\partial q} + \bar{N}_{gg} \quad (39)$$

که  $q$ ها مختصات تعمیم یافته،  $P_q$ ها مومنت‌های تعمیم یافته و  $\bar{N}_{gg}$  گشتاور گرادیان جاذبه تحت رابطه زیر است [۲۱].

$$\bar{N}_{gg} = \frac{3\mu}{2R_o^3} [(I_3 - I_2)S_{2\varphi}C_{\theta}^2\hat{i} + (I_3 - I_1)S_{2\theta}C_{\varphi}\hat{j} + (I_1 - I_2)S_{2\theta}C_{\theta}\hat{k}] \quad (40)$$

متغیرهای موجود در رابطه (۴۰) باید توسط تبدیل دپریت توسعه یافته به مختصات سرت-آندویر تبدیل شود. در حالت غیراغتشاشی، مطابق معادلات (۳۹) دو پارامتر  $\alpha$  و  $\lambda_o$  ثابت بوده و در نتیجه مومنت‌های  $P_\alpha$  و  $P_{\lambda_o}$  ثوابت حرکت سیستم می‌باشند. در نتیجه با تبدیل فوق، سیستم ۵ درجه آزادی به یک سیستم ۳ درجه آزادی شامل دینامیک وضعی و مداری ماهواره تبدیل می‌شود.

#### ۴- روش انحناء ریمانی ریچی

در این بخش با استفاده از هندسه منیفلدهای ریمانی به تحلیل آشوب در سیستم همیلتونی بطور ریاضی و هندسی پرداخته می‌شود. مزیت این شیوه نسبت به روش‌های تحلیلی دقیق آشوب مانند انتگرال ملنیکف سادگی کاربرد آن است. خصوصاً این موضوع در مورد سیستم پیچیده ماهواره ژبروستات در حرکت وضعی-دورانی بیشتر نمایان می‌شود. در این روش، به جای بررسی پایداری سیستم در فضای

$h, g, l$  توسط روابط معادله (۳۰) تبدیل می‌شود [۸].

$$P_\Phi = P_\alpha, \quad P_\Theta = P_\beta S_\sigma S_{\Psi-\gamma}, \quad P_\Psi = P_\gamma, \\ P_{\mu_o} = P_{\lambda_o}, \quad P_{R_o} = P_{\rho_o} \quad (30)$$

متغیرهای سرت-آندویر مربوط به تبدیل کانونی توسعه یافته دپریت به همراه ترتیب دستگاه‌های بدنی، اینرسی و دستگاه کمکی ثابت برای حرکت دورانی در شکل ۲ نمایش داده شده است. همچنین معادلات مربوط به این تبدیل که بر اساس روابط موجود در مثلث کروی  $ABC$  به دست می‌آیند، به صورت معادلات (۳۱-۳۳) می‌باشند [۲۳].

$$\cos(\Theta) = \cos(I)\cos(J) - \sin(I)\sin(J)\cos(g) \quad (31)$$

$$\cos(\Psi - l) = \cos(\Phi - h)\cos(g) + \sin(\Phi - h)\sin(g)\cos(I) \quad (32)$$

$$\cos(\Phi - h) = \cos(\Psi - l)\cos(g) + \sin(\Psi - l)\sin(g)\cos(J) \quad (33)$$

که در روابط (۳۱-۳۳)، پارامترهای  $I$  و  $J$  به صورت معادله (۳۴) تعریف می‌شود.

$$\cos(I) = \frac{P_h}{P_g}, \quad \cos(J) = \frac{P_l}{P_g} \quad (34)$$

با جایگزینی معادلات (۳۱) تا (۳۴) در معادله همیلتونی (۲۶)، همیلتونین کاهش یافته سیستم به صورت معادله (۳۵) محاسبه می‌شود.

$$H'_n = H'_{up} + \varepsilon_1 H'_{p1} + \varepsilon_2 H'_{p2} \quad (35)$$

که در آن  $H'_{up}$ ،  $H'_{p1}$  و  $H'_{p2}$  به صورت معادلات (۳۶-۳۸) محاسبه می‌شوند.

$$H'_{up} = \frac{P_1^2}{2I_3} + \frac{P_{\rho_o}^2}{2m_s} + \frac{GMm_s}{r_o} + \frac{1}{2}(P_g^2 - P_l^2) \left( \frac{S_l^2}{I_1} + \frac{C_l^2}{I_2} \right) \quad (36)$$

$$H'_{p1} = \frac{1}{2} [I_3 - I_3 C_1^2 C_J^2 - I_3 S_I^2 S_J^2 C_g^2 + \frac{1}{2}(I_3 - I_1) S_{2I} S_{2J} + (I_1 - I_2)(S_I^2 S_J C_g + C_I S_J C_l) - I_1 S_J^2 + I_2 C_I^2 S_g] \quad (37)$$

$$H'_{p2} = \frac{1}{2} P_{\lambda_o}^2 + P_{\lambda_o} \left( S_J^2 S_I^2 + \frac{1}{2} S_{2I} C_{2J} \right) + S_g C_l + P_l (S_I^2 S_J + S_I S_g S_l) + S_I^2 - S_I S_J \quad (38)$$

معادلات کانونی حرکت بر اساس همیلتونین کاهش یافته توسط معادلات (۳۹) به دست می‌آیند.

در سیستم‌های حساس به شرایط اولیه، مسیره‌های فازی در زمان معین در منطقه ناپایدار قرار می‌گیرد. از طرف دیگر در فضای هندسی، برای فضای پیکربندی هندسی فشرده که باعث محدود شدن متغیرهای سیستم با گذشت زمان می‌شود، فاصله بین مسیره‌های سیستم را افزایش نمی‌دهد. بنابراین کشیدگی و تاخوردگی مسیره‌های فازی نشان دهنده ناپایداری ترژکتوری‌های نزدیک به هم و رخداد آشوب در سیستم همیلتونی است. ارتباط بین پایداری ژئودزیک‌ها در منیفلد ریمانی و انحناء منیفلد بوسیله معادله مرتبه دو تغییراتی تابعی طول قوس ژاکوبی-لوی-سیویتا<sup>۶</sup> مشخص می‌شود. این معادله، انحراف دو ژئودزیک مجاور را توسط میدان جدایش ژئودزیک‌ها بوسیله پارامتر  $\xi^i$  را بیان می‌نماید که پایداری و ناپایداری ژئودزیک‌ها را تحت رابطه (۴۴) مشخص می‌کند [۱۷-۱۹].

$$\frac{\nabla^2 \xi^i}{ds^2} + R_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} \xi^i = 0 \quad (44)$$

که در آن  $\nabla \xi^i / ds$  مشتق کواربانت در طول ژئودزیک است که با رابطه (۴۵) حساب می‌شود [۲۰].

$$\frac{\nabla \xi^i}{ds} = \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \xi^k \quad (45)$$

نهایتاً هر عضو ماتریس انحناء ریمان-کریستفل<sup>۷</sup> به صورت معادله (۴۶) به دست می‌آید.

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial q^k} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i \quad (46)$$

ملاک تحلیل پدیده آشوب در روش ریچی، فاصله دو ژئودزیک مجاور است که پایداری دینامیکی آنها وابسته به مقادیر ویژه ماتریس انحناء فوق است. مقادیر ویژه مثبت مبین همگرایی ژئودزیک‌ها و مقادیر منفی واگرایی ژئودزیک‌ها را نشان می‌دهد. انحراف کلی ژئودزیک‌ها توسط مجموع مقادیر ویژه ماتریس  $R_{jkl}^i$  معروف به اسکالر ریچی بررسی می‌شود. اسکالر ریچی مثبت مبین نظم در سیستم مطابق هندسه کروی ریمانی و پاسخ‌های هارمونیک است و اسکالر ریچی منفی نشان دهنده ناپایداری ژئودزیک‌ها مطابق هندسه هذلولی لباچفسکی<sup>۸</sup> لباچفسکی<sup>۸</sup> می‌باشد که احتمال آشوب در پاسخ‌های سیستم را افزایش می‌دهد [۱۷، ۱۹].

فازی، پایداری در فضای پیکربندی منیفلدهای هندسی<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این ترتیب که بر اساس معادله همیلتون، در میان تمامی مسیره‌های هم انرژی ممکن  $\gamma(t)$ ، حرکت دینامیکی در مسیری انجام می‌گیرد که انرژی جنبشی در آن حداقل می‌شود. این قضیه در فضای منیفلدهای هندسی معادل می‌شود با حرکت سیستم روی منیفلدی با حداقل مسیر که به منیفلد ریمانی در فضای پیکربندی هندسی معروف است [۱۵].

به کوتاهترین مسیر بین دو نقطه  $A$  و  $B$  روی منیفلد ریمانی خطوط ژئودزیک می‌گویند که باعث ثابت شدن تابعی طول قوس<sup>۲</sup> به صورت  $\delta \int_A^B ds = 0$  می‌شود. بر اساس تعریف خطوط ژئودزیک و اصل حداقل کارکرد مائوپرتس<sup>۳</sup>، تعریف دینامیک همیلتونی در فضای هندسی امکان پذیر می‌شود. در نهایت ارتباط بین فضای دینامیکی و فضای منیفلد هندسی به وسیله منیفلدهای ریمانی به صورت متریک انرژی جنبشی  $ds = \sqrt{2T} dt$  تعریف می‌شود. بنابراین، مسیره‌های فازی در فضای دینامیکی معادل ژئودزیک‌ها در فضای پیکربندی هندسی بوسیله متریک انرژی جنبشی مطابق رابطه (۴۱) می‌شود [۱۶-۱۸، ۲۲].

$$ds^2 = 2T dt^2 = 2\chi_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j dt^2 = 2\chi_{ij} dq^i dq^j = 2[E - U_g(q)] a_{ij} dq^i dq^j \quad (41)$$

که در آن  $s$  پارامتر مسیر،  $q$  مختصه تعمیم یافته،  $\chi$  ماتریس متریک مثبت معین،  $a_{ij}$  اجزاء ماتریس متریک و  $E$  انرژی ثابت کل و  $U_g(q)$  انرژی پتانسیل سیستم است. توسط متریک فوق، ترژکتوری‌های سیستم دینامیکی معادل ژئودزیک‌ها در فضای منیفلد هندسی می‌شود. در دستگاه بدنی، معادله ژئودزیک به صورت معادله (۴۲) می‌باشد.

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0 \quad (42)$$

که  $\Gamma_{jk}^i$  نماد کریستفل<sup>۴</sup> مربوط به معادله لوی-سیویتا<sup>۵</sup> است که از روی  $\chi_{ij}$  به صورت رابطه (۴۳) محاسبه می‌شود.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \chi^{im} \left( \frac{\partial \chi_{km}}{\partial q^j} + \frac{\partial \chi_{jm}}{\partial q^k} + \frac{\partial \chi_{kj}}{\partial q^m} \right) \quad (43)$$

1. Geometric Configuration Space
2. Arc-length Functional
3. Maupertuis Least Action Principle
4. Christoffel Coefficient
5. Levi-Civita

6. Jacobi-Levi-Civita  
7. Christoffel-Riemann Curvature  
8. Lobachevskian

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{I_2}{S_l^2 + I_2 C_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1 I_2}{I_2 - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2} & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} \quad (48)$$

که در آن،  $I_3 \triangleq I_3 / I_2$ ،  $I_1 \triangleq I_1 / I_2$ ،  $I_2 \triangleq I_2 / I_2$  و  $m_s \triangleq m_s / I_2$  پارامترهای بی بعد هستند. از آنجا که انرژی کل سیستم بدون ورودی اغتشاشی  $E$  مقداری ثابت است و از شرایط اولیه سیستم به دست می‌آید، این مقدار می‌تواند معادل بخش غیر اغتشاشی همیلتونین سیستم باشد. در نتیجه متریک بیان شده در رابطه (41) به صورت معادله (49) محاسبه می‌شود.

$$\chi = (E - \varepsilon_1 H_1 - \varepsilon_2 H_2) a \quad (49)$$

با استفاده از معادله (43) به همراه محاسبه مشتق‌های نماد کریستفل و با استفاده از رابطه (46) تانسور انحناء ریمانی و تانسور ریچی محاسبه شده و با محاسبه مجموع عناصر قطر اصلی تانسور ریچی، پارامتر اسکالر ریچی به صورت رابطه (50) به دست می‌آید.

$$Ric = tr(R_{ij}) \\ = Ric(h, g, l, \lambda_0, r_0, P_h, P_g, P_l, P_{\lambda_0}, P_{r_0}, I, J) \quad (50)$$

در معادله فوق،  $h$ ،  $P_h$  و  $P_{\lambda_0}$  ثابت بوده و  $I$  و  $J$  از معادلات (34) جایگزین می‌شود. مطابق لم 1 و با کمک سیستم غیر اغتشاشی، مقدار مدارات هیتروکلینیک سیستم برای استفاده در رابطه (50) برای محاسبه اسکالر ریچی باید استخراج شوند. برای این منظور، زمان بین معادلات دینامیکی (51) و (52) حذف می‌شود.

$$\dot{g} = \frac{\partial H'_n}{\partial P_g} \quad (51)$$

$$\dot{l} = \frac{\partial H'_n}{\partial P_l} \quad (52)$$

با این کار، پارامتر  $g$  به صورت تابعی از  $l$  و  $P_l$  به دست می‌آید.

$$g = \int_{l_0}^l \frac{P_g}{P_l} \left( \frac{I_1 S_l^2 + I_1 I_2 C_l^2}{I_2 - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2} \right) dl + g_0 \quad (53)$$

که  $l_0$  و  $g_0$  مقادیر اولیه پارامترها هستند. برای اینکه  $P_l$  بر حسب  $l$  به دست آید، کافی است همیلتونین سیستم بر حسب مدارات هیتروکلینیک در حالت غیر اغتشاشی و بدون ورودی

## 5- تحلیل آشوب به روش ریچی

از آنجا که همیلتونین سیستم ماهواره ژيروساتات به صورت اغتشاشی بیان شده است، از روش ریچی می‌توان در تحلیل آشوب بهره برد. از طرف دیگر، به دلیل این که انتگرال‌های حرکتی سیستم اغتشاشی ماهواره ژيروساتات در حرکت وضعی-مداری تحت گشتاورهای گرادیان جاذبه زمین به تعداد درجه آزادی سیستم نمی‌باشد، در نتیجه مدارات سیستم اغتشاشی را نمی‌توان دقیقاً محاسبه نمود. برای حل این مشکل از نتیجه لم زیر استفاده می‌شود.

**لم 1:** منیفلدهای پایدار و ناپایدار محلی  $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon)$  و  $W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon)$  متعلق به مدارات پریودیک اغتشاشی در یک مجموعه نزدیک مدارات پریودیک غیر اغتشاشی هستند. به علاوه، مدارات  $q_\varepsilon^s(t, t_0)$  و  $q_\varepsilon^u(t, t_0)$  که از همسایگی منیفلدهای  $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon)$  و  $W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon)$  آغاز می‌شوند، در بازه‌های زمانی نشان داده شده در روابط (47) بیان می‌شوند.

$$q_\varepsilon^s(t, t_0) = q^o(t - t_0) + \varepsilon q_1^s(t, t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, +\infty) \\ q_\varepsilon^u(t, t_0) = q^o(t - t_0) + \varepsilon q_1^u(t, t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in (-\infty, t_0] \quad (47)$$

که  $q^o$  و  $q_\varepsilon$  به ترتیب مدارات غیر اغتشاشی و اغتشاشی هستند و  $q_1$  حل مدارات اولین معادله ارتعاشی است. مطابق لم فوق، می‌توان از منیفلدهای نامتغیر سیستم غیر اغتشاشی بجای مدارات سیستم اغتشاشی استفاده کرد. یعنی:

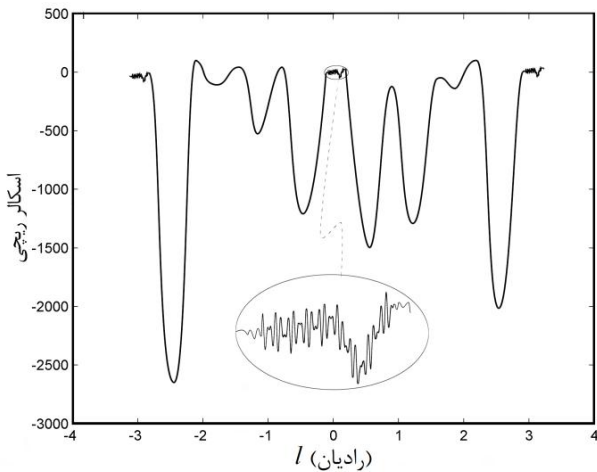
$$W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon) \approx W_{loc}^u(\gamma_0) \quad \text{و} \quad W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon) \approx W_{loc}^s(\gamma_0) \quad [16]$$

در صورتی که سه شرط:

- (1) همیلتونین سیستم ثابت باشد.
- (2) بخش اغتشاشی همیلتونین تنها تابعی از مکان باشد و وابسته به ترم‌های سرعتی نباشد.
- (3) انرژی جنبشی سیستم تنها شامل ترم‌هایی مربع سرعت یا مربع مومنتم‌های تعمیم یافته باشد.

برقرار باشد، روش ریچی را می‌توان برای سیستم دینامیکی بکار گرفت. همچنین از آنجا که تمامی شرایط فوق در سیستم ماهواره مدل شده صدق می‌کند، روش ریچی برای تحلیل آشوب در سیستم مذکور استفاده می‌شود. مطابق معادلات (35) و (41)، ماتریس متریک انرژی  $[a]$  در سیستم کاهش یافته به صورت معادله (48) محاسبه می‌شود.





شکل ۳ نمودار آشوبناک اسکالر ریچی بر حسب  $l$

$$\overline{Ric} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Ric(l, g(l), P_l(l)) dl = -587 \quad (58)$$

مقدار میانگین منفی اسکالر هم بیانگر آشوب در سیستم است. به علاوه، در اطراف نقاط زینی  $l = -\pi, 0, +\pi$  نمودار اسکالر ریچی دارای بی‌نظمی‌هایی با فرکانس بالا است که مبین ناپایداری زیاد سیستم در واگرایی ژئودزیک‌ها در منیفولدهای هندسی و نتیجتاً رخداد آشوب در اطراف نقاط زینی است. این موضوع با تقاطع منیفولدهای پایدار و ناپایدار در اطراف نقاط زینی منطبق است.

### ۶- تحلیل آشوب به روش نمای لیاپانف

در روش نمای لیاپانف، با اندازه‌گیری فاصله دو مدار کنار هم در یک لحظه به‌طور عددی، حساسیت سیستم به تغییر در شرایط اولیه بطور نمایی در صفحه فازی بررسی می‌شود. در سیستم‌های همیلتونی آشوبناک، با ایجاد تغییر کوچک در شرایط اولیه، واگرایی شدیدی در مسیرهای فازی نزدیک هم ایجاد می‌شود. نمای لیاپانف  $\lambda$  برای متغیرهای حالت  $q_i(t)$  به صورت رابطه (۵۹) به دست می‌آید [۱۳، ۱۴].

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_i(q(\tau)) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta q_i(t)}{\delta q_i(0)} \right| \quad (59)$$

که  $q_i(0)$  شرایط اولیه متغیر حالت  $q_i(t)$  و  $E_i(q(t))$  مقادیر ویژه حقیقی ماتریس ژاکوبین نرخ واگرایی مسیرهای سیستم است. نمودار مقدار بزرگترین نمای لیاپانف نسبت به پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon$  براساس مقادیر ثابت و شرایط اولیه بکارگرفته شده در بخش قبلی برای محاسبه اسکالر ریچی در

که مقداری ثابت است استخراج شود. طبق معادله (۳۶)، چون  $H'_{up}$ ،  $P_{r_0}^2/2m_s$  و  $Gmm_s/r_0$  ثابت اند، می‌شود:

$$P_g^2 \left( \frac{S_l^2}{I_1} + \frac{C_l^2}{I_2} \right) + P_l^2 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{S_l^2}{I_1} - \frac{C_l^2}{I_2} \right) = h_{up} \quad (54)$$

که  $h_{up}$  ثابت است. با تعریف  $h_{up} = (I_2/P_g^2)h_{up}$  معادله بالا به صورت معادله (۵۵) در می‌آید.

$$P_l = \pm P_g \sqrt{\frac{I_1 I_2 h_{up} - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2}{I_2 - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2}} \quad (55)$$

که علامت  $\pm$  نشان دهنده مدارات هیتروکلینیک متقارن اطراف نقطه زینی است. با قراردادن (۵۵) در معادله (۵۳)، مقدار  $g$  به صورت تنها تابعی از  $l$  به دست می‌آید.

از آنجا که سیستم در نقطه زینی  $(l, P_l) = (0, 0)$  فاقد حل تحلیلی است، بنابراین مقدار مدارات هیتروکلینیک را در همسایگی نقطه زینی یعنی در نقطه  $(l, P_l) = (0 - \delta, 0)$  محاسبه می‌کنیم که  $\delta$  مقداری کوچک است. با قرار دادن نقطه فوق در معادله (۵۵)،  $P_l$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P_l = \pm P_g \sqrt{\frac{I_1(S_\delta^2 - S_l^2) + I_1 I_2(C_\delta^2 - C_l^2)}{I_2 - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2}} \quad (56)$$

همچنین مقدار پارامتر  $g$  توسط رابطه (۵۳) در نقطه  $(l, P_l) = (-\delta, 0)$  برابر با رابطه (۵۷) می‌شود.

$$g = \int_{l_0}^l \frac{I_1 S_l^2 + I_1 I_2 C_l^2}{\sqrt{[I_1(S_\delta^2 - S_l^2) + I_1 I_2(C_\delta^2 - C_l^2)][I_2 - I_1 S_l^2 - I_1 I_2 C_l^2]}} dl + g_0 \quad (57)$$

با جایگزینی (۵۶) و (۵۷) در رابطه (۵۰)، مقدار اسکالر ریچی بر حسب پارامتر  $l$  تحت مقادیر ثابت  $\varepsilon_1 = 2.2 \times 10^{-8}$ ،  $\delta = 0.001$ ،  $I_3 = 1.4$ ،  $\varepsilon_2 = 1.1 \times 10^{-8}$ ،  $I_1 = 0.8$ ،  $I_2 = 1.2$  و مقادیر شرایط اولیه سیستم برابر  $h_0 = 0.1$ ،  $g_0 = 0.01$ ،  $P_{h_0} = 1$ ،  $P_{g_0} = 1$ ،  $r_{00} = 6675$ ،  $\lambda_{00} = 1.6$ ،  $l_0 = 0$ ،  $P_{r_{00}} = 1$ ،  $P_{\lambda_{00}} = 0.3$ ،  $P_{l_0} = 0$  که نمودار آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

مطابق شکل ۳، مقادیر منفی اسکالر ریچی نشان دهنده ناپایداری رفتار ژئودزیک‌ها می‌باشد که احتمال آشوب در سیستم را افزایش می‌دهد. همچنین مقدار میانگین اسکالر ریچی با محاسبه سطح زیر منحنی اسکالر ریچی با انتگرال‌گیری تابع اسکالر ریچی بین دو نقطه زینی به صورت معادله (۵۸) می‌باشد.

$$\vec{H}_T = (I'_x \omega_{xx} + I_W \Omega_x) \hat{i} + (I'_y \omega_{yy} + I_W \Omega_y) \hat{j} + (I'_z \omega_{zz} + I_W \Omega_z) \hat{k} \quad (59)$$

که در آن  $I'_x$ ،  $I'_y$  و  $I'_z$  مطابق رابطه (۱۲) در نظر گرفته می‌شوند. با مشتق‌گیری از مومنتم زاویه‌ای کل سیستم نسبت به زمان، طبق رابطه اولر، معادلات حرکت دورانی ماهواره ژيروسات تحت تأثیر گشتاورهای اغتشاشی جاذبه زمین به صورت معادلات (۶۰-۶۲) در دستگاه بدنی به دست می‌آیند.

$$I'_x \dot{\omega}_{xx} + (I'_z - I'_y) \omega_{yy} \omega_{zz} + I_W (\dot{\Omega}_x + \omega_{yy} \Omega_z - \omega_{zz} \Omega_y) = \frac{3\mu}{2R_0} (I'_z - I'_y) \sin 2\varphi \cos^2 \theta \quad (60)$$

$$I'_y \dot{\omega}_{yy} + (I'_x - I'_z) \omega_{xx} \omega_{zz} + I_W (\dot{\Omega}_y + \omega_{zz} \Omega_x - \omega_{xx} \Omega_z) = \frac{3\mu}{2R_0} (I'_z - I'_x) \sin 2\theta \cos \varphi \quad (61)$$

$$I'_z \dot{\omega}_{zz} + (I'_y - I'_x) \omega_{xx} \omega_{yy} + I_W (\dot{\Omega}_z + \omega_{xx} \Omega_y - \omega_{yy} \Omega_x) = \frac{3\mu}{2R_0} (I'_x - I'_y) \sin 2\theta \cos \theta \quad (62)$$

که متغیرهای  $\omega_{xx}$ ،  $\omega_{yy}$  و  $\omega_{zz}$  از روابط (۶-۸) در معادلات فوق جایگذاری می‌شوند. همچنین با صرف‌نظر از شتاب مرکز جرم زمین نسبت به خورشید، معادله حرکت انتقالی ماهواره طبق قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات مداری به صورت معادله (۶۳) بیان می‌شود.

$$\sum \frac{\vec{F}}{m_s} = (2\dot{R}_0 \omega_0 + R_0 \dot{\omega}_0) \hat{J} + (R_0 \omega_0^2 - \ddot{R}_0) \hat{K} \quad (63)$$

استخراج می‌شود که  $\sum \vec{F}$  نیروهای گرانشی و تأثیرات اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین است. معادلات (۶۰) تا (۶۳) حرکت وضعی-مداری ماهواره ژيروسات را بیان می‌کند.

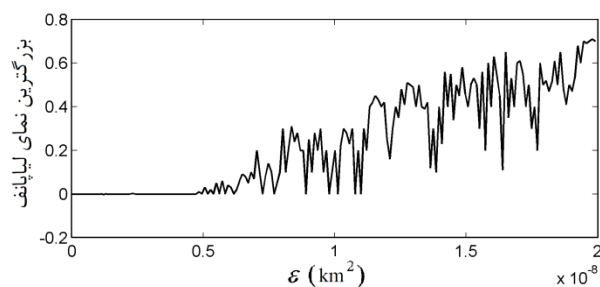
پاسخ‌های آشوبناک سیستم دورانی توسط مسیرهای فازی، مقاطع پوانکاره و پاسخ‌های سری زمانی در اشکال ۵ تا ۷ نشان داده شده است. با توجه به مسیرهای فازی محدود و برگشتی و همچنین پراکندگی نقاط در مقاطع پوانکاره، آشوب در پاسخ‌های سیستم مدار باز مشاهده می‌شود. رفتار آشوبناک می‌تواند ناشی از تأثیر اغتشاشات گرادیان جاذبه زمین بر سیستم همیلتونی ماهواره ژيروسات باشد که تأثیر بسیار کوچک گشتاورهای اغتشاشی منجر به تغییرات شگرفی در دینامیک همیلتونی سیستم می‌شود.

شکل ۴ نشان داده شده است که پارامتر  $\varepsilon = 1/R_0^2$  شامل ترکیب و فاکتورگیری از پارامترهای  $\varepsilon_1 = \omega_0^2 = V_0^2 (1/R_0^2)$  و  $\varepsilon_2 = (1/m_s)(1/R_0^2)$  و  $\varepsilon_g = (3\mu/2R_0)(1/R_0^2)$  مربوط به حرکت مداری و گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه می‌باشند. نتایج حاصله از نمای لیپانف و اسکالر ریچی در شکل‌های ۳ و ۴ کاملاً با هم منطبق‌اند. به این ترتیب که مثبت بودن نمای لیپانف با افزایش  $\varepsilon$  مبین افزایش فاصله بین مدارات مجاور هم بطور نمایی، ایجاد جاذب شگفت و آشوب در سیستم است که این موضوع معادل با منفی بودن اسکالر ریچی و واگرایی ژئودزیک‌ها است. مقادیر نمای لیپانف نتایج حاصل از تحلیل هندسی ریچی را نیز تأیید کرده و هر دو وجود آشوب در سیستم را اثبات می‌کنند.

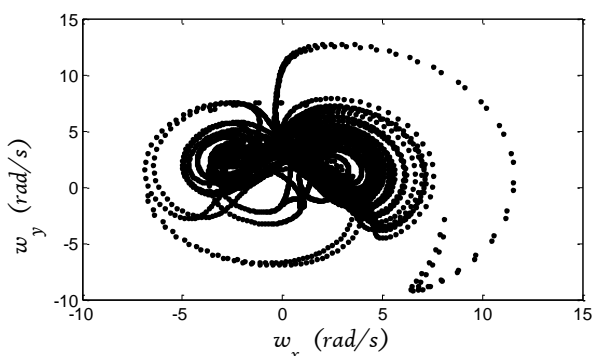
### ۷- نتایج شبیه‌سازی سیستم

در این بخش، ابتدا حرکت آشوبناک ماهواره ژيروسات تنها در مدل دورانی ماهواره تحت تأثیر گشتاور گرادیان جاذبه زمین به‌طور عددی بررسی می‌شود. سپس تأثیر حرکت مداری در دینامیک دورانی هم نشان داده می‌شود. برای این کار، معادلات حرکت وضعی-مداری سیستم ماهواره ژيروسات شبیه‌سازی شد. در ابتدا تأثیر حرکت مداری نادیده گرفته شد، یعنی سیستم دورانی ماهواره ژيروسات مدار باز به ازای مقادیر  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  شبیه‌سازی شد. مقادیر اولیه و ثابت سیستم مطابق مقادیر بکار گرفته در بخش قبل در نظر گرفته شده است.

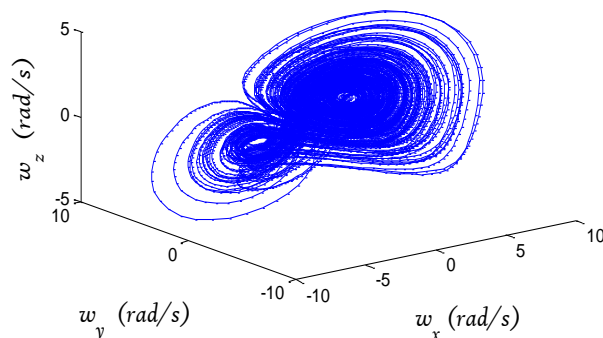
به منظور بررسی اعتبار مدل‌سازی سیستم و صحت‌گذاری نتایج حاصل از شبیه‌سازی، دینامیک سیستم بر مبنای معادلات حرکت نیوتن-اولر نیز استخراج و شبیه‌سازی شد. برای استخراج معادلات اولر، مومنتم زاویه‌ای کل سیستم حول نقطه مرکز جرم ماهواره ژيروسات به صورت معادله (۵۹) محاسبه می‌شود [۲۱].



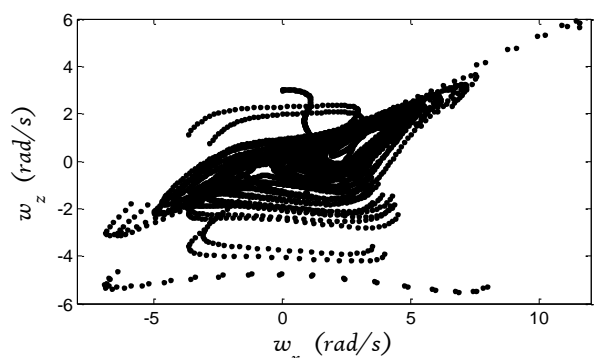
شکل ۴ مقدار بزرگترین نمای لیپانف نسبت به پارامتر اغتشاشی  $\varepsilon$



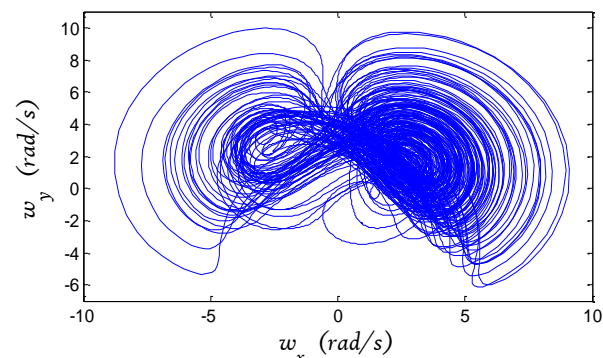
الف- مقطع پوانکاره حاصل تقاطع ترژکتوری  $\omega_x - \omega_y$  با صفحه  $\omega_z = 0$



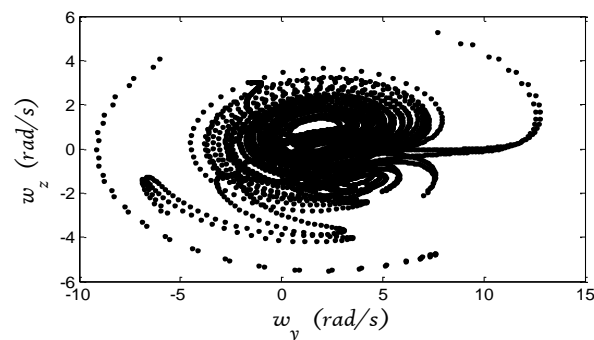
الف- مسیر فازی سه بعدی  $\omega_x - \omega_y - \omega_z$



ب- مقطع پوانکاره حاصل تقاطع ترژکتوری  $\omega_x - \omega_z$  با صفحه  $\omega_y = 0.7$



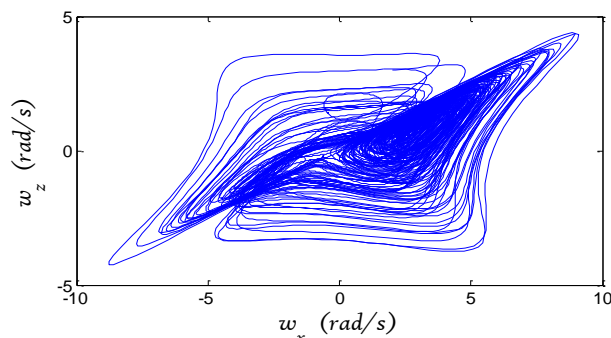
ب- مسیر فازی دو بعدی  $\omega_x - \omega_y$



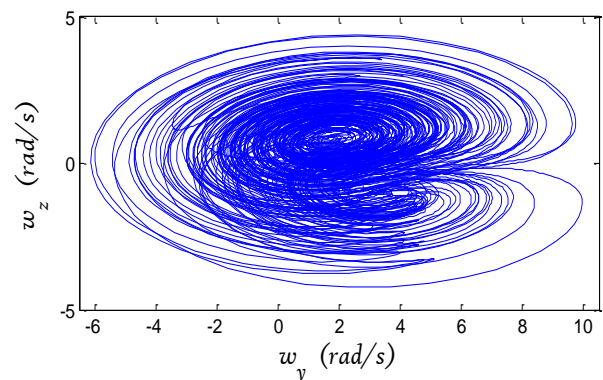
ج- مقطع پوانکاره حاصل تقاطع ترژکتوری  $\omega_y - \omega_z$

با صفحه  $\omega_x = 0$

شکل ۶ مقاطع پوانکاره سیستم به ازای  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$



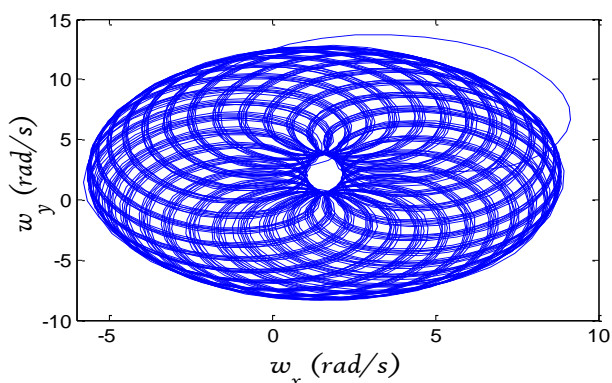
ج- مسیر فازی دو بعدی  $\omega_x - \omega_z$



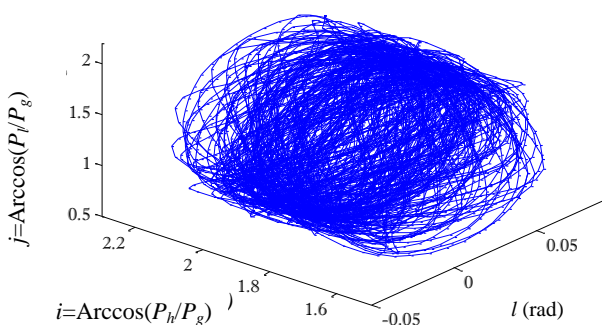
د- مسیر فازی دو بعدی  $\omega_y - \omega_z$

شکل ۵ مسیرهای فازی سیستم دورانی به ازای  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

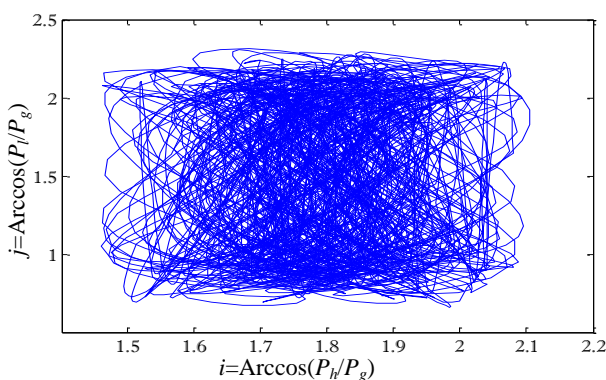
نتایج حاصل از شبیه‌سازی معادلات نیوتن-اولر در کنار نتایج حاصل از دینامیک همیلتونی، انطباق کامل نتایج دو فرآیند مدل‌سازی و صحت‌گذاری نتایج شبیه‌سازی سیستم را نشان می‌دهد. همچنین، نتایج شبیه‌سازی سیستم دورانی با مقادیر  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  با نتایج مندرج در مقاله [۲۴] مقایسه شده و اعتبار مدل‌سازی با انطباق کامل نتایج تأیید می‌شود.



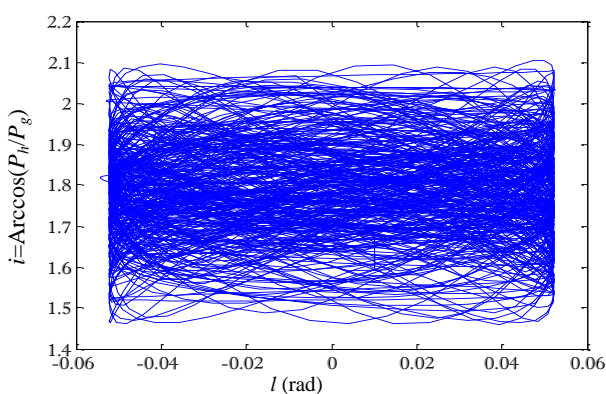
الف- مسیر فازی دو بعدی شبه پریودیک  $\omega_x - \omega_y$



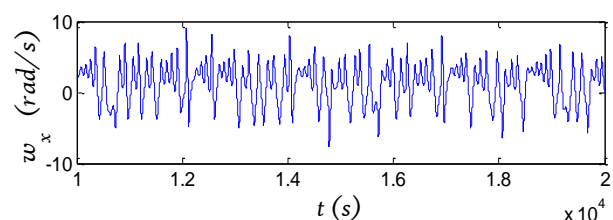
ب- مسیر فازی سه بعدی  $l-i-j$



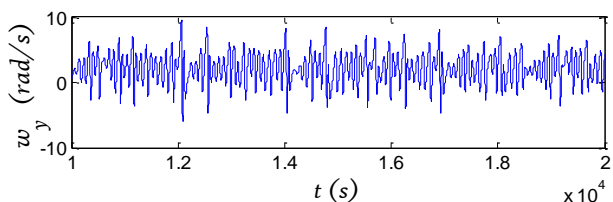
ج- مسیر فازی دو بعدی  $i-j$



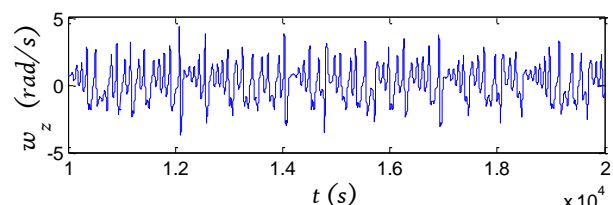
د- مسیر فازی دو بعدی  $l-i$



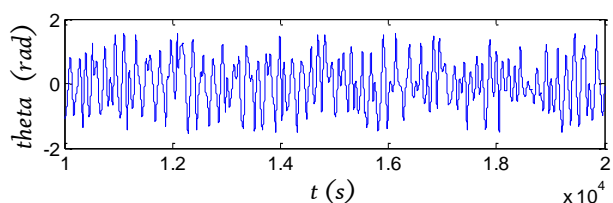
الف- پاسخ  $\omega_x$  نسبت به زمان



ب- پاسخ  $\omega_y$  نسبت به زمان



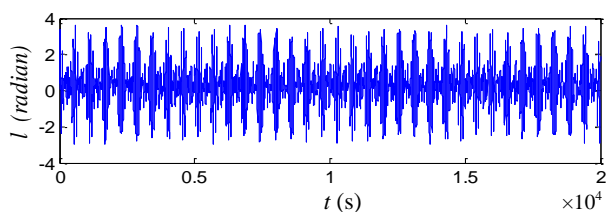
ج- پاسخ  $\omega_z$  نسبت به زمان



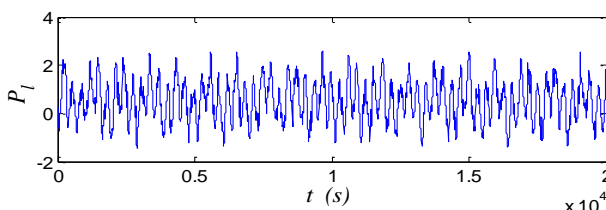
د- پاسخ  $\theta$  نسبت به زمان

شکل ۷ پاسخ‌های سری زمانی سیستم دورانی ماهواره ژيروسات به ازای  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

به منظور بررسی تأثیر حرکت مداری بر دینامیک دورانی ماهواره ژيروسات، مدل حرکت وضعی-مداری سیستم طبق معادلات همیلتونی (۵۱ و ۵۲) تحت پارامترهای ثابت و شرایط اولیه بکار گرفته شده در بخش ۵ با اعمال گشتاور گردان جاذبه زمین بازا  $\varepsilon = 2 \times 10^{-8}$  شبیه‌سازی شد. پاسخ‌های آشوبناک حرکت وضعی-مداری سیستم در شکل‌های ۸ تا ۱۰ نشان داده شده است. مسیرهای صفحه فازی، مقاطع پوانکاره و پاسخ‌های سری زمانی سیستم، همگی مبین رفتارهای شبه-پریودیک و آشوبناک در دینامیک وضعی-مداری است. در این مدل‌سازی، گشتاور گردان جاذبه به همراه تأثیرات حرکت مداری به عنوان اغتشاشات خارجی بر دینامیک همیلتونی دورانی ماهواره اعمال شده‌اند که پاسخ‌های آشوبناک این مدل با مدل دورانی متفاوت است.



الف- پاسخ  $l$  نسبت به زمان



ب- پاسخ  $P_l$  نسبت به زمان

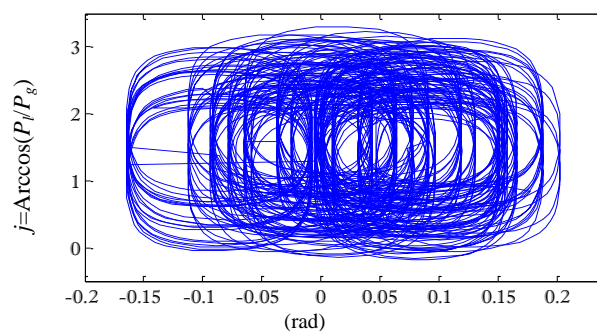
شکل ۱۰ پاسخ‌های سری زمانی آشوبناک سیستم به ازای  $\varepsilon = 2 \times 10^{-8}$

نهایتاً رفتار شبیه‌سازی سیستم وضعی-مداری نتایج حاصل از روش انحناء ریچی و نمای لیپانف را در اثبات آشوب تأیید و صحت‌گذاری می‌نماید.

در ماهواره ژيروسات واقعی، عوامل استهلاکی مانند نیروهای آیرودینامیکی و غیره در دینامیک سیستم تأثیرگذارند. استهلاک از یک طرف می‌تواند باعث کاهش و حذف آشوب در مدت زمان طولانی شوند. از طرف دیگر، تأثیر استهلاک در دینامیک همیلتونی ماهواره به صورت ترم‌های اغتشاشی، ممکن است منجر به افزایش رفتار آشوبناک شود که بررسی تأثیر عوامل استهلاکی بر سیستم خود نیازمند تحقیق وسیعی است.

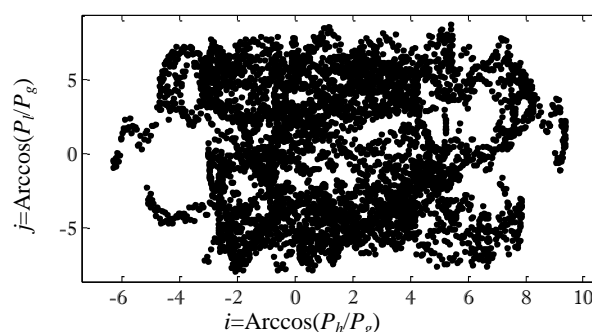
### ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی تأثیر حرکت مداری در دینامیک دورانی آشوبناک ماهواره ژيروسات پرداخته شده است. برای این منظور، دینامیک حرکت وضعی-مداری ماهواره ژيروسات به روش همیلتون مدل‌سازی شد. با توجه به پیچیدگی مدل، مرتبه معادلات ریاضی سیستم توسط تبدیل کانونی توسعه یافته دپریت با استفاده از متغیرهای سرت-آندویر کاهش یافت. با نوشتن همیلتونین کاهش یافته به صورت معادلات اغتشاشی، فرم مناسب برای استفاده از روش انحناء ریچی در تحلیل آشوب استخراج شد. مقادیر منفی اسکالر ریچی در کنار مقادیر مثبت نمای لیپانف، رفتار آشوبناک ماهواره ژيروسات را اثبات می‌کند. همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیستم مدار باز

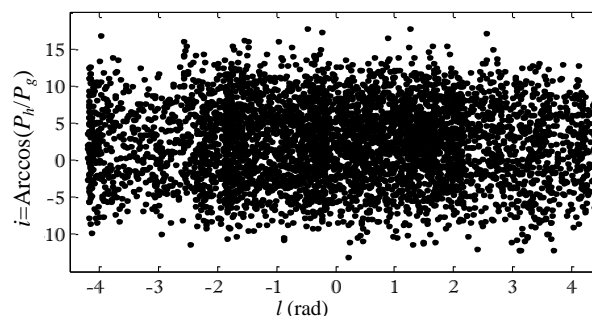


ه- مسیر فازی دو بعدی  $l-j$

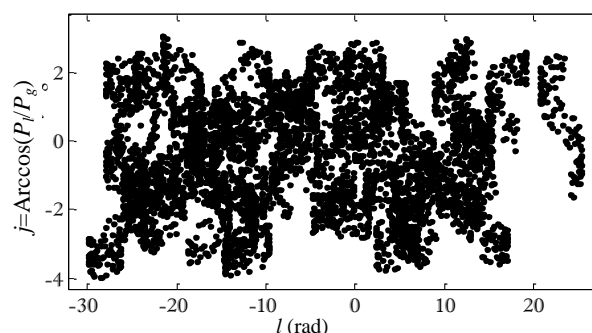
شکل ۸ مسیرهای فازی آشوبناک سیستم و به ازای  $\varepsilon = 2 \times 10^{-8}$



الف- مقطع پوانکاره  $i-j$  حاصل تقاطع  $i-j-l$  با  $l = \pi/2$



ب- مقطع پوانکاره  $l-i$  حاصل تقاطع  $i-j-l$  با  $J = 2.7$



ج- مقطع پوانکاره  $l-j$  حاصل تقاطع  $i-j-l$  با  $i = 0.8$

شکل ۹ مقاطع پوانکاره آشوبناک دینامیک سیستم وضعی-مداری ماهواره ژيروسات به ازای  $\varepsilon = 2 \times 10^{-8}$



شامل بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخ‌های سری زمانی موید تقاطع مدارات هیتروکلینیک، ایجاد جاذب شگفت و رفتار آشوبناک در سیستم می‌باشد. همچنین شبیه‌سازی سیستم، نتایج حاصل از روش ریچی و نمای لیاپانف را نیز تأیید و صحت‌گذاری می‌کند. با شبیه‌سازی مجزای حرکت دورانی و حرکت وضعی-مداری سیستم ماهواره ژيروسات، تأثیر پارامترهای مداری در دینامیک آشوبناک ماهواره دیده شده و در نتیجه مدل دقیق‌تری از دینامیک ماهواره به منظور تحلیل و محاسبه گشتاورهای اغتشاشی برای کنترل آشوب معرفی شده است.

## ۹- مراجع

- Regular and Chaotic Dynamics*, Vol. 12, 2007, pp. 389-425.
- [9] Baozeng Y., "Heteroclinic Bifurcations in Completely Liquid-Filled Spacecraft with Flexible Appendage", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 51, 2008, pp. 317-327.
- [10] Zhou L., Chen Y., Chen F., "Stability and Chaos of a Damped Satellite Partially Filled with Liquid", *Acta Astronautica*, Vol. 65, 2009, pp. 1628-1638.
- [11] Zhu W.Q., Liu "Homoclinic Bifurcation and Chaos in Coupled Simple Pendulum and Harmonic Oscillator under Bounded Noise Excitation", *International Journal of Bifurcation and Chaos* Vol. 15, 2005, pp. 233-243.
- [12] Meehan P.A., Asokanathan, "Analysis of Chaotic Instabilities in a Rotating Body with Internal Energy Dissipation", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, 2006, pp. 1-19.
- [13] Inarrea M., "Chaotic Pitch Motion of a Magnetic Spacecraft with Viscous Drag in an Elliptical Polar Orbit", *Int. J. Bifurcation Chaos* Vol. 21, 2011, pp. 1959-1975.
- [14] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, First Ed., New York, Springer, 2003.
- [15] Lee J.M., *Riemannian Manifolds-An Introduction to Curvature*, First Ed., New York, Springer, 1997.
- [16] Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, First Ed., New York, Springer, 1997.
- [17] Cerruti-Sola M., Ciruolo G., Franzosi R., Pettini M., "Riemannian Geometry of Hamiltonian Chaos: Hints for a General Theory", *Physical Review* Vol. 78, 2008, pp. 1-17.
- [18] Cafaro C., "Works on an Information Geometro-dynamical Approach to Chaos", *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 41, 2009, pp. 886-891.
- [19] Peng L., Sun H., Sun D., Yi J., "The Geometric Structures and Instability of Entropic Dynamical Models", *Advances in Mathematics*, Vol. 227, 2011, pp. 459-471.
- [20] Casetti L., Clemanti C., Pettini M., "Riemannian Theory of Hamiltonian Chaos and Lyapunov Exponent", *Physical Review*, Vol. 54, 1996, pp. 5969-5984.
- [21] Sidi M.J., *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, First Ed., New York, Cambridge University Press, 1997.
- [22] Meirovitch L., *Methods of Analytical Dynamics*, 16th Ed., New York, McGraw-Hill, 1993.
- [23] Spiegel M., Lipschutz S., Liu J., *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, First Ed., New York, McGraw-Hill Professional, 1999.
- [24] Kemih K., Kemiha A., Ghanes M. "Chaotic Attitude Control of Satellite Using Impulsive Control", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol.42, 2009, pp. 735-744.
- [1] Tong X., Tabarrok B., Rimrott F. "Chaotic Motion of an Asymmetric Gyrostat in the Gravitational Field", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 30, 1995, pp. 191-203.
- [2] Kuang J., TAN S., Arichandran K., Leung A.Y.T. "Chaotic Attitude Motion of Gyrostat Satellite via Melnikov Method", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 11, 2000, pp. 1233-1260.
- [3] Shirazi K.H., Ghaffari-Saadat M.H. "Chaotic Motion in a Class of Asymmetrical Kelvin Type Gyrostat Satellite", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39, 2004, pp. 785-793.
- [4] Elipe A., Lanchares V., "Exact Solution of a Triaxial Gyrostat with One Rotor", *Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy*, Vol. 101, 2008, pp. 49-68
- [5] Soltan Rezaee, M., Ghazavi, M.R., Jafari, A.A., Najafi, A., "Stability of a system consisting of three-axis connected through Hooke's joints", *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol.12, No.6, 2012, pp. 69-79.(In Persian)
- [6] Abtahi, S.M., Sadati, S.H., "Analytical and numerical study of chaotic motion of the satellite by the Lyapunov exponent", 19th Annual Conference on Mechanical Engineering, Birjand, 2011, (In Persian)
- [7] Abtahi, S.M., Sadati, S.H., "Modeling and Dynamic Analysis of of chaos in the transition -rotation the satellite three-axis Zhyrvstat", 20th Annual Conference on Mechanical Engineering, Shiraz, 2012, (In Persian)
- [8] Gurfil P., Elipe A., Tangren W., Efroimsky M., "The Serret-Andoyer Formalism in Rigid Body Dynamics: I. Symmetries and Perturbations",