



تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای جداره ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی بر پایه قانون جریان پرائنتل-راس

مهسا قنبری مبارکه¹، فاطمه فرهت‌نیا^{2*}

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، خمینی شهر

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، خمینی شهر

*farhatnia@iaukhsh.ac.ir، 84175-119 صندوق پستی

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 شهریور 1393

پذیرش: 29 مهر 1393

ارائه در سایت: 11 آذر 1393

کلید واژگان:

تحلیل ترموالاستوپلاستیک

پوسته استوانه ای

مواد مدرج تابعی

شرایط کرنش صفحه‌ای

قانون جریان پرائنتل - راس

این مقاله به بررسی رفتار ترموالاستوپلاستیک پوسته جداره ضخیم استوانه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی تحت فشار داخلی و گرادیان حرارتی می‌پردازد. به منظور تحلیل ترموالاستو-پلاستیک پوسته از معادله جریان پرائنتل - راس در شرایط کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. این راهکار منجر به تعریف فرمولاسیون جدید برای پیدا کردن شعاع شروع تسلیم پوسته و محاسبه حد فشار الاستیک به ازای بارگذاری فشار داخلی توام با گرادیان حرارتی می‌شود. مدول الاستیسیته، ضریب انتقال حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و تنش تسلیم مطابق مدل اردوگان، تابعی از شعاع می‌باشند. با حل معادله تعادل حاکم بر پوسته استوانه‌ای در شرایط تقارن محوری، توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی حاصل شده است. در پایان نتایج عددی برای پوسته استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی به منظور بیان اثر فشار و گرادیان حرارتی بر نحوه چگونگی توزیع منطقه پلاستیک ارائه شده است. در هر دو حالت بارگذاری فشاری با گرادیان حرارتی و بدون آن، چگونگی شروع و انتشار منطقه پلاستیک پیش بینی شده است. نتایج مویده آن است که دو عامل شاخص توانی ماده مدرج تابعی و گرادیان حرارتی بر رفتار ترموالاستوپلاستیک پوسته تاثیرگذار هستند. با در نظر گرفتن پارامترهای توانی معین و افزایش گرادیان حرارتی، منطقه پلاستیک وسیع تر شده، چنانچه مشاهده می‌شود در بعضی موارد جهت شروع منطقه پلاستیک نیز عوض می‌شود. همچنین با اعمال فشار داخلی نشان داده شده می‌توان به تسلیم هم‌زمان در دو نقطه از پوسته رسید.

Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule

Mahsa Ghanbari Mobarakeh, Fatemeh Farhatnia*

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Khomeinishahr Branch, Isfahan, Iran

*P.O.B. 84175-119, Khomeinishahr, Iran, farhatnia@iaukhsh.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 13 September 2014
Accepted 21 October 2014
Available Online 02 December 2014

Keywords:

Thermo-Elasto-Plastic analysis
cylindrical shell
functionally graded materials
plane strain condition
Prandtl-Reuss flow rule

ABSTRACT

This study deals with thermo-elasto-plastic behaviour of functionally graded thick-walled cylinder that is exposed to internal pressure and temperature gradient. For this purpose, Von-Mises yield criterion and Prandtl-Reuss flow-rule under state of plane strain are utilized. The modulus of elasticity, thermal conductivity and thermal expansion coefficients are assumed to obey the power function in the radial position according to Erdogan's model. In this work, the presented approach leads to the definition of new formulation to determine the elastic limit pressure and predict the onset radius of yielding, spread and growth of plastic zone. The governing equilibrium equation of cylindrical shell in axi-symmetrical status is solved in order to determine the distribution of radial, circumferential stresses and radial displacement. Various examples are handled to investigate the effect of FG-power law parameters on the yield pattern and distribution of plastic zone. The distribution of radial displacement, radial and circumferential stresses are expressed as the functions of radial position. The numerical results show that by the appropriate choice of the FG parameters and the specified thermal gradient, the plastic zone can commence simultaneously from inside and outside, or intermediate radius.

1- مقدمه

رفتار ترمومکانیکی متفاوت در مواد مدرج تابعی می‌شود. بررسی رفتار ترموالاستوپلاستیک در پوسته‌های جداره ضخیم تحت فشار و گرادیان حرارتی در کاربردهای مهندسی بسیار مهم است. مهمترین کاربرد مواد مدرج تابعی در بهبود مشخصه‌های مکانیکی و ترمومکانیکی است، به‌طوری‌که در این

مواد مدرج تابعی¹، مواد غیرهمگنی هستند که خواص مواد به طور پیوسته و تدریجی در کل ساختار تغییر می‌کند. چنانچه این تغییر پیوسته خواص باعث

1- Functionally graded materials

Please cite this article using:

M. Ghanbari Mobarakeh, F. Farhatnia, Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 211-218, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Ghanbari Mobarakeh, F. Farhatnia, Thermo Elasto-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 211-218, 2015 (In Persian)

گونه مواد تمرکز تنش بسیار کاهش یافته، تنش حرارتی حداقل می‌گردد و شروع تسلیم پلاستیک و شکست برای بارگذاری حرارتی و مکانیکی می‌تواند به تاخیر بیافتد.

از مطالعاتی که در این زمینه صورت گرفته می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. درینگتون [1]، شروع تسلیم پذیری در پوسته‌های استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی، خارجی و گرادیان‌های حرارتی با شرایط انتهایی باز و بسته را با استفاده از معیار ترسکا پیش بینی کرد. تاثیر درجه حرارت روی توزیع تنش توسط والی [2] در نظر گرفته شد. او رفتار الاستیک - پلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم از جنس پلاستیک تحت فشار داخلی، خارجی و توزیع درجه حرارت در دیواره استوانه را بررسی کرد و معادلاتی برای فشار بحرانی در یک استوانه جدارضخیم با شرط انتهایی بسته تحت فشار و بار حرارتی و با استفاده از معیار ترسکا بدست آورد. بلاند [3]، با استفاده از معیار ترسکا معادلات تنش و جابه‌جایی را برای یک استوانه جدارضخیم از ماده کرنش - سخت شونده خطی تحت فشار داخلی و جریان حرارتی یک-نواخت بدست آورد. نقدآبادی و همکاران [4]، با توجه به اثر پوشینگر و معیار ترسکا یک راه حل تحلیلی الاستوپلاستیک برای پوسته جدار ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد الاستیک خطی بدست آوردند. آنها با تعیین فشار اتوفرتاژ¹ در حالات مختلف نشان دادند که طراحی پوسته‌ها بر اساس روش الاستوپلاستیک بسیار اقتصادی‌تر از روش‌های الاستیک است. رحیمی و همکاران [5]، با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی، معادله حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی را استخراج و حل دقیق برای تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ها در شرایط مختلف مرزی ارائه کردند. آنها نتایج خود را با نتایج حاصل از استوانه همگن مقایسه نمودند. قناد و همکاران [6]، با استفاده از تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن و محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی را استخراج کرده و نتایج حاصل از تنش و جابه‌جایی را با نتایج حاصل از نظریه مستوی مقایسه و شباهت‌ها را نشان دادند. لی و همکاران [7]، یک روش جدید برای بررسی تنش‌های حرارتی پایدار در استوانه تو خالی از جنس مواد مدرج تابعی ارائه کردند. تاثیر تغییرات شیب پارامترهای مواد بر روی تنش‌های حرارتی را نیز مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که شیب مناسب می‌تواند توزیع تنش‌های حرارتی در کل ساختار را ملایم‌تر کند. شاه‌سیاه و همکاران [8]، پایداری حرارتی پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی را بر اساس تئوری مرتبه اول پوسته و معادلات غیرخطی ساندرس مورد بررسی قرار دادند. جاسکلا و زیلنیکا [9]، به بررسی پایداری جابه‌جایی‌های بزرگ الاستوپلاستیک پوسته ساندویچی استوانه‌ای با سطوح نامتقارن تحت بارگذاری نیروهای طولی، فشار عرضی و برشی پرداختند. آنها رابطه کرنش جابه‌جایی را غیرخطی فرض کرده و سطوح پوسته را با ضخامت متفاوت در نظر گرفته و از روش ریتز در حل معادلات پایداری استخراج شده از روابط انرژی کرنشی استفاده کرده‌اند.

مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی پرداختند. آنها تغییرات پارامتر توانی را بر روی توزیع سطح تنش‌ها بررسی کردند. صادقان و همکاران [12]، بر اساس معیار ترسکا و تئوری تغییر شکل‌های کوچک به تحلیل تنش‌های الاستیک و پلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار و حرارت پرداختند. آنها اثر حرارت بر روی توزیع تنش‌ها و کرنش‌ها و همچنین رشد منطقه پلاستیک را در این نوع پوسته‌ها مطالعه کردند. اکبری الشتی و همکاران [13]، به بررسی رفتار ترموالاستیک پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از روش معادله دیفرانسیل مرتبه دوم پرداختند. پوسته کروی آنها شامل لایه‌های پیزوالکتریک بوده و تحت بارگذاری ترموالکترومکانیک قرار داشته است. آنها اثر درجه بندی خواص مواد، تغییرات دما و ضخامت لایه پیزوالکتریک روی تنش و میدان جابه‌جایی را مطالعه کردند. نایی و صدرآبادی [14]، به بررسی رفتار الاستوپلاستیک پوسته کروی از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری ترمومکانیکی پرداختند. از معیار فون مایز در بررسی رفتار تسلیم پوسته استفاده کردند و مدل سخت-شوندگی سینماتیکی خطی² را در حل معادلات تنش به کار بردند. آنها دریافتند که ترکیب فشار داخلی تسلیم و اعمال دماهای متفاوت در پوسته، تسلیم ایجاد می‌کند که این موضوع به تغییرات پارامتر مواد بسیار بستگی دارد. لئو و همکاران [15]، حدفشار پلاستیک پوسته کروی را با در نظر گرفتن پارامتر سخت شوندگی در تغییرشکل‌های بزرگ، محاسبه کردند. در تحقیقات گذشته تاثیر دما بر خواص مکانیکی پوسته در نظر گرفته نشده بود. در این مقاله رفتار ترموالاستوپلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی بر اساس قانون جریان پرناتل - راس و معیار فون مایز، در اثر بارگذاری ترمومکانیکی بر روی توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی و رشد منطقه پلاستیک بررسی می‌شود. رفتار درجه بندی پوسته در تعیین ضریب الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، ضریب انتقال حرارتی و تنش تسلیم توابع توانی از شعاع تعریف شده‌اند. پیش بینی تسلیم پوسته و محاسبه حد فشار الاستیک با تعیین مقدار پارامتر نرمالیزه شده‌ای که بر پایه معیار تسلیم فون مایز و قانون جریان پرناتل - راس استخراج شده، از نکات قابل توجه ای است که در این پژوهش محقق گردیده است.

2- فرمولاسیون مسئله

خواص مواد بر اساس مدل اردوگان [16]، در امتداد شعاع در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) مطابق روابط (1) و (2) در نظر گرفته شده‌اند.

$$E(r, T) = \bar{E} \left(\frac{r}{b}\right)^{m_1} = E_0(T) r^{m_1} \quad (1)$$

$$\alpha(r, T) = \bar{\alpha} \left(\frac{r}{b}\right)^{m_2} = \alpha_0(T) r^{m_2} \quad (2)$$

که در α, E به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی می‌باشند. همچنین α_0, E_0 داده‌های تعریف شده به ازای شعاع داخلی پوسته هستند. با توجه تغییرات کوچک ضریب هدایت حرارتی برحسب دما می‌توان تابعیت آن را از دما مستقل گرفت [17]. بنابراین این کمیت را می‌توان تابعی از مختصه مکانی مطابق رابطه (3) فرض نمود [18].

$$k(r) = \bar{k} \left(\frac{r}{b}\right)^{m_3} = k_0 r^{m_3} \quad (3)$$

k_0 داده تعریف شده برای تابع ضریب هدایت حرارتی می‌باشد. تنش تسلیم نیز تابع توانی از r مطابق رابطه (4) فرض شده است [12,14]:

$$Y(r) = \bar{Y} \left(\frac{r}{b}\right)^{m_4} = Y_0 r^{m_4} \quad (4)$$

نایاک و همکاران [10]، تنش‌ها و کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را در پوسته‌های کروی جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی بدست آوردند. آنها از معیار ون مایز برای تخمین تنش معادل در محاسبه محل وقوع تسلیم استفاده کردند. بیات و همکاران [11]، به حل ترموالاستیک پوسته‌های کروی جدار ضخیم از جنس

2-1-3- حل معادله میدان جابه‌جایی پوسته

با تعیین معادله توزیع دما، معادله جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (14) حاصل می‌شود:

$$r^2 u'' + Aru' + Bu = C_2 r^{m_1+1} + C_1 r^{m_2-m_3+1} \quad (14)$$

که در معادله (14) ضرایب $C_1 = \frac{(1+\nu)\alpha_0(m_1+m_2-m_3)D_1}{(1-\nu)}$ و $C_2 = \frac{(1+\nu)\alpha_0(m_1+m_2)D_2}{(1-\nu)}$ هستند.

حل معادله جابه‌جایی دیفرانسیلی اولیری غیر همگن (14) به صورت رابطه (15) بدست می‌آید [21].

$$u(r) = L_1 r^{n_1} + L_2 r^{n_2} + L_3 r^{m_2-m_3+1} + L_4 r^{m_2+1} \quad (15)$$

که در معادله (15)، $n_{1,2} = \frac{1-A \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ ، $L_3 = \Delta = (A-1)^2 - 4B$ و $L_4 = \frac{C_2}{[m_2^2 + (2+m_1)m_2] + m_1} \frac{C_1}{[(m_2-m_3)^2 + (2+m_1)(m_2-m_3)] + m_1}$ می‌باشند. با حل معادله جابه‌جایی روابط تنش را می‌توان با روابط (16) و (17) محاسبه کرد.

$$\sigma_r(r) = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} [L_1 Q_1 r^{n_1-1} + L_2 Q_2 r^{n_2-1} + Q_3 r^{m_2} + Q_4 r^{m_2-m_3}] \quad (16)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} [L_1 G_1 r^{n_1-1} + L_2 G_2 r^{n_2-1} + G_3 r^{m_2} + G_4 r^{m_2-m_3}] \quad (17)$$

ضرایب $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, G_1, G_2, G_3, G_4$ در پیوست 2 آورده شده است. با اعمال شرایط مرزی مکانیکی (18) و (19) ضرایب L_1 و L_2 بدست می‌آیند. (پیوست 3)

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a \quad (18)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = -P_b \quad (19)$$

2-2- رفتار تسلیم پوسته

بر اساس قانون جریان پرناتل-راس میزان کرنش کل مجموع دو کرنش الاستیک و پلاستیک است (رابطه 20).

$$d\varepsilon_i^T = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p \quad i = r, \theta, z \quad (20)$$

رابطه بین گام کرنش‌ها و تنش‌ها در محدوده پلاستیک مطابق رابطه (21) می‌باشد [22].

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{\left(\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z)\right)} = \frac{d\varepsilon_\theta^p}{\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)\right)} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\left(\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r)\right)} \quad (21)$$

که اعمال شرایط کرنش صفحه‌ای ($d\varepsilon_z^p = 0$)، منجر به تعیین تنش در راستای طولی پوسته می‌شود (رابطه 22).

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) \quad (22)$$

که $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است.

معادله (23) رابطه تسلیم معیار فون مایز است [19].

$$2Y^2(r) = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \quad (23)$$

$Y(r)$ تنش تسلیم است.

با قرار دادن رابطه (22) در رابطه (23)، معیار تسلیم فون مایز در شعاع

تسلیم (r_y) به صورت رابطه (24) بدست می‌آید.

$$Y(r_y) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (24)$$

تنش بی بعد به صورت رابطه (25) تعریف می‌شود.

در اینجا Y_0 داده تعریف شده برای Y و r مختصه شعاعی، b قطر خارجی پوسته و m_1, m_2, m_3, m_4 پارامترهای توانی در تعریف خواص ماده می‌باشند.

2-1- روابط الاستیک پوسته

2-1-1- محاسبه میدان جابه‌جایی پوسته

در یک پوسته استوانه‌ای روابط تنش-کرنش از رابطه (5) به دست می‌آید [19]:

$$\sigma_r = (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_r + \lambda(r)\varepsilon_\theta - (3\lambda(r) + 2\mu(r))\alpha(r)T(r)$$

$$\sigma_\theta = (\lambda(r) + 2\mu(r))\varepsilon_\theta + \lambda(r)\varepsilon_r - (3\lambda(r) + 2\mu(r))\alpha(r)T(r) \quad (5)$$

که در معادله بالا $T(r)$ اختلاف درجه حرارت با درجه حرارت مرجع بوده و ضرایب لامه $\lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ و $\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)}$ هستند. رابطه کرنش-میدان جابه‌جایی از روابط (6) و (7) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_r(r) = \frac{du(r)}{dr} = u' \quad (6)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{u}{r} \quad (7)$$

با توجه به شرایط تقارن هندسی و بارگذاری در پوسته معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای به معادله (8) تقلیل می‌یابد.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری معادلات (5) الی (7) و اعمال فرضیات (1) تا (4) در رابطه (8)، معادله میدان جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (9) به دست می‌آید:

$$r^2 u'' + Aru' + Bu = \frac{(1+\nu)\alpha_0 r^{m_2}}{(1-\nu)} [(m_1 + m_2)rT(r) + r^2 T'(r)] \quad (9)$$

که در تمامی معادلات علامت های (') و ('') به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم نسبت به مختصه شعاعی می‌باشند.

در معادله (9)، $A = 1 + m_1$ و $B = \frac{\nu(1+m_1)-1}{1-\nu}$ می‌باشد.

2-1-2- تحلیل حرارتی پوسته

معادله انتقال حرارت یکنواخت یک بعدی در پوسته‌های استوانه‌ای با رابطه (10) توصیف می‌شود [20].

$$T'' + \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r}\right)T' = 0 \quad (10)$$

شرایط مرزی حرارتی اعمال شده بر پوسته استوانه‌ای در روابط (11) و (12) نشان داده شده‌اند [20].

$$D_{11}T'(a) + D_{12}T(a) = t_1 \quad (11)$$

$$D_{21}T'(b) + D_{22}T(b) = t_2 \quad (12)$$

که در آن D_{11} و D_{21} ضرایب هدایت حرارتی D_{12} و D_{22} ضرایب همرفت حرارتی، a شعاع داخلی، b شعاع خارجی t_1 و t_2 ثوابت معینی در شعاع داخلی و خارجی هستند.

با اعمال رابطه ضریب انتقال حرارتی به صورت توانی در معادله انتقال حرارت، حل عمومی معادله (10) مطابق رابطه (13) به دست می‌آید [21].

$$T(r) = D_1 r^{-m_3} + D_2 \quad (13)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی، ثوابت D_1 و D_2 بدست می‌آیند. (پیوست 1)

بی‌نهایت می‌شوند. در این مورد خاص مسئله جداگانه حل می‌شود. با جایگذاری معیار تسلیم فون مایز در معادله تعادل، تنش‌ها در محدوده‌ی پلاستیک و میدان جابه‌جایی از روابط (33) تا (36) محاسبه می‌شوند.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Y_0}{r} \quad (33)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \ln(r) + E_2 \quad (34)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 (1 + \ln(r)) + E_2 \quad (35)$$

$$u(r) = \frac{F_6}{r} + F_7 r \ln r + F_8 r \quad (36)$$

E_2 یک ثابت انتگرالی وابسته به شرایط مرزی است. که ضرایب $F_8 = \frac{E_2(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} + (1+\nu)\alpha_0(D_1 + D_2)$ و $F_7 = \frac{2Y_0(1+\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{3}E_0}$ هستند.

3- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از معادلات به دست آمده ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط مرزی حرارتی دیریکله، شرایط مرزی مکانیکی، استفاده از روابط پیوستگی در شعاع شروع منطقه پلاستیک (37) و محاسبه ثوابت F_1 ، E_1 و E_2 ، تنش‌ها در محدوده‌ی الاستیک و پلاستیک و همچنین شعاع تسلیم محاسبه می‌شوند.

$$u^e(r^p) = u^p(r^p), \sigma_r^e(r^p) = \sigma_r^p(r^p), \sigma_\theta^e(r^p) = \sigma_\theta^p(r^p) \quad (37)$$

بالانویس e نمایانگر محدوده‌ی الاستیک، بالانویس p نمایانگر محدوده‌ی پلاستیک و r^p شعاع شروع منطقه پلاستیک می‌باشد. پوسته با شعاع داخلی $a = 0/5(m)$ و شعاع خارجی $b = 1(m)$ در نظر گرفته می‌شود. ضریب پواسون پوسته $\nu = 0/3$ و $\bar{Y} = 4/3 \times 10^8 (Pa)$ است. شرایط مرزی حرارتی در نظر گرفته شده از نوع دیریکله است که شار حرارتی را در شعاع‌های داخلی و خارجی برابر مجموع شار حرارتی عبوری به صورت هدایت حرارتی و همرفت گرمایی در شعاع‌های مربوطه تعریف می‌کند. دمای خارجی در نظر گرفته شده $T(b) = 0^\circ C$ می‌باشد.

$$t_2 = 0$$

$$D_{11} = 0(^\circ C)^{-1}, D_{12} = 1(^\circ C)^{-1}, D_{21} = 0(^\circ C)^{-1}, D_{22} = 1(^\circ C)^{-1}$$

$$\Delta T = T(a) - T(b)$$

مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در هر گرادیان حرارتی با استفاده از رابطه تولوکیان (38) به دست می‌آید (در این رابطه T بر حسب درجه کلوین است) [17].

$$q_j = q_0(q_{-1}T^{-1} + 1 + q_1T + q_2T^2 + q_3T^3) \quad (38)$$

ضرایب رابطه (38) و مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی به ازای گرادیان‌های حرارتی متفاوت در جداول 1 و 2 آورده شده است. سایر پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$P_b = 0(Pa), P_a = 8 \times 10^8(Pa) \\ m_1 = 2.2, m_2 = -2.9, m_3 = -2.2, m_4 = -4$$

تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی متفاوت در شکل 1 نمایش داده شده است و همانطور که دیده می‌شود به ازای مقادیر $\phi > 1$ پوسته در منطقه پلاستیک قرار گرفته است.

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{Y(a)} = \frac{\sigma_i}{Y \cdot a^{m_4}} \quad i = r, \theta \quad (25)$$

پارامتر ϕ طبق رابطه (26) به منظور محاسبه شعاع تسلیم و فشار حدالاستیک تعریف می‌شود.

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{r_y} \right)^{m_4} (\bar{\sigma}_\theta(r_y) - \bar{\sigma}_r(r_y)) \quad (26)$$

مقادیری که ϕ به خود اختصاص می‌دهد مشخص کننده آن است که آیا تسلیم اتفاق می‌افتد یا خیر:

$$\phi: \begin{cases} < 1 \rightarrow \text{پوسته الاستیک ناحیه} \\ = 1 \rightarrow \text{پوسته تسلیم ناحیه شروع} \\ > 1 \rightarrow \text{پوسته پلاستیک ناحیه} \end{cases}$$

2-3- روابط پلاستیک پوسته

با اعمال معیار فون مایز (24) در معادله دیفرانسیلی تعادل (8)، تنش‌های شعاعی و محیطی در محدوده پلاستیک مطابق روابط (27) و (28) تعیین می‌شوند.

$$\sigma_r(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r^{m_4} Y_0}{m_4} + E_1 \quad (27)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{2(1+m_4)r^{m_4} Y_0}{\sqrt{3}m_4} + E_1 \quad (28)$$

E_1 یک ثابت اختیاری وابسته به شرایط مرزی است.

با فرض تراکم ناپذیری تغییر شکل پوسته در محدوده پلاستیک از رابطه (29) به دست می‌آید [23].

$$\varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \quad (29)$$

که ε_r^p ، ε_θ^p و ε_z^p به ترتیب کرنش‌های شعاعی، محیطی و طولی در ناحیه پلاستیک هستند، مجموع کرنش‌های شعاعی و محیطی کل را می‌توان از رابطه (30) بدست آورد.

$$\varepsilon_r^T + \varepsilon_\theta^T = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(r)} (\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r)) + 2(1+\nu)\alpha(r) \cdot T(r) \quad (30)$$

ε_r^T و ε_θ^T به ترتیب کرنش‌های شعاعی و محیطی کل هستند. با استفاده از روابط کرنش-میدان جابه‌جایی (6 و 7) و تنش‌های محدوده پلاستیک (27) و (28) در معادله (30)، میدان جابه‌جایی پوسته به صورت رابطه (31) بدست می‌آید.

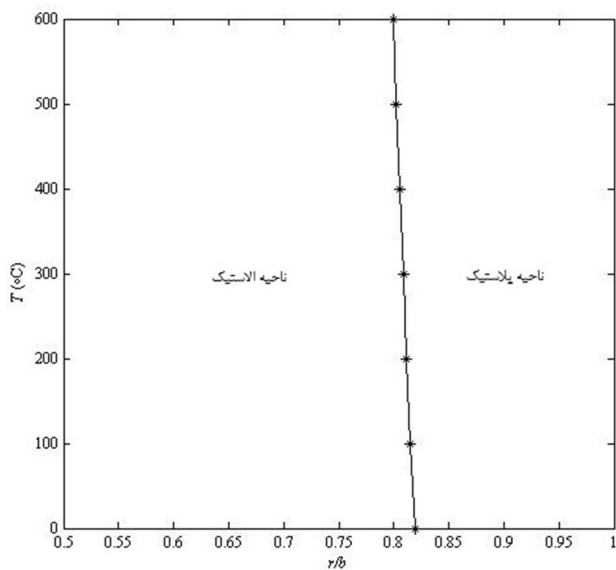
$$\frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} = \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2+m_4)Y_0}{m_4} \right] r^{m_4-m_1} + \frac{2E_1(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} r^{-m_1} + 2(1+\nu)\alpha_0 C_1 r^{m_2-m_3} + 2(1+\nu)\alpha_0 C_2 r^{m_2} \quad (31)$$

با حل معادله (31) جابه‌جایی شعاعی پوسته تعیین می‌شود (رابطه (32)).

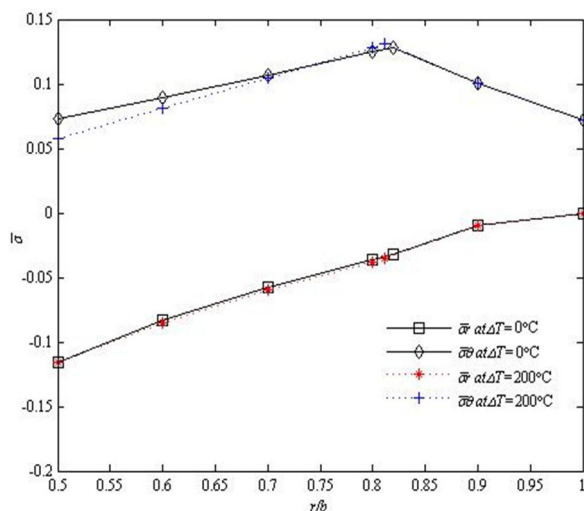
$$u(r) = \frac{F_1}{r} + F_2 r^{m_2-m_3+1} + F_3 r^{m_2+1} + F_4 r^{m_4-m_1+1} + F_5 r^{1-m_1} \quad (32)$$

که در معادله بالا ضرایب $F_1 = \frac{2(1+\nu)\alpha_0 D_1}{m_2-m_3+2}$ ، $F_2 = \frac{2(1+\nu)\alpha_0 D_2}{m_2+2}$ ، $F_3 = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)(2+m_4)Y_0}{\sqrt{3}m_4 E_0 (m_4-m_1+2)}$ و $F_4 = \frac{2E_1(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0(2-m_1)}$ می‌باشند.

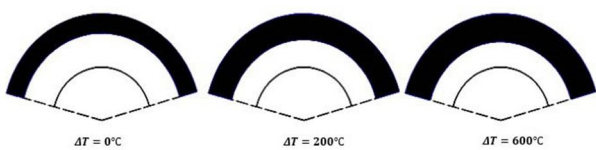
اما در حالتی که تمامی پارامترهای توانی صفر باشند رفتار تسلیم وابسته به موقعیت شعاعی نقاط مختلف پوسته نباشد، ماده همگن فرض می‌گردد. در این حالت رابطه (31) و تنش‌های محیطی و شعاعی پلاستیک پوسته



شکل 2 تغییرات منطقه الاستیک و پلاستیک در گرادیان‌های حرارتی متفاوت
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$



شکل 3 تغییرات تنش‌های بی‌بعد شعاعی و محیطی به ازای
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$



شکل 4 رشد منطقه پلاستیک سطح خارجی در گرادیان‌های حرارتی مختلف
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$

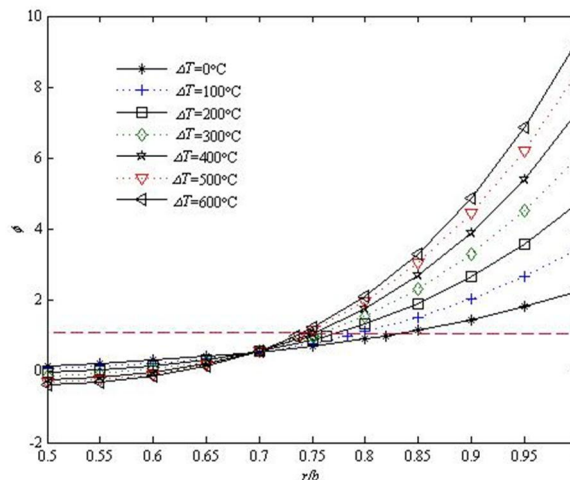
تغییرات فشار حد الاستیک داخلی در گرادیان‌های حرارتی متفاوت در شکل 5 نمایش داده شده است. همانطور که دیده می‌شود در بعضی نقاط همزمان دو نقطه از پوسته یک فشار حدالاستیک دارند. این بدین معناست که پوسته به ازای یک فشارمعیین و گرادیان حرارتی مشخص، در دو نقطه به تسلیم رسیده است. با در نظر گرفتن $P_a = 5 \times 10^9$ (Pa) سطح میانی پوسته در ناحیه پلاستیک قرار می‌گیرد به طوریکه سطوح داخلی و خارجی در ناحیه الاستیک قرار داشته و با اعمال گرادیان‌های حرارتی این منطقه بزرگتر شده تا جاییکه با اعمال گرادیان‌های حرارتی بالاتر از 325 درجه سانتیگراد، سطح

جدول 1 پارامترهای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در فولاد ضد زنگ [17]

α_0 ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	E_0 (Pa)	q_j
$12/33 \times 10^{-6}$	$201/04 \times 10^9$	q_0
0	0	q_{-1}
$8/086 \times 10^{-4}$	$3/079 \times 10^{-4}$	q_1
0	$-6/534 \times 10^{-7}$	q_2
0	0	q_3

جدول 2 مقادیر مدول الاستیسیته، و ضریب انبساط حرارتی در گرادیان‌های حرارتی مختلف در فولاد ضد زنگ

$E_0 \times 10^{11}$ (Pa)	$\alpha_0 \times 10^{-5}$ ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	ΔT ($^{\circ}\text{C}$)
2/0815	1/5053	0
2/0585	1/6050	100
2/0092	1/7047	200
1/9337	1/8044	300
1/8319	1/9041	400
1/7088	2/0038	500
1/5494	2/1035	600



شکل 1 تغییرات پارامتر phi در گرادیان‌های حرارتی مختلف
 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2.2, -2.9, -2.2, -4)$

همچنین با توجه به شکل 2، زمانی که پوسته تحت فشار داخلی قرار دارد، سطح خارجی پوسته در منطقه پلاستیک قرار دارد. با اعمال گرادیان حرارتی تا 600 درجه سانتیگراد این ناحیه بزرگتر شده و سطح خارجی بیشتری از پوسته در منطقه پلاستیک قرار می‌گیرد.

تغییرات تنش بی‌بعد در حالت اعمال فشار داخلی بدون گرادیان حرارتی و حالت اعمال فشار داخلی همراه با گرادیان حرارتی 200 درجه سانتیگراد در شکل 3 نشان داده شده است و همچنین رشد منطقه پلاستیک با اعمال گرادیان حرارتی در سطح خارجی پوسته به خوبی در شکل 4 قابل مشاهده است.

با اعمال پارامترها به صورت:

$$P_b = 0 \text{ (Pa)}, P_a = 5 \times 10^9 \text{ (Pa)}$$

$$m_1 = -4.23, m_2 = 8, m_3 = 8, m_4 = -6$$

با در نظر گرفتن پارامترها به صورت

$$P_b = 0(\text{Pa}), P_a = 2 \times 10^9(\text{Pa}), m_1 = -2.9, m_2 = -2.9, m_3 = -2.9, m_4 = -3.4$$

تغییرات پارامتر ϕ در هر شعاع پوسته به صورت شکل 8 است. با اعمال فشار داخلی تنها بر روی پوسته، سطح داخلی پوسته در منطقه پلاستیک قرار دارد اما با اعمال گرادیان‌های حرارتی بالاتر دیده می‌شود که منطقه پلاستیک سطح خارجی پوسته را پوشش می‌دهد. در واقع افزایش گرادیان حرارتی باعث تغییر جهت شروع منطقه پلاستیک شده است. تغییرات منطقه پلاستیک میانی در گرادیان‌های حرارتی مختلف را می‌توان در شکل 9 مشاهده نمود.

در مقاله صادقیان و اختراعی تحلیل تنش بر اساس معیار ترسکا صورت گرفته است و تمامی پارامترهای E, α, k تنها توابعی از شعاع هستند. در اینجا به منظور صحت سنجی با در نظر گرفتن داده‌های مقاله صادقیان و اختراعی [12] به صورت:

$$m_1 = -2.9, m_2 = -2.9, m_3 = -2.9, m_4 = -3.4$$

$$a = 0.4(\text{m}), b = 1(\text{m})$$

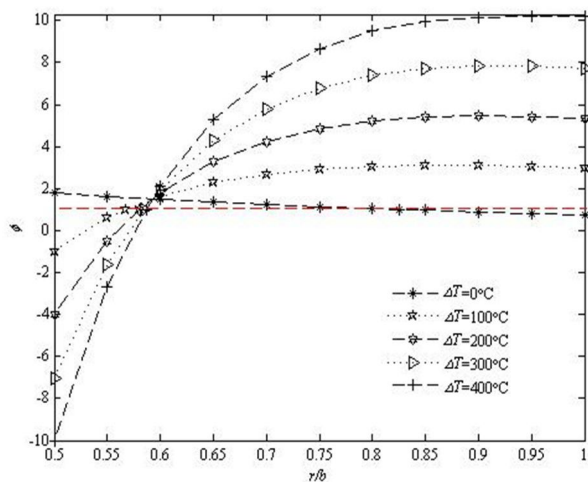
$$p_a = 8 \times 10^8(\text{Pa}), E_0 = 2 \times 10^{11}(\text{Pa})$$

$$\alpha_0 = 1.2 \times 10^{-6}(\text{°C})^{-1}, \bar{Y} = 4.3 \times 10^8(\text{Pa})$$

نتایج در دو معیار ترسکا (حاصل از کار صادقیان و اختراعی) و فون مایرز (حاصل از این مقاله) در جدول 3 الی 5 مقایسه شده است.

4- نتیجه‌گیری نهایی

در این مقاله به تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی در شرایط کرنش صفحه‌ای بر اساس قانون جریان پراگتال - راس پرداخته شد. رفتار تسلیم پوسته براساس معیار فون مایرز

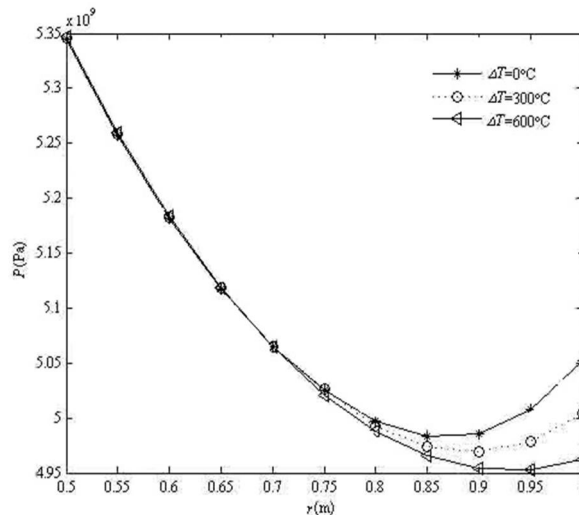


شکل 8 تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-2.9, -2.9, -2.9, -3.4)

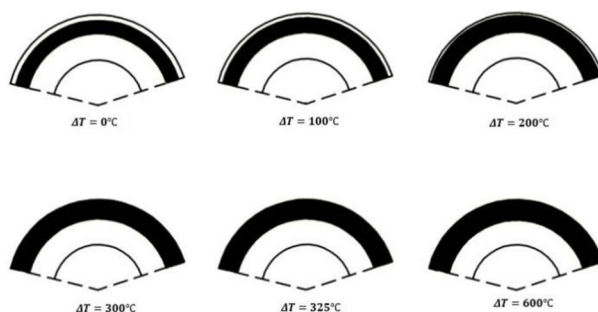


شکل 9 تغییرات منطقه پلاستیک در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-2.9, -2.9, -2.9, -3.4)

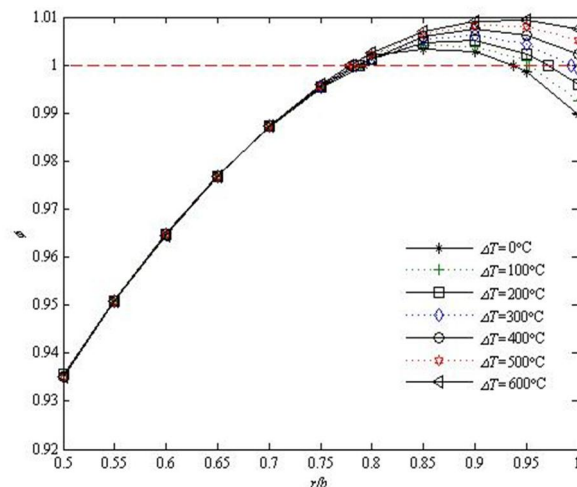
خارجی پوسته کاملاً در منطقه پلاستیک قرار می‌گیرد. این تغییرات در شکل 6 نمایش داده شده است. تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی متفاوت در شکل 7 دیده می‌شود. نحوه قرارگیری پوسته در هر دما در منطقه پلاستیک قابل مشاهده است. با اعمال گرادیان حرارتی در دو نقطه از پوسته $\phi = 1$ شده است و به ازای مقادیر بین این دو نقطه $\phi > 1$ است این بدان معناست که منطقه میانی پوسته در ناحیه پلاستیک قرار دارد.



شکل 5 تغییرات حد فشار الاستیک در گرادیان‌های حرارتی متفاوت
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8, 8, -6)



شکل 6 تغییرات منطقه پلاستیک میانی در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8, 8, -6)



شکل 7 تغییرات پارامتر ϕ در گرادیان‌های حرارتی مختلف
(m_1, m_2, m_3, m_4) = (-4.23, 8, 8, -6)

- منطقه پلاستیک می‌تواند از سطح خارجی شروع شود، به طوری که به ازای بعضی پارامترهای توانی و فشار داخلی وارد بر پوسته، سطح خارجی آن در منطقه پلاستیک قرار می‌گیرد و با اعمال گرادیان حرارتی به صورت همزمان این ناحیه بزرگتر شده و سطح خارجی بیشتری از پوسته در منطقه پلاستیک واقع می‌شود.

- منطقه پلاستیک می‌تواند از سطح میانی شروع شود، به طوری که سطوح داخلی و خارجی در ناحیه الاستیک قرار داشته باشند. با اعمال گرادیان‌های حرارتی بالا منطقه پلاستیک میانی بزرگتر شده و حتی می‌تواند به سطح خارجی پوسته برسد.

- جهت آغاز شده منطقه پلاستیک از سطح داخلی می‌تواند با افزایش گرادیان حرارتی تغییر کند.

- در پوسته به ازای یک فشار معین و گرادیان حرارتی مشخص می‌توان به تسلیم همزمان در دو نقطه از پوسته رسید. در واقع با پارامترهای توانی معین، همزمان دو نقطه از پوسته، فشار حدالاستیک یکسان دارند.

- با تعیین حد فشار الاستیک با پارامترهای توانی مشخص می‌توان محل وقوع منطقه پلاستیک را در یک فشار معین تعیین نمود.

پیوست 1:

$$D_1 = \frac{D_{22}t_1 - D_{12}t_2}{D_{12}(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - D_{22}(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}$$

$$D_2 = \frac{t_1(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - t_2(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}{D_{12}(m_3D_{21}b^{-(m_3+1)} - D_{22}b^{-m_3}) - D_{22}(m_3D_{11}a^{-(m_3+1)} - D_{12}a^{-m_3})}$$

پیوست 2:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1 - \nu)n_1 + \nu \\ Q_2 &= (1 - \nu)n_2 + \nu \\ Q_3 &= L_4(m_2 + 1 - \nu m_2) - D_2\alpha_0(1 + \nu) \\ Q_4 &= L_3((m_2 - m_3)(1 - \nu) + 1) - D_1\alpha_0(1 + \nu) \\ G_1 &= (n_1 - 1)\nu + 1 \\ G_2 &= (n_2 - 1)\nu + 1 \\ G_3 &= L_4(1 + \nu m_2) - D_2\alpha_0(1 + \nu) \\ G_4 &= L_3((m_2 - m_3)\nu + 1) - D_1\alpha_0(1 + \nu) \end{aligned}$$

پیوست 3:

$$L_1 = \frac{1}{Q_1(a^{n_1-1}b^{n_2-1} - a^{n_2-1}b^{n_1-1}) \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E_0} \left\{ P_b \frac{a^{n_2-1}}{b^{m_1}} - P_a \frac{b^{n_2-1}}{a^{m_1}} \right\} - Q_3(a^{m_2}b^{n_2-1} - b^{m_2}a^{n_2-1}) - Q_4(a^{m_2-m_3}b^{n_2-1} - b^{m_2-m_3}a^{n_2-1}) \right]}$$

$$L_2 = \frac{1}{Q_2(a^{n_2-1}b^{n_1-1} - a^{n_1-1}b^{n_2-1}) \left[\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E_0} \left\{ P_b \frac{a^{n_1-1}}{b^{m_1}} - P_a \frac{b^{n_1-1}}{a^{m_1}} \right\} - Q_3(a^{m_2}b^{n_1-1} - b^{m_2}a^{n_1-1}) - Q_4(a^{m_2-m_3}b^{n_1-1} - b^{m_2-m_3}a^{n_1-1}) \right]}$$

جدول 3 تنش شعاعی و محیطی بی بعد شده در حالت اعمال فشار داخلی

شعاع	تنش شعاعی		تنش محیطی	
	ترسکا [12]	فون مایرز	ترسکا [12]	فون مایرز
0/4	-0/0825	-0/0825	0/013	0/013
0/5	-0/0623	-0/0623	0/024	0/024
0/6	-0/0467	-0/0467	0/038	0/038
0/7	-0/0335	-0/0335	0/0527	0/0527
0/8	-0/0218	-0/0218	0/069	0/0668
0/9	-0/0056	-0/0065	0/0579	0/0512
1	0	0	0/0444	0/0512

جدول 4 تنش شعاعی و محیطی بی بعد شده در حالت اعمال فشار داخلی به همراه گرادیان حرارتی 700 درجه سانتیگراد

شعاع	تنش شعاعی		تنش محیطی	
	ترسکا [12]	فون مایرز	ترسکا [12]	فون مایرز
0/4	-0/0825	-0/0825	-0/147	-0/148
0/5	-0/0671	-0/0671	0/0047	0/0047
0/6	-0/0533	-0/0533	0/0267	0/0267
0/7	-0/0402	-0/0402	0/0513	0/0513
0/8	-0/0148	-0/0270	0/0799	0/0799
0/9	-0/0056	-0/0065	0/0579	0/0512
1	0	0	0/0444	0/0512

جدول 5 شعاع تسلیم بی بعد در گرادیان‌های حرارتی متفاوت بر حسب درجه سانتیگراد

گرادیان حرارتی	ترسکا [12]	فون مایرز
0	0/7761	0/8048
100	0/7676	0/7952
200	0/7613	0/7879
300	0/7551	0/7808
400	0/7501	0/7786
500	0/7468	0/7714
600	0/7411	0/7654
700	0/7358	0/7578

بررسی و پارامتر ϕ به منظور معیاری برای تعیین شعاع تسلیم و محاسبه حد فشار الاستیک مطابق با آن ارائه شد. به طوری که به ازای مقادیر $\phi < 1$ پوسته در منطقه الاستیک، $\phi = 1$ شروع تسلیم و $\phi > 1$ پوسته در منطقه پلاستیک قرار می‌گرفت. آنچه از نتایج حاصل شده آن است که:

- رشد منطقه پلاستیک علاوه بر پارامترهای FGM به گرادیان حرارت نیز بستگی دارد.

- با اعمال گرادیان‌های حرارتی متفاوت در شرایطی که اثر دما بر روی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی اعمال شده است، وسعت منطقه پلاستیک بیشتر شده و جهت شروع آن نیز تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

5- فهرست علائم

E	مدول الاستیسیته (Pa)
k	ضریب انتقال حرارتی ($Wm^{-1}K^{-1}$)
P	فشار (Pa)
P_a	فشار داخلی (Pa)
P_b	فشار خارجی (Pa)
T	دما ($^{\circ}C$)
u	میدان جابه‌جایی
Y	تنش تسلیم (Pa)

علائم یونانی

a	ضریب انبساط حرارتی ($^{\circ}C^{-1}$)
e	کرنش
$d\varepsilon_r$	گام کرنش در راستای شعاعی
$d\varepsilon_{\theta}$	گام کرنش در راستای محیطی
$d\varepsilon_z$	گام کرنش در راستای طولی
l	ضریب لامه (Pa)
m	مدول برشی (Pa)
n	ضریب پواسون
s	تنش (Pa)
$\bar{\sigma}$	تنش بی بعد
ϕ	پارامتر تعریف شده به منظور محاسبه شعاع تسلیم و فشار حدالاستیک

زیر نویس‌ها

a	در شعاع داخلی
b	در شعاع خارجی
r	شعاعی
q	محیطی
z	طولی
0	مقدار مرجع

بالا نویس‌ها

e	در ناحیه الاستیک
p	در ناحیه پلاستیک
T	مقدار کتل

6- مراجع

- [1] M. G. Derington, The onset yield in a thick cylinder subjected to

uniform internal or external pressure and steady state heat flow, *Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press Ltd.*, Vol.7, pp. 83-103, 1982.

[2] E. Whalley, The design of pressure vessels subjected to thermal stresses, *Canad. J. Tech.*, Vol. 34, pp. 291-303, 1986.

[3] D. R. Bland, Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressure and to temperature gradients, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 4, pp. 209-229, 1989.

[4] R. Naghdabadi, M. H. Kargarnovin, and H. Darijani, Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elastoplastic approach, *Material and Design*, Vol. 30, pp. 3537-3544, 2009.

[5] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. EsmailzadehKhademi, General solution of plane elasticity of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 31-43, 2009. (In Persian)

[6] M. Ghannad, G. H. Rahimi, S. EsmailzadehKhademi, General solution of shear deformation of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No.4, pp. 13-26, 2010. (In Persian)

[7] X. F. Li, X. L. Peng, Thermoelastic analysis of a cylindrical vessel of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 87, pp. 203-210, 2010.

[8] R. Shahsiah, M. R. Eslami, and M. S. Boroujerdy, Thermal instability of functionally graded deep spherical shell, *Arch App Mech*, Vol. 81, pp. 1455-1471, 2011.

[9] L. Jaskula, J. Zielnica, Large displacement stability of elastic-plastic unsymmetrical sandwich cylindrical shells, *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, pp. 611-617, 2011.

[10] P. Nayak, S. C. Mondal, A. Nandi, Stress, strain and displacement of functionally graded thick spherical vessel, *International Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 3, No 4, pp. 2659-2671, 2011.

[11] Y. Bayat, M. Ghannad, and H. Torabi, Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading, *Arch App Mech*, Vol. 82, pp. 229-242, 2012.

[12] M. Sadeghian, T. H. Ekhteraei, Elasto-plastic axisymmetric thermal stress analysis of functionally graded cylindrical vessel, *J. Basic. Appl. Sci. Res*, Vol. 2, pp. 10246-10257, 2012.

[13] R. AkbariAlashti, M. Khorsand, M. H. Tarahhomi, Thermo-elastic analysis of a functionally graded spherical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method, *ScientiaIranica*, Vol. 20, pp. 109-119, 2013.

[14] S. Nayebi, A. Sadraabadi, FGM elastoplastic analysis under thermomechanical loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111-112, pp. 12-20, 2013.

[15] S. Y. Leo, K.C. Liao, Y-C Lin, Plastic limit pressure of spherical vessels with combined hardening involving large deformation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.114-115, pp 16-22, 2014.

[16] T. C. Chiu, F. Erdogan, Deboning of graded coatings under in-plane compression, *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 40, No. 25, pp.7155-7179, 2003.

[17] H. Shenshen, *Functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells*, United state og America, 2009.

[18] X. L. Huang, H. Shenshen, *Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments*, Journal of solids and structures, Vol. 41, pp. 2403-2427, 2004.

[19] J. Lubliner, *Plasticity theory*, university of California at Berkely, 2006.

[20] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of heat and mass transfer*, university of Notre Dame, 2006.

[21] Ad. Polyanin, Vf. Zaitsev, *Handbook of exact solutions of ordinary differential equations*, chapman and Hill/CRC, Florida, 2000.

[22] G. Wempner, D. Talaslidis, *Mechanics of solids and shells theories and approximations*, CRC press LLC, 2003.

[23] As. Khan, *Continuum theory of plasticity*, John Wiely and Sons:1995