مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1393، دوره 14، شماره 11، ص‌ص 89-96

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی سه بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم مدرج تابعی در برابر بار فشاری ناشی از ضربه

حسن ظفرمند[1]، مهران کدخدایان[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 9177948944، پست الکترونیکی kadkhoda@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 اردیبهشت 1393

پذیرش: 23 خرداد 1393

ارائه در سایت: 06 مهر 1393

کلید واژگان:

انتشار موج تنش

نظریه الاستیسیتهٔ سه بعدی

روش المان محدود مدرج سه بعدی

بار ضربه

مواد مدرج تابعی

چکیده

در این مقاله به بررسی و تحلیل سه بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی در برابر بار فشاری ناشی از ضربه پرداخته شده است. خواص مکانیکی ماده (مدول الاستیسیته و چگالی) در راستای ضخامت به طور پیوسته و بر اساس تابع توزیع توانی، متغیر و ضریب پواسون ثابت فرض شده است. معادلات حرکت بر اساس نظریه الاستیسیتهٔ سه بعدی به دست آمده‌اند و برای حل آن‌ها در دامنهٔ فضا و زمان از روش المان محدود مدرج سه بعدی مبتنی بر فرمولاسیون انرژی رایلی-ریتز و روش نیومارک استفاده شده است. در بارگذاری دینامیکی فرض شده است که سطح فوقانی صفحه تحت بار فشاری است که با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند که سپس و به صورت ناگهانی در زمانی معین باربرداری می‌شود. بدیهی است که این باربرداری به صورت یک ضربهٔ ناگهانی عمل می‌کند. در ادامه، پاسخ زمانی تغییر مکان در راستای ضخامت (خیز)، تنش‌ها در سه جهت و سرعت انتشار موج تنش به ازای توان‌های مختلف مادهٔ مدرج تابعی، شرایط مرزی گوناگون و نسبت‌های مختلف ضخامت به طول مورد مطالعه قرار گرفته است.

Three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plates under impact loading

Hassan Zafarmand, Mehran Kadkhodayan*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*P.O.B. 9177948944, Mashhad, Iran, kadkhoda@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 April 2014
Accepted 13 June 2014
Available Online 28 September 2014

Keywords:
Stress Wave Propagation
Three Dimensional Elasticity Theory
Three Dimensional Graded Finite Element Method
Impact Loading
Functionally Graded Materials

ABSTRACT

In this paper the three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plate subjected to impact loading is studied. Material properties (elasticity modulus and density) are assumed to vary continuously through the thickness direction of the plate according to a simple power law distributions and the Poisson's ratio is assumed to be constant. The equations of motion are based on three dimensional theory of elasticity. The three dimensional Graded Finite Element Method (GFEM) based on Rayleigh-Ritz energy formulation and Newmark direct integration method has been applied to solve the equations in time and space domains. It is assumed that in dynamic loading the upper surface of the plate is subjected to a pressure load that varies linearly with time, and suddenly is unloaded at a specified time. This unloading acts as an impact loading. Afterward, the time histories of displacement through the thickness, stresses in three dimensions and velocity of stress wave propagation for different values of power law exponents, various boundary conditions and thickness to length ratios have been investigated.

1- مقدمه

مواد مدرج تابعی، مواد مرکب غیر همگنی هستند که از دو یا چند مادهٔ مختلف تشکیل شده‌اند و ترکیب یا درصد حجمی اجزاء تشکیل‌دهنده به طور پیوسته در امتداد یک یا دو بعد خاص متغیر است، در نتیجه خواص و ساختار آن‌ها به طور پیوسته در امتداد همان بعد تغییر خواهد کرد. این ایده اولین بار توسط محققان ژاپنی استفاده شد [1]. تغییرات تدریجی و پیوستهٔ این مواد باعث شده تا دارای ویژگی‌های بسیار مهم و سودمندی جهت کاربرد در صنایع مختلف باشند.

رفتار مکانیکی مواد مدرج تابعی با هندسه‌های گوناگون و شرایط بارگذاری متفاوت، توسط محققین بسیاری بررسی شده است. در میان هندسه‌های مورد بررسی، صفحات به علت کاربرد وسیع در سازه‌های مهندسی، از اهمیت بیشتری برخوردارند. اکثر قریب به اتفاق تحقیقاتی که در زمینهٔ تحلیل صفحات انجام‌شده، مبتنی بر نظریه‌های دو بعدی مانند نظریه کلاسیک یا نظریه‌های تغییر شکل برشی است. اگر چه با استفاده از این نظریه‌ها مسئله ساده‌تر و حجم محاسبات کمتر می‌شود، اما به علت فرضیات ساده کننده، به خصوص در صفحات ضخیم و نسبتاً ضخیم دقت جواب‌ها

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

H. Zafarmand, M. Kadkhodayan, Three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plates under impact loading, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 11, pp. 89-96, 2014 (In Persian)

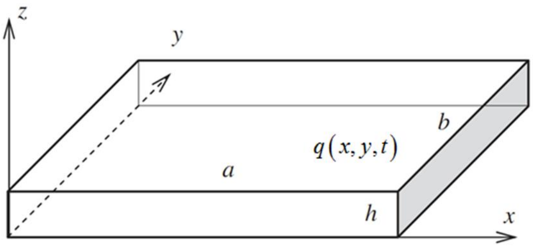
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.11.18.7]

پایین می‌آید، لذا برای تحلیل صفحات ضخیم نظریه‌های دو بعدی مناسب نبوده و باید از نظریه‌های سه بعدی استفاده کرد.

تاکنون مقالات بسیاری در زمینهٔ پاسخ دینامیکی صفحات ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی نگاشته شده است. اکبرزاده و همکارانش [2] رفتار مکانیکی صفحات مدرج تابعی تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی را بررسی کرده‌اند. معادلات بر اساس نظریه برشی مرتبهٔ اول و سوم به دست آمده و به حل تحلیلی آن‌ها پرداخته شده است. رضایی مژده‌ای و همکارانش [3] به تحلیل سه بعدی استاتیکی و دینامیکی صفحات مدرج تابعی پرداخته‌اند. معادلات حاکم با استفاده از روش بدون المان محلی پتروف گارکین[1] حل شده‌اند. سان و لو [4-6] پاسخ گذرا و انتشار موج تنش در صفحات مدرج تابعی را مورد تحقیق قرار داده‌اند. معادلات مبتنی بر نظریه برشی مرتبهٔ اول و یا مراتب بالا است. هاشمی نژاد و قشلاقی [7] به بررسی سه بعدی دینامیکی صفحات ضخیم مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک پرداخته‌اند. روش حل به صورت نیمه تحلیلی و شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. فنگ و همکارانش [8] پاسخ گذرای ترموالاستیک صفحات مدرج تابعی را در حالت سه بعدی مورد بررسی قرار داده‌اند. شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده فرض شده و معادلات با استفاده از روش انتقال لاپلاس[2] و روش تیراندازی[3] حل شده‌اند. کیان و همکارانش [9] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات مدرج تابعی پرداخته‌اند. معادلات بر اساس نظریه برشی مرتبهٔ بالا به دست آمده و توسط روش بدون المان محلی پتروف گارکین حل شده است. دینیس و همکارانش [10] با ارائهٔ نوع جدیدی از نظریه برشی مرتبهٔ سوم، پاسخ استاتیکی و دینامیکی صفحات مدرج تابعی را با استفاده از روش بدون المان به دست آورده‌اند و پس از مقایسه با بقیهٔ نظریه‌ها، دقت و سرعت همگرایی بالای روش ارائه‌شده را اثبات نموده‌اند. رک و همکارانش [11] تحلیل دینامیکی صفحات و پوسته‌های مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. معادلات مبتنی بر نظریه برشی مرتبهٔ اول به دست آمده‌اند و توسط روش بدون المان تابع پایه شعاعی[4] حل شده‌اند. زنکور و صبحی [12] به تحلیل دینامیکی ترموالاستیک صفحات مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک پرداخته‌اند و معادلات مبتنی بر نظریه برشی مرتبهٔ بالا و به صورت تحلیلی حل شده‌اند.

هدف این مقاله تحلیل سه بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم مدرج تابعی در برابر بار فشاری ناشی از ضربه است. خواص مکانیکی ماده (مدول الاستیسیته و چگالی) در راستای ضخامت به طور پیوسته و بر اساس تابع توزیع توانی متغیر و ضریب پواسون ثابت فرض شده است. پاسخ زمانی جابجایی و تنش‌ها به ازای توان‌های مختلف مادهٔ مدرج تابعی، شرایط مرزی گوناگون و نسبت‌های مختلف ضخامت به طول صفحه، محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در تحلیل صفحات مدرج تابعی، روش-های تحلیلی یا نیمه تحلیلی برای شرایط مرزی خاصی قابل استفاده است. لذا برای تحلیل صفحات ضخیم مدرج تابعی تحت شرایط مرزی گوناگون، باید از روش‌های عددی قوی هم چون روش المان محدود مدرج استفاده کرد. در روش المان محدود مدرج، تغییرات خواص مکانیکی ماده در هر المان نیز در نظر گرفته شده است که این تغییرات توسط توابع میان‌یابی[5] انجام می‌شود. پژوهش‌هایی که در این زمینه انجام‌گرفته [13-14] گویای این مطلبند که در بررسی مواد ناهمگن توسط روش المان محدود عادی، شاهد ناپیوستگی-هایی در میدان تنش خواهیم بود، درحالی‌که المان‌های مدرج تغییرات پیوسته و همواری را نشان می‌دهند.

1- Meshless local Petrov-Galerkin method (MLPG)
2- Laplace transformations
3- Shooting method
4- Radial basis functions
5- Shape functions



شکل 1 صفحهٔ ضخیم مدرج تابعی

2- فرمولاسیون مسئله

در این قسمت، ابتدا توزیع کسر حجمی مادهٔ مدرج تابعی در راستای ضخامت صفحه بیان می‌گردد، سپس معادلات سه بعدی حرکت به دست می‌آید و در نهایت با استفاده از روش المان محدود مدرج، ناهمگنی مسئله مدل می‌شود.

2-1- توزیع کسر حجمی مادهٔ مدرج تابعی

صفحه‌ای ضخیم، ساخته شده از مواد مدرج تابعی، با ضخامت h، طول a و عرض b را مطابق شکل 1 فرض کنید. دستگاه مختصات کارتزین به گونه‌ای قرار گرفته می‌شود که صفحهٔ $z=0$ و $z=h$، به ترتیب سطح تحتانی و سطح فوقانی صفحه باشند. مادهٔ مورد نظر به صورت ترکیبی از دو فاز فلز و سرامیک در نظر گرفته شده که سطح فوقانی سرامیک خالص و سطح تحتانی فلز خالص است. خواص مکانیکی با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد که توسط تابع توزیع توانی بیان می‌گردد. طبق رابطه (1) داریم:

$$\Re(z)=\left(\Re_c-\Re_m\right)\left(\frac{z}{h}\right)^n+\Re_m \tag{1}$$

که $\Re$ خاصیت ماده، n توان کسر حجمی و اندیس‌های m و c مربوط به خواص فلز و سرامیک می‌باشند. لازم به ذکر است به علت تفاوت ناچیز ضریب پواسون مواد اصلی، مقدار آن در کل صفحه ثابت در نظر گرفته می‌شود.

2-2- معادلات دیفرانسیل حاکم

با صرف‌نظر کردن از نیروهای حجمی، معادلات حرکت مبتنی بر نظریه الاستیسیتهٔ سه بعدی به صورت روابط (2) به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho(z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{الف-2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=\rho(z)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{ب-2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial z}=\rho(z)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{ج-2}$$

که σ_{ij} مؤلفه‌های تنش، u، v و w جابجایی‌ها در جهات x، y و z و ρ چگالی است.

با استفاده از قانون هوک، روابط تنش-کرنش در فرم ماتریسی به شکل (3) نوشته می‌شود:

$$\langle\sigma\rangle=\left[D(z)\right]\langle\varepsilon\rangle \tag{3}$$

که در آن طبق روابط (4-7) داریم:

$$\langle\sigma\rangle=\left\langle\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy}\right\rangle^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\langle\varepsilon\rangle=\left\langle\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy}\right\rangle^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0\\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0\\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$D_{11}=D_{22}=D_{33}=\frac{E(z)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$D_{12}=D_{13}=D_{23}=\frac{E(z)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$D_{44}=D_{55}=D_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)} \qquad (7)$$

که ν ضریب پواسون و E مدول الاستیسیته می‌باشند. همان طور که ملاحظه می‌شود، E و ρ توابعی از z هستند.

روابط کرنش- جابجایی بر اساس نظریه خطی الاستیسیته در دستگاه مختصات کارتزین طبق رابطه (8) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\partial u/\partial x,\quad \gamma_{yz}=\partial v/\partial z+\partial w/\partial y\\ &\varepsilon_y=\partial v/\partial y,\quad \gamma_{xz}=\partial u/\partial z+\partial w/\partial z\\ &\varepsilon_z=\partial w/\partial z,\quad \gamma_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x \end{aligned} \qquad (8)$$

شرایط مرزی استفاده شده در این پژوهش به صورت روابط (9) تعریف می‌شوند:

$$\text{CCCC: }\begin{cases} x=0,a\\ y=0,b\end{cases}\rightarrow u,v,w=0 \qquad (9\text{-}1)$$

$$\text{CSCS: }\begin{cases} x=0,a\ \rightarrow\ u,v,w=0\\ y=0,b\ \rightarrow\ u,w=0\end{cases} \qquad (9\text{-}2)$$

$$\text{SSSS: }\begin{cases} x=0,a\ \rightarrow\ v,w=0\\ y=0,b\ \rightarrow\ u,w=0\end{cases} \qquad (9\text{-}3)$$

2-3- مدل‌سازی المان محدود مدرج مسئله

به منظور حل معادلات به دست آمده، از روش المان محدود مدرج استفاده می‌شود. در روش المان محدود معمولی، خواص مکانیکی ماده در هر المان ثابت است. لذا هنگامی‌که خواص مواد به طور پیوسته تغییر می‌کند، استفاده از این روش باعث به وجود آمدن ناپیوستگی می‌شود و برای غلبه بر این ناپیوستگی‌ها و همگرایی نتایج باید تعداد المان‌های استفاده‌شده در ضخامت به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش یابد که این امر منجر به حجم و زمان بالای محاسبات می‌شود. به همین خاطر استفاده از روش المان محدود مدرج علاوه بر به دست آوردن نتایج پیوسته و هموار، باعث کارایی بهتر محاسباتی می‌گردد.

حال برای حل المان محدود مسئله و به دست آوردن ماتریس‌های جرم، سختی و نیرو از اصل همیلتون و روش انرژی رایلی-ریتز استفاده می‌شود.

اصل همیلتون برای این مسئله به صورت رابطهٔ (10) است:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(U-T-W)\,dt=0 \qquad (10)$$

که U، T و W انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار مجازی انجام شده توسط نیروهای سطحی هستند. طبق روابط (11-13) داریم:

$$U=\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV \qquad (11\text{-}1)$$

$$\delta U=\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dV \qquad (11\text{-}2)$$

$$T=\frac{1}{2}\int_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i\,dV \qquad (12\text{-}1)$$

$$\delta T=\int_V \rho\dot{u}_i\delta\dot{u}_i\,dV \qquad (12\text{-}2)$$

$$W=\int_A p_i u_i\,dA \qquad (13\text{-}1)$$

$$\delta W=\int_A p_i\delta u_i\,dA \qquad (13\text{-}2)$$

که V و A حجم و سطح دامنهٔ تحت بررسی بوده و p_i مؤلفهٔ نیروهای سطحی است.

با جایگذاری روابط (11-13) در رابطهٔ (10) و بکار بردن شرایط $\delta u_i(t_1)=\delta u_i(t_2)=0$ و استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز می‌توان طبق رابطه (14) نوشت:

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dV+\int_V \rho\ddot{u}_i\delta u_i\,dV=\int_A p_i\delta u_i\,dA \qquad (14)$$

روابط کرنش- جابجایی به صورت رابطهٔ (15) قابل نمایش است:

$$\{\varepsilon\}=[d]\{f\} \qquad (15)$$

که در آن طبق روابط (16) و (17) داریم:

$$[d]=\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial y & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial z\\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y\\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0\end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$\{f\}=\{u,v,w\}^{\mathrm{T}} \qquad (17)$$

تقریب المان محدود مسئله به صورت سه بعدی است، بنابراین ناحیه حل به تعداد محدودی المان تقسیم شده است. المان‌های به کار گرفته شده از نوع مکعب[1] یا شش وجهی[2] خطی که شامل هشت گره است، انتخاب می‌شوند. برای سهولت کار از دستگاه مختصات محلی[3] استفاده‌شده که متغیرهایش (ξ,η,ζ) بین1- و 1+ است (شکل 2).

برای المان e، جابجایی‌ها به صورت رابطهٔ (18) تقریب زده می‌شوند:

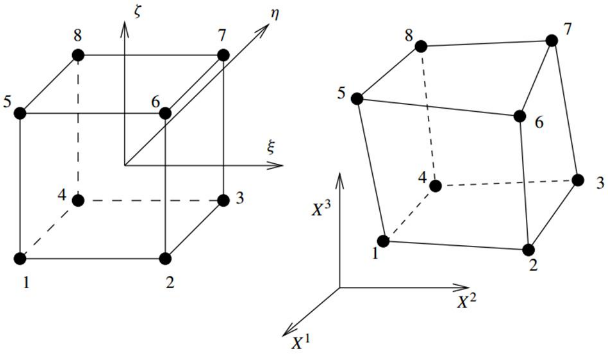
$$\{f\}^{(e)}=[N]^{(e)}\{Q\}^{(e)} \qquad (18)$$

که در رابطهٔ فوق، N توابع میان‌یابی خطی برای بردارهای جابجایی در مختصات محلی و $\{Q\}^{(e)}$ بردار جابجایی گره‌ای برای المان e هستند. طبق روابط (19) و (20) داریم:

$$\{Q\}^{(e)}=\langle U_1,V_1,W_1,\ldots,U_8,V_8,W_8\rangle^{\mathrm{T}} \qquad (19)$$

$$[N]^{(e)}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0\\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8\end{bmatrix} \qquad (20)$$

با جایگذاری رابطهٔ (18) در رابطهٔ (15)، ماتریس کرنش برای هر المان طبق روابط (21) و (22) به دست می‌آید:



شکل 2 المان شش وجهی در دستگاه مختصات محلی

1- Brick
2- Hexahedron
3- Local Coordinate

$$\{\varepsilon\}^{(e)}=[B]^{(e)}\{Q\}^{(e)} \tag{21}$$

$$[B]^{(e)}=[d][N]^{(e)} \tag{22}$$

مؤلفه‌های ماتریس‌های N و B در پیوست آورده شده است.

حال با جایگذاری روابط (3) و (21) در رابطهٔ (14) می‌توان رابطه (23) را نوشت:

$$\delta\{Q^{(e)}\}^{\mathrm{T}}\left[\int_{V^{(e)}}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]dV\right]\{Q^{(e)}\}+ \delta\{Q^{(e)}\}^{\mathrm{T}}\left[\int_{V^{(e)}}\rho[N]^{\mathrm{T}}[N]dV\right]\{\ddot{Q}^{(e)}\} =\delta\{Q^{(e)}\}^{\mathrm{T}}\left[\int_{S^{(e)}}[N]^{\mathrm{T}}\{P\}dS\right] \tag{23}$$

که $V^{(e)}$، $S^{(e)}$ و $\{P\}$ به ترتیب حجم المان، سطح المان در تماس با نیروهای سطحی و بردار نیروهای سطحی می‌باشند. رابطه (23) به صورت رابطه (24) نوشته می‌شود:

$$[M]^{(e)}\{\ddot{Q}\}+[K]^{(e)}\{Q\}=\{F\}^{(e)} \tag{24}$$

ماتریس‌های جرم، سختی و نیرو برای هر المان به صورت روابط (25-27) تعریف می‌شوند:

$$[M]^{(e)}=\int_V\rho[N]^{\mathrm{T}}[N]dV \tag{25}$$

$$[K]^{(e)}=\int_V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]dV \tag{26}$$

$$\{F\}^{(e)}=\int_{S^{(e)}}[N]^{\mathrm{T}}\{P\}dS \tag{27}$$

برای اعمال ناهمگنی در هر المان، خواص مکانیکی در هر المان توسط توابع میان‌یابی و مقادیر آن‌ها در گره‌ها تقریب زده می‌شوند، طبق رابطه (28) داریم:

$$\Im=\sum_{i=1}^{8}\Im_i N_i \tag{28}$$

که $\Im$ خاصیت مکانیکی است. لذا در هر المان خواص مکانیکی (مدول الاستیسیته و چگالی) تابعی از متغیرهای محلی می‌باشند.

برای محاسبهٔ انتگرال‌های (26،25) روی حجم المان، از روش عددی گاوس استفاده می‌شود، بدین گونه که ابتدا انتگرال به دستگاه مختصات محلی برده شده و سپس توسط ترکیب خطی از مقدار آن در نقاط خاصی از دامنه بنام نقاط گاوسی، تقریب زده می‌شود. طبق روابط (29) و(30) داریم:

$$I=\int_{V^{(e)}}f(X)dV =\int_{V^{(e)}}f\left[X(\xi,\eta,\zeta)\right]\det\left[J(\xi,\eta,\zeta)\right]dV =\iiint_{V^{(e)}}g(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \tag{29}$$

$$\iiint_{V^{(e)}}g(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta\approx\sum_{i=0}^{n}g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\psi_i \tag{30}$$

J ماتریس ژاکوبین است که در پیوست آورده شده است. در این پژوهش از روش گاوس هشت نقطه استفاده شده است که نقاط گاوسی و وزن‌های ترکیب طبق رابطه (31) عبارت‌اند از:

$$\psi_i=1,\quad \xi_i,\eta_i,\zeta_i=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{31}$$

در نهایت بعد از اسمبل کردن ماتریس‌های المانی، ماتریس‌های جرم، سختی و نیروی کل به دست آمده و معادلات نهایی به صورت رابطهٔ (32) درمی‌آید:

$$[M]\{\ddot{Q}\}+[K]\{Q\}=\{F\} \tag{32}$$

پس از به دست آوردن رابطهٔ (32)، از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک با گام زمانی مناسب، برای حل آن استفاده می‌شود. پارامترهای انتگرالی به صورت $\gamma=1/2$ و $\beta=1/4$ انتخاب می‌شوند که به روش شتاب متوسط ثابت معروف است [15].

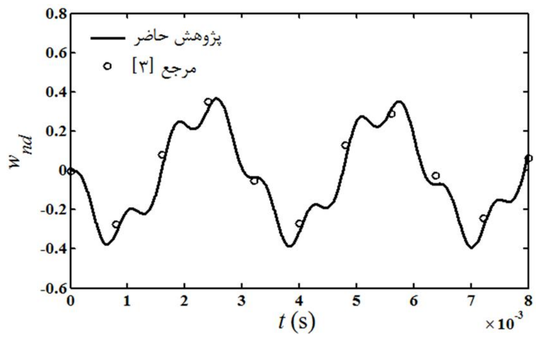
3- نتایج عددی

در این قسمت ابتدا به اعتبارسنجی روش گفته‌شده پرداخته می‌شود و سپس نتایج تحلیل سه بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم مدرج تابعی در برابر بار فشاری ناشی از ضربه، نشان داده‌شده و پیرامون آن بحث می‌شود.

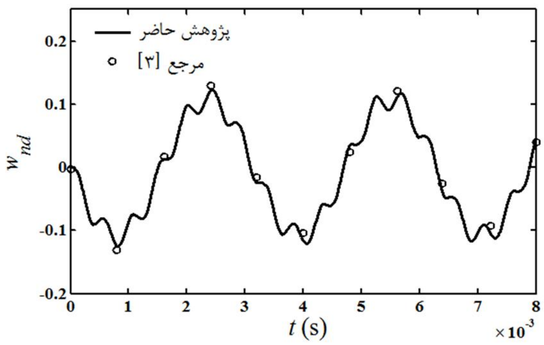
3-1- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی روش توضیح داده شده، از نتایج مرجع [3] استفاده شده است. صفحهٔ مورد بررسی مربعی است (a=b) که با نسبت ضخامت به طول $h/a=0.2$ و از دو فاز فلز و سرامیک تشکیل می‌شود. خواص مکانیکی در امتداد ضخامت متغیر است و به طور پیوسته و توسط تابع توزیع توانی از فلز (E_m = 70 GPa, ρ_m = 2700 kg/m³ , ν_m = 0.7) در سطح تحتانی به سرامیک (E_c = 380 GPa , ρ_c = 3800 kg/m³, ν_c = 0.7) در سطح فوقانی تغییر می‌کنند. بار دینامیکی در مدت زمان 8 میلی‌ثانیه به سطح فوقانی توسط تابع (33) وارد می‌شود:

$$q(x,y,t)=q_0\sin(2000t) \tag{33}$$



(الف)



(ب)

شکل 3 پاسخ زمانی خیز بی‌بعد وسط صفحه در مقایسه با مرجع [3] در حالت $n=2$ الف) تکیه‌گاه ساده ب) تکیه‌گاه گیردار

مقایسهٔ خیز بی‌بعد ($w_{nd}=\frac{100E_m h^3}{12a^4(1-\nu_m^2)q_0}w$) وسط صفحه وقتی $n = 2$، در دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار در شکل 3 و جدول 1 نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج با تقریب خوبی بر هم منطبق‌اند.

3-2- نتایج عددی و بحث

صفحه‌ای مربعی با ضلع 1 متر ($a = b = 1$ m) مفروض است که از دو فاز فلز و سرامیک تشکیل می‌شود. خواص مکانیکی صفحه در امتداد ضخامت آن متغیر است و به طور پیوسته و توسط تابع توزیع توانی (1) از فلز ($E_m =$ 70 GPa, ρ_m = 2700 kg/m^3 , ν_m = 0.7) در سطح تحتانی به سرامیک (E_c = 380 GPa, ρ_c = 3800 kg/m^3 , ν_c = 0.7) در سطح فوقانی تغییر می‌کنند. سطح فوقانی صفحه تحت بار دینامیکی قرار دارد که توسط تابع (34) تعریف می‌شود: (P_0 = 4 GPa/s)

$$P(t)=\begin{cases}P_0 t & t\le 0.005\ \text{s}\\ 0 & t>0.005\ \text{s}\end{cases} \qquad (34)$$

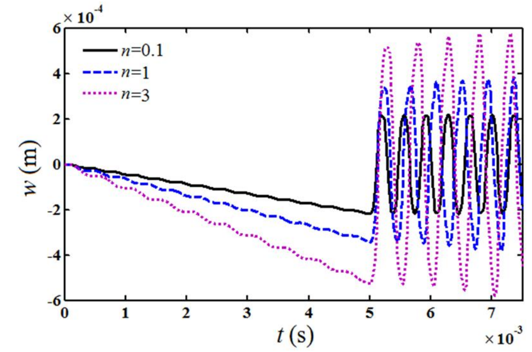
همان‌طور که پیداست، در t = 0.005 s بارگذاری به طور ناگهانی قطع شده و این عمل به صورت یک ضربه یا یک تحریک ناگهانی عمل می‌کند. به همین خاطر بلافاصله پس از باربرداری (t = 0.005 s) به علت انتشار موج تنش، جابجایی‌ها و تنش‌ها دچار ارتعاشات گذرا می‌شوند. تأثیر توان مادهٔ مدرج تابعی بر روی خیز (w) و تنش‌های σ_z و σ_{xy} ورق در نقطهٔ میانی سطح فوقانی، در شکل‌های 4، 5 و 6 به نمایش گذاشته شده است. شرایط مرزی از رابطهٔ (1-9) پیروی می‌کنند و h/a = 0.2است. همان طور که ملاحظه می‌شود تغییرات n به شدت رفتار دینامیکی ماده را تحت تأثیر قرار می‌دهد. پس از باربرداری، شاهد ارتعاش سیستم ناشی از انتشار موج هستیم که با افزایش n دامنهٔ نوسانات افزایش و سرعت نوسانات و بازگشت موج تنش کاهش می‌یابد. دلیل این امر نزدیک شدن خواص مکانیکی ماده به فلز و کاهش سختی است.

در شکل‌های 7 و 8، تأثیر نسبت ضخامت به طول صفحه بر روی خیز (w) و تنش σ_x ورق در نقطهٔ میانی سطح فوقانی را می‌توان مشاهده نمود. شرایط مرزی از رابطهٔ (1-9) پیروی می‌کنند و $n = 2$ است. مشاهده می‌گردد که با افزایش ضخامت به علت افزایش استحکام صفحه، جابجایی‌ها و تنش‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا کرده و سرعت نوساناتشان بیشتر می‌شود.

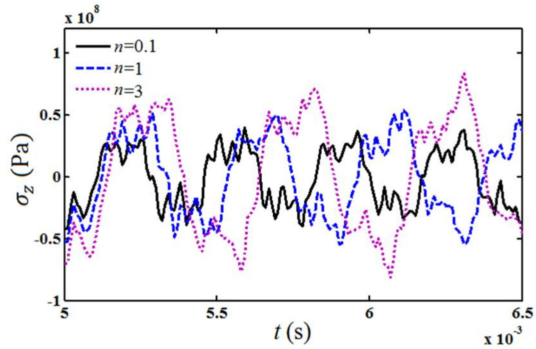
تأثیرات شرایط مرزی بر روی خیز (w) و تنش σ_{yz} ورق در نقطهٔ میانی سطح فوقانی، در شکل‌های 9 و 10 نشان داده شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، مقادیر خیز و تنش و سرعت نوسانات آن‌ها متأثر از نوع شرایط مرزی است و هر چقدر درجات آزادی صفحه بیشتر شود، دامنهٔ نوسانات بیشتر و سرعت نوسانات کمتر می‌شود.

جدول 1 مقایسهٔ خیز بی بعد با مرجع [3]

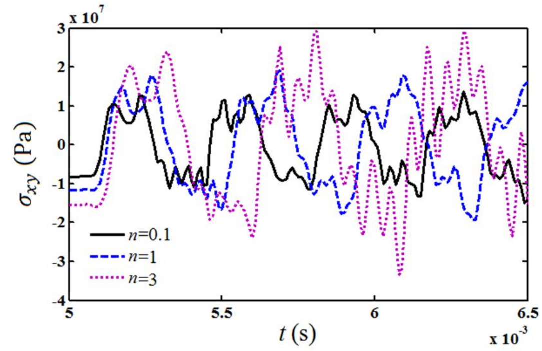
زمان (ms)	تکیه‌گاه ساده: پژوهش حاضر	تکیه‌گاه ساده: مرجع [3]	تکیه‌گاه ساده: اختلاف	تکیه‌گاه گیردار: پژوهش حاضر	تکیه‌گاه گیردار: مرجع [3]	تکیه‌گاه گیردار: اختلاف
0/8	-0/302	-0/295	% 2/3	-0/125	-0/121	% 3/3
1/6	0/029	0/030	% 3/3	0/0112	0/0109	% 2/7
2/4	0/332	0/341	% 2/6	0/118	0/122	% 3/2
3/2	-0/049	-0/051	% 3/9	-0/034	-0/033	% 3
4	-0/301	-0/293	% 2/7	-0/119	-0/111	% 1/8
4/8	0/089	0/091	% 2/2	0/039	0/040	% 2/5
5/6	0/303	0/309	% 1/9	0/109	0/112	% 2/6
6/4	-0/057	-0/059	% 3/3	-0/040	-0/039	% 2/5
7/2	-0/307	-0/311	%1/2	-0/108	-0/111	% 2/7
8	0/062	0/064	%3/1	0/038	0/039	% 2/5



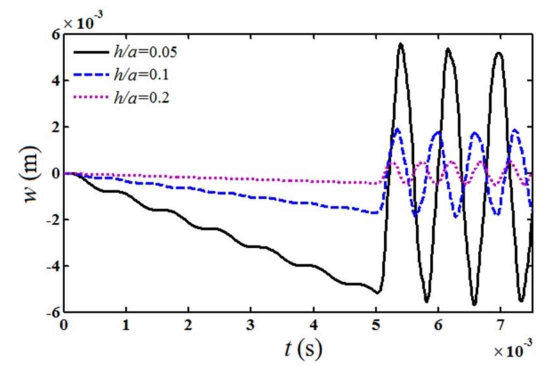
شکل 4 پاسخ زمانی خیز در حالت h/a = 0.2 و تکیه‌گاه CCCC به ازای مقادیر مختلف n



شکل 5 پاسخ زمانی σ_z در حالت h/a = 0.2 و تکیه‌گاه CCCC به ازای مقادیر مختلف n

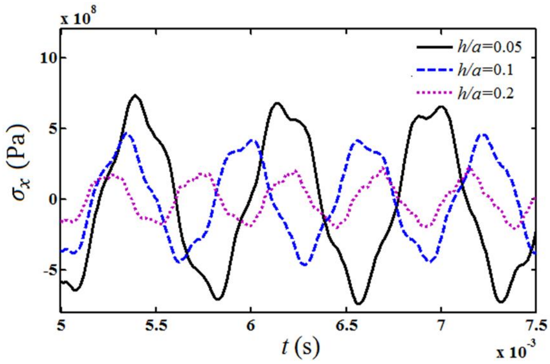


شکل 6 پاسخ زمانی σ_{xy} در حالت h/a = 0.2 و تکیه‌گاه CCCC به ازای مقادیر مختلف n

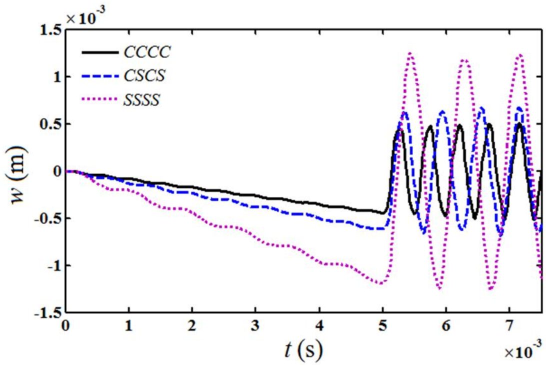


شکل 7 پاسخ زمانی خیز در حالت تکیه‌گاه CCCC و $n = 2$ به ازای مقادیر مختلف h/a

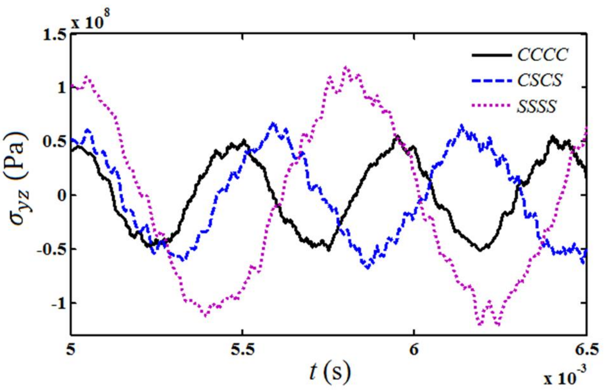
نحوهٔ انتشار موج تنش در امتداد ضخامت صفحه بلافاصله بعد از بارگذاری در حالت $n = 1$، در شکل 11 به نمایش گذاشته شده است. با محاسبهٔ زمانی که موج تنش از سطح فوقانی صفحه به سطح تحتانی می‌رسد، می‌توان سرعت انتشار موج تنش را به صورت تقریبی به دست آورد. برای مواد همگن رابطه‌ای تحلیلی برای محاسبهٔ سرعت انتشار موج وجود دارد [16]. طبق رابطه (35) داریم:



شکل 8 پاسخ زمانی σ_x در حالت تکیه‌گاه CCCC و $n=2$ به ازای مقادیر مختلف h/a



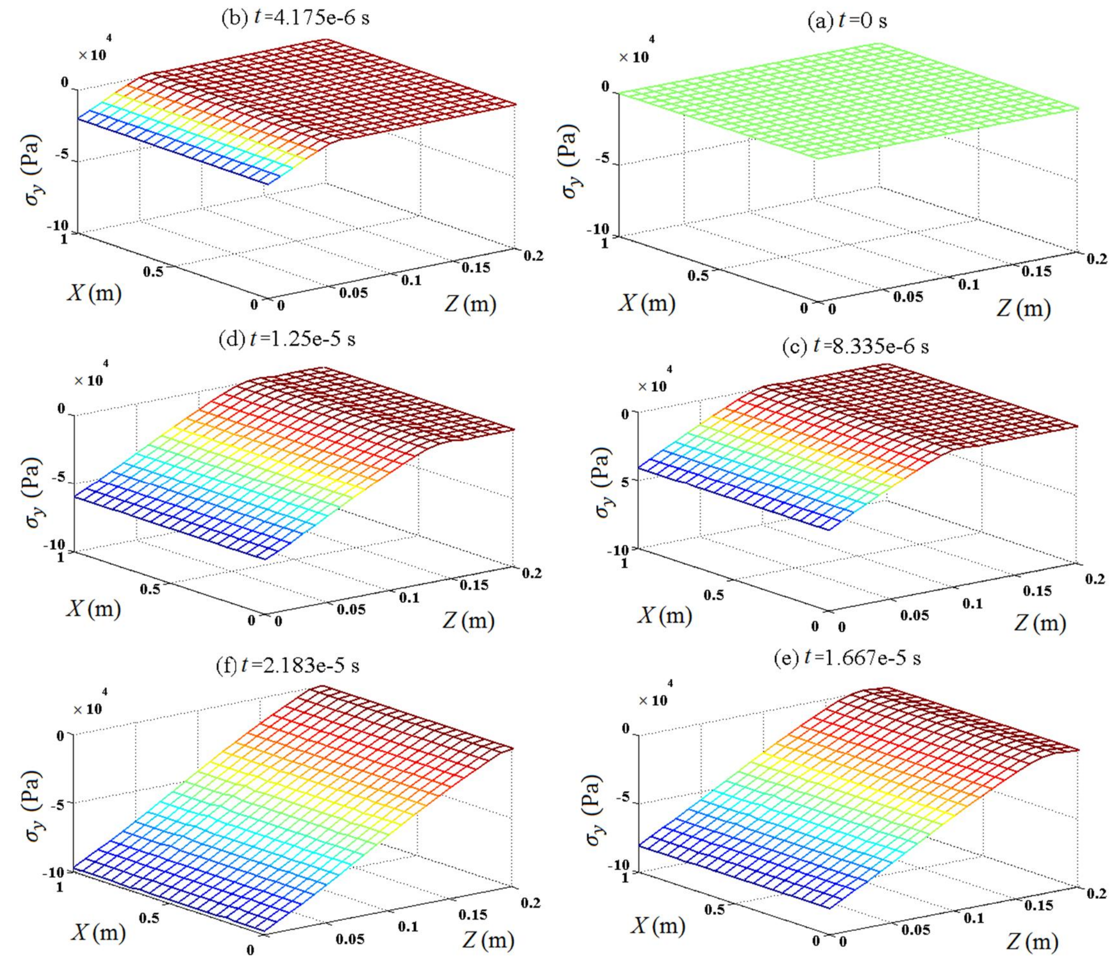
شکل 9 پاسخ زمانی خیز در حالت $n=2$ و $h/a=0.2$ به ازای شرایط مختلف مرزی



شکل 10 پاسخ زمانی σ_{yz} در حالت $n=2$ و $h/a=0.2$ به ازای شرایط مختلف مرزی

$$\text{سرعت انتشار موج}=\sqrt{\frac{E\left(1-\nu\right)}{\rho\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}} \tag{35}$$

در جدول 2 مقایسهٔ سرعت انتشار موج به دست آمده با رابطهٔ تحلیلی برای دو حالت $n=0$ (مادهٔ سرامیک) و $n=\infty$ (مادهٔ فلز) آورده شده است و همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، تطابق بسیار خوبی با یکدیگر داشته و نشان‌دهندهٔ دقت بالای روش استفاده‌شده است. سرعت انتشار موج تنش برای مقادیر مختلف n در جدول 3 نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، سرعت انتشار موج متأثر از تغییرات n است که با افزایش آن، کاهش می‌یابد.



شکل 11 توزیع σ_y در حالت $n=1$ و $h/a=0.2$ در امتداد ضخامت صفحه بلافاصله پس از بارگذاری در زمان‌های مختلف

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.11.18.7]

جدول 2 مقایسهٔ سرعت انتشار موج تنش با رابطهٔ تحلیلی

	سرامیک ($n=0$)	فلز ($n=\infty$)
حل تحلیلی	11602/4 m/s	5907/6 m/s
روش ارائه‌شده	11765/0 m/s	5970/0 m/s
اختلاف	% 1/4	% 1/1

جدول 3 سرعت انتشار موج تنش برای مقادیر مختلف n

	$n=0/1$	$n=1$	$n=3$
سرعت انتشار موج	10435 m/s	9160m/s	7542m/s

4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

هدف اصلی این پژوهش بررسی سه بعدی پاسخ دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی است. بدین منظور از روش المان محدود مدرج سه بعدی و فرمولاسیون انرژی رایلی-ریتز استفاده شد. روش ارائه‌شده توسط نتایج موجود در مقالات، اعتبارسنجی و تطابق خوبی حاصل داشت. در ادامه، پاسخ زمانی خیز و تنش‌ها در سه بعد به ازای توان‌های مختلف مادهٔ مدرج تابعی، شرایط مرزی گوناگون و نسبت‌های مختلف ضخامت به طول به نمایش گذاشته شد و هم‌چنین سرعت انتشار موج تنش برای مقادیر مختلف توان مادهٔ مدرج تابعی به دست آمد. نتایج حاصل، این نکته را به خوبی نشان می‌دهند که مقدار و تغییرات خیز و تنش‌ها را می‌توان با تغییرات توان مادهٔ مدرج تابعی، نسبت ضخامت به طول و شرایط مرزی کنترل نمود. از مزایای روش ارائه‌شده می‌توان به توانایی تحلیل سه بعدی هر نوع مادهٔ ناهمگن با هندسه و شرایط مرزی دلخواه اشاره نمود.

5- فهرست علائم

a	طول صفحه
b	عرض صفحه
D	ماتریس خواص مواد
E	مدول الاستیسیته
F	ماتریس نیرو
h	ضخامت صفحه
J	ماتریس ژاکوبین
K	ماتریس سختی
M	ماتریس جرم
N_i	توابع میان‌یابی
n	توان کسر حجمی
P	تابع بار دینامیکی
Q	بردار جابجایی‌های گره‌ای
T	انرژی جنبشی
U	انرژی پتانسیل
u	جابجایی در جهت x
v	جابجایی در جهت y
W	کار مجازی
w	جابجایی در جهت z
$\Re$	خواص مکانیکی صفحه
$\Im$	خواص مکانیکی المان
γ_{ij}	کرنش برشی
ε_{ij}	کرنش نرمال
ζ	مختصات محلی
η	مختصات محلی
ν	ضریب پواسون
ξ	مختصات محلی
ρ	چگالی
σ_{ij}	تنش نرمال
τ_{ij}	تنش برشی

6- پیوست

توابع میان‌یاب خطی در دستگاه مختصات محلی طبق رابطه (36) عبارت‌اند از:

$$N_i = \left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1+\zeta_i\zeta\right)/8 \qquad (36)$$

هم‌چنین ماتریس B طبق رابطه (37) عبارتست از:

$$[B]^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial z & \cdots \\ 0 & \partial N_1/\partial z & \partial N_1/\partial y & \cdots \\ \partial N_1/\partial z & 0 & \partial N_1/\partial x & \cdots \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad (37)$$

برای محاسبهٔ درایه‌های ماتریس B، باید مشتقات توابع میان‌یابی نسبت به متغیرهای دستگاه مختصات اصلی محاسبه شود، اما از آن جا که توابع میان-یابی بر حسب متغیرهای محلی می‌باشند، باید از قاعدهٔ مشتقات زنجیره‌ای و تعریف ماتریس ژاکوبین استفاده شود. طبق رابطه (38) و (39) داریم:

$$\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial\xi \\ \partial N_i/\partial\eta \\ \partial N_i/\partial\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi & \partial z/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta & \partial z/\partial\eta \\ \partial x/\partial\zeta & \partial y/\partial\zeta & \partial z/\partial\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{bmatrix} \qquad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial\xi \\ \partial N_i/\partial\eta \\ \partial N_i/\partial\zeta \end{bmatrix} \qquad (39)$$

هم‌چنین برای به دست آوردن مشتقات متغیرهای اصلی نسبت به متغیرهای محلی، از تعاریف رابطه (40) استفاده می‌شود:

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i \qquad \text{(40-الف)}$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i \qquad \text{(40-ب)}$$

$$z = \sum_{i=1}^{8} N_i z_i \qquad \text{(40-ج)}$$

که $\left(x_i, y_i, z_i\right)$ مختصات گره‌ای المان می‌باشند. بدین ترتیب، ماتریس‌های ژاکوبین و B به دست می‌آید.

7- مراجع

[1] M. Koizumi, The concept of FGM, Ceramic Transactions, *Functionally Gradient Materials,* Vol. 34, pp. 3–10, 1994.

[2] A. H. Akbarzadeh, S. K. Hosseini, M. R. Eslami, M. Sadighi,Mechanical behavior of functionally graded plates under static and dynamic loading, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 225, No. 2, pp. 326-333, 2011.

[3] A. RezaeiMojdehi, A. Darvizeh, A. Basti, H. Rajabi, Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 35, No. 11, pp. 1168–1180, 2011.

[4] D. Sun, S. N. Luo, The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load, *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 30, No. 3, pp. 396-408, 2011.

[5] D. Sun, S. N. Luo, Wave propagation and transient response of a FGM plate under a point impact load based on higher-order shear deformation theory, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 5, pp. 1474-1484, 2011.

[6] D. Sun, S. N. Luo, Wave propagation and transient response of a functionally graded material plate under a point impact load in thermal environments, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 36, No. 1, pp. 444-462, 2012.

[7] S. M. Hasheminejad, B. Gheshlaghi, Three-dimensional elastodynamic solution for an arbitrary thick FGM rectangular plate resting on a two parameter viscoelastic foundation, *Composite Structures,* Vol. 94, No. 9, pp. 2746-2755, 2012.

[8] Z. Feng-Xi, L. Shi-Rong, L. Yuan-Ming, Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 330, No. 16, pp. 3990–4001, 2011.

[9] L. F. Qian, R. C. Batra, L. M. Chen, Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method, *Composites: Part B,* Vol. 35, No. 6-8, pp. 685–697, 2004.

[10] L. M. J. S. Dinis, R. M. Natal Jorge, J. Belinha, An unconstrained third-order plate theory applied to functionally graded plates using a meshless method, *Mechanics of Advanced Materials and Structures,* Vol. 17, No. 2, pp. 108–133, 2010.

[11] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, A. M. A. Neves, G. E. Fasshauer, C. M. M. Soares, R. M. N. Jorge, Dynamic analysis of functionally graded plates and shells by radial basis functions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures,* Vol. 17, No. 8, pp. 636–652, 2010.

[12] A. M. Zenkour, M. Sobhy, Dynamic bending response of thermoelastic functionally graded plates resting on elastic foundations, *Aerospace Science and Technology,* Vol. 29, No. 1, pp. 7-17, 2013.

[13] J. H. Kim, G. H. Paulino, Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 69, No. 4, pp. 502–514, 2002.

[14] Z. Zhang, G. H. Paulino, Wave propagation and dynamic analysis of smoothly graded heterogeneous continua using graded finite elements, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 44, No. 11-12, pp. 3601–3626, 2007.

[15] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The finite element method for solid and structural mechanics, Sixth ed., Vol. 2, pp. 17-45, *Elsevier Butterworth-Heinemann,* Oxford, 2005.

[16] M. Jones, Structural impact, pp. 110-158, *Cambridge University Press,* 1989.