

# ارائه یک روش گالرکین ناپیوسته برای جریان های دوفازی در محیط متخلخل به وسیله محدود کننده شیب MLP اصلاح شده

مهدی جامعی<sup>1</sup>، حمید رضا غفوری<sup>2\*</sup>

1 - دانشجوی دکترا، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز
 2 - استاد، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران، اهواز
 \* اهواز، صندوق پستیghafouri\_h@scu.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این تحقیق حل عددی جریان های دوفازی تراکم ناپذیر در محیط های متخلخل با استفاده از روشهای مرتبه بالای پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته مورد توجه قرار گرفته است. در فرمولاسیون به کار رفته فشار و درجه اشباع فاز ترکننده (P <sub>W</sub> ,S <sub>W</sub> ) به عنوان مجهولات اصلی، به همراه شرط مرزی ترکیبی (رابین) در نظر گرفته شده است. هدف از این مدل تعیین دقیق تر محل گرادیان های شدید ناشی از محل تماس دو فاز در محیط متخلخل ناهمگن میباشد. در مدل ارائه شده، میدان سرعت با استفاده از پس فرآیند نگاشت (H(div) در فضای راویارت-توماس مرتبه	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 28 تیر 1394 پذیرش: 26 مهر 1394 ارائه در سایت: 10 آذر 1394
پایین ( <i>R</i> T <sub>0</sub> ) بازسازی می گردد. در این تحقیق با استفاده از مقیاس نمودن ترم های پنالتی و همچنین فرمولاسیون وزنی عملگر متوسط، بهبود قابل توجهی در فرمولاسیون گسسته سازی مکانی معادلههای حاکم ایجاد شده است که موجب کاهش ناپایداری ها در محیطهای ناهمگن می گردد. به منظور جلوگیری از نوسان های غیرفیزیکی در مقادیر درجه اشباع در پایان هر گام زمانی از محدود کننده شیب (گره - محور) غیر نوسانی MLP (Multi-dimensional limiting process) اصلاح شده استافاده می گردد. این محدودکننده شیب بدلیل عملکرد مطلوب و سازگار با مدل، بعنوان یکی از نوآوری های اصلی این تحقیق تلقی می گردد. صحت سنجی مدل با استفاده از مسائل شناخته شده باکلی - لورت و مک ورتر انجام گرفته است. همچنین به منظور بیان توانایی مدل در تسخیر شوکهای ناگهانی محل تماس فازهای سیال دو مسئله عددی در زمینه های مدلسازی بازیافت ثانویه در مخازن نفتی و ردیابی آلاینده های امتزاج ناپذیر در آبخوان ها ارائه گردیده است.	طید واردان: جریان دوفازی بقاء محلی محدود کننده شیب روش گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی

# **A** discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter

### Mehdi Jamei<sup>1</sup>, Hamid Reza Ghafouri<sup>\*2</sup>

1- Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

2- Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

\* P.O.B. 6135634899 Ahvaz, Iran, ghafouri\_h@scu.ac.ir

#### **ARTICLE INFORMATION**

Original Research Paper Received 19 July 2015 Accepted 18 October 2015 Available Online 01 December 2015

*Keywords:* Two-phase flow local conservation slope limiter discontinuous Galerkin method

#### ABSTRACT

In this article, a numerical solution of incompressible two-phase flow in isothermal condition, based on wetting pressure-wetting saturation formulation  $(P_w - S_w)$  using high order primal discontinuous Galerkin (DG) method which can capture the shock fronts of two-phase flow in heterogeneous porous media is considered. In this presented model, the velocity field is reconstructed by a H(div) post-process in lowest order of Raviart-Thomas space  $(RT_0)$ . Also in this study, the scaled penalty and weighted average (harmonic average) formulation significantly improve the special discretization formulation of governing equations which cause the instabilities in heterogamous media to be reduced. The modified MLP slope limiter is used to remove the non-physical saturation values at the end of each time step. In this study, the slope limiter should be considered as one of the main novelties due to the impressive effects in results stabilization. The proposed model is verified by pseudo 1D Buckley-Leverett and Mcwhorter problems. Two test cases, a problem for modeling the secondary recovery of petroleum reservoirs and the other one a problem for detecting immiscible contamination are used to show the abilities of shock capturing two phases interface in porous media.

Interior penalty

Please cite this article using: M. Jamei, H.R. Ghafouri, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 326-336, 2015 (in Persian)

میباشند که از ترکیب معادلههای بقای جرم و قانون دارسی، در فرمهای گوناگونی ارائه می گردند و به لحاظ ریاضی و تقسیم بندی معادلههای دیفراسیلی جزیی، از نوع بیضوی- هذلولوی میباشند. این معادله های کاملا همبسته به لحاظ تقسیم بندی و استراتژی حل، به سه روش حل همزمان<sup>1</sup> [1]، حل کاملا ضمنی متوالی<sup>2</sup> [2] و روش فشار ضمنی -اشباع صریح<sup>3</sup> حل می گردند. در این تحقیق برای حل معادلات از روش حل کاملا ضمنی متوالی وبرای خطی سازی معادلهها از روش تأخیر زمانی استفاده شده است.

خاصیت بقاء جرم محلی<sup>4</sup> در حل مسائل انتقال - غالب از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته اند. از میان روشهای دارای بقای محلی میتوان به روشهای المان محدود ترکیبی<sup>5</sup>، احجام محدود، روش گالرکین ناپیوسته<sup>6</sup>، روش المان محدود ترکیبی هایبرید<sup>7</sup>، روش المان محدود توسعه یافته وغیره اشاره نمود [3-5].

در این تحقیق مدلسازی جریانهای دوفازی در محیط متخلخل در فضای دو بعدی با استفاده از روشهای پنالتی داخلی<sup>8</sup> گالرکین ناپیوسته، بعنوان یکی از روشهای قدرتمند با خاصیت بقاء محلی مورد مطالعه قرار گرفته است. روشهای گالرکین ناپیوسته بعلت داشتن خاصیت بقاء محلی، روشهای بسیار قوی در تسخیر پیشانی شوکها<sup>9</sup> در محیط متخلخل ناهمگن با هندسه های پیچیده بوده و سهولت استفاده از شبکه های بدون ساختار<sup>10</sup> با وجود گرههای آویزان<sup>11</sup> با درجات تقریب مرتبه بالا و امکان تغییر درجات تقریب از یک المان به المان دیگر، از بارزترین مزایای این روشها میباشند [6]. روشهای گالرکین ناپیوسته به دو نوع کلی پنالتی داخلی و گالرکین محلی تقسیم بندی میشودند. کاکبرن و شو مطالعه گستردهای در زمینه حل معادلههای انتقال - انتشار با استفاده از روش های گالرکین ناپیوسته محلی محلی معادلههای انتقال ایند روش ایان محدود ترکیبی در حل همزمان

ریویه مدلسازی جریانهای دوفازی تراکم ناپذیر را برای اولین بار بر مبنای مجهولات درجه اشباع و فشار فاز ترکننده و با در نظر گرفتن شرط مرزی ترکیبی (رابین) و استفاده از روش گالرکین ناپیوسته فاقد پنالتی ادن-باومن و بابوشکا<sup>12</sup> (OBB-DG) مورد توجه قرار داد [8, 9]. ریویه و کلیبر با اضافه نمودن ترمهای پنالتی به معادله درجه اشباع و معرفی روشهای پنالتی داخلی متقارن<sup>13</sup>، نامتقارن (SIPG)<sup>14</sup> و ناقص<sup>15</sup>، نسخهای جدید از مدل گالرکین ناپیوسته جریان های دو فازی در محیطهای متخلخل را با استفاده از تکنیک شبکههای انطباق ارائه نمودند [10]. همچنین آنها برای تثبیت مرگام زمانی، از محدود کننده شیب درلوفسکی - اوشر - انکویست اصلاح شده<sup>16</sup> بهره بردند [11]. هر چند علی رغم بکار بردن برخی تمهیدات، در حل برخی مسائل ناهمگن، بعضا نوسانهای غیرفیزیکی مشاهده گردید.

اسلینگر با ارائه مدل جریان های دوفازی (آب و هوا) از ترکیب از روشهای پنالتی داخلی و گالرکین ناپیوسته محلی<sup>17</sup>به ترتیب برای حل معادلههای فشار و درجه اشباع استفاده نمود و آنگاه مقادیر درجه اشباع محاسباتی را با حل معادله بقاء در پایان هر بازه زمانی اصلاح نمود [12]. حطیط و فیروز آبادی مدلسازی جریان های دوفازی را در محیطهای متخلخل شکافدار، با استفاده از روش المان محدود ترکیبی برای حل همزمان معادله های فشار و سرعت و روش گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی برای حل معادله درجه اشباع مورد توجه قرار دادند [3]. میکیسکا و رادک با محوریت مدلسازی محیط های دو فازی ناهمگن، از روش المان محدود هایبرید ترکیبی و گالرکین ناپیوسته به ترتیب معادلههای فشار و درجه اشباع را بطور همزمان حل نمودند [13].

ارن و همکارانش با استفاده از فرمولاسیون فشار کل- درجه اشباع فاز تر کننده، نسخهای از مدلسازی جریان های دوفازی با روش گالرکین ناپیوسته را ارائه نموده اند که در آن از شرایط تماسی ناشی از ناپیوستگی فشار مویینگی صرفنظر نشده است [14]. در این تحقیق از تکنیکهایی در بهبود فرمولاسیون گسسته-سازی مکانی معادلات حاکم استفاده شده است که موجب ارتقاء پایداری نتایج در اطراف ناپیوستگی ها و ناهمگنی ها شده است. موزالفسکی و ارن نیز با استفاده از پس فرایند نگاشت سرعت در فضای المان محدود ترکیبی راویارت-توماس $^{18}$ [15]، مدلسازی جریان های دوفازی بر مبنای فرمولاسیون فشار کل-درجه اشباع فاز ترکننده را ارتقاء دادهاند [16]. آربوگاست در مدلسازی گالرکین ناپیوسته جریان های دوفازی بر مبنای معادله های فشار کل- درجه اشباع فاز ترکننده، با اعمال یک ترم پنالتی و کاربرد پس فرایند بازسازی میدان سرعت در فضای راویارت توماس مرتبه پایین به ترتیب پیوستگی فشار مویینگی و میدان سرعت را تامین نموده است [17]. او با بکار بردن یک محدود کننده شیب المان-های چهار ضلعی نوسان ها و خطاهای عددی را کاهش داد. کو و سان مدلی متفاوت از مدلهای گالرکین ناپیوسته جریانهای دوفازی مرسوم ارائه نمودند که با استفاده از تكنيك بادسو بقاى جرم را در هر دو فاز تامين نمودند [18] . اخيرا جامعی و غفوری با استفاده از روشهای حل متوالی و روش فشار ضمنی -اشباع صریح بهبود یافته، بر مبنای فرمولاسیون ((Pw,Sw) به ارائه مدل جریانهای دوفازی در محیط متخلخل پرداختند [19, 20]. در این مدل با استفاده از نگاشت میدان سرعت در فضای راویارت-توماس، بقای محلی و پیوستگی بردار نرمال سرعت حفظ گردید. همچنین از محدودکننده چاونت-جافر جهت حذف نوسانات غیر فیزیکی و تثبیت نتایج استفاده گردید. در تحقیق حاضر نسخه توسعه یافته تحقیق [19] ارائه شده است که در آن بجای استفاده از محدودکننده نسبتا پر هزینه چاونت-جافر از محدودکننده گره-محور و غیر نوسانیMLP اصلاح شده استفاده است. این محدود کننده شیب بر خلاف محدود کننده چاونت – جافر نیازی به انجام فرآیند بهینه سازی و صرف زمان چندانی ندارد و از طرفی تثبیت نتایج را نیز درحد مطلوب و قابل قبولی انجام میدهد.

[ Downloaded from mme.mc

در اینجا با استفاده از استراتژی حل کاملا ضمنی متوالی، معادلههای حاکم بر جریانهای دوفازی برمبنای فرمولاسیون ( $P_w, S_w$ ) و اعمال شرط مرزی ترکیبی (رابین<sup>19</sup>) بعنوان شرایط مرزی ورودی، با فرض تراکم ناپذیری سیالات و شرایط همدمایی، مورد بررسی قرار می گیرند. به منظور گسسته سازی مکانی از سه روش پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته تحت عنوانهای ادن- باومن- بابوشکا، پنالتی داخلی متقارن وزنی<sup>20</sup> (SWIP) و پنالتی داخلی

17- Local Discontinuous Galerkin18- Raviart-Thomas space

19- Robin

20- Symmetric weighted interior penalty Galerkin

1- Simultaneous solution (SS)

2- Sequential solution (S.Q)

3- Implicit pressure-Explicit saturation (IMPES)

4- Locally conservative

5- Mixed finite element (MFM)

6- Discontinuous Galerkin (DG) method

7- Mixed hybrid finite element (MHFE) method

8- Interior Penalty

9- Capturing shock fronts

10- Unstructured

11- Hanging node

12- Oden-baumann-babuska (OBB-DG) method

13- Symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)

14- Non-symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)

15- Incomplete interior penalty Galerkin (IIPG)

16- Modified Durlofsky–Engquist–Osher slope limiter

غیرمتقارن وزنی (NWIP) استفاده می گردد. از طرفی روش تفاضلات محدود پسرونده (ضمنی) بعنوان روشی پایدار و مستقل از محدودیتهای اندازه گام برای گسسته سازی زمانی هر دو معادله فشار و درجه اشباع بکار میرود. همچنین به منظور افزایش دقت نتایج و حفظ پیوستگی بردار نرمال سرعت در وجوه داخلی المان ها، از تکنیک نگاشت (H(div) میدان سرعت در فضای المان محدود ترکیبی راویارت –توماس مرتبه پایین ( $RT_0$ ) استفاده شده المان محدود ترکیبی راویارت –توماس مرتبه پایین ( $RT_0$ ) استفاده شده فضای دوبعدی المانهای مای مقادیر درجه اشباع محاسباتی در پایان هر است. به منظور کنترل نوسان های مقادیر درجه اشباع محاسباتی در پایان هر نقطای دوبعدی المانهای مثلثی استفاده شده است. صحتسنجی مدل با فضای دوبعدی المانهای معروف باکلی- لورت<sup>1</sup> و مک ورتر<sup>2</sup> و تحلیل مبسوط نتایج آنها انجام میپذیرد. در ادامه این بخش دو نمونه مثال کاربردی در زمینه ردیابی آلایندهها و مدلسازی مخازن نفت در محیطهای ناهمگن مورد برسی قرار می گیرد. نهایتا در بخش پایانی به ارائه نتیجه و دستاوردهای این

#### 2- معادله های حاکم بر جریان های دوفازی

معادلههای جریانهای دوفازی در محیط متخلخل از ترکیب معادلههای بقای هر فاز و قانون دارسی با صرفنظر از اثر ثقل استخراج می گردند. معادله بقای جرم هر فاز  $\alpha$  عبارت است از [21]:

$$\frac{\partial (\phi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} u_{\alpha}) = \rho_{\alpha} q_{\alpha}$$
(1)

که در آن w,n = w,n به ترتیب فاز های ترکننده و غیر ترکننده تعریف می گردند. معادله سرعت دارسی کل با استفاده از ترکیب قانون دارسی برای هر فاز  $\alpha$  و بازنویسی مشتق فشار مویینگی با استفاده از قانون مشتق زنجیره ای  $v_{Sw} = -|P_c|^{-1} \nabla S_w$  ای  $v_{Sw} = -|P_c|^{-1} \nabla S_w$ 

$$u_t = -K\lambda_t \nabla P_w + K\lambda_n |P_c'| \nabla S_w$$
<sup>(2)</sup>

معادله های کمکی تعادل درجه اشباع و فشار مویینگی به ترتیب عبارتند از:  $S_w + S_n = 1$ (3)

$$P_c(S_w) = P_n - P_w \tag{4}$$

با جایگزینی معادلههای (2) و (4) در معادله بقای جرم فاز ترکننده و فرض تراکم ناپذیری سیالات، معادله فشار فاز ترکننده مطابق (5) حاصل می گردد:

$$-\nabla \cdot (K\lambda_t \nabla P_w) + \nabla \cdot (K\lambda_n | P_c' | \nabla S_w) = q_w + q_n$$
(5)

معادلات (5) و (7) معادلات اساسی به کار رفته برای تشکیل مدل ریاضی مورد نظر میباشند که در آنها فشار فاز ترکننده  $P_w$  و درجه اشباع فاز ترکننده  $S_w$  به عنوان مجهولات اصلی به شمار میآیند.

علاوه بر معادلات (5) و (7)، روابط تحرک پذیری<sup>3</sup> کل  $\lambda_t$  و تابع  $f_w$   $f_w$   $f_w$   $f_w$  نیز عبارتند از:

$$\lambda_{t} = \lambda_{w} + \lambda_{n} u_{t} = u_{w} + u_{n} f_{w} = \frac{\lambda_{w}}{\lambda_{t}}.$$
(6)  
Here  $\lambda_{t} = \lambda_{w} + \lambda_{n} u_{t} = u_{w} + u_{n} f_{w} = \frac{\lambda_{w}}{\lambda_{t}}.$ 
(6)  
Here  $\lambda_{t} = \lambda_{w} + \lambda_{n} u_{t} = u_{w} + u_{n} f_{w} = \frac{\lambda_{w}}{\lambda_{t}}.$ 
(7)  
 $T_{v} = (2)$   
 $\psi = (2)$   

$$k_{rw}(S_e) = S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}},$$

$$k_{rn}(S_e) = (1 - S_e)^2 \left(1 - S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}}\right), 0.2 \le \zeta \le 4,$$
(8)
$$P(S) = P(S_e^{-1})^2 \left(1 - S_e^{-1}\right), 0.2 \le \zeta \le 4,$$
(9)

$$k_{rw}(0) = 0, k_{rn}(0) = 1, \lim_{S_e \to 0} P_c = \infty.$$

همچنین درجه اشباع موثر بصورت رابطه (10) تعریف می گردد [10]:  $S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rn}}, 0 \le S_e \le 1$ (10)

 $J_{\rm K}^{\rm T}$  ضرایب پخشیدگی معادلههای فشار و درجه اشباع به ترکیب با ( $K\lambda_t$ ) و  $J_{\rm K}^{\rm T}$  فرایب پخشیدگی معادلههای فشار و درجه اشباع به ترکیب با ( $K|P_c|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t$ )  $T = T_{\rm in} \cup J_w$  میباشند. مرزهای موجود در دامنه بطورکلی به قسمت های  $J_{\rm r}$   $J_{\rm out} \cup T_N$   $J_{\rm rout} \cup T_N$ تقسیم بندی میشوند که شامل سه نوع شرط مرزی دیریشله  $J_{\rm rout} \cup T_N$ نیومن  $J_{\rm e}$  و رابین مطابق (11) تا (14) میباشند [10]:

$$P_{w} = P_{\text{dir}}^{-},$$

$$(S_{w}u_{t} - K|P_{c}'|\lambda_{w}\lambda_{n}/\lambda_{t}\nabla S_{w}) \cdot n_{F} = S_{\text{in}}u_{t} \cdot n_{F}, \Gamma_{\text{in}}$$

$$P_{w} = P_{\text{dir}}^{+}, (K|P_{c}'|\lambda_{w}\lambda_{n}/\lambda_{t}\nabla S_{w}) \cdot n_{F} = \mathbf{0}, \Gamma_{\text{out}}$$

$$(12)$$

$$(K\lambda_t \nabla P_w) \cdot n_F = \mathbf{0}, (K|P_c'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t \nabla S_w) \cdot n_F = \mathbf{0}, \Gamma_N$$
(13)

$$\mathbf{S}_{w}(\mathbf{L},\mathbf{0}) = S_{\text{initial}} \tag{14}$$

قسمتهای ورودی و خروجی مرزهای بیرونی  $\Omega$  به ترتیب بصورت  $\sigma_{out} = \{x \in \partial \Omega: u_t \cdot n_F \ge 0\}$  و  $\Gamma_{in} = \{x \in \partial \Omega: u_t \cdot n_F < 0\}$  تعریف می گردند. در روابط (11) تا (14)،  $n_F$  بردار نرمال خروجی از مرز  $\Omega \Omega$  می باشد. همچنین  $S_{in} = \Gamma_R$  درجه اشباع ورودی در شرط مرزی رابین  $S_{in}$  times  $S_{initial}$ 

#### 3- گسسته سازی روابط حاکم

قبل از ارائه روش گسسته سازی معادلات (5) و (7) مربوط به فشار و درجه اشباع، برخی تعاریف مورد نیاز در این بخش ارائه میشوند.

شبکه حل عددی توسط یک دامنه از المانهای محاسباتی مانند شکل 1 مشخص می گردد.  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  دامنه چند وجهی محدود، با مرزهای پیوسته لیپ  $\mathcal{T}_{h}$  = .میاشد میباشد. و متشکل از تعدادی المان Tدر فضای دوبعدی میباشد. تعداد  $N_h$  و  $N_h$  به ترتیب شبکه مثلثی سازگار در دامنه  $\Omega$  و  $N_h$  تعداد  $(T_i)_{N_h} \subset \mathbb{R}^2$ کل المان ها تعریف می گردند. همچنین *T***|** سطح مقطع هر یک از المان های مثلثی  $T \in \mathcal{T}_h$  و  $F \mid_{d-1}$  اندازه هر وجه المان  $F \in \mathcal{F}_h$  تعریف می گردند.  $F^i = \partial T^- \cap \partial T^+$  هر وجه مشترک داخلی بین دو المان همسایه  $T^{\pm}$  با نماد و مجموعه کل وجوه داخلی با نماد  ${\mathcal F}_h^{i}$  نمایش داده میشود.  $n_F$  بردار نرمال واحد بر وجه F می اشد که جهت آن از المان  $T^-$  به  $T^+$  تعریف می گردد. در این تحقیق  $^{-}T$  المانی تعریف می گردد که در شماره گذاری شبکه ناپیوسته عدد بزرگتری را اخذ نماید. هرگاه وجه مورد نظر  $\Omega \cap \partial \Omega \cap F^b$  منطبق بر مرزهای بیرونی  $(\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_N)$  باشد، به آن وجه مرزی اطلاق می-گردد و مجموعه وجوه مرزی نیز با ${\mathcal F}^b_h$ نمایش داده میشوند. لازم به ذکر است که بردار نرمال واحد بر وجوه مرزی  $\partial T$ ، با  $n_F$  نمایش داده می شود. مجموعه كل وجوه دامنه با نماد  $\mathcal{F}_h^i = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$  تعريف مى گردد. قطر هر وجه معادل نسبت سطح المان  $T \mid_{a}$  به طول آن وجه  $F \mid_{a-1}$  میباشد و با نماد  $h_F$  نمایش داده می شود [23]. شکل 1 تعاریف انواع وجوه و مرزها را نمایش میدهد.

[ DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.12.43.1 ]

5- Lipschitz continuous6- Dirichlet7- Neumann

- 1- Buckley-Leverett
- 2- Mcwhorter
- 3- Mobility
- 4- Fractional flow function



Fig. 1 Schematic representation of the interior edges, boundary edges and normal unit vector

شکل 1 وجوه داخلی، وجوه مرزی و بردار نرمال واحد بر وجوه

 $\begin{aligned} \| \psi_i \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h: \psi_i |_T \in \mathbb{P}_r^d(T) \\ & \quad \text{محدود در روش های گالرکین ناپیوسته تعریف می شود. <math>\mathbb{P}_r^d$  نیز مجموعه درجات محدود در روش های گالرکین ناپیوسته تعریف می شود.  $\mathbb{P}_r^d$  نیز مجموعه درجات تقریب با مرتبه حداکثر  $\mathbb{P} = \mathcal{P}$ می باشد. تابع آزمون  $\mathcal{P}_r^d(T)$  بر المان  $\mathcal{P}_i|_T \in \mathbb{P}_r^d(T)$  ناپیوستگی در هر وجه از طرف چپ و راست دارای دو مقدار  $|_F - \mathcal{P}_r$  بر المان  $|_F - \mathcal{P}_r^d(T)$  ناپیوستگی در هر وجه از طرف چپ و راست دارای دو مقدار  $|_F - \mathcal{P}_r$  بر المان  $|_F = \mathcal{P}_r^d(T)$  ناپیوسته ناپیوسته از عملگرهای اساسی "پرش" و "متوسط" وزنی<sup>2</sup> به صورت زیر برای توصیف تابع از عملگرهای اساسی "پرش" و "متوسط" وزنی<sup>2</sup> به صورت زیر برای توصیف تابع  $\mathcal{P}_r$  بر تمامی وجوه  $\mathcal{P}_h^d = \mathcal{P}_h^d$  استفاده می شود [24]:

که در آن  $[\![\psi]\!]$ و  $\{\!\!\psi\\!\!\}$  به ترتیب "پرش" و "متوسط" تابع  $\psi$ نامیده میشوند و  $[\!\!\psi]\!]$ . $w_{\mathcal{F}^+} + w_{\mathcal{F}^-} = 1, w_{\mathcal{F}^\pm} \geq 0$ 

$$\llbracket \psi \rrbracket = \psi^{-} |_{F}, \{\psi\} = \psi^{-} |_{F}, F \in \mathcal{F}_{h}^{b}.$$
<sup>(16)</sup>

در محیط متخلخل ناهمگن، عملگر "متوسط" وزنی به تانسور نفوذپذیری  $T^{\pm}|_{F}$  ذاتی K بستگی دارد. فرض می گردد تانسورهای K روی المانهای  $F^{\pm}|_{F}$  ثابت تعریف شوند آنگاه ضرایب وزنی عبارتند از:

$$w_{F^{-}} = \frac{\mathcal{K}_{T^{+},F}}{\mathcal{K}_{T^{+},F} + \mathcal{K}_{T^{-},F}}, w_{F^{+}} = \frac{\mathcal{K}_{T^{-},F}}{\mathcal{K}_{T^{+},F} + \mathcal{K}_{T^{-},F}},$$

$$(17)$$

که در آن  $\mathcal{R}_{T^{\pm},F} = n_F^{\mathrm{T}} K^{\pm} n_F$  میاشد. همچنین در مواردی که محیطهای همگن مورد بررسی میباشند، عملگر "متوسط" وزنی به نوع استاندارد آن ( $w_{\mathcal{F}^+} = w_{\mathcal{F}^-} = \mathbf{0.5}$ ) مطابق رابطه (18) تبدیل میشود [25]:

$$\{\psi\} = \frac{\psi^{-}|_{F} + \psi^{+}|_{F}}{2}, F \in \mathcal{F}_{h}^{i}$$

$$\{\psi\} = \psi^{-}|_{F}, F \in \mathcal{F}_{h}^{b}.$$
(18)

در این تحقیق به منظور تقلیل حساسیت مدل به انتخاب پارامتر پنالتی و بهبود فرمولاسیون گسسته سازی مکانی معادله های حاکم، از "متوسط" هارمونیک ضرایب انتشار آنها  $\gamma$  در ترمهای پنالتی استفاده می گردد. این ضرائب در هر وجه برای معادله های فشار و درجه اشباع به ترتیب با  $K_{A}$ 

تحت عنوان توابع آزمون  $(v,z) \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h) imes \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$  درفضایی تقریبی با ابعاد محدود تعریف می گردند.

3-1- گسسته سازی معادله فشار

(5)  $P_{w}^{n+1}$ ,  $P_{w}^{n+1}$ ,  $P_{w}^{n+1}$ ,  $P_{w}^{n+1}$ ,  $P_{w}^{n}$ ,  $P_{w}^{n+1} \cdot \nabla v dT - \sum_{F \in \Gamma_{h} \cup \Gamma_{D}} \int_{F} (K\lambda_{t} \nabla P_{w}^{n+1} \cdot n_{F})_{w} [v] ds$  $+ \sum_{F \in \Gamma_{h} \cup \Gamma_{D}} \int_{F} \eta \{K\lambda_{t} \nabla v \cdot n_{F}\}_{w} [P_{w}^{n+1}] dT$   $+ \sum_{F \in \Gamma_{h} \cup \Gamma_{D}} \int_{F} (K\lambda_{n} |P_{c}^{n}| \nabla S_{w}^{n}) \nabla \cdot v dT$   $- \sum_{F \in \Gamma_{h} \cup \Gamma_{D}} \int_{F} (K\lambda_{n} |P_{c}^{n}| \nabla S_{w}^{n}) \nabla \cdot v dT$   $- \sum_{F \in \Gamma_{h} \cup \Gamma_{D}} \int_{F} (K\lambda_{n} |P_{c}^{n}| \nabla S_{w}^{n})^{\uparrow} \cdot n_{F} [v] ds + \sum_{F \in \Gamma_{D}} \int_{F} \eta (K\lambda_{t} \nabla v$   $+ \sum_{F \in \Gamma_{D}} \sigma_{F} \cdot \langle \gamma \rangle_{Fp} \frac{r_{p}^{2} |F|_{d-1}}{Mean(|T^{-}|, |T^{+}|)} \int_{F} v P_{dir} ds$   $+ \sum_{F \in \Gamma_{D}} \int_{F} (q_{w}^{n+1} + q_{n}^{n+1}) v dT, \qquad (21)$ 

$$\forall F \in F_{h}^{i} \langle \gamma \rangle_{Fp} = \frac{-D_{Fp} - D_{Fp}}{D_{Fp}^{+} + D_{Fp}^{-}}$$
(22)

$$\forall F \in \mathcal{F}_{h}^{p} \langle \gamma \rangle_{Fp} = D_{Fp}^{-}$$
(23)

که در آن مقدار پارامتر پنالتی  $\mathbf{0} \leq -\sigma_{F}$  ر مبنای نوع روش گالرکین ناپیوسته (اعم از پنالتی داخلی متقارن یا غیر متقارن وزنی) بین 10 تا 100 انتخاب می گردد. پارامتر متقارن کننده  $\eta$  برای روش ادن - باومن - بابوشکا ( $\sigma_{F} = \mathbf{0}$ ) و پنالتی داخلی غیرمتقارن وزنی (NWIP) برابر (1+) و برای روش پنالتی داخلی متقارن وزنی (SWIP) برابر (1-) میباشد. متوسط هارمونیک ضریب انتشار که ترم های پنالتی معادله فشار را مقیاس مینماید با  $\gamma_{Fp}$  نشان داده میشود. ترم پنالتی معادله فشار را مقیاس مینماید با را ( $\gamma_{Fp}$  نشان داده میشود. ترم پنالتی معادله فشار را مقیاس مینماید با  $\gamma_{Fp}$  نشان داده میشود. ترم پنالتی معادله فشار را مقیاس مینماید با و برای روش پنالتی داخلی میشود. ترم پنالتی معادله فشار را مقیاس مینماید با و برای استفاده میشود. جهت بادسو در پایداری از تکنیک بادسو<sup>3</sup> برای گسسته سازی آن استفاده میشود. جهت بادسو در پایداری از تکنیک بادسو<sup>3</sup> برای گسسته سازی آن استفاده میشود. جهت بادسو در پایداری از مقیاس میگردد. سرعت کل در این بخش از دیفرانسیل گیری دو المان همسایه، تعیین میگردد. سرعت کل در این بخش از دیفرانسیل گیری میدان فشار در گام زمانی قبلی مطابق رابطه (2) بدست میآید [26].  $\forall F = \partial T^{-} \cap \partial T^{+}. \forall u. u^{\dagger}$ 

 $\forall F = \partial T^{-} \cap \partial T^{+}, \forall \psi, \psi^{\uparrow}$   $= \begin{cases} \psi^{-}: if \{u_{t} \cdot n_{F}\} \geq \mathbf{0}, \\ \psi^{+}: if \{u_{t} \cdot n_{F}\} < \mathbf{0}. \end{cases}$  (24)

#### 3-2- نگاشت و بازسازی میدان سرعت

پیوستگی بردار نرمال سرعت در وجوه داخلی المان ها که منجر به خاصیت

بقاء جرم محلی در مسائل همبسته جریان - انتقال می شود از اهمیت بسیاری برخوردار می باشند. تعیین سرعت با استفاده از مشتق گیری عددی از فشار که در المان محدود سنتی مرسوم است منجر به ناپیوستگی سرعت برروی وجوه داخلی و از بین رفتن خاصیت بقای جرم محلی می گردد. این عوامل موجب ایجاد خطا های عددی محسوسی در حل معادله درجه اشباع می گردند. در این تحقیق به منظور رفع این نقیصه از تکنیک نگاشت سرعت در فضای انترپولاسیون برداری<sup>4</sup> (div) استفاده شده است.

3- Upwinding4- Vectorial Interpolation space :H(div)

 $\begin{aligned} & \langle \gamma \rangle_F = \frac{2D_F^- D_F^+}{D_F^- + D_F^+}, \langle \gamma \rangle_F \\ & \leq 2\min(D_F^-, D_F^+), F \in \mathcal{F}_h^i, \qquad (19) \\ & \langle \gamma \rangle_F = D_F^-, F \in \mathcal{F}_h^b. \qquad (20) \\ & \langle \gamma \rangle_F = D_F^-, F \in \mathcal{F}_h^b. \qquad (20) \\ & \langle \gamma \rangle_F = D_F^-, F \in \mathcal{F}_h^b. \qquad (20) \\ & \langle \gamma \rangle_F = D_F^-, F \in \mathcal{F}_h^b. \qquad (20) \end{aligned}$ 

درجه اشباع از توابع تقریب خطی ( $r_s = 1$ ) استفاده شده است. این توابع

1- Jump
 2- Weighted average

329

که تابعی از درجه اشباع هستند، با یک گام تأخیر زمانی محاسبه  $ig(k_{rlpha}(S^n_{w}ig)$ می گردند. در این معادله نیز به منظور گسسته سازی شار انتقال، از مقدار بادسوی ترم تابع کسر جریان  $f_w(S_w^n)$  استفاده می گردد. با توجه به معلوم بودن بردار نرمال (پيوسته و داراى بقاء محلى) سرعت در تمام وجوه المان ها  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_h$  که در مرحله  $F \in \mathcal{F}_h$ قبل بدست آمده است، ميتوان جهت بادسو را با دقت بالاترى تعيين نمود. اكنون با ضرب نمودن تابع آزمون  $z \in \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$  در معادله درجه اشباع و بکارگیری قاعده انتگرال گیری جزء به جزء میتوان فرم ضعیف نهایی معادله درجه اشباع را روی تمامی المانهای دامنه 📭 به صورت ذیل نمایش داد [19]:  $\int_{T\in\mathcal{T}_{h}} \phi \frac{S_{w}^{n+1}}{\Delta t} z + \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_{E} |P_{c}'| \lambda_{w} \lambda_{n} / \lambda_{t} \nabla S_{w}^{n} \cdot \nabla z$  $-\sum_{m=1}^{\infty}\int_{F}S_{w}^{n+1}u_{t}^{n+1}\cdot n_{F}z$  $-\sum_{r\in\mathbb{T}}\int_{F} \llbracket z \rrbracket \{ |P_c'| \lambda_w \lambda_n / \lambda_t \nabla S_w^n \cdot n_F \}_w$  $+ \sum_{F} \int_{F} \eta [S_{w}^{n}] \{ P_{c}' | \lambda_{w} \lambda_{n} / \lambda_{t} \nabla z \cdot n_{F} \}_{w}$  $+\sum_{r=1}^{n}\int_{F}\gamma[[z]][S_{w}^{n+1}] = \int_{E\in\varepsilon_{h}}\phi\frac{S_{w}^{n}}{\Delta t}z + \sum_{w}\int_{T\in\mathcal{T}_{h}}u_{t}^{n+1}f_{w}^{n\uparrow}\cdot\nabla z$  $-\sum_{F\in\Gamma_{h}\cup\Gamma_{R}\cup\Gamma^{+}}^{n}\int_{F}u_{t}^{n+1}f_{w}^{n\uparrow}\cdot n_{F}\llbracket z\rrbracket-\sum_{F\in\Gamma_{D}}^{n}\int_{F}^{n}S_{in}u_{t}^{n+1}\cdot n_{F}z$ 

+ 
$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_E q_w^{n+1} z$$
 (29)

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \gamma = \sigma_F \cdot \langle \gamma \rangle_{Fs} \frac{r_s^2 |F|_{d-1}}{\operatorname{Mean}(|T^-|, |T^+|)} + \gamma_B, \qquad (30)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_{h}^{i}, \langle \gamma \rangle_{Fs} = \frac{\mathbf{z} D_{Fs} - D_{Fs}}{D_{Fs}^{+} + D_{Fs}^{-}}, \gamma_{B} = \frac{1}{2} [u_{t}^{n+1} \cdot n_{F}], \qquad (31)$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^b, \langle \gamma \rangle_{Fs} = D_{Fs}^{-}, \tag{32}$$

که در آن  $\langle \gamma \rangle_{Fs}$  و  $\gamma$  به ترتیب متوسط هارمونیک ضریب انتشار و پنالتی کل معرفی می گردند. شایان ذکر است با توجه به هذلولوی بودن نوع معادله درجه اشباع، عبارت پنالتی کل  $(\gamma)$  علاوہ بر مقدار پنالتی  $(\sigma_F)$  تابع بزرگی بردار نرمال سرعت متوسط در هر وجه المان ( $\gamma_B$ ) میباشد [24]. شکل 3 نمودار گردش کار حل معادله های حاکم بر جریانهای دوفازی با روش گالرکین ناپيوسته را نشان ميدهد.

## 4- محدود کننده شیب MLP اصلاح شده

بازسازی و تثبیت داده های حاصل از حل مسائل انتقال- غالب امری حیاتی مىباشد، زيرا خطىسازى ضعيف معادله هذلولوى درجه اشباع سبب ايجاد نوسانهای غیرفیزیکی در مقادیر محاسباتی درجه اشباع می شود. یکی از مؤثرترین روشها برای حذف این نوسانهای غیرفیزیکی استفاده از محدود کنندہ های شیب می باشد.

در این تحقیق از محدود کننده MLP اصلاح شده استفاده گردیده است که زمان و هزینه محاسبات در آن کمتر از سایر محدودکننده های شیب مانند چاونت-جافر $^{1}$ و دورلوفسکی -اوشر -انگکویست $^{2}$  می باشد. محدود کننده





Fig. 2 Degrees of freedom in  $RT_0$  space

شکل 2 درجات آزادی محلی در فضاهای *RT*<sub>0</sub>

Fig. 3 The flow chart for solution of two phase flow equations using DG شکل3 نمودار گردش کار حل معادله های جریان های دوفازی با روش گالرکین ناپیوسته

برای این منظور از فضای راویارت-توماس مرتبه پایین ( $(RT_0)$  استفاده شده است. سرعت  $u_t^{n+1} = \sum_{i=1}^{\mathrm{DOFs}} q_{t,i}^{n+1} \cdot ec{arPsi}_{F,i}$  است. ا آزادی  $q_{t,i}^{n+1}$  بر روی هر وجه المان (مطابق شکل 2) و توابع درون یابی بردارى  $arPhi_{F,i}$  با تقريب بسيار مطلوبى بدست آورد[15]. توابع درون يابى برداری خواص (25) را باید ارضاء نمایند [19].

$$\vec{\Psi}_{F}|_{F'} \cdot n_{F'} = \delta_{F,F'}, F, F' \in \mathcal{F}_{h}$$
(25)

درجات آزادی بر روی وجوه هر المان از روابط (26) و(27) بدست میآیند:  $u_t^{n+1} = -K\lambda_t \nabla P_w^{n+1} + K\lambda_n \left| P_c \right| \nabla S_w^n$ 

 $u_{t}^{n+1} \cdot n_{E} = \left( \left( - \left( K \lambda_{t} \nabla P_{u}^{n+1} \right) \dots \cdot n_{E} + \left( K \lambda_{n} \left| P_{c}^{'} \right| \nabla S_{u}^{n} \right)^{up} \cdot n \right) \right)$ 

$$u_{t} = h_{F} - \int_{F} (-\mathbf{I} R \lambda_{t} \mathbf{v} I_{w} - \mathbf{J}_{w} - h_{F} + (R \lambda_{n} | I_{c} | \mathbf{v} \mathbf{J}_{w}) - h_{F}$$

$$+ \sigma_{F} \cdot \langle \gamma \rangle_{F_{p}} \frac{r_{p}^{2} |F|_{d-1}}{Mean(|T^{-}|_{d}, |T^{+}|_{d})} [P_{w}^{n+1}]) \qquad (26)$$

$$[P_{w}^{n+1}]' = \begin{cases} [P_{w}^{n+1}] F \in \mathcal{F}_{h}^{i} \\ P_{w}^{n+1} - P_{\text{dir}} F \in \mathcal{F}_{h}^{b} (\Gamma_{D}), \qquad (27) \end{cases}$$

$$q_{t}^{n+1} = \mathbf{0} \Gamma_{N}, \qquad (28)$$

3-3- گسسته سازی معادله درجه اشباع فرم ضعيف گالركين ناييوسته معادله درجه اشباع  $S_w^{n+1}$  مشابه معادله فشار بدست میآید. ضرایب غیرخطی این معادله **(**فشار مویینگی P<sub>c</sub> (S<sup>n</sup><sub>w</sub>) و نفوذپذیری نسبی

330

1- Chavent-Jaffre 2- Durlofsky-Osher-Engquist

مهدی جامعی و حمیدرضا غفوری



Fig. 4 the pattern of slope modifying in ABC element using modified MLP slope limiter

شکل 4 الگوی اصلاح شیب در المان ABC با استفاده از محدودکننده MLP اصلاح شده



Fig. 5 (Top) The geometry and boundary conditions for Buckley-Leverett problem (Bottom) The structured grid

**شكل** 5 (بالا) هندسه و شرايط مرزى مسئله باكلى-لورت (پايين) شبكه ساختار يافته

$$\bar{S}_{w_{t}Ave} = \frac{\int_{T} S_{w}}{|T|_{d}} \xrightarrow{if r_{s}=1} \bar{S}_{w} = \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N_{T}(T)} S_{w_{j}j}\right).$$
(34)

$$UB_{ABC,j} = \min\{\bar{S}_{w,Ave} \subset \Re_{T_{ABC}} | i \in T\},$$
(35)

$$LB_{ABC,j} = \max\{\bar{S}_{w,Ave} \subset \Re_{T_{ABC}} | i \in T\}.$$
(36)

 $\mathfrak{N}_{T}(T)$  مجموعه المانهای احاطه کننده گره i و  $\mathcal{N}_{T}(T)$  تعداد رئوس هر  $\mathfrak{N}_{T_{ABC}}$  (ABC) میباشد. شکل 4 الگوی اصلاح شیب در المان جاری  $T \in \mathfrak{T}_{h}$  (ABC) را با استفاده از اصلاح تقریب خطی  $\nabla \overline{S}_{w}$  نشان میدهد.

مقادیر درجه اشباع گره j ام المان  $\mathbf{T}_0$  پس از اصلاح شیب (گرادیان تقریب خطی) عبارتند از:

$$\mathcal{L}(S_{w,j}) = \bar{S}_{w,0} + \emptyset \cdot \nabla \bar{S}_{w}(x, y) \cdot r_{j}, \qquad (37)$$

$$= \begin{cases} \frac{UB_{ABC,j} - \bar{S}_{w,0}}{\nabla \bar{S}_{w,abc} \cdot r_{j}} | \nabla \bar{S}_{w,abc} \cdot r_{j} \rangle > UB_{ABC,j} \\ \frac{LB_{ABC,j} - \bar{S}_{w,0}}{\nabla \bar{S}_{w,abc} \cdot r_{j}} | \partial \bar{S}_{w,abc} \cdot r_{j} \rangle < LB_{ABC,j} \end{cases}$$

در رابطه فوق  $n_1$   $n_2$   $n_2$  و  $n_3$  مولفه های بردار نرمال n بر صفحه تقریب و $x_b$  و  $y_b$  مختصات مرکز ثقل المان های همسایه المان  $T_0$  میباشند.

#### 4-1- اعمال شرايط مرزى

هرگاه المان جاری یک المان مرزی باشد در این صورت از تکنیک نگاشت انعکاسی برای ساخت گرادیان تقریب خطی استفاده می گردد. اگر شرط مرزی در وجه مرزی المان از نوع رابین ( $T_{in}$ ) باشد، از مقدار درجه اشباع ورودی و مختصات میانی وجه مرزی المان برای ساخت گرادیان تقریب استفاده می گردد. اما هرگاه شرط مرزی نیومن ( $T_{N}$ ) بر روی وجه مرزی حاکم باشد، از یک المان مجازی ( $T_{Im}$ ) استفاده می گردد که روی وجه مرزی بصورت متقارن نگاشته می گردد. در این صورت مقدار متوسط درجه اشباع در این المان برابر متوسط المان جاری ( $\overline{S}_{w,Im} = \overline{S}_{w,0}$ ) تعریف شده و از مختصات نگاشته شده تکنیک بعنوان یکی از جنبههای نوآوری تحقیق حاضر، موجب حفظ پایداری سرکز ثقل المان مجازی مدل می گردد و از این رو تحت عنوان محدودکننده مرکز مقال محدودکننده

در این تحقیق از دستورات پیشرفته فرم برداری المان محدود و استفاده از ماتریس های تنک<sup>1</sup> مرجع شماره [27] به منظور ارتقاء و کارایی مدل حاضر استفاده شده است.

#### 5- صحت سنجى مدل

در این بخش صحت سنجی مدل تهیه شده با استفاده از دو مسئله شبه یک بعدی باکلی-لورت و مک ورتر با پارامتر های مفروض در جدول 1 صورت می گیرد.

#### **5-1- مدل باكلى – لورت**

مسئله باکلی-لورت (با خاصیت هذلولوی) شامل یک ستون افقی با دامنه  $\Omega = (0m, 300m) \times (0m, 30m)$  و شرایط مرزی مطابق شکل 5 میباشد بطوریکه، در شرایط اولیه سه چهارم دامنه از فاز غیر ترکننده و باقیمانده آن از فاز ترکننده اشباع شده است. در این مسئله به منظور بررسی کارایی مدل در حالت همبسته، از اثر مشتقات فشار مویینگی (عملگر انتشار) صرفنظر نگردیده است. چند جمله ای های تقریب معادلههای فشار و درجه اشباع به ترتیب محالت همبسته، از اثر مشتقات فشار مویینگی (عملگر انتشار) صرفنظر نگردیده است. چند جمله ای های تقریب معادلههای فشار و درجه اشباع به ترتیب محالت همبسته، از اثر مشتقات فشار مویینگی (عملگر انتشار) صرفنظر نگردیده است. چند جمله ای های تقریب معادلههای فشار و درجه اشباع به ترتیب شبکه ساختار یافته به منظور حفظ تقارن نتایج و از نسخه گالرکین ناپیوسته مشبکه ساختار یافته به منظور حفظ تقارن نتایج و از نسخه گالرکین ناپیوسته مشبکه ساختار یافته به منظور حفظ تقارن نتایج و از نسخه الرکین ناپیوسته مشبکه ساختار یافته به منظور حفظ تقارن نتایج و از نسخه الرکین ناپیوسته منظور بررسی دقت طرح و تأثیر ریز نمودن تقسیمات طولی مدل، نتایج برای دو شبکه المان بندی ساختار یافته به حل کاملا همبسته معادلههای حاکم و عدم دسترسی شبکه المان بندی ساختار یافته دیگر (h = L/128 و از نسخه الرکین ناپیوسته موار گرفته اند. با توجه به حل کاملا همبسته معادلههای حاکم و عدم دسترسی محاسبه خطاهای نرم ( $E_{L2} = \sqrt{||X_{Base} - X|||2}$ ) استفاده شده است. شرایط محاسبه معالهای نرم ( $E_{L2} = \sqrt{||X_{Base} - X||2}$ ) استفاده شده است. مرای

$$P_w|_{x=0} = 3 \times 10^5$$
 (Pa),  $P_w|_{x=300} = 1.5 \times 10^5$  (Pa),  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (0) = 0.3 (-).  
 $S_{in}|_{x=0} = 0.75$  (-),  $S_w|_{x=300} = 0.3$  (-),  $S_w$  (-),

1- Sparse Matrix

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دورہ 15، شمارہ 12



Fig. **6** comparing (Top) the saturation (-) and (Bottom) pressure (Pa) profiles along the x axis at 180 and 360 days for current model, Gruninger's [29] DG scheme and OBB-DG version of current model using modified Chavent-Jaffre slope limiter

شکل6 مقایسه (پایین) توزیع درجه اشباع (-) (بالا) پروفیل فشار (پاسکال) در امتداد محود x در مدل حاضر با مدلهای گالرکین ناپیوسته گرونینگر [29] و نسخه OBB-DG محود x در مدل حاضر با استفاده از محدودکننده شیب چاونت-جافر اصلاح شده پس از گذشت 180 و 360 روز



Fig. 7 The geometry and boundary conditions for Mcwhorter problem شکل 7 هندسه و شرایط مرزی مسئله مک ورتر

جدول 1 مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسئله باکلی- لورت و مک ورتر Table 1 Properties for the porous medium and fluids used in the Buckley-Leverett and Mcwhorter

, v v			
	مک ور تر	باكلى-لورت	پارامتر
	0.3	0.20	$\phi$
	10 <sup>-10</sup>	$10^{-11}$	K <b>[m</b> ²]
	5000	1000	$P_d$ [Pa]
	2.0	2.0	ζ[—]
	0.0	0.20	$S_{rw}$ [-]
	0.0	0.15	<i>S<sub>rn</sub></i> [–]
	0.001	0.001	$\mu_w$ [kg/(ms)]
	0.001	0.01	$\mu_n$ [kg/(ms)]

جدول 2 خطاهای نرم و ضریب همگرایی متغیر های اصلی به ازای  $(r_p = \mathbf{1}, r_s = \mathbf{1}, RT_0)$  را به ازای انواع تقسیمات شبکه المان نشان میدهد. مقادیر خطای نرم متغیرهای اصلی نشان میدهد که با ریزتر نمودن شبکه المانها، بر دقت نتایج و ضریب همگرایی افزوده می شود.

#### 5-2- مسئله مک ورتر

#### $P_w$ (,0) = 1.95 × 10<sup>5</sup> Pa, $S_w$ (,0) = 0

به منظور کنترل صحت نتایج مدلسازی کد تهیه شده با استفاده از درجات تقریبی خطی، پروفیل مقادیر درجه اشباع  $S_w$ در جهت محور x و برای مدت 8000 ثانیه با استفاده از بازه های زمانی  $\Delta t = 50$  با نتایج حل تحلیلی معادله و همچنین نتایج مدل نسخه NIPG گالرکین ناپیوسته باستین (محدود کننده دورلوفسکی اوشر انگکویست) [30] با مقدار پنالتی و تقسیم بندی طولی مشابه در شکل 8 مقایسه شده اند.

مقایسه نتایج بیانگر دقت قابل قبول روش گالرکین ناپیوسته در حل فرم بیضوی معادله درجه اشباع میباشد. همچنین میتوان مشاهد نمود که علی رغم استفاده از دو نوع محدودکننده شیب متفاوت در مدل حاضر، نتایج مطابقت مطلوبی با یکدیگر دارند و این در حالی است که زمان پردازش مورد نیاز برای فرآیند محدود شدگی و تثبیت نتایج با استفاده از محدودکننده شیب MLP اصلاح شده حدود یک-چهارم محدودکننده چاونت-جافر میباشد.



**جدول** 2 خطای نرم (E<sub>L2</sub>) متغیر های اصلی پس از <sup>۲</sup> ست 360 روز Table 2 The Norm error ( $E_{L_2}$ ) at 360 days for main variables *E* <sub>L2</sub> - **(**P<sub>w</sub>**)** h = L/128h=L/64h=L/32 0.0323 0.0458 0.1533 ضریب همگرایی (Pw 0.495 1.74  $E_{L_2} - (S_w)$ 0.2038 0.2774 0.4274 ضریب همگرایی (Sw) 0.45 0.618 -

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دورہ 15، شمارہ 12

#### 6- کاربرد مدل

#### 1-6- مسئله نمونه 1

در اینجا مدل تهیه شده برای مدلسازی مسئله چاه های پنجگانه، بعنوان یک مسئله شناخته شده در زمینه مدلسازی بازیافت ثانویه در مخازن نفت، بررسی می گردد. در این مسئله چهار چاه برداشت نفت در گوشههای یک مخزن مربعی همگن و یک چاه تزریق آب در مرکز آن استقرار یافته اند. مطابق شکل 9 یک چهارم هندسه فوق بدلیل تقارن هندسی مدل-  $\mathcal{D}_{F}$  یک مخزن مربعی همگن و یک معادم فوق بدلیل تقارن هندسی مدل- مدازی می گردد. در این مسئله از نسخه پنالتی داخلی نامتقارن وزنی مازی می کارکین ناپیوسته (NWIP) با مقدار پنالتی  $\sigma_{F}=1,RT_{0}$  و یک شبکه المان های معادلات فشار و درجه اشباع در این مسئله (مربع) می باشد. مراد می معادلات فشار و درجه اشباع در این مسئله معادلات وزنی می مسئله اندازه گام های زمانی برابر 2005 روز در نظر گرفته شده است. در این مسئله اندازه گام های زمانی برابر 2005 روز در نظر گرفته شده است.

مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل در جدول 3 نشان داده شده اند. شرایط مرزی و اولیه عبار تند از:

 $\begin{array}{l} P_{\rm dir}^- = {\bf 3.45 \times 10^6 \ Pa, S_{\rm in}} = {\bf 0.95(-)} \ \Gamma_{\rm in} \\ P_{\rm dir}^+ = {\bf 2.41 \times 10^6 \ Pa, \Gamma_{\rm out}} \\ P_w({\bf ,0)} = {\bf 2.41 \times 10^6 \ Pa, S_w({\bf ,0})} = {\bf 0.20(-)} \end{array}$ 

نتایج مدل حاضر با نتایج مدل تهیه شده توسط کلیبر و ریویه [10] با استفاده از نسخه های OBB-DG و (**NIPG**,  $\sigma_F = 1$ )، شبکه ریز یکنواخت با تعداد 4224 المان و شرایط مرزی و خصوصیات فیزیکی یکسان مقایسه شده اند. لازم به ذکر است در مدل ارائه شده توسط کلیبر و ریویه از تکنیک اعمال پنالتی در معادله درجه اشباع به منظور برقراری پیوستگی میدان فشار استفاده شده است و نوسانات غیرفیزیکی با استفاده از محدودکننده شیب "وجه-محور" دورلوفسکی اوشر -انگکویست اصلاح شده استفاده گردیده است. در اشکال 10، الو 12 به ترتیب پروفیل قطری و کانتورهای متغیرهای اصلی مدل حاضر و مدل کلیبر و ریویه برای مدت 15 و 30 روز با یکدیگر مقایسه شده اند.

**جدول** 3 مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل مسئله 1و 2 2 Table 3 The porous medium and fluids properties used in test cases 1 and

مسئله نمونه 2	مسئله نمونه 1	پارامتر
0.25-0.3	0.20	$\phi$
8 × 10 <sup>-9</sup> – 10 <sup>-12</sup>	10 <sup>-11</sup>	K <b>[m</b> <sup>2</sup> ]
1000	5000	$P_d$ [Pa]
2.0	2.0	ζ <b>[-]</b>
0.15	0.15	<i>S<sub>rw</sub></i> [–]
0.0	0.0	<i>S<sub>rn</sub></i> [–]
0.00089	0.0005	$\mu_w$ [kg/ (ms) ]
0.0162	0.002	$\mu_n$ [kg/(ms)]





Fig. 10 Comparing the pressure (Pa) (top) and saturation (-) (Bottom) diagonal profiles on x = y for the OBB-DG current study and Klieber and Rivière [10] with fined mesh

شکل10 مقایسه توزیع فشار (پاسکال) (بالا) و درجه اشباع آب (-) (پایین) در امتداد پروفیل قطری x = y با استفاده از نسخه OBB-DG در مدل حاضر و نتایج مدل کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت



Fig. 11 The wetting phase pressure (Pa) contours at 15 and 30 days (Left) the current study with NWIP ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) (Right) Klieber and

بندى بدون ساختار مسئله نمونه 1

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دورہ 15، شمارہ 12

Rivière [10] with OBB-DG and fined mesh

**شکل 1**1 مقایسه کانتورهای توزیع فشار فاز ترکننده (پاسکال) پس از 15 و 30 روز (چپ) با نسخه NWIP در مدل حاضر (rp = 2,rs = 1,RT) (راست)، مدل (OBB-DG) گالرکین ناپیوسته کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت

مقایسه کیفی پروفیل قطری متغیرهای اصلی (شکل10) بیانگر آنست که نتایج مدل حاضر با شبکه ای به مراتب درشتر، به ازای درجات تقریب مختلف و استفاده از نسخه NWIP دارای پخش عددی کمتری نسبت به نتایج نسخه NIPG کلیبر و ریویه میباشد و البته مطابقت مطلوبی با نسخه OBB-DG کلیبر و ریویه [10] دارد.



Fig. 12 The wetting phase saturation (-) contours at 15 and 30 days (Left) the current study with NWIP ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) (Right) Klieber and Rivière [10] with OBB-DG and fined mesh شكل 12 مقايسه كانتورهاى توزيع درجه اشباع فاز تركننده (-) پس از 15 و 30 روز

(OBB-DG) در مدل حاضر ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) (راست)، مدل (OBB-DG) با نسخه NWPG در مدل حاضر ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) گالرکین ناپیوسته کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت



Fig. 13 comparing the saturation (-) diagonal profiles at 15 and 30 days (top) using the grids with 498 and 864 elements and (Bottom) two vertex-based slope limiters, namely modified MLP and Chavent-Jaffre

همچنین مقایسه پروفیل قطری درجه اشباع با بکارگیری محدودکنندههای MLP اصلاح شده و چاونت - جافر مؤید عملکرد قابل قبول محدودکننده MLP اصلاح شده میباشد (شکل 13 -پایین). ضمن آنکه زمان پردازش فرآیند محدود شدگی به ازای استفاده از محدودکننده شیب MLP اصلاح شده کمتر از یک - سوم چاونت - جافر میباشد.

#### 2-6- مسئله نمونه 2

 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = (0m, 100m) \times (0m, 50m)$  در یک آبخوان ناهمگن با دامنه (0m, 50m) × ( $\Omega_2 = 0$  وارد آلاینده سبک تتراکراید سدیم از وجه سمت چپ (10, 20) × (0) =  $F_{in}$  وارد میشود و شرط مرزی رابین حاکم است. مرز سمت راست از نوع شرط خروجی (0,50) × (100) =  $F_{out} = G_{out}$  میباشد و مرزهای باقیمانده نفوذ ناپذیر میباشند (شکل 14). شروط مرزی و اولیه عبارتند از:



 $\kappa_{\Omega_1} = 10^{-12} [\text{m}^2], \ \kappa_{\Omega_2} = 8 \times 10^{-9} [\text{m}^2], \ \phi_{\Omega_1} = 0.25, \ \phi_{\Omega_2} = 0.3$ Fig. 14 Unstructured grid and boundary condition used in sample case 2 شکل 14 شبکه المان بندی بدون ساختار و شرایط مرزی مسئله 2







Fig. 15 The wetting phase pressure (Pa) contours at 20, 30 and 40 days and using ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) approximation شکل 15 کانتورهای توزیع فشار (پاسکال) برای زمان های 20، 30 و 40 روز و ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) درجات تقریب ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ )

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دورہ 15، شمارہ 12

شکل 13 مقایسه پروفیل قطری مقادیر درجه اشباع فاز ترکننده (-) پس از 15 و 30 روز (بالا) با دو شبکه المان بندی با تعداد 498 و 864 المان (پایین) با استفاده از دو محدودکننده گره-محور MLP اصلاح شده و چاونت-جافر

استفاده از یک شبکه نسبتا درشتر با 498 المان منجر به ایجاد ناهمواری هایی در محل پیشانی در قیاس با شبکه ریزتر (با 864 المان) شده است (شکل 13- بالا) اما دقت آن مطلوب بوده و علت این امر تأثیر توامان نگاشت میدان سرعت، مقیاس نمودن ترمهای پنالتی و خاصیت غیر نوسانی محدودکننده MLP اصلاح شده میباشد.



**Distance (m)** Fig. 17 comparing the pressure (Pa) (Top) and saturation (-) (Bottom) profiles along the x axis (x = 15, y) for current model using SWIP and ( $r_p = \{1,2\}, r_s = 1, RT_0$ ) approximation at 30 days شکل 17 مقایسه پروفیل فشار (بالا) و درجه اشباع آب (پایین) در امتداد محور طولی ( $r_p = \{1,2\}, r_s = 1, RT_0$ ) با استفاده از نسخه SWIP و درجات تقریب (x = 15, y) پس از 30 روز

• این طرح دارای بقاء محلی در هر وجه  $F \in \mathcal{F}_h^i$  المان بوده و قادر است محل گرادیانهای شدید را علی رغم استفاده از شبکه های المان بندی نه چندان ریز، با دقتی مطلوب تعیین نماید.

 حساسیت مدل حاضر به انتخاب مقدار پارامتر پنالتی در قیاس با روش های استاندارد گالرکین ناپیوسته بسیارکمتر است. لذا میتوان با استفاده از هر دو نسخه NWIP و SWIP به نتایج نسبتا مشابه و مطلوبی دست یافت.

• استفاده از مفهوم المان محدود ترکیبی در پردازش و بازسازی میدان  $u_t$  سرعت  $u_t$  در فضای (H(div)، موجب حفظ بقای محلی و پیوستگی بردار  $u_t$  .



Fig. 16 The wetting phase saturation (-) contours at 20, 30 and 40 days and using ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ ) approximation

شکل 16 کانتورهای توزیع درجه اشباع فاز ترکننده (-) پس از 20، 30 و 40روز و (-) درجات تقریب ( $r_p = 2, r_s = 1, RT_0$ 

$$P_{\rm dir}^{-} = 3.00 \times 10^{\circ} \text{ Pa}, S_{\rm in} = 0.9(-) \Gamma_{\rm in}, P_{\rm dir}^{+} = 5.00 \times 10^{5} \text{ Pa}, \Gamma_{\rm out}, P_{w}(,0) = 5.00 \times 10^{5} \text{ Pa}, S_{w}(,0) = 0.25(-)$$

پارامترهای فیزیکی محیط متخلخل و سیالات موجود در جدول 3 توصیف شده اند و شبکه المان بندی مثلثی آن از نوع بدون ساختار با تعداد 1882 المان میباشد. در این مسئله از نسخه پنالتی داخلی متقارن وزنی (Swip, $\sigma_F = 100$ ) استفاده شده است. در این مسئله اندازه گام های زمانی برابر 0.020 روز در نظر گرفته شده است.

ترسیمههای فشار و درجه اشباع برای مدت 30،20 و 40 روز در شکلهای 15 و 16 نمایش داده شده است. همچنین پروفیل طولی متغیرهای اصلی در شکل 17 برای مدت زمان 10 تا 40 روز و درجات تقریب (= **1,2)**,  $r_s$  (**1,2)** =  $r_p$ **1**,  $RT_0$  با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج بیانگر آنست که در محل ناپیوستگی ها و گرادیان های شدید ناشی از ناهمگنی دامنه آبخوان، وضوح نتایج نسبتا مطلوب میباشد. این امر ناشی از استفاده از نوآوری های بکار رفته در فرمولاسیون گسسته

محدود كننده غير	مکانی معادلات و حذف نوسانات غیرفیزیکی با استفاده از	سازى
	ے MLP اصلاح شدہ میباشد.	نوسانی

7- نتیجه گیری

در این تحقیق طرح عددی گالرکین ناپیوسته دارای بقاء محلی به منظور مدلسازی جریان های دوفازی با روش حل کاملا ضمنی متوالی ارائه گردید که دارای ویژگی های قابل توجه ذیل میباشد:

در مدل حاضر بدلیل سازگاری محدودکننده غیر نوسانی MLP اصلاح شده
 با مدل، از ایجاد نوسانات غیر فیزیکی به نحوه مطلوبی جلوگیری شده است.

مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1394، دورہ 15، شمارہ 12

نرمال سرعت در محل تماس المان ها می گردد.
• استفاده از فرمولاسیون وزنی عملگر متوسط در حل مسائل محیطهای
ناهگمن بر وضوح نتایج در اطراف ناپیوستگی میافزاید و ناپایداری ها را می کاهد.
در این تحقیق دامنه پارامتر پنالتی( $\sigma_F$ > 0) بین 10 تا 100 متغیر است •
که در نسخه روش پنالتی داخلی نامتقارن وزنی (NWIP) این پارامتر در بازه
انتخاب میگردد و در نسخه پنالتی داخلی متقارن وزنی $\sigma_{\! F} \in$ [10,50]
(SWIP) از مقادیر بزرگتر از 50 استفاده شده است.
<ul> <li>در این مدل برای حصول همگرایی در هر گام زمانی، علیرغم استفاده از</li> </ul>
یک گام تاخیر زمانی برای محاسبه ضرایب غیرخطی که بمنظور خطی سازی

- [5] Z. Chen, G. Huan, B. Li, An improved IMPES method for two-phase flow in porous media, *Transport in Porous Media*, Vol. 54, No. 3, pp. 361-376, 2004.
- [6] B. Cockburn, C.-W. Shu, Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, *Journal of scientific computing*, Vol. 16, No. 3, pp. 173-261, 2001.
- [7] B. Cockburn, C.-W. Shu, The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 35, No. 6, pp. 2440-2463, 1998.
- [8] P. Bastian, B. Riviere, *Discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media*, University of Heidelberg Technical Report 2004-28, 2004.
- [9] B. Riviere, *The DGIMPES model in IPARS: discontinuous Galerkin for two-phase flow integrated in a reservoir simulator framework*, Technical Report 02-29, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2002.
- [10] W. Klieber, B. Riviere, Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 196, No. 1, pp. 404-419, 2006.
- [11] L. J. Durlofsky, B. Engquist, S. Osher, Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, No. 1, pp. 64-73, 1992.
- [12] O. J. Eslinger, *Discontinuous galerkin finite element methods applied to two-phase, air-water flow problems*, Thesis, University of Texas at Austin, 2005.
- [13] R. Fučík, J. Mikyška, Discontinous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures, *Procedia Computer Science*, Vol. 4, No. 11, pp. 908-917, 2011.
- [14] A. Ern, I. Mozolevski, L. Schuh, Discontinuous Galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 23, pp. 1491-1501, 2010.
- [15] M. Fortin, F. Brezzi, *Mixed and hybrid finite element methods*: Springer, 1991.
- [16] I. Mozolevski, L. Schuh, Numerical simulation of two-phase immiscible incompressible flows in heterogeneous porous media with capillary barriers, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 242, pp. 12-27, 2013.
- [17] T. Arbogast, M. Juntunen, J. Pool, M. F. Wheeler, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in a porous medium enforcing H (div) velocityand continuous capillary pressure, *Computational Geosciences*, Vol. 17, No. 6, pp. 1055-1078, 2013.
- [18] J. Kou, S. Sun, Upwind discontinuous Galerkin methods with mass conservation of both phases for incompressible two-phase flow in porous media, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, , Vol.1,No. 5, pp. 1674-1699, 2014.
- [19] M. Jamei, H. R. Ghafouri, An efficient discontinuous Galerkin method for two-phase flow modeling by conservative velocity projection, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. 26, 2016.
- [20] M. Jamei, H. R. Ghafouri, A Novel Discontinuous Galerkin Model for Two-Phase Flow in Porous Media Using Improved IMPES Method, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. 26, 2016.
- [21] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, *Computational methods for multiphase flows in porous media*: Siam, 2006.
- [22] R. Brooks, T. Corey, *Hydraulic Properties Of Porous Media*, Colorado State University Hydrology Paper 3, 1964.
- [23] D. A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*: Springer, 2011.
- [24] A. Ern, A. F. Stephansen, P. Zunino, A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection–diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 29, pp. 235–256, 2009.
- [25] B. Rivière, Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and

معادلات صورت می گیرد، به فرآیند تکرار مانند آنچه در روش پیکارد دیده می شود نیازی نیست. علت این امر وجود روشهای تثبیت کننده در گسسته سازی مکانی معادلات می باشد. لذا زمان پردازش در این مدل کوتاه تر از مدل هایی می باشد که مبتنی بر تکرار بوده و فاقد تثبیت کننده می باشد.

#### 8- فهرست علائم

طول وجه (m)	F
تانسور نفوذ پذیری ذاتی ( <b>m</b> <sup>2</sup> )	K
نفوذ پذیری نسبی فاز غیرتر کننده (-)	$k_{rn}$
نفوذ پذیری نسبی فاز ترکننده (-)	$k_{rw}$
بردار نرمال نفوذ پذیری <b>(m</b> ²)	$k_{T,F}$
فشار مویینگی (Pa )	$P_c$
فشار مویینگی ورودی <b>(Pa )</b>	$P_d$
فضای تکه ای نا پیوسته مرتبه <i>r</i>	$\mathbb{P}^d_r$
فشار در مرز دیریشله <b>(Pa</b> )	$P_{dir}$
ترم چشمه-چاه فاز غیر ترکننده <b>(kg/m<sup>2</sup>s</b> )	$q_n$
ترم چشمه-چاه فاز ترکننده <b>(kg/m</b> ²s	$q_w$
درجه اشباع موثر (-)	$S_e$
درجه اشباع ورودی مرز رابین (-)	$S_{in}$
سطح مقطع المان مثلثی <b>(m</b> ²)	T
فضاى ابعادى محدود معادله فشار	$\mathbb{V}_{r_p}$
فضاى ابعادى محدود معادله اشباع	$\mathbb{V}_{r_s}$
ضرائب وزنى عملگر متوسط	$\mathbf{W}_{\mathcal{F}}$
	علايم يونانى
ضریب توزیع حفرات(-)	ζ
ترم متقارن کننده (-)	η

,	
$\Gamma_D  \Gamma_N$	مرزهای دیریشله و نیومن
$\lambda_lpha$	تحرک پذیری فاز <i>α</i> ( <b>(ms)/kg</b> )
$\mu_n$	گرانروی فاز غیر ترکننده ((kg/(ms) )
$\mu_w$	گرانروی فاز غیر ترکننده ((kg/(ms) )
<b>{</b> ψ <b>}</b> <sub>w</sub>	عملگر متوسط وزنی
$ ho_lpha$	<b>چ</b> گالی فاز <b>α (kg/m</b> ³)
τ	زمان کل <b>(T)</b>
$\phi$	تخلخل (-)

#### زيرنويسها

فاز غير تركننده	Ν
فاز ترکننده	W

- *parabolic equations: theory and implementation*: Society for Industrial and Applied Mathematics: Siam, 2008.
- [26] B. Riviere, Numerical study of a discontinuous Galerkin method for incompressible two-phase flow, ECCOMAS Proceedings, 2004.
- [27] J. S. Park, S.-H. Yoon, C. Kim, Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 3, pp. 788-812, 2010.
- [28] C. Grüninger, Using DUNE-PDELAB for Two-Phase Flow in Porous Media, *Advances in DUNE*, Springer, pp. 131-141, 2012.
- [29] C. Grüninger, *Discontinuous Galerkin methods for two-phase flows in porous media*, Thesis, University of Stuttgart, 2010.
- [30] P. Bastian, *Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media*: Springer, pp1-22, 2003.

9-مراجع

336

- J. Douglas Jr, D. Peaceman, H. Rachford Jr, A method for calculating multidimensional immiscible displacement, *Trans. SP AIME*, Vol. 216, pp. 297-308, 1959.
- [2] R. Helmig, *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*: Springer-Verlag, 1997.
- [3] H. Hoteit, A. Firoozabadi, Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures, *Advances in Water Resources*, Vol. 31, No. 1, pp. 56-73, 2008.
- [4] G. Lin, J. Liu, F. Sadre-Marandi, A comparative study on the weak Galerkin, discontinuous Galerkin, and mixed finite element methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 273, pp. 346-362, 2015.