



تحلیل ترمولاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای جداره ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی برپایه قانون جریان پرانتل-راس

مهسا قنبری مبارکه^۱، فاطمه فرهتنیا^{۲*}

۱- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، خمینی شهر
۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، خمینی شهر
* خمینی شهر، سندوق پستی ۸۴۱۷۵-۱۱۹ farhatnia@iaukhsh.ac.ir

چکیده

این مقاله به بررسی رفتار ترمولاستوپلاستیک پوسته جداره ضخیم استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی تحت فشار داخلی و گرادیان حرارتی می‌پردازد. به منظور تحلیل ترمولاستوپلاستیک پوسته از معادله جریان پرانتل-راس در شرایط کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. این راهکار منجر به تعریف فرمولاسیون جدید برای پیدا کردن شاعع شروع تسلیم پوسته و محاسبه حد فشار الاستیک به ازای بارگذاری فشار داخلی توازن با گرادیان حرارتی می‌شود. مدول الاستیسیته، ضریب انتقال حرارتی، ضریب انسباط حرارتی و تنش تسلیم مطابق مدل اردوگان، توابعی از شاعع می‌باشند. با حل معادله تعادل حاکم بر پوسته استوانه‌ای در شرایط تقارن محوری، توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و جایه‌جایی شعاعی حاصل شده است. در پایان نتایج عددی برای پوسته استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی به منظور بیان اثر فشار و گرادیان حرارتی بر نحوه چگونگی توزیع منطقه پلاستیک ارائه شده است. در هر دو حالت بارگذاری فشاری با گرادیان حرارتی و بدون آن، چگونگی شروع و انتشار منطقه پلاستیک پیش‌بینی شده است. نتایج مورد آن است که دو عامل شاخص توانی ماده مدرج تابعی و گرادیان حرارتی بر رفتار ترمولاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای تاثیرگذار هستند. با در نظر گرفتن پارامترهای توانی معین و افزایش گرادیان حرارتی، منطقه پلاستیک وسیع تر شده، چنان‌چه مشاهده می‌شود در بعضی موارد جهت شروع منطقه پلاستیک نیز عوض می‌شود. همچنین با اعمال فشار داخلی نشان داده شده می‌توان به تسلیم هم‌زمان در نقطه از پوسته رسید.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دربافت: ۲۲ شهریور ۱۳۹۳
پذیرش: ۲۹ مهر ۱۳۹۳
ارائه در سایت: ۱۱ آذر ۱۳۹۳
کلید واژگان:
تحلیل ترمولاستوپلاستیک
پوسته استوانه‌ای
مواد مدرج تابعی
شرایط کرنش صفحه‌ای
قانون جریان پرانتل-راس

Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule

Mahsa Ghanbari Mobarakeh, Fatemeh Farhatnia*

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Khomeinishahr Branch, Isfahan, Iran
*P.O.B. 84175-119, Khomeinishahr, Iran, farhatnia@iaukhsh.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 13 September 2014

Accepted 21 October 2014

Available Online 02 December 2014

Keywords:

Thermo-Elasto-Plastic analysis
cylindrical shell
functionally graded materials
plane strain condition
Prandtl-Reuss flow rule

ABSTRACT

This study deals with thermo-elasto-plastic behaviour of functionally graded thick-walled cylinder that is exposed to internal pressure and temperature gradient. For this purpose, Von-Mises yield criterion and Prandtl-Reuss flow-rule under state of plane strain are utilized. The modulus of elasticity, thermal conductivity and thermal expansion coefficients are assumed to obey the power function in the radial position according to Erdogan's model. In this work, the presented approach leads to the definition of new formulation to determine the elastic limit pressure and predict the onset radius of yielding, spread and growth of plastic zone. The governing equilibrium equation of cylindrical shell in axi-symmetrical status is solved in order to determine the distribution of radial, circumferential stresses and radial displacement. Various examples are handled to investigate the effect of FG-power law parameters on the yield pattern and distribution of plastic zone. The distribution of radial displacement, radial and circumferential stresses are expressed as the functions of radial position. The numerical results show that by the appropriate choice of the FG parameters and the specified thermal gradient, the plastic zone can commence simultaneously from inside and outside, or intermediate radius.

رفتار ترمومکانیکی متفاوت در مواد مدرج تابعی می‌شود. بررسی رفتار

ترمولاستوپلاستیک در پوسته‌های جداره ضخیم تحت فشار و گرادیان حرارتی در کاربردهای مهندسی بسیار مهم است. مهمترین کاربرد مواد مدرج تابعی در بهبود مشخصه‌های مکانیکی و ترمومکانیکی است، به طوریکه در این

۱- مقدمه
مواد مدرج تابعی^۱، مواد غیرهمگنی هستند که خواص مواد به طور پیوسته و تدریجی در کل ساختار تغییر می‌کند. چنانچه این تغییر پیوسته خواص باعث

1- Functionally graded materials

Please cite this article using:

M. Ghanbari Mobarakeh, F. Farhatnia, Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 211-218, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی پرداختند. آنها تغییرات پارامتر توانی را بر روی توزیع سطح تنش‌ها بررسی کردند. صادقیان و همکاران [12]، بر اساس معیار ترسکا و تئوری تغییر شکل‌های کوچک به تحلیل تنش‌های الاستیک و پلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار و حرارت پرداختند. آنها اثر حرارت بر روی توزیع تنش‌ها و کرنش‌ها و همچنین رشد منطقه پلاستیک را در این نوع پوسته‌ها مطالعه کردند. اکبری الشتی و همکاران [13]، به بررسی رفتار ترمولاستیک پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از روش معادله دیفرانسیل مرتبه دوم پرداختند. پوسته کروی آنها شامل لایه‌های پیزوالکترونیک بوده و تحت بارگذاری ترمولکترومکانیک قرار داشته است. آنها اثر درجه بندی خواص مواد، تغییرات دما و ضخامت لایه‌های پیزوالکترونیک روی تنش و میدان جابه‌جایی را مطالعه کردند. نایی و صدرآبادی [14]، به بررسی رفتار الاستوپلاستیک پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری ترمومکانیکی پرداختند. از معیار فون مایزز در بررسی رفتار تسلیم پوسته استفاده کردند و مدل سخت‌شوندگی سینماتیکی خط² را در حل معادلات تنش به کار برند. آنها دریافتند که ترکیب فشار داخلی تسلیم و اعمال دماهای متفاوت در پوسته، تسلیم ایجاد می‌کند که این موضوع به تغییرات پارامتر مواد بسیار بستگی دارد. لتو و همکاران [15]، حذف شار پلاستیک پوسته کروی را با در نظر گرفتن پارامتر سخت شوندگی در تغییر شکل‌های بزرگ، محاسبه کردند. در تحقیقات گذشته تاثیر دما بر خواص مکانیکی پوسته در نظر گرفته نشده بود. در این مقاله رفتار ترمولاستوپلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی بر اساس قانون جریان پرانتل - راس و معیار فون مایزز، در اثر بارگذاری ترمومکانیکی بر روی توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی و رشد منطقه پلاستیک بررسی می‌شود. رفتار درجه بندی پوسته در تعیین ضربی الاستیسیته، ضربی انبساط حرارتی، ضربی انتقال حرارتی و تنش تسلیم توابع توانی از شعاع تعریف شده‌اند. پیش‌بینی تسلیم پوسته و محاسبه حد فشار الاستیک با تعیین مقدار پارامتر نرم‌الیزه شده‌ای که بر پایه معیار تسلیم فون مایزز و قانون جریان پرانتل - راس استخراج شده، از نکات قابل توجه ای است که در این پژوهش محقق گردیده است.

2- فرمولاسیون مسئله

خصوص مواد بر اساس مدل اردوگان [16]، در امتداد شعاع در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) مطابق روابط (1) و (2) در نظر گرفته شده‌اند.

$$E(r, T) = \bar{E} \left(\frac{r}{b} \right)^{m_1} = E_0(T) r^{m_1} \quad (1)$$

$$\alpha(r, T) = \bar{\alpha} \left(\frac{r}{b} \right)^{m_2} = \alpha_0(T) r^{m_2} \quad (2)$$

که در E ، α به ترتیب مدول الاستیسیته و ضربی انبساط حرارتی می‌باشند. همچنین E_0 ، α_0 داده‌های تعریف شده به ازای شعاع داخلی پوسته هستند. با توجه تغییرات کوچک ضربی هدایت حرارتی برحسب دما می‌توان تابعیت آن را از دما مستقل گرفت [17]. بنابراین این کمیت را می‌توان تابعی از مختصه مکانیکی مطابق رابطه (3) فرض نمود [18].

$$k(r) = \bar{k} \left(\frac{r}{b} \right)^{m_3} = k_0 r^{m_3} \quad (3)$$

k_0 داده تعریف شده برای تابع ضربی هدایت حرارتی می‌باشد. تنش

تسلیم نیز تابع توانی از r مطابق رابطه (4) فرض شده است [12,14].

$$Y(r) = \bar{Y} \left(\frac{r}{b} \right)^{m_4} = Y_0 r^{m_4} \quad (4)$$

گونه مواد تمرکز تنش بسیار کاهش یافته، تنش حرارتی حداقل می‌گدد و شروع تسلیم پلاستیک و شکست برای بارگذاری حرارتی و مکانیکی می‌تواند به تأخیر بیافتد.

از مطالعاتی که در این زمینه صورت گرفته می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. درینگتون [1]، شروع تسلیم پذیری در پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی، خارجی و گرادیان‌های حرارتی با شرایط انتهایی باز و بسته را با استفاده از معیار ترسکا پیش‌بینی کرد. تاثیر درجه حرارت روی توزیع تنش توسط والی [2] در نظر گرفته شد. او رفتار الاستیک - پلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم از جنس پلاستیک تحت فشار داخلی، خارجی و توزیع درجه حرارت در دیواره استوانه را بررسی کرد و معادلاتی برای فشار بحرانی در یک استوانه جدار ضخیم با شرط انتهایی بسته تحت فشار و بار حرارتی و با استفاده از معیار ترسکا بدست آورد. بلاند [3]، با استفاده از معیار ترسکا معادلات تنش و جابه‌جایی را برای یک استوانه جدار ضخیم از ماده کرنش - سخت شونده خطی تحت فشار داخلی و جریان حرارتی یک-نواخت بدست آورد. نقدآبادی و همکاران [4]، با توجه به اثر بوشینگر و معیار ترسکا یک راه حل تحلیلی الاستوپلاستیک برای پوسته جدار ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد الاستیک خطی بدست آوردند. آنها با تعیین فشار اتفاقراز¹ در حالات مختلف نشان دادند که طراحی پوسته‌ها بر اساس روش الاستوپلاستیک بسیار اقتصادی‌تر از روش‌های الاستیک است. رحیمی و همکاران [5]، با استفاده از نظریه الاستیسیته مسیو، معادله حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقاضی محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی را استخراج و حل دقیق برای تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ها در شرایط مختلف مزی ارائه کردند. آنها نتایج خود را با نتایج حاصل از استوانه همگن مقایسه نمودند. قناد و همکاران [6]، با استفاده از تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقاضی و محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی را استخراج کرده و نتایج حاصل از تنش و جابه‌جایی را با نتایج حاصل از نظریه مستوی مقایسه و شbahat‌ها را نشان دادند. لی و همکاران [7]، یک روش جدید برای بررسی تنش‌های حرارتی پایدار در استوانه تو خالی از جنس مواد مدرج تابعی ارائه کردند. تاثیر تغییرات شبیه پارامترهای مواد بر روی تنش‌های حرارتی را نیز مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که شبیه مناسب می‌تواند توزیع تنش‌های حرارتی در کل ساختار را ملایم‌تر کند. شاهسیاه و همکاران [8]، پایداری حرارتی پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی را بر اساس تئوری مرتبه اول پوسته و معادلات غیرخطی ساندرس مورد بررسی قرار دادند. جاسکلا و زیلینیکا [9]، به بررسی پایداری جابه‌جایی‌های بزرگ الاستوپلاستیک پوسته ساندوبیچی استوانه‌ای با سطوح نامتقاضی تحت بارگذاری نیروهای طولی، فشار عرضی و برشی پرداختند. آنها رابطه کرنش جابه‌جایی را غیرخطی فرض کرده و سطوح پوسته را با ضخامت متفاوت در نظر گرفته و از روش ریتر در حل معادلات پایداری استخراج شده از روابط انرژی کرنشی استفاده کردند.

نایاک و همکاران [10]، تنش‌ها و کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را در پوسته‌های کروی جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی بدست آوردند. آنها از معیار فون مایزز برای تخمین تنش معادل در محاسبه محل وقوع تسلیم استفاده کردند. بیات و همکاران [11]، به حل ترمولاستیک پوسته‌های کروی جدار ضخیم از جنس

2-1-3- حل معادله میدان جابه‌جایی پوسته
با تعیین معادله توزیع دما، معادله جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه
(14) حاصل می‌شود:

$$r^2 u'' + Aru' + Bu = C_2 r^{m_1+1} + C_1 r^{m_2-m_3+1} \quad (14)$$

$$\text{و } C_1 = \frac{(1+v)\alpha_0(m_1+m_2-m_3)D_1}{(1-v)} \quad (14) \text{ ضرایب}$$

$$C_2 = \frac{(1+v)\alpha_0(m_1+m_2)D_2}{(1-v)} \quad \text{هستند.}$$

حل معادله جابه‌جایی دیفرانسیلی اویلری غیر همگن (14) به صورت
رابطه (15) بدست می‌آید [21].

$$u(r) = L_1 r^{n_1} + L_2 r^{n_2} + L_3 r^{m_2-m_3+1} + L_4 r^{m_2+1} \quad (15)$$

$$L_3 = \Delta = (A - 1)^2 - 4B \quad n_{1,2} = \frac{1-A\pm\sqrt{\Delta}}{2} \quad (15) \text{ که در معادله}$$

$$L_4 = \frac{C_2}{[m_2^2+(2+m_1)m_2]+m_1} \cdot [(m_2-m_3)^2+(2+m_1)(m_2-m_3)]+m_1 \quad \text{می‌باشد.}$$

با حل معادله جابه‌جایی روابط تنش را می‌توان با روابط (16) و (17) محاسبه کرد.

$$\sigma_r(r) = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [L_1 Q_1 r^{n_1-1} + L_2 Q_2 r^{n_2-1} + Q_3 r^{m_2} + Q_4 r^{m_2-m_3}] \quad (16)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [L_1 G_1 r^{n_1-1} + L_2 G_2 r^{n_2-1} + G_3 r^{m_2} + G_4 r^{m_2-m_3}] \quad (17)$$

ضرایب (16) و (17) در پیوست 2 آورده شده است. با اعمال شرایط مرزی مکانیکی (18) و (19) ضرایب L_1 و L_2 بدست می‌آیند.
(پیوست 3)

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a \quad (18)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = -P_b \quad (19)$$

2- رفتار تسلیم پوسته
بر اساس قانون جریان پرانتل-راس میزان کرنش کل مجموع دو کرنش الاستیک و پلاستیک است (رابطه (20)).

$$d\varepsilon_i^T = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p \quad i = r, \theta, z \quad (20)$$

رابطه بین گام کرنش‌ها و تنش‌ها در محدوده پلاستیک مطابق رابطه (21) می‌باشد [22].

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{\left(\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z)\right)} = \frac{d\varepsilon_\theta^p}{\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)\right)} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r)\right)} \quad (21)$$

که اعمال شرایط کرنش صفحه‌ای ($d\varepsilon_z^p = 0$), منجر به تعیین تنش در راستای طولی پوسته می‌شود (رابطه (22)).

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) \quad (22)$$

که $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است.

معادله (23) رابطه تسلیم معیار فون مایزز است [19].

$$2Y^2(r) = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \quad (23)$$

تنش $T(r)$ است.

با قرار دادن رابطه (22) در رابطه (23) در محدوده پلاستیک فون مایزز در شاعع تسلیم (r_y) به صورت رابطه (24) بدست می‌آید.

$$Y(r_y) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (24)$$

تنش بی بعد به صورت رابطه (25) تعریف می‌شود.

در اینجا Y_0 داده تعريف شده برای Y و r مختصه شعاعی، b قطر خارجی پوسته و m_4, m_3, m_2, m_1 پارامترهای توانی در تعريف خواص ماده می‌باشند.

2- روابط الاستیک پوسته

2-1- محاسبه میدان جابه‌جایی پوسته
در یک پوسته استوانه‌ای روابط تنش-کرنش از رابطه (5) به دست می‌آید [19]:

$$\sigma_r = (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_r + \lambda(r)\varepsilon_\theta - (3\lambda(r) + 2\mu(r))\alpha(r)T(r) \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_\theta + \lambda(r)\varepsilon_r - (3\lambda(r) + 2\mu(r))\alpha(r)T(r) \quad (5)$$

که در معادله بالا $T(r)$ اختلاف درجه حرارت با درجه حرارت مرجع بوده و ضرایب لامه $\mu(r) = \frac{vE(r)}{2(1+v)}$ و $\lambda(r) = \frac{vE(r)}{(1+v)(1-2v)}$ هستند.
رابطه کرنش-میدان جابه‌جایی از روابط (6) و (7) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_r(r) = \frac{du(r)}{dr} = u' \quad (6)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{u}{r} \quad (7)$$

با توجه به شرایط تقارن هندسی و بارگذاری در پوسته معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای به معادله (8) تقلیل می‌باشد.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری معادلات (5) الی (7) و اعمال فرضیات (1) تا (4) در رابطه (8)، معادله میدان جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (9) به دست می‌آید:

$$r^2 u'' + Aru' + Bu = \frac{(1+v)\alpha_0 r^{m_2}}{(1-v)} [(m_1 + m_2)rT(r) + r^2 T'(r)] \quad (9)$$

که در تمامی معادلات علامت‌های (') و ('') به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم نسبت به مختصه شعاعی می‌باشند.
در معادله (9)، $B = \frac{v(1+m_1)-1}{1-v}$ و $A = 1 + m_1$ می‌باشد.

2-2- تحلیل حرارتی پوسته

معادله انتقال حرارت یکنواخت یک بعدی در پوسته‌های استوانه‌ای با رابطه (10) توصیف می‌شود [20].

$$T'' + \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r}\right)T' = 0 \quad (10)$$

شرایط مرزی حرارتی اعمال شده بر پوسته استوانه‌ای در روابط (11) و (12) نشان داده شده‌اند [20].

$$D_{11}T'(a) + D_{12}T(a) = t_1 \quad (11)$$

$$D_{21}T'(b) + D_{22}T(b) = t_2 \quad (12)$$

که در آن D_{11} و D_{21} ضرایب هدایت حرارتی، D_{12} و D_{22} همرفت حرارتی، a شاعع داخلی، b شاعع خارجی، t_1 و t_2 ثوابت معینی در شاعع داخلی و خارجی هستند.

با اعمال رابطه ضریب انتقال حرارتی به صورت توانی در معادله انتقال حرارت، حل عمومی معادله (10) مطابق رابطه (21) به دست می‌آید.

$$T(r) = D_1 r^{-m_3} + D_2 \quad (13)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی، ثوابت D_1 و D_2 بدست می‌آیند. (پیوست 1)

بی‌نهایت می‌شوند. در این مورد خاص مسئله جداگانه حل می‌شود. با جایگذاری معیار تسلیم فون مایزز در معادله تعادل، تنش‌ها در محدوده پلاستیک و میدان جابه‌جایی از روابط (33) تا (36) محاسبه می‌شوند.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Y_0}{r} \quad (33)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \cdot \ln(r) + E_2 \quad (34)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \cdot (1 + \ln(r)) + E_2 \quad (35)$$

$$u(r) = \frac{F_6}{r} + F_7 r \ln r + F_8 r \quad (36)$$

$$\text{یک ثابت انتگرالی وابسته به شرایط مرزی است. که ضرایب } F_8 = \frac{E_2(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} + (1+\nu)\alpha_0(D_1 + D_2) \text{ و } F_7 = \frac{2Y_0(1+\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{3}E_0} \text{ هستند.}$$

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{Y(a)} = \frac{\sigma_i}{Y \cdot a^{m_4}} \quad i = r, \theta \quad (25)$$

پارامتر ϕ طبق رابطه (26) بهمنظور محاسبه شاعع تسلیم و فشارحدالاستیک تعریف می‌شود.

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{r_y} \right)^{m_4} (\bar{\sigma}_\theta(r_y) - \bar{\sigma}_r(r_y)) \quad (26)$$

مقادیری که ϕ به خود اختصاص می‌دهد مشخص کننده آن است که آیا تسلیم اتفاق می‌افتد یا خیر:

$$\phi: \begin{cases} < 1 & \text{پوسته الاستیک ناحیه} \\ = 1 & \text{پوسته تسلیم ناحیه شروع} \\ > 1 & \text{پوسته پلاستیک ناحیه} \end{cases}$$

2-3- روابط پلاستیک پوسته

با اعمال معیار فون مایزز (24) در معادله دیفرانسیلی تعادل (8)، تنش‌های شعاعی و محیطی در محدوده پلاستیک مطابق روابط (27) و (28) تعیین می‌شوند.

$$\sigma_r(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r^{m_4} Y_0}{m_4} + E_1 \quad (27)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{2(1+m_4)r^{m_4} Y_0}{\sqrt{3}m_4} + E_1 \quad (28)$$

یک ثابت اختیاری وابسته به شرایط مرزی است. با فرض تراکم ناپذیری تغییر شکل پوسته در محدوده پلاستیک از رابطه (29) بدست می‌آید [23].

$$\varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \quad (29)$$

که $\varepsilon_r^p, \varepsilon_\theta^p$ و ε_z^p به ترتیب کرنش‌های شعاعی، محیطی و طولی در ناحیه پلاستیک هستند، مجموع کرنش‌های شعاعی و محیطی کل را می‌توان از رابطه (30) بدست آورد.

$$\varepsilon_r^T + \varepsilon_\theta^T = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(r)} (\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)) + 2(1+\nu)\alpha(r).T(r) \quad (30)$$

ε_r^T و ε_θ^T به ترتیب کرنش‌های شعاعی و محیطی کل هستند. با استفاده از روابط کرنش - میدان جابه‌جایی (6) و (7) و تنش‌های محدوده پلاستیک (27) و (28) در معادله (30)، میدان جابه‌جایی پوسته به صورت رابطه (31) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} = & \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2+m_4)Y_0}{m_4} \right] r^{m_4-m_1} \\ & + \frac{2E_1(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0(2-m_1)} r^{-m_1} \\ & + 2(1+\nu)\alpha_0 C_1 r^{m_2-m_3} + 2(1+\nu)\alpha_0 C_2 r^{m_2} \end{aligned} \quad (31)$$

با حل معادله (31) جابه‌جایی شعاعی پوسته تعیین می‌شود (رابطه (32)).

$$u(r) = \frac{F_1}{r} + F_2 r^{m_2-m_3+1} + F_3 r^{m_2+1} + F_4 r^{m_4-m_1+1} + F_5 r^{1-m_1} \quad (32)$$

که در معادله بالا ضرایب F_1, F_2, F_3, F_4 و F_5 در محدوده پلاستیک می‌باشند.

اما در حالتی که تمامی پارامترهای توانی صفر باشند و رفتار تسلیم وابسته به موقعیت شعاعی نقاط مختلف پوسته نباشد، ماده همگن فرض می‌گردد. در این حالت رابطه (31) و تنش‌های محیطی و شعاعی پلاستیک پوسته

در این بخش نتایج عددی حاصل از معادلات به دست آمده ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط مرزی حرارتی دیریکله، شرایط مرزی مکانیکی، استفاده از روابط پیوستگی در شاعع شروع منطقه پلاستیک (37) و محاسبه ثوابت F_1 و E_1 و تنش‌ها در محدوده الاستیک و پلاستیک و همچنین شاعع تسلیم محاسبه می‌شوند.

$$u^e(r^p) = u^p(r^p), \sigma_r^e(r^p) = \sigma_r^p(r^p), \sigma_\theta^e(r^p) = \sigma_\theta^p(r^p) \quad (37)$$

بالنویس e نمایانگر محدوده الاستیک، بالنویس p نمایانگر محدوده پلاستیک و r^p شاعع شروع منطقه پلاستیک می‌باشد. پوسته با شاعع داخلی E_2 و شاعع خارجی $a = 0/5(m)$ در نظر گرفته می‌شود. ضریب پواسون پوسته $v = 0/3$ و $\nu = 4/3 \times 10^8(Pa)$ است.

شرایط مرزی حرارتی در نظر گرفته شده از نوع دیریکله است که شار حرارتی را در شاعع‌های داخلی و خارجی برابر مجموع شار حرارتی عبوری به صورت هدایت حرارتی و همرفت گرمایی در شاعع‌های مربوطه تعریف می‌کند. دمای خارجی در نظر گرفته شده $T(b) = 0^\circ C$ می‌باشد.

$$t_2 = 0$$

$$D_{11} = 0(\text{C})^{-1}, D_{12} = 1(\text{C})^{-1}, D_{21} = 0(\text{C})^{-1}, D_{22} = 1(\text{C})^{-1}$$

$$\Delta T = T(a) - T(b)$$

مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در هر گرادیان حرارتی با استفاده از رابطه تولوکیان (38) به دست می‌آید (در این رابطه T بر حسب درجه کلوین است) [17].

$$q_j = q_0(q_{-1}T^{-1} + 1 + q_1T + q_2T^2 + q_3T^3) \quad (38)$$

ضرایب رابطه (38) و مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی به ازای گرادیان‌های حرارتی متفاوت در جداول 1 و 2 آورده شده است.

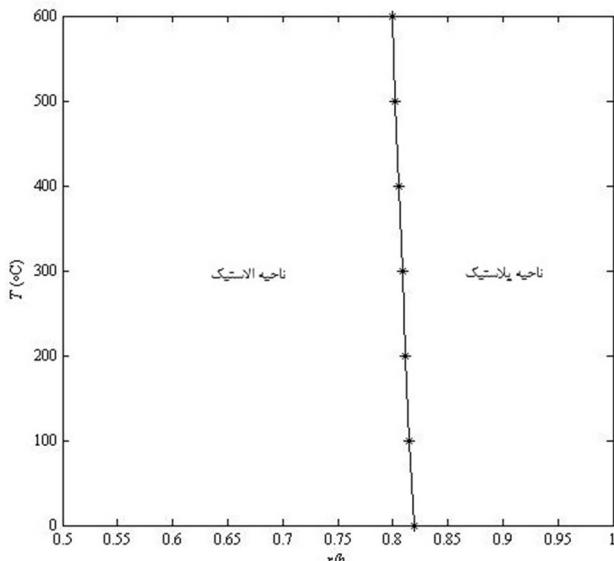
سایر پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$P_b = 0(\text{Pa}), P_a = 8 \times 10^8(\text{Pa})$$

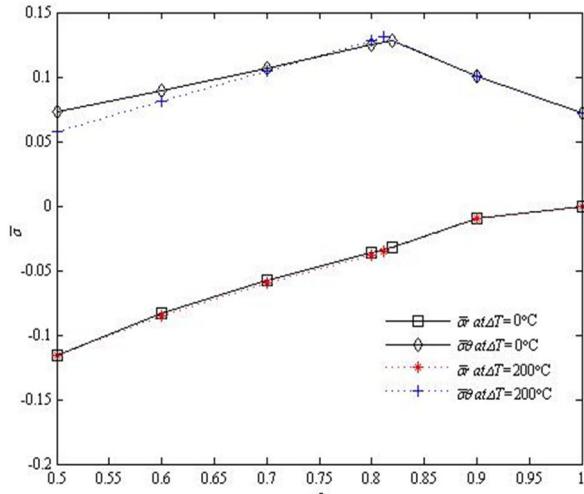
$$m_1 = 2.2, m_2 = -2.9, m_3 = -2.2, m_4 = -4$$

تعییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی متفاوت در شکل 1 نمایش

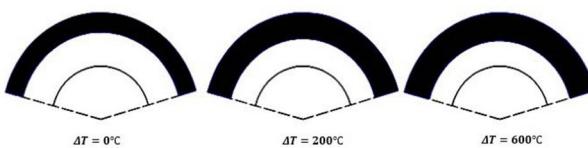
داده شده است و همانطور که دیده می‌شود به ازای مقادیر $\phi > 1$ پوسته در منطقه پلاستیک قرار گرفته است.



شکل 2 تغییرات منطقه الاستیک و پلاستیک در گرادیان های حرارتی مختلف
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$



شکل 3 تغییرات تنش های بی بعد شعاعی و محیطی به ازای
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$



شکل 4 رشد منطقه پلاستیک سطح خارجی در گرادیان های حرارتی مختلف
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$

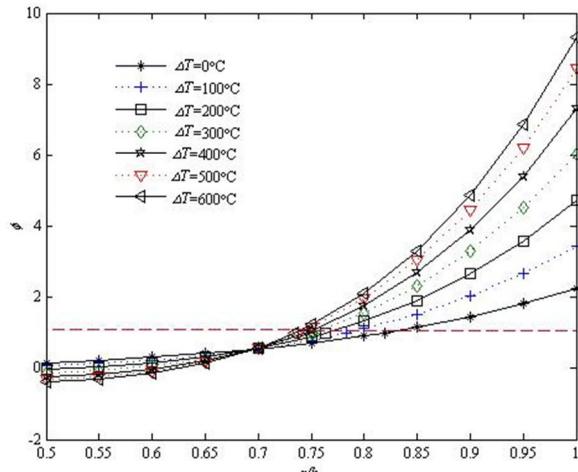
تغییرات فشار حد الاستیک داخلی در گرادیان های حرارتی مختلف در شکل 5 نمایش داده شده است. همانطور که دیده می شود در بعضی نقاط همزمان دو نقطه از پوسته یک فشار حد الاستیک دارند. این بین معناست که پوسته به ازای یک فشار معین و گرادیان حرارتی مشخص، در دو نقطه به تسلیم رسیده است با در نظر گرفتن $P_a = 5 \times 10^9 \text{ Pa}$ سطح میانی پوسته در ناحیه پلاستیک قرار می گیرد به طوریکه سطوح داخلی و خارجی در ناحیه الاستیک قرار داشته و با اعمال گرادیان های حرارتی این منطقه بزرگتر شده تا جاییکه با اعمال گرادیان های حرارتی بالاتر از 325 درجه سانتیگراد، سطح

جدول 1 پارامترهای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در فولاد ضد زنگ [17]

$\alpha_0 (\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})$	$E_0 (\text{Pa})$	q_j
$12/33 \times 10^{-6}$	$201/04 \times 10^9$	q_0
0	0	q_{-1}
$8/086 \times 10^{-4}$	$3/079 \times 10^{-4}$	q_1
0	$-6/534 \times 10^{-7}$	q_2
0	0	q_3

جدول 2 مقادیر مدول الاستیسیته، و ضریب انبساط حرارتی در گرادیان های حرارتی مختلف در فولاد ضد زنگ

$E_0 \times 10^{11} (\text{Pa})$	$\alpha_0 \times 10^{-5} (\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})$	$\Delta T (\text{ }^{\circ}\text{C})$
2/0815	1/5053	0
2/0585	1/6050	100
2/0092	1/7047	200
1/9337	1/8044	300
1/8319	1/9041	400
1/7088	2/0038	500
1/5494	2/1035	600



شکل 1 تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان های حرارتی مختلف
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$

همچنین با توجه به شکل 2، زمانی که پوسته تحت فشار داخلی قرار دارد، سطح خارجی پوسته در منطقه پلاستیک قرار دارد. با اعمال گرادیان حرارتی تا 600 درجه سانتیگراد این ناحیه بزرگتر شده و سطح خارجی بیشتری از پوسته در منطقه پلاستیک قرار می گیرد.

تغییرات تنش بی بعد در حالت اعمال فشار داخلی بدون گرادیان حرارتی و حالت اعمال فشار داخلی همراه با گرادیان حرارتی 200 درجه سانتیگراد در شکل 3 نشان داده شده است و همچنین رشد منطقه پلاستیک با اعمال گرادیان حرارتی در سطح خارجی پوسته به خوبی در شکل 4 قبل مشاهده است.

با اعمال پارامترها به صورت:

$$P_b = 0(\text{Pa}), P_a = 5 \times 10^9 (\text{Pa}) \\ m_1 = -4.23, m_2 = 8, m_3 = 8, m_4 = -6$$

با در نظر گرفتن پارامترها به صورت $P_b = 0(\text{Pa}), P_a = 2 \times 10^9(\text{Pa}), m_1 = -2.9, m_2 = -2.9, m_3 = -2.9, m_4 = -3.4$ تغییرات پارامتر ϕ در هر شعاع پوسته به صورت شکل 8 است. با عمال فشار داخلی تنها بر روی پوسته، سطح داخلی پوسته در منطقه پلاستیک قرار دارد اما با اعمال گرادیان‌های حرارتی بالاتر دیده می‌شود که منطقه پلاستیک سطح خارجی پوسته را پوشش می‌دهد. در واقع افزایش گرادیان حرارتی باعث تغییرجهت شروع منطقه پلاستیک شده است. تغییرات منطقه پلاستیک میانی در گرادیان‌های حرارتی مختلف را می‌توان در شکل 9 مشاهده نمود.

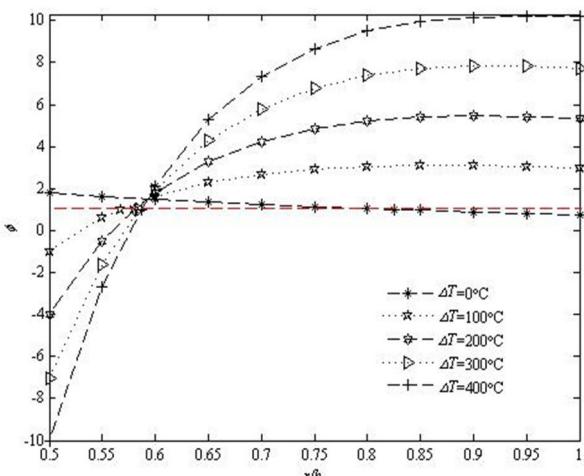
در مقاله صادقیان و اختراعی تحلیل تنش بر اساس معیار ترسکا صورت گرفته است و تمامی پارامترهای k, α, E, α_0 تهها توابع از شعاع هستند. در اینجا به منظور صحت سنجی با در نظر گرفتن داده‌های مقاله صادقیان و اختراعی [12] به صورت:

$$\begin{aligned} m_1 &= -2.9, m_2 = -2.9, m_3 = -2.9, m_4 = -3.4 \\ a &= 0.4(\text{m}), b = 1(\text{m}) \\ p_a &= 8 \times 10^8(\text{Pa}), E_0 = 2 \times 10^{11}(\text{Pa}) \\ \alpha_0 &= 1.2 \times 10^{-6}(\text{^{\circ}C})^{-1}, \bar{Y} = 4.3 \times 10^8(\text{Pa}) \end{aligned}$$

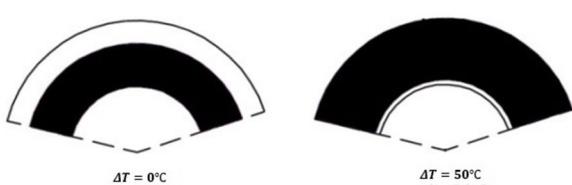
نتایج در دو معیار ترسکا (حاصل از کار صادقیان و اختراعی) و فون مایرز (حاصل از این مقاله) در جداول 3 الی 5 مقایسه شده است.

4-نتیجه‌گیری نهایی

در این مقاله به تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی در شرایط کرشن صفحه‌ای بر اساس قانون جریان پرانتل-راس پرداخته شد. رفتار تسلیم پوسته براساس معیار فون مایرز

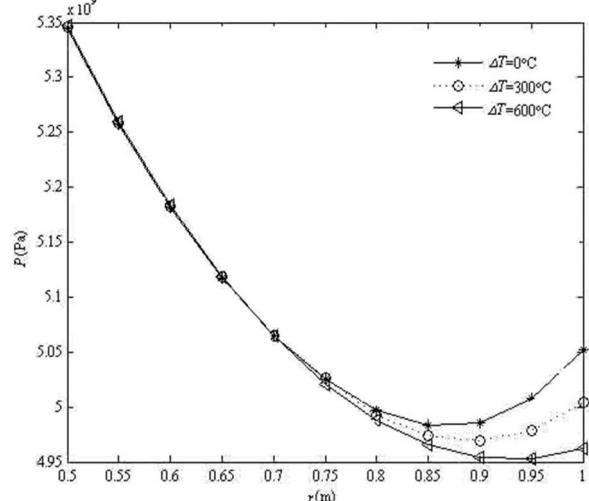


شکل 8 تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-2.9, -2.9, -2.9, -3.4)

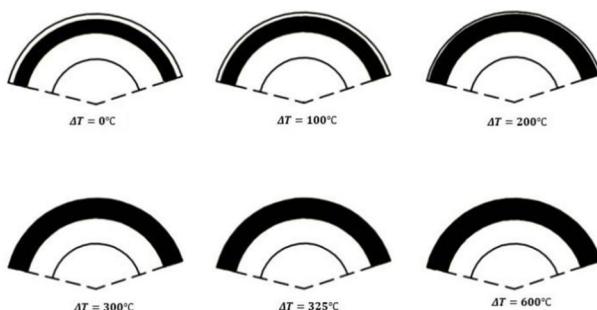


شکل 9 تغییرات منطقه پلاستیک در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-2.9, -2.9, -2.9, -3.4)

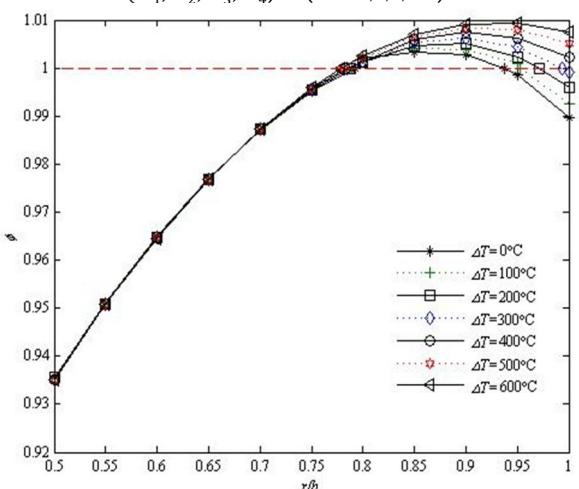
خارجی پوسته کاملا در منطقه پلاستیک قرار می‌گیرد. این تغییرات در شکل 6 نمایش داده شده است. تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی مختلف در شکل 7 دیده می‌شود. نحوه قرارگیری پوسته در هر دما در منطقه پلاستیک قابل مشاهده است. با اعمال گرادیان حرارتی در دو نقطه از پوسته $\phi = 1$ شده است و به ازای مقادیر بین این دو نقطه $\phi > 1$ است این بدان معناست که منطقه میانی پوسته در ناحیه پلاستیک قرار دارد.



شکل 5 تغییرات حد فشار الاستیک در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8.8, -6)



شکل 6 تغییرات منطقه پلاستیک میانی در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8.8, -6)



شکل 7 تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8.8, -6)

- منطقه پلاستیک می‌تواند از سطح خارجی شروع شود، به طوریکه به ازای بعضی پارامترهای توانی و فشار داخلی وارد بر پوسـتـه، سطح خارجی آن در منطقه پلاستیک قرار می‌گیرد و با اعمال گرادیان حرارتی به صورت همزمان این ناحیه بزرگـتر شده و سطح خارجی بیشتری از پوسـتـه در منطقه پلاستیک واقع میـشـود.
- منطقه پلاستیک میـتوـانـد از سطح میـانـی شـروع شـود، به طوریکه سطوح داخلی و خارجی در ناحیه الاستیک قرار داشته باشند. با اعمال گرادیانـهـای حرـارتـی بالـا منـطـقـه پـلاـسـتـیـک مـیـانـی بـزـرـگـتر شـده و حتـی مـیـتوـانـد به سـطـح خـارـجـی پـوـسـتـه بـرـسـد.
- جـهـت آـغـاز شـدـه منـطـقـه پـلاـسـتـیـک اـز سـطـح دـاخـلـی مـیـتوـانـد با اـفـزـیـش گـرـادـیـان حـرـارتـی تـغـيـرـکـنـد.
- در پوسـتـه به ازای یـك فـشار مـعـيـن و گـرـادـیـان حـرـارتـی مـشـخـص مـیـتوـانـد به تـسـلـیـم هـمـزـمـان در دـو نقطـه اـز پـوـسـتـه رسـید. در وـاقـع با پـارـامـتـرـهـای تـوانـی مـعـيـن، هـمـزـمـان دـو نقطـه اـز پـوـسـتـه، فـشار حـدـالـاـسـتـیـک يـكـسان دـارـند.
- با تعـیـین حـد فـشار الاستـیـک با پـارـامـتـرـهـای تـوانـی مـشـخـص مـیـتوـانـد محل وـقـوع منـطـقـه پـلاـسـتـیـک رـا در یـك فـشار مـعـيـن تعـیـین نـمـود.

بیوـسـتـ1:

$$D_1 = \frac{D_{22}t_1 - D_{12}t_2}{D_{12}(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - D_{22}(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}$$

$$D_2 = \frac{t_1(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - t_2(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}{D_{12}(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - D_{22}(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}$$

بیوـسـتـ2:

$$Q_1 = (1-\nu)n_1 + \nu$$

$$Q_2 = (1-\nu)n_2 + \nu$$

$$Q_3 = L_4(m_2 + 1 - \nu m_2) - D_2\alpha_0(1+\nu)$$

$$Q_4 = L_3((m_2 - m_3)(1-\nu) + 1) - D_1\alpha_0(1+\nu)$$

$$G_1 = (n_1 - 1)\nu + 1$$

$$G_2 = (n_2 - 1)\nu + 1$$

$$G_3 = L_4(1 + \nu m_2) - D_2\alpha_0(1+\nu)$$

$$G_4 = L_3((m_2 - m_3)\nu + 1) - D_1\alpha_0(1+\nu)$$

بیوـسـتـ3:

$$L_1 = \frac{1}{Q_1(a^{n_1-1}b^{n_2-1} - a^{n_2-1}b^{n_1-1})} \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \left\{ P_b \frac{a^{n_2-1}}{b^{m_1}} - P_a \frac{b^{n_2-1}}{a^{m_1}} \right\} - Q_3(a^{m_2}b^{n_2-1} - b^{m_2}a^{n_2-1}) - Q_4(a^{m_2-m_3}b^{n_2-1} - b^{m_2-m_3}a^{n_2-1}) \right]$$

$$L_2 = \frac{1}{Q_2(a^{n_2-1}b^{n_1-1} - a^{n_1-1}b^{n_2-1})} \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \left\{ P_b \frac{a^{n_1-1}}{b^{m_1}} - P_a \frac{b^{n_1-1}}{a^{m_1}} \right\} - Q_3(a^{m_2}b^{n_1-1} - b^{m_2}a^{n_1-1}) - Q_4(a^{m_2-m_3}b^{n_1-1} - b^{m_2-m_3}a^{n_1-1}) \right]$$

جدول 3 تنش شعاعی و محیطی بـی بعدـشـدـه درـ حـالـت اـعـمـال فـشار دـاخـلـی

سـعـاع	ترـسـکـا [12] فـون مـایـزـز	ترـسـکـا [12] فـون مـایـزـز	تـنـش مـحـیـطـی
0/4	-0/0825	-0/0825	0/013 0/013
0/5	-0/0623	-0/0623	0/0248 0/024
0/6	-0/0467	-0/0467	0/038 0/038
0/7	-0/0335	-0/0335	0/0527 0/0527
0/8	-0/0218	-0/0218	0/0668 0/069
0/9	-0/0056	-0/0056	0/0512 0/0579
1	0	0	0/0512 0/0444

جدول 4 تنش شعاعی و محیطی بـی بعدـشـدـه درـ حـالـت اـعـمـال فـشار دـاخـلـی بهـ هـمـراه

گـرـادـیـان حـرـارتـی 700 درـجه سـانـتـیـگـراد

سـعـاع	ترـسـکـا [12] فـون مـایـزـز	ترـسـکـا [12] فـون مـایـزـز	تـنـش مـحـیـطـی
0/4	-0/0825	-0/0825	-0/148 -0/147
0/5	-0/0671	-0/0671	0/0047 0/0047
0/6	-0/0533	-0/0533	0/0267 0/0267
0/7	-0/0402	-0/0402	0/0513 0/0513
0/8	-0/0148	-0/0148	0/0799 0/0799
0/9	-0/0056	-0/0056	0/0512 0/0579
1	0	0	0/0512 0/0444

جدول 5 سـعـاع تـسـلـیـم بـی بعدـدر گـرـادـیـانـهـای حـرـارتـی مـتـفـاـوتـ بـرـ حـسـب

درجـه سـانـتـیـگـراد

حرارتی	گـرـادـیـان	ترـسـکـا [12] فـون مـایـزـز
0	0	0/8048 0/7761
100	100	0/7952 0/7676
200	200	0/7879 0/7613
300	300	0/7808 0/7551
400	400	0/7786 0/7501
500	500	0/7714 0/7468
600	600	0/7654 0/7411
700	700	0/7578 0/7358

بررسـی و پـارـامـتـر ϕ به منظـور مـعيـارـی برـای تعـیـین سـعـاع تـسـلـیـم و محـاسبـه حـد فـشار الاستـیـک مـطـابـق با آـن اـرـائـه شـد. به طـورـیـکـه به اـزـای مقـادـیر $\phi < 1$ پوسـتـه در منـطـقـه الاستـیـک، $\phi = 1$ شـروع تـسـلـیـم و $\phi > 1$ پوسـتـه در منـطـقـه الاستـیـک قـرار مـیـگـرفـت. آـنـچـه اـز نـتـائـج حـاـصـل شـدـه آـن اـسـتـ کـه:

- رـشد منـطـقـه پـلاـسـتـیـک عـلـاوـه بـر پـارـامـتـرـهـای FGM بـه گـرـادـیـان حـرـارتـی بـسـتـگـی دـارـد.

- با اعمال گـرـادـیـانـهـای حـرـارتـی مـتـفـاـوتـ درـ شـرـایـطـی کـه اـثـر دـمـا بـر روـی مـدـول الاستـیـسـیـتـه و ضـرـیـب انـسـاطـ حـرـارتـی اـعـمـال شـدـه اـسـتـ، وـسـعـتـ منـطـقـه پـلاـسـتـیـک بـیـشـتر شـدـه و جـهـت شـروع آـن نـیـز تـحـت تـاثـیر قـرار مـیـگـیرـد.

- uniform internal or external pressure and steady state heat flow, *Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press Ltd.*, Vol.7, pp. 83-103, 1982.
- [2] E. Whalley, The design of pressure vessels subjected to thermal stresses, *Canad. J. Tech.*, Vol. 34, pp. 291-303, 1986.
- [3] D. R. Bland, Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressure and to temperature gradients, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 4, pp. 209-229, 1989.
- [4] R. Naghdabadi, M. H. Kargarnovin, and H. Darijani, Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elastoplastic approach, *Material and Design*, Vol. 30, pp. 3537-3544, 2009.
- [5] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. EsmaelzadehKhademi, General solution of plane elasticity of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 31-43, 2009. (In Persian)
- [6] M. Ghannad, G. H. Rahimi, S. EsmaelzadehKhademi, General solution of shear deformation of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No.4, pp. 13-26, 2010.(In Persian)
- [7] X. F. Li, X. L. Peng, Thermoelastic analysis of a cylindrical vessel of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 87, pp. 203-210, 2010.
- [8] R. Shahsiah, M. R. Eslami, and M. S. Boroujerdy, Thermal instability of functionally graded deep spherical shell, *Arch App Mech*, Vol. 81, pp. 1455-1471, 2011.
- [9] L. Jaskula, J. Zielinska, Large displacement stability of elastic-plastic unsymmetrical sandwich cylindrical shells, *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, pp. 611-617, 2011.
- [10] P. Nayak, S. C. Mondal, A. Nandi, Stress, strain and displacement of functionally graded thick spherical vessel, *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 3, No 4, pp. 2659-2671, 2011.
- [11] Y. Bayat, M. Ghannad, and H. Torabi, Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading, *Arch App Mech*, Vol. 82, pp. 229-242, 2012.
- [12] M. Sadeghian, T. H. Ekhteraei, Elasto-plastic axisymmetric thermal stress analysis of functionally graded cylindrical vessel, *J. Basic. Appl. Sci. Res.*, Vol. 2, pp. 10246-10257, 2012.
- [13] R. AkbariAlashti, M. Khorsand, M. H. Tarahhom, Thermo-elastic analysis of a functionally graded spherical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method, *ScientiaIranica*, Vol. 20, pp. 109-119, 2013.
- [14] S. Nayebi, A. Sadraabadi, FGM elastoplastic analysis under thermomechanical loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111-112, pp. 12-20, 2013.
- [15] S. Y. Leo, K.C. Liao, Y-C Lin, Plastic limit pressure of spherical vessels with combined hardening involving large deformation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol 114-115, pp 16-22, 2014.
- [16] T. C. Chiu, F. Erdogan, Debonding of graded coatings under in-plane compression, *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 40, No. 25, pp.7155-7179, 2003.
- [17] H. Shenshen, *Functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells*, United state og America, 2009.
- [18] X. L. Huang, H. Shenshen, *Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments*, Journal of solids and structures, Vol. 41, pp. 2403-2427, 2004.
- [19] J. Lubliner, *Plasticity theory*, university of California at Berkely, 2006.
- [20] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, Fundamentals of heat and mass transfer, *university of Notre Dame*, 2006.
- [21] Ad. Polyanin, Vf. Zaitsev, *Handbook of exact solutions of ordinary differential equations*, chapman and Hill/CRC, Florida, 2000.
- [22] G. Wempner, D. Talaslidis, *Mechanics of solids and shells theories and approximations*, CRC press LLC, 2003.
- [23] As. Khan, *Continuum theory of plasticity*, John Wiely and Sons;1995

5-فهرست علائم

مدول الاستیسیته (Pa)	E
ضریب انتقال حرارتی ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$)	k
فشار (Pa)	P
فشار داخلی (Pa)	P_a
فشار خارجی (Pa)	P_b
دما ($^{\circ}\text{C}$)	T
میدان جابه جایی	u
تنش تسلیم (Pa)	Y
علائم یونانی	
ضریب انبساط حرارتی ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	a
گرنش	e
گام گرنش در راستای شعاعی	$d\epsilon_r$
گام گرنش در راستای محیطی	$d\epsilon_\theta$
گام گرنش در راستای طولی	$d\epsilon_z$
ضریب لامه (Pa)	l
مدول برشی (Pa)	m
ضریب پواسون	n
تنش (Pa)	s
تنش بی بعد	\bar{s}
پارامتر تعريف شده به منظور محاسبه شعاع تسلیم و فشار حد الاستیک	ϕ
زیرنویس‌ها	
در شعاع داخلی	a
در شعاع خارجی	b
شعاعی	r
محیطی	q
طولی	z
مقدار مرجع	0
بالاتنویس‌ها	
در ناحیه الاستیک	e
در ناحیه پلاستیک	p
مقدار کل	T

6-مراجع

- [1] M. G. Derington, The onset yield in a thick cylinder subjected to