ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ارائه یک روش گالرکین ناپیوسته برای جریان های دوفازی در محیط متخلخل به وسیله محدود کننده شیب MLP اصلاح شده

مهدی جامعی[1]، حمید رضا غفوری[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز
2- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران، اهواز
* اهواز، صندوق پستی 6135634899، ghafouri_h@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 28 تیر 1394
پذیرش: 26 مهر 1394
ارائه در سایت: 10 آذر 1394

کلید واژگان:
جریان دوفازی
بقاء محلی
محدود کننده شیب
روش گالرکین ناپیوسته
پنالتی داخلی

چکیده

در این تحقیق حل عددی جریان های دوفازی تراکم ناپذیر در محیط های متخلخل با استفاده از روش‌های مرتبه بالای پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته مورد توجه قرار گرفته است. در فرمولاسیون به کار رفته فشار و درجه اشباع فاز ترکننده (P_w, S_w) به عنوان مجهولات اصلی، به همراه شرط مرزی ترکیبی (رابین) در نظر گرفته شده است. هدف از این مدل تعیین دقیق تر محل گرادیان های شدید ناشی از محل تماس دو فاز در محیط متخلخل ناهمگن می‌باشد. در مدل ارائه شده، میدان سرعت با استفاده از پس فرآیند نگاشت H(div) در فضای راویارت-توماس مرتبه پایین (RT_0) بازسازی می‌گردد. در این تحقیق با استفاده از مقیاس نمودن ترم های پنالتی و همچنین فرمولاسیون وزنی عملگر متوسط، بهبود قابل توجهی در فرمولاسیون گسسته سازی مکانی معادله‌های حاکم ایجاد شده است که موجب کاهش ناپایداری ها در محیطهای ناهمگن می‌گردد. به منظور جلوگیری از نوسان های غیرفیزیکی در مقادیر درجه اشباع در پایان هر گام زمانی از محدود کننده شیب (گره- محور) غیر نوسانی MLP (Multi-dimensional limiting process) اصلاح شده استفاده می‌گردد. این محدودکننده شیب بدلیل عملکرد مطلوب و سازگار با مدل، بعنوان یکی از نوآوری های اصلی این تحقیق تلقی می‌گردد. صحت سنجی مدل با استفاده از مسائل شناخته شده باکلی- لورت و مک ورتر انجام گرفته است. همچنین به منظور بیان توانایی مدل در تسخیر شوک‌های ناگهانی محل تماس فازهای سیال دو مسئله عددی در زمینه های مدل‌سازی بازیافت ثانویه در مخازن نفتی و ردیابی آلاینده های امتزاج ناپذیر در آبخوان ها ارائه گردیده است.

A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter

Mehdi Jamei[1], Hamid Reza Ghafouri [*2]

1- Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran
2- Department of Civil Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran
* P.O.B. 6135634899 Ahvaz, Iran, ghafouri_h@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 July 2015
Accepted 18 October 2015
Available Online 01 December 2015

Keywords:
Two-phase flow
local conservation
slope limiter
discontinuous Galerkin method
Interior penalty

ABSTRACT

In this article, a numerical solution of incompressible two-phase flow in isothermal condition, based on wetting pressure-wetting saturation formulation $(P_w - S_w)$ using high order primal discontinuous Galerkin (DG) method which can capture the shock fronts of two-phase flow in heterogeneous porous media is considered. In this presented model, the velocity field is reconstructed by a H(div) post-process in lowest order of Raviart-Thomas space (RT_0). Also in this study, the scaled penalty and weighted average (harmonic average) formulation significantly improve the special discretization formulation of governing equations which cause the instabilities in heterogamous media to be reduced. The modified MLP slope limiter is used to remove the non-physical saturation values at the end of each time step. In this study, the slope limiter should be considered as one of the main novelties due to the impressive effects in results stabilization. The proposed model is verified by pseudo 1D Buckley-Leverett and Mcwhorter problems. Two test cases, a problem for modeling the secondary recovery of petroleum reservoirs and the other one a problem for detecting immiscible contamination are used to show the abilities of shock capturing two phases interface in porous media.

1- مقدمه

بررسی مکانیسم رفتار جریان‌های دو فازی در محیط متخلخل از اهمیت ویژه‌ای در زمینه مطالعه ردیابی آلاینده‌های امتزاج ناپذیر، مدلسازی بازیافت ثانویه در مهندسی مخازن نفت و هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی برخوردار می‌باشند. در این قبیل مسائل یکی از دو فاز سیال که مستقیما در مجاورت ذرات محیط متخلخل خاک قرار دارد "فاز ترکننده" و سیالی دیگری که تمایل به جابجا کردن سیال ترکننده دارد، "فاز غیر ترکننده" نامیده می‌شوند. معادله های حاکم بر جریان‌های دوفازی شامل معادله‌های غیرخطی فشار و درجه اشباع

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Jamei, H.R. Ghafouri, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 326-336, 2015 (in Persian)

می‌باشند که از ترکیب معادله‌های بقای جرم و قانون دارسی، در فرم‌های گوناگونی ارائه می‌گردند و به لحاظ ریاضی و تقسیم بندی معادله‌های دیفراسیلی جزیی، از نوع بیضوی- هذلولوی می‌باشند. این معادله های کاملا همبسته به لحاظ تقسیم بندی و استراتژی حل، به سه روش حل همزمان [1] [1]، حل کاملا ضمنی متوالی [2] [2] و روش فشار ضمنی-اشباع صریح [3] حل می‌گردند. در این تحقیق برای حل معادلات از روش حل کاملا ضمنی متوالی وبرای خطی سازی معادله‌ها از روش تأخیر زمانی استفاده شده است.

خاصیت بقاء جرم محلی [4] در حل مسائل انتقال- غالب از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته اند. از میان روش‌های دارای بقای محلی می‌توان به روش‌های المان محدود ترکیبی [5]، احجام محدود، روش گالرکین ناپیوسته [6]، روش المان محدود ترکیبی هایبرید [7]، روش المان محدود توسعه یافته وغیره اشاره نمود [3-5].

در این تحقیق مدل‌سازی جریان‌های دوفازی در محیط متخلخل در فضای دو بعدی با استفاده از روش‌های پنالتی داخلی [8] گالرکین ناپیوسته، بعنوان یکی از روش‌های قدرتمند با خاصیت بقاء محلی مورد مطالعه قرار گرفته است. روش‌های گالرکین ناپیوسته بعلت داشتن خاصیت بقاء محلی، روش‌های بسیار قوی در تسخیر پیشانی شوک‌ها [9] در محیط متخلخل ناهمگن با هندسه های پیچیده بوده و سهولت استفاده از شبکه های بدون ساختار [10] با وجود گره‌های آویزان [11] با درجات تقریب مرتبه بالا و امکان تغییر درجات تقریب از یک المان به المان دیگر، از بارزترین مزایای این روش‌ها می‌باشند [6]. روش‌های گالرکین ناپیوسته به دو نوع کلی پنالتی داخلی و گالرکین محلی تقسیم بندی می‌شوند. کاکبرن و شو مطالعه گسترده‌ای در زمینه حل معادله‌های انتقال- انتشار با استفاده از روش های گالرکین ناپیوسته محلی انجام داده اند که در آن از ایده روش المان محدود ترکیبی در حل همزمان متغیر اصلی و گرادیان آن بهره جسته اند [6, 7].

ریویه مدلسازی جریان‌های دوفازی تراکم ناپذیر را برای اولین بار بر مبنای مجهولات درجه اشباع و فشار فاز ترکننده و با در نظر گرفتن شرط مرزی ترکیبی (رابین) و استفاده از روش گالرکین ناپیوسته فاقد پنالتی ادن- باومن و بابوشکا [12] (OBB-DG) مورد توجه قرار داد [8, 9]. ریویه و کلیبر با اضافه نمودن ترم‌های پنالتی به معادله درجه اشباع و معرفی روش‌های پنالتی داخلی متقارن [13]، نامتقارن (SIPG) [14] و ناقص [15]، نسخه‌ای جدید از مدل گالرکین ناپیوسته جریان های دو فازی در محیط‌های متخلخل را با استفاده از تکنیک شبکه‌های انطباق ارائه نمودند [10]. همچنین آن‌ها برای تثبیت نتایج و حذف نوسان های غیر فیزیکی مقادیر محاسباتی درجه اشباع در پایان هر گام زمانی، از محدود کننده شیب درلوفسکی- اوشر- انکویست اصلاح شده [16] بهره بردند [11]. هر چند علی رغم بکار بردن برخی تمهیدات، در حل برخی مسائل ناهمگن، بعضا نوسان‌های غیرفیزیکی مشاهده گردید.

1- Simultaneous solution (SS)
2- Sequential solution (S.Q)
3- Implicit pressure-Explicit saturation (IMPES)
4- Locally conservative
5- Mixed finite element (MFM)
6- Discontinuous Galerkin (DG) method
7- Mixed hybrid finite element (MHFE) method
8- Interior Penalty
9- Capturing shock fronts
10- Unstructured
11- Hanging node
12- Oden-baumann-babuska (OBB-DG) method
13- Symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)
14- Non-symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)
15- Incomplete interior penalty Galerkin (IIPG)
16- Modified Durlofsky–Engquist–Osher slope limiter

اسلینگر با ارائه مدل جریان های دوفازی (آب و هوا) از ترکیب از روش‌های پنالتی داخلی و گالرکین ناپیوسته محلی [17] به ترتیب برای حل معادله‌های فشار و درجه اشباع استفاده نمود و آنگاه مقادیر درجه اشباع محاسباتی را با حل معادله بقاء در پایان هر بازه زمانی اصلاح نمود [12]. حطیط و فیروز آبادی مدل‌سازی جریان های دوفازی را در محیط‌های متخلخل شکافدار، با استفاده از روش المان محدود ترکیبی برای حل همزمان معادله های فشار و سرعت و روش گالرکین ناپیوسته پنالتی داخلی برای حل معادله درجه اشباع مورد توجه قرار دادند [3]. میکیسکا و رادک با محوریت مدلسازی محیط های دو فازی ناهمگن، از روش المان محدود هایبرید ترکیبی و گالرکین ناپیوسته به ترتیب معادله‌های فشار و درجه اشباع را بطور همزمان حل نمودند [13].

ارن و همکارانش با استفاده از فرمولاسیون فشار کل- درجه اشباع فاز تر کننده، نسخه‌ای از مدلسازی جریان های دوفازی با روش گالرکین ناپیوسته را ارائه نموده اند که در آن از شرایط تماسی ناشی از ناپیوستگی فشار موبینگی صرفنظر نشده است [14]. در این تحقیق از تکنیک‌هایی در بهبود فرمولاسیون گسسته- سازی مکانی معادلات حاکم استفاده شده است که موجب ارتقاء پایداری نتایج در اطراف ناپیوستگی ها و ناهمگنی ها شده است. موزالفسکی و ارن نیز با استفاده از پس فرایند نگاشت سرعت در فضای المان محدود ترکیبی راویارت- توماس [18] [15]، مدلسازی جریان های دوفازی بر مبنای فرمولاسیون فشار کل- درجه اشباع فاز ترکننده را ارتقاء داده‌اند [16]. آربوگاست در مدلسازی گالرکین ناپیوسته جریان‌های دوفازی بر مبنای معادله‌های فشار کل- درجه اشباع فاز ترکننده، با اعمال یک ترم پنالتی و کاربرد پس فرایند بازسازی میدان سرعت در فضای راویارت توماس مرتبه پایین به ترتیب پیوستگی فشار موبینگی و میدان سرعت را تامین نموده است [17]. او با بکار بردن یک محدود کننده شیب المان- های چهار ضلعی نوسان ها و خطاهای عددی را کاهش داد. کو و سان مدلی متفاوت از مدل‌های گالرکین ناپیوسته جریان‌های دوفازی مرسوم ارائه نمودند که با استفاده از تکنیک بادسو بقای جرم را در هر دو فاز تامین نمودند [18] . اخیرا جامعی و غفوری با استفاده از روش‌های حل متوالی و روش فشار ضمنی-اشباع صریح بهبود یافته، بر مبنای فرمولاسیون (P_w, S_w) به ارائه مدل جریان‌های دوفازی در محیط متخلخل پرداختند [19, 20]. در این مدل با استفاده از نگاشت میدان سرعت در فضای راویارت-توماس، بقای محلی و پیوستگی بردار نرمال سرعت حفظ گردید. همچنین از محدودکننده چاونت-جافر جهت حذف نوسانات غیر فیزیکی و تثبیت نتایج استفاده گردید. در تحقیق حاضر نسخه توسعه یافته تحقیق [19] ارائه شده است که در آن بجای استفاده از محدودکننده نسبتا پر هزینه چاونت-جافر از محدودکننده گره-محور و غیر نوسانیMLP اصلاح شده استفاده است. این محدود کننده شیب بر خلاف محدود کننده چاونت – جافر نیازی به انجام فرآیند بهینه سازی و صرف زمان چندانی ندارد و از طرفی تثبیت نتایج را نیز درحد مطلوب و قابل قبولی انجام می‌دهد.

در اینجا با استفاده از استراتژی حل کاملا ضمنی متوالی، معادله‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی برمبنای فرمولاسیون (P_w, S_w) و اعمال شرط مرزی ترکیبی (رابین [19]) بعنوان شرایط مرزی ورودی، با فرض تراکم ناپذیری سیالات و شرایط همدمایی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. به منظور گسسته سازی مکانی از سه روش پنالتی داخلی گالرکین ناپیوسته تحت عنوان‌های ادن- باومن- بابوشکا، پنالتی داخلی متقارن وزنی [20] (SWIP) و پنالتی داخلی

17- Local Discontinuous Galerkin
18- Raviart-Thomas space
19- Robin
20- Symmetric weighted interior penalty Galerkin

غیرمتقارن وزنی (NWIP) استفاده می‌گردد. از طرفی روش تفاضلات محدود پسرونده (ضمنی) بعنوان روشی پایدار و مستقل از محدودیت‌های اندازه گام برای گسسته سازی زمانی هر دو معادله فشار و درجه اشباع بکار می‌رود. همچنین به منظور افزایش دقت نتایج و حفظ پیوستگی بردار نرمال سرعت در وجوه داخلی المان ها، از تکنیک نگاشت H(div) میدان سرعت در فضای المان محدود ترکیبی راویارت –توماس مرتبه پایین (RT_0) استفاده شده است. به منظور کنترل نوسان های مقادیر درجه اشباع محاسباتی در پایان هر گام زمانی از محدود کننده گره-محور و غیرنوسانیMLP اصلاح شده در فضای دوبعدی المان‌های مثلثی استفاده شده است. صحت‌سنجی مدل با استفاده از مدل‌های معروف باکلی- لورت[1] و مک ورتر[2] و تحلیل مبسوط نتایج آن‌ها انجام می‌پذیرد. در ادامه این بخش دو نمونه مثال کاربردی در زمینه ردیابی آلاینده‌ها و مدلسازی مخازن نفت در محیط‌های ناهمگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. نهایتا در بخش پایانی به ارائه نتیجه و دستاوردهای این تحقیق پرداخته خواهد شد.

2- معادله‌های حاکم بر جریان‌های دوفازی

معادله‌های جریان‌های دوفازی در محیط متخلخل از ترکیب معادله‌های بقای هر فاز و قانون دارسی با صرفنظر از اثر ثقل استخراج می‌گردند. معادله بقای جرم هر فاز α عبارت است از[21]:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_\alpha u_\alpha)=\rho_\alpha q_\alpha \tag{1}$$

که در آن $\alpha = w, n$ به ترتیب فاز های ترکننده و غیر ترکننده تعریف می‌گردند. معادله سرعت دارسی کل با استفاده از ترکیب قانون دارسی برای هر فاز α و بازنویسی مشتق فشار موبینگی با استفاده از قانون مشتق زنجیره ای $\nabla P_c=-|P_c{}'|\nabla S_w$ بفرم (2) حاصل می‌گردد.

$$u_t=-K\lambda_t\nabla P_w+K\lambda_n|P_c{}'|\nabla S_w \tag{2}$$

معادله‌های کمکی تعادل درجه اشباع و فشار موبینگی به ترتیب عبارتند از:

$$S_w+S_n=1 \tag{3}$$

$$P_c(S_w)=P_n-P_w \tag{4}$$

با جایگزینی معادله‌های (2) و (4) در معادله بقای جرم فاز ترکننده و فرض تراکم ناپذیری سیالات، معادله فشار فاز ترکننده مطابق (5) حاصل می‌گردد:

$$-\nabla\cdot\left(K\lambda_t\nabla P_w\right)+\nabla\cdot\left(K\lambda_n|P_c{}'|\nabla S_w\right)=q_w+q_n \tag{5}$$

معادلات (5) و (7) معادلات اساسی به کار رفته برای تشکیل مدل ریاضی مورد نظر می‌باشند که در آن‌ها فشار فاز ترکننده P_w و درجه اشباع فاز ترکننده S_w به عنوان مجهولات اصلی به شمار می‌آیند.

علاوه بر معادلات (5) و (7)، روابط تحرک پذیری[3] کل λ_t و تابع کسرجریان[4] f_w نیز عبارتند از:

$$\lambda_t=\lambda_w+\lambda_n, u_t=u_w+u_n, f_w=\frac{\lambda_w}{\lambda_t}. \tag{6}$$

با جایگزینی معادله سرعت کل (2) در معادله بقای جرم (1) برای فاز ترکننده، معادله درجه اشباع به فرم (7) استخراج می‌گردد [2]:

$$\phi\frac{\partial(S_w)}{\partial t}-\nabla\cdot\left(K|P_c{}'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t\ \nabla S_w\right)=q_w-\nabla\cdot(f_w u_t), \tag{7}$$

$$S_{rw}\le S_w\le 1-S_{rn}. \tag{1-7}$$

در این تحقیق به منظور توصیف توابع نفوذپذیری نسبی و فشار موبینگی، از توابع غیرخطی بروکس- کری مطابق (8) تا (9) استفاده شده است [22].

$$k_{rw}(S_e)=S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}},$$
$$k_{rn}(S_e)=(1-S_e)^2\left(1-S_e^{\frac{2+3\zeta}{\zeta}}\right), 0.2\le\zeta\le 4, \tag{8}$$

$$P_c(S_e)=P_d S_e^{\frac{-1}{\zeta}}, \tag{9}$$

که در کران‌های ذیل محدود می‌گردند.

$$k_{rw}(0)=0, k_{rn}(0)=1, \lim_{S_e\to 0}P_c=\infty.$$

همچنین درجه اشباع موثر بصورت رابطه (10) تعریف می‌گردد [10]:

$$S_e=\frac{S_w-S_{rw}}{1-S_{rw}-S_{rn}}, 0\le S_e\le 1 \tag{10}$$

ضرایب پخشیدگی معادله‌های فشار و درجه اشباع به ترکیب با $(K\lambda_t)$ و $(K|P_c{}'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t)$ توصیف می‌گردند که توابعی از نوع پیوسته لیپ شیتز[5] می‌باشند. مرزهای موجود در دامنه بطورکلی به قسمت های $\Gamma=\Gamma_{\text{in}}\cup\Gamma_{\text{out}}\cup\Gamma_N$ تقسیم بندی می‌شوند که شامل سه نوع شرط مرزی دیریشله[6]، نیومن[7] و رابین مطابق (11) تا (14) می‌باشند [10]:

$$P_w=P_{\text{dir}}^-,$$
$$(S_w u_t-K|P_c{}'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t\nabla S_w)\cdot n_F=S_{\text{in}}u_t\cdot n_F, \Gamma_{\text{in}} \tag{11}$$

$$P_w=P_{\text{dir}}^+, (K|P_c{}'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t\nabla S_w)\cdot n_F=0, \Gamma_{\text{out}} \tag{12}$$

$$(K\lambda_t\nabla P_w)\cdot n_F=0, (K|P_c{}'|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t\nabla S_w)\cdot n_F=0, \Gamma_N \tag{13}$$

$$S_w(.,0)=S_{\text{initial}} \tag{14}$$

قسمت‌های ورودی و خروجی مرزهای بیرونی $\partial\Omega$ به ترتیب بصورت $\Gamma_{\text{in}}=\{x\in\partial\Omega: u_t\cdot n_F<0\}$ و $\Gamma_{\text{out}}=\{x\in\partial\Omega: u_t\cdot n_F\ge 0\}$ تعریف می‌گردند. در روابط (11) تا (14)، n_F بردار نرمال خروجی از مرز $\partial\Omega$ می‌باشد، همچنین S_{in} درجه اشباع ورودی در شرط مرزی رابین $\Gamma_{\text{in}}=\Gamma_R$ و S_{initial} درجه اشباع اولیه معرفی می‌شود.

3- گسسته سازی روابط حاکم

قبل از ارائه روش گسسته سازی معادلات (5) و (7) مربوط به فشار و درجه اشباع، برخی تعاریف مورد نیاز در این بخش ارائه می‌شوند.

شبکه حل عددی توسط یک دامنه از المان‌های محاسباتی مانند شکل 1 مشخص می‌گردد. $\Omega\in\mathbb{R}^2$ دامنه چند وجهی محدود، با مرزهای پیوسته لیپ شیتز و متشکل از تعدادی المان Tدر فضای دوبعدی می‌باشد. $\mathcal{T}_h=\{T_i\}_{N_h}\subset\mathbb{R}^2$ و N_h به ترتیب شبکه مثلثی سازگار در دامنه Ω و N_h تعداد کل المان ها تعریف می‌گردند. همچنین $|T|_d$ سطح مقطع هر یک از المان های مثلثی $T\in\mathcal{T}_h$ و $|F|_{d-1}$ اندازه هر وجه المان $F\in\mathcal{F}_h$ تعریف می‌گردند. هر وجه مشترک داخلی بین دو المان همسایه $T^\pm$ با نماد $F^i=\partial T^-\cap\partial T^+$ و مجموعه کل وجوه داخلی با نماد $\mathcal{F}_h^i$ نمایش داده می‌شود. n_F بردار نرمال واحد بر وجه F می‌باشد که جهت آن از المان T^- به T^+ تعریف می‌گردد. در این تحقیق T^- المانی تعریف می‌گردد که در شماره گذاری شبکه ناپیوسته عدد بزرگتری را اخذ نماید. هرگاه وجه مورد نظر $F^b=\partial T\cap\partial\Omega$ منطبق بر مرزهای بیرونی $(\Gamma=\Gamma_{\text{in}}\cup\Gamma_{\text{out}}\cup\Gamma_N)$ باشد، به آن وجه مرزی اطلاق می‌گردد و مجموعه وجوه مرزی نیز با $\mathcal{F}_h^b$ نمایش داده می‌شوند. لازم به ذکر است که بردار نرمال واحد بر وجوه مرزی ∂T، با n_F نمایش داده می‌شود. مجموعه کل وجوه دامنه با نماد $\mathcal{F}_h=\mathcal{F}_h^i\cup\mathcal{F}_h^b$ تعریف می‌گردد. قطر هر وجه معادل نسبت سطح المان $|T|_d$ به طول آن وجه $|F|_{d-1}$ می‌باشد و با نماد h_F نمایش داده می‌شود [23]. شکل1 تعاریف انواع وجوه و مرزها را نمایش می‌دهد.

1- Buckley-Leverett
2- Mcwhorter
3- Mobility
4- Fractional flow function

5- Lipschitz continuous
6- Dirichlet
7- Neumann

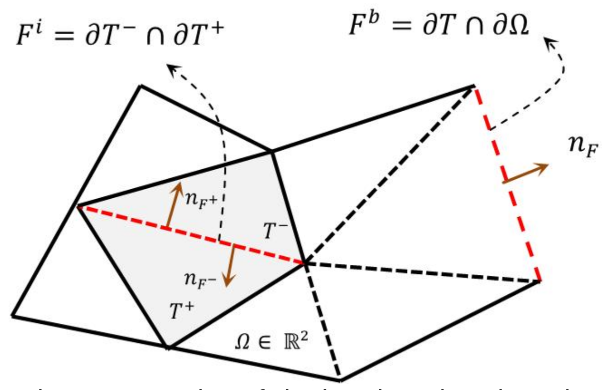


Fig. 1 Schematic representation of the interior edges, boundary edges and normal unit vector

شکل 1 وجوه داخلی، وجوه مرزی و بردار نرمال واحد بر وجوه

زیر فضای المان $\mathbb{V}_r\left(\mathcal{T}_h\right) = \left\{\psi_i \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h : \psi_i|_T \in \mathbb{P}_r^d(T)\right\}$ محدود در روش‌های گالرکین ناپیوسته تعریف می‌شود. $\mathbb{P}_r^d$ نیز مجموعه درجات تقریب با مرتبه حداکثر $r \in \mathbb{N}$ می‌باشد. تابع آزمون $\psi_i|_T \in \mathbb{P}_r^d(T)$ بدلیل ناپیوستگی در هر وجه از طرف چپ و راست دارای دو مقدار $\psi^-|_F$ بر المان $T^-|_F$ و $\psi^+|_F$ بر روی المان $T^+|_F$ می‌باشد. بهمین علت در روش های گالرکین ناپیوسته از عملگرهای اساسی "پرش"[1] و "متوسط" وزنی[2] به صورت زیر برای توصیف تابع ψ بر تمامی وجوه $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$ استفاده می‌شود [24]:

$$\llbracket\psi\rrbracket = \psi^-|_F - \psi^+|_F,$$
$$\{\psi\}_w = w_{\mathcal{F}^-}\cdot\psi^-|_F + w_{\mathcal{F}^+}\cdot\psi^+|_F, \tag{15}$$

که در آن $\llbracket\psi\rrbracket$ و $\{\psi\}$ به ترتیب "پرش" و "متوسط" تابع ψ نامیده می‌شوند و $w_{\mathcal{F}^+} + w_{\mathcal{F}^-} = 1, w_{\mathcal{F}^\pm} \geq 0$.

$$\llbracket\psi\rrbracket = \psi^-|_F, \{\psi\} = \psi^-|_F, F \in \mathcal{F}_h^b. \tag{16}$$

در محیط متخلخل ناهمگن، عملگر "متوسط" وزنی به تانسور نفوذپذیری ذاتی K بستگی دارد. فرض می‌گردد تانسورهای $K^\pm$ روی المان‌های $T^\pm|_F$ ثابت تعریف شوند آنگاه ضرایب وزنی عبارتند از:

$$w_{\mathcal{F}^-} = \frac{k_{T^+,F}}{k_{T^+,F} + k_{T^-,F}}, w_{\mathcal{F}^+} = \frac{k_{T^-,F}}{k_{T^+,F} + k_{T^-,F}},$$
$$F = \partial T^- \cap \partial T^+. \tag{17}$$

که در آن $k_{T^\pm,F}$ مولفه نرمال نفوذپذیری ذاتی $k_{T^\pm,F} = n_F^{\mathrm{T}} K^\pm n_F$ می‌باشد. همچنین در مواردی که محیط‌های همگن مورد بررسی می‌باشند، عملگر "متوسط" وزنی به نوع استاندارد آن $(w_{\mathcal{F}^+} = w_{\mathcal{F}^-} = 0.5)$ مطابق رابطه (18) تبدیل می‌شود [25]:

$$\{\psi\} = \frac{\psi^-|_F + \psi^+|_F}{2}, F \in \mathcal{F}_h^i$$
$$\{\psi\} = \psi^-|_F, F \in \mathcal{F}_h^b. \tag{18}$$

در این تحقیق به منظور تقلیل حساسیت مدل به انتخاب پارامتر پنالتی و بهبود فرمولاسیون گسسته‌سازی مکانی معادله های حاکم، از "متوسط" هارمونیک ضرایب انتشار آن‌ها $\langle\gamma\rangle_F$ در ترم‌های پنالتی استفاده می‌گردد. این ضرائب در هر وجه برای معادله‌های فشار و درجه اشباع به ترتیب با $D_{Fp} = K\lambda_t$ و $D_{Fs} = \left|P_c'\right|\lambda_w\lambda_n/\lambda_t$ نمایش داده می‌شوند.

$$\langle\gamma\rangle_F = \frac{2D_F^- D_F^+}{D_F^- + D_F^+}, \langle\gamma\rangle_F \leq 2\min(D_F^-, D_F^+), F \in \mathcal{F}_h^i, \tag{19}$$
$$\langle\gamma\rangle_F = D_F^-, F \in \mathcal{F}_h^b. \tag{20}$$

در این تحقیق چند جمله ای های تقریب ناپیوسته معادله فشار از نوع مرتبه اول خطی و مرتبه دوم می‌باشند $(r_p = \{1,2\})$، در حالی که برای معادله درجه اشباع از توابع تقریب خطی $(r_s = 1)$ استفاده شده است. این توابع تحت عنوان توابع آزمون $(v, z) \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h) \times \mathbb{V}_{r_s}\left(\mathcal{T}_h\right)$ درفضایی تقریبی با ابعاد محدود تعریف می‌گردند.

3-1- گسسته سازی معادله فشار

برای دستیابی به فرم ضعیف گالرکین ناپیوسته معادله فشار P_w^{n+1}، رابطه (5) را در یک تابع آزمون هموار $v \in \mathbb{V}_{r_p}(\mathcal{T}_h)$ ضرب نموده و با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری جزء به جزء، فرم نهایی تقریبی معادله فشار بر روی تمامی المان ها $T \in \mathcal{T}_h$ بصورت (21) تا (23) بدست می‌آید. (جرئیات بیشتر در [23])

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T K\lambda_t\nabla P_w^{n+1}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}T - \sum_{F\in\Gamma_h\cup\Gamma_D}\int_F\{K\lambda_t\nabla P_w^{n+1}\cdot n_F\}_w\llbracket v\rrbracket\mathrm{d}s\\
&+\sum_{F\in\Gamma_h\cup\Gamma_D}\int_F\eta\{K\lambda_t\nabla v\cdot n_F\}_w\llbracket P_w^{n+1}\rrbracket\mathrm{d}T\\
&+\sum_{F\in\Gamma_h\cup\Gamma_D}\frac{{r_p}^2|F|_{d-1}}{\mathrm{Mean}(|T^-|,|T^+|)}\sigma_F\cdot\langle\gamma\rangle_{Fp}\int_F\llbracket v\rrbracket\llbracket P_w^{n+1}\rrbracket\mathrm{d}s\\
&=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\left(K\lambda_n\left|P_c'\right|\nabla S_w^n\right)\nabla\cdot v\,\mathrm{d}T\\
&-\sum_{F\in\Gamma_h\cup\Gamma_D}\int_F\left(K\lambda_n\left|P_c'\right|\nabla S_w^n\right)^{\uparrow}\cdot n_F\llbracket v\rrbracket\mathrm{d}s+\sum_{F\in\Gamma_D}\int_F\eta(K\lambda_t\nabla v\\
&\cdot n_F)P_{\mathrm{dir}}\mathrm{d}s\\
&+\sum_{F\in\Gamma_D}\sigma_F\cdot\langle\gamma\rangle_{Fp}\frac{{r_p}^2|F|_{d-1}}{\mathrm{Mean}(|T^-|,|T^+|)}\int_F vP_{\mathrm{dir}}\mathrm{d}s\\
&+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T\left(q_w^{n+1}+q_n^{n+1}\right)v\,\mathrm{d}T,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\forall F \in F_h^i, \langle\gamma\rangle_{Fp} = \frac{2{D_{Fp}}^+{D_{Fp}}^-}{{D_{Fp}}^+ + {D_{Fp}}^-} \tag{22}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^b, \langle\gamma\rangle_{Fp} = {D_{Fp}}^- \tag{23}$$

که در آن مقدار پارامتر پنالتی $\sigma_F \geq 0$ بر مبنای نوع روش گالرکین ناپیوسته (اعم از پنالتی داخلی متقارن یا غیر متقارن وزنی) بین 10 تا 100 انتخاب می‌گردد. پارامتر متقارن کننده η برای روش ادن- باومن- بابوشکا $(\sigma_F = 0)$ و پنالتی داخلی غیرمتقارن وزنی (NWIP) برابر (1+) و برای روش پنالتی داخلی متقارن وزنی (SWIP) برابر (1-) می‌باشد. متوسط هارمونیک ضریب انتشار که ترم های پنالتی معادله فشار را مقیاس می‌نماید با $\langle\gamma\rangle_{Fp}$ نشان داده می‌شود. ترم $K\lambda_n\left|P_c'\right|\nabla S_w^n$ شباهت زیادی به ترم انتقال دارد به همین علت به منظور افزایش پایداری از تکنیک بادسو[3] برای گسسته سازی آن استفاده می‌شود. جهت بادسو در وجوه داخلی المان‌ها $F \in \mathcal{F}_h^i$، بر مبنای جهت متوسط سرعت کل u_t در وجوه دو المان همسایه، تعیین می‌گردد. سرعت کل در این بخش از دیفرانسیل گیری میدان فشار در گام زمانی قبلی مطابق رابطه (2) بدست می‌آید [26].

$$\forall F = \partial T^- \cap \partial T^+, \forall\psi, \psi^{\uparrow} = \begin{cases}\psi^- : if\ \{u_t\cdot n_F\} \geq 0,\\ \psi^+ : if\ \{u_t\cdot n_F\} < 0.\end{cases} \tag{24}$$

3-2- نگاشت و بازسازی میدان سرعت

پیوستگی بردار نرمال سرعت در وجوه داخلی المان ها که منجر به خاصیت بقاء جرم محلی در مسائل همبسته جریان - انتقال می‌شود از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشند. تعیین سرعت با استفاده از مشتق گیری عددی از فشار که در المان محدود سنتی مرسوم است منجر به ناپیوستگی سرعت برروی وجوه داخلی و از بین رفتن خاصیت بقای جرم محلی می‌گردد. این عوامل موجب ایجاد خطا های عددی محسوسی در حل معادله درجه اشباع می‌گردند. در این تحقیق به منظور رفع این نقیصه از تکنیک نگاشت سرعت در فضای انترپولاسیون برداری[4] H(div) استفاده شده است.

1- Jump
2- Weighted average
3- Upwinding
4- Vectorial Interpolation space :H(div)

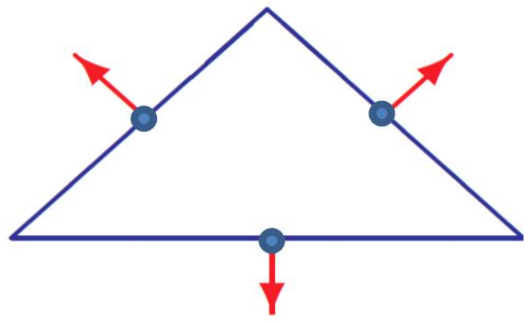


Fig. 2 Degrees of freedom in RT_0 space

شکل 2 درجات آزادی محلی در فضاهای RT_0

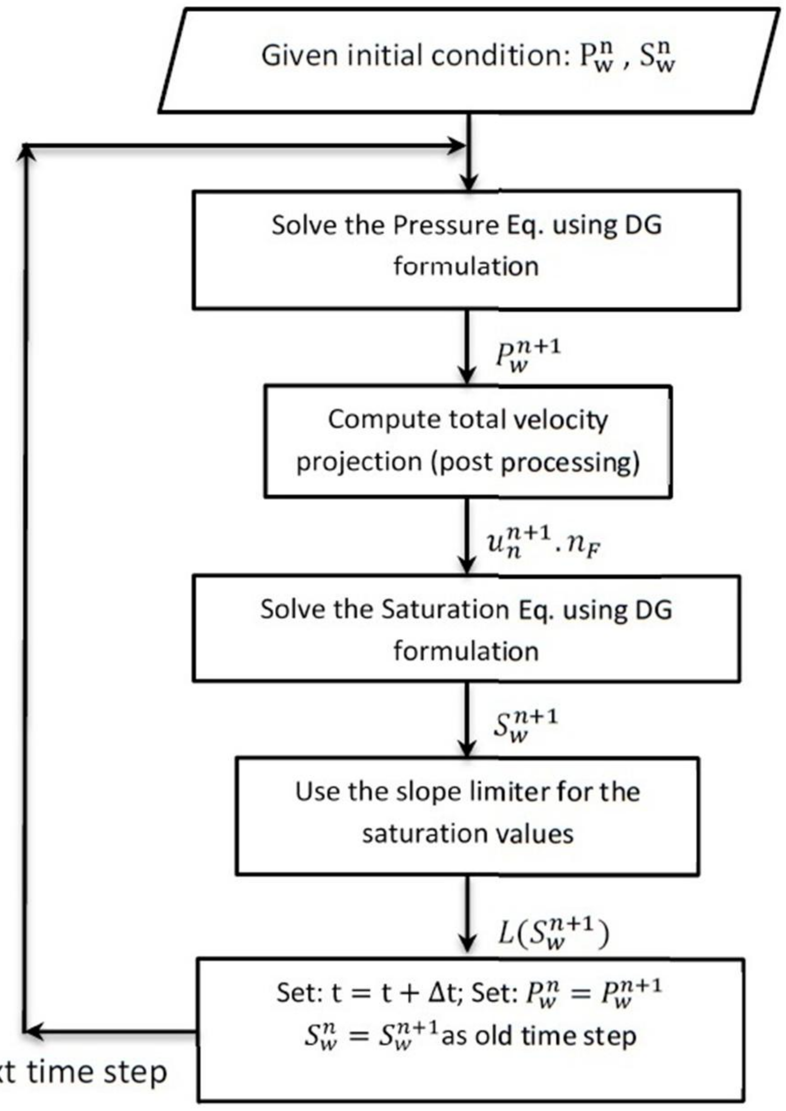


Fig. 3 The flow chart for solution of two phase flow equations using DG

شکل3 نمودار گردش کار حل معادله های جریان های دوفازی با روش گالرکین ناپیوسته

برای این منظور از فضای راویارت-توماس مرتبه پایین (RT_0) استفاده شده است. سرعت $u_t^{n+1} = \sum_{i=1}^{\mathrm{DOFs}} q_{t,i}^{n+1} \cdot \vec{\Psi}_{F,i}$ را می‌توان با معرفی یک درجه آزادی $q_{t,i}^{n+1}$ بر روی هر وجه المان (مطابق شکل 2) و توابع درون یابی برداری $\vec{\Psi}_{F,i}$با تقریب بسیار مطلوبی بدست آورد[15]. توابع درون یابی برداری خواص (25) را باید ارضاء نمایند [19].

$$\vec{\Psi}_F|_{F'} \cdot n_{F'} = \delta_{F,F'}, F, F' \in \mathcal{F}_h \tag{25}$$

درجات آزادی بر روی وجوه هر المان از روابط (26) و(27) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &u_t^{n+1} = -K\lambda_t \nabla P_w^{n+1} + K\lambda_n\, |P_c{}'| \nabla S_w^n, \\ &u_t^{n+1} \cdot n_F = \int_F \Big(-\{K\lambda_t \nabla P_w^{n+1}\}_w \cdot n_F + \left(K\lambda_n\, |P_c{}'| \nabla S_w^n\right)^{up} \cdot n_F \\ &+\sigma_F \cdot \langle\gamma\rangle_{F_p} \frac{r_p{}^2 |F|_{d-1}}{Mean\left(|T^-|_d, |T^+|_d\right)} [P_w^{n+1}]'\Big) \end{aligned} \tag{26}$$

$$[P_w^{n+1}]' = \begin{cases} [P_w^{n+1}]\ F \in \mathcal{F}_h^i \\ P_w^{n+1} - P_{\mathrm{dir}}\ F \in \mathcal{F}_h^b(\Gamma_D), \end{cases} \tag{27}$$

$$q_t^{n+1} = 0\ \Gamma_N, \tag{28}$$

3-3- گسسته سازی معادله درجه اشباع

فرم ضعیف گالرکین ناپیوسته معادله درجه اشباع S_w^{n+1} مشابه معادله فشار بدست می‌آید. ضرایب غیرخطی این معادله (فشار مویینگی $P_c(S_w^n)$ و نفوذپذیری نسبی ($k_{r\alpha}(S_w^n)$) که تابعی از درجه اشباع هستند، با یک گام تأخیر زمانی محاسبه می‌گردند. در این معادله نیز به منظور گسسته سازی شار انتقال، از مقدار بادسوی ترم تابع کسر جریان $f_w(S_w^n)$ استفاده می‌گردد. با توجه به معلوم بودن بردار نرمال (پیوسته و دارای بقاء محلی) سرعت در تمام وجوه المان ها $F \in \mathcal{F}_h$ که در مرحله قبل بدست آمده است، می‌توان جهت بادسو را با دقت بالاتری تعیین نمود. اکنون با ضرب نمودن تابع آزمون $z \in \mathbb{V}_{r_s}(\mathcal{T}_h)$ در معادله درجه اشباع و بکارگیری قاعده انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان فرم ضعیف نهایی معادله درجه اشباع را روی تمامی المان‌های دامنه Ω به صورت ذیل نمایش داد [19]:

$$\begin{aligned} &\int_{T\in\mathcal{T}_h} \phi \frac{S_w^{n+1}}{\Delta t} z + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_E |P_c{}'|\, \lambda_w \lambda_n/\lambda_t\, \nabla S_w^n \cdot \nabla z \\ &- \sum_{F\in\Gamma_R} \int_F S_w^{n+1} u_t^{n+1} \cdot n_F z \\ &- \sum_{F\in\Gamma_h} \int_F [\![z]\!] \{|P_c{}'|\, \lambda_w \lambda_n/\lambda_t\, \nabla S_w^n \cdot n_F\}_w \\ &+ \sum_{F\in\Gamma_h} \int_F \eta [S_w^n] \{|P_c{}'|\, \lambda_w \lambda_n/\lambda_t\, \nabla z \cdot n_F\}_w \\ &+ \sum_{F\in\Gamma_h} \int_F \gamma [\![z]\!] [S_w^{n+1}] = \int_{E\in\varepsilon_h} \phi \frac{S_w^n}{\Delta t} z + \sum_{N_h} \int_{T\in\mathcal{T}_h} u_t^{n+1} f_w^{n\uparrow} \cdot \nabla z \\ &- \sum_{F\in\Gamma_h\cup\Gamma_R\cup\Gamma^+} \int_F u_t^{n+1} f_w^{n\uparrow} \cdot n_F [\![z]\!] - \sum_{F\in\Gamma_R} \int_F S_{in} u_t^{n+1} \cdot n_F z \\ &+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_E q_w^{n+1} z \end{aligned} \tag{29}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \gamma = \sigma_F \cdot \langle\gamma\rangle_{Fs} \frac{r_s{}^2 |F|_{d-1}}{\mathrm{Mean}(|T^-|, |T^+|)} + \gamma_B, \tag{30}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^i, \langle\gamma\rangle_{Fs} = \frac{2D_{Fs}{}^+ D_{Fs}{}^-}{D_{Fs}{}^+ + D_{Fs}{}^-}, \gamma_B = \frac{1}{2} |u_t^{n+1} \cdot n_F|, \tag{31}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_h^b, \langle\gamma\rangle_{Fs} = D_{Fs}{}^-, \tag{32}$$

که در آن $\langle\gamma\rangle_{Fs}$ و γ به ترتیب متوسط هارمونیک ضریب انتشار و پنالتی کل معرفی می‌گردند. شایان ذکر است با توجه به هذلولوی بودن نوع معادله درجه اشباع، عبارت پنالتی کل (γ) علاوه بر مقدار پنالتی (σ_F) تابع بزرگی بردار نرمال سرعت متوسط در هر وجه المان (γ_B) می‌باشد [24]. شکل 3 نمودار گردش کار حل معادله های حاکم بر جریان‌های دوفازی با روش گالرکین ناپیوسته را نشان می‌دهد.

4- محدود کننده شیب MLP اصلاح شده

بازسازی و تثبیت داده های حاصل از حل مسائل انتقال- غالب امری حیاتی می‌باشد، زیرا خطی‌سازی ضعیف معادله هذلولوی درجه اشباع سبب ایجاد نوسان‌های غیرفیزیکی در مقادیر محاسباتی درجه اشباع می‌شود. یکی از مؤثرترین روش‌ها برای حذف این نوسان‌های غیرفیزیکی استفاده از محدود کننده‌های شیب می‌باشد.

در این تحقیق از محدود کننده MLP اصلاح شده استفاده گردیده است که زمان و هزینه محاسبات در آن کمتر از سایر محدودکننده های شیب مانند چاونت-جافر [1] و دورلوفسکی-اوشر-انگکویست [2] می‌باشد. محدود کننده MLP با رویکردی مشابه به طرح MUSCL و استفاده از تابع محدود کننده Φ، گرادیان تقریب خطی را $\nabla\bar{S}_w$ بطور هدفمندی اصلاح می‌نماید. با استفاده از این تثبیت کننده از ایجاد کسترمم های محلی جلوگیری می‌گردد و مقادیر گرهی درجه اشباع در المان جاری ABC (شکل 4) بین کمینه و بیشینه متوسط المان های به اشتراک گذارنده (UB_{ABC} و LB_{ABC}) گره j ام محصور می‌شوند. برای کنترل اکسترمم های محلی داریم:

$$LB_{ABC,j} \le S_{w,j} \le UB_{ABC,j}\ , j = 1, \dots, N_T \tag{33}$$

1- Chavent-Jaffre
2- Durlofsky-Osher-Engquist

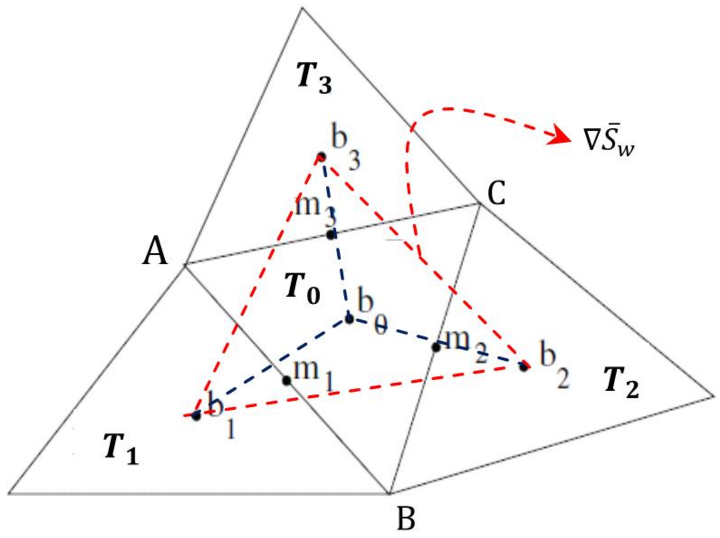


Fig. 4 the pattern of slope modifying in ABC element using modified MLP slope limiter

شکل 4 الگوی اصلاح شیب در المان ABC با استفاده از محدودکننده MLP اصلاح شده

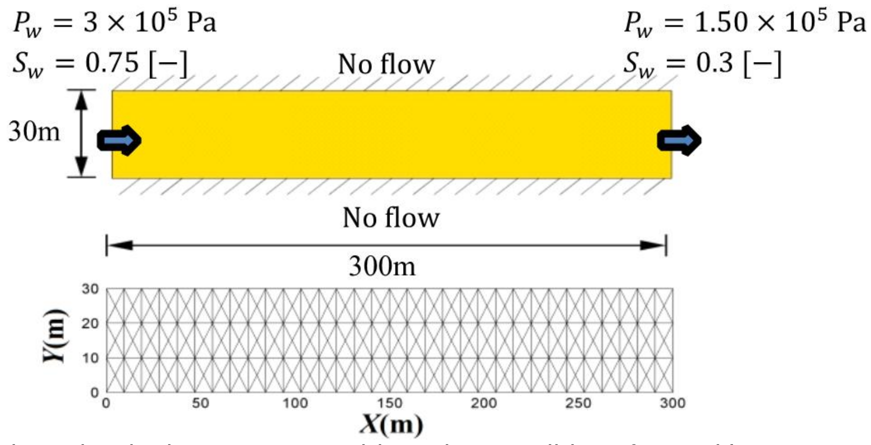


Fig. 5 (Top) The geometry and boundary conditions for Buckley-Leverett problem (Bottom) The structured grid

شکل 5 (بالا) هندسه و شرایط مرزی مسئله باکلی-لورت (پایین) شبکه ساختار یافته

$$\bar{S}_{w,\mathrm{Ave}} = \frac{\int_T S_w}{|T|_d} \xrightarrow{if\ r_s=1} \bar{S}_w = \left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)} S_{w,j}\right). \tag{34}$$

که در آن $\bar{S}_{w,\mathrm{Ave}}$ متوسط مقدار درجه اشباع در هر المان می‌باشد. طبق تعریف دامنه کمینه و بیشینه متوسط المان های به اشتراک گذارنده گره j ام عبارتند از:

$$UB_{ABC,j} = \min\{\bar{S}_{w,Ave} \subset \Re_{T_{ABC}} \big| \, i \in T\}, \tag{35}$$

$$LB_{ABC,j} = \max\{\bar{S}_{w,Ave} \subset \Re_{T_{ABC}} \big| \, i \in T\}. \tag{36}$$

$\Re_{T_{ABC}}$ مجموعه المان‌های احاطه کننده گره i و $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(T)$ تعداد رئوس هر المان $T \in \mathfrak{T}_h$ می‌باشد. شکل 4 الگوی اصلاح شیب در المان جاری T_0 (ABC) را با استفاده از اصلاح تقریب خطی $\nabla\bar{S}_w$ نشان می‌دهد.

مقادیر درجه اشباع گره j ام المان T_0 پس از اصلاح شیب (گرادیان تقریب خطی) عبارتند از:

$$\mathcal{L}(S_{w,j}) = \bar{S}_{w,0} + \emptyset \cdot \nabla\bar{S}_w(x,y).\, r_{j,} \tag{37}$$

$$\emptyset = \begin{cases} \dfrac{UB_{ABC,j} - \bar{S}_{w,0}}{\nabla\bar{S}_{w,abc}\cdot r_j} & \text{اگر } \left(\nabla\bar{S}_{w,abc}\cdot r_j\right) > UB_{ABC,j} \\ \dfrac{LB_{ABC,j} - \bar{S}_{w,0}}{\nabla\bar{S}_{w,abc}\cdot r_j} & \text{اگر } \left(\nabla\bar{S}_{w,abc}\cdot r_j\right) < LB_{ABC,j} \\ 1 \nRightarrow & \end{cases} \tag{38}$$

که در آن r_j بردار واصل مرکز ثقل (m_0) المان جاری T_0 تا گره j ام، $\nabla\bar{S}_w$ عملگر گرادیان تقریب المان های همسایه (T_1، T_2 و T_3)، $\emptyset$ تابع محدود کننده گی شیب و $\bar{S}_{w,0}$ متوسط درجه اشباع بر روی المان T_0 معرفی می‌گردند [27].

$$\nabla\bar{S}_{w,i}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{n_1}{n_3} \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$n = (p_i - p_j) \times (p_k - p_i), p_i = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ \bar{S}_{w,i} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

در رابطه فوق n_1، n_2 و n_3 مولفه های بردار نرمال n بر صفحه تقریب و x_b و y_b مختصات مرکز ثقل المان های همسایه المان T_0 می‌باشند.

4-1- اعمال شرایط مرزی

هرگاه المان جاری یک المان مرزی باشد در این صورت از تکنیک نگاشت انعکاسی برای ساخت گرادیان تقریب خطی استفاده می‌گردد. اگر شرط مرزی در وجه مرزی المان از نوع رابین (Γ_{in}) باشد، از مقدار درجه اشباع ورودی و مختصات میانی وجه مرزی المان برای ساخت گرادیان تقریب استفاده می‌گردد، اما هرگاه شرط مرزی نیومن (Γ_N) بر روی وجه مرزی حاکم باشد، از یک المان مجازی (T_{Im}) استفاده می‌گردد که روی وجه مرزی بصورت متقارن نگاشته می‌گردد. در این صورت مقدار متوسط درجه اشباع در این المان برابر متوسط المان جاری ($\bar{S}_{w,Im} = \bar{S}_{w,0}$) تعریف شده و از مختصات نگاشته شده مرکز ثقل المان مجازی برای ساخت گرادیان تقریب استفاده می‌شود. این تکنیک بعنوان یکی از جنبه‌های نوآوری تحقیق حاضر، موجب حفظ پایداری نتایج در نزدیکی مرزهای مدل می‌گردد و از این رو تحت عنوان محدودکننده MLP اصلاح شده خوانده می‌شود.

در این تحقیق از دستورات پیشرفته فرم برداری المان محدود و استفاده از ماتریس های تنک[1] مرجع شماره [27] به منظور ارتقاء و کارایی مدل حاضر استفاده شده است.

5- صحت سنجی مدل

در این بخش صحت سنجی مدل تهیه شده با استفاده از دو مسئله شبه یک بعدی باکلی-لورت و مک ورتر با پارامتر های مفروض در جدول 1 صورت می‌گیرد.

5-1- مدل باکلی – لورت

مسئله باکلی-لورت (با خاصیت هذلولوی) شامل یک ستون افقی با دامنه $\Omega = (0\mathrm{m}, 300\mathrm{m}) \times (0\mathrm{m}, 30\mathrm{m})$ و شرایط مرزی مطابق شکل 5 می‌باشد بطوریکه، در شرایط اولیه سه چهارم دامنه از فاز غیر ترکننده و باقیمانده آن از فاز ترکننده اشباع شده است. در این مسئله به منظور بررسی کارایی مدل در حالت همبسته، از اثر مشتقات فشار مویینگی (عملگر انتشار) صرفنظر نگردیده است. چند جمله ای های تقریب معادله‌های فشار و درجه اشباع به ترتیب ($r_p = \{1{,}2\}, r_s = 1, RT_0$) می‌باشند. در این مسئله از تعداد 384 المان در یک شبکه ساختار یافته به منظور حفظ تقارن نتایج و از نسخه گالرکین ناپیوسته OBB-DG برای مقایسه با نتایج مدل‌های مشابه استفاده شده است. همچنین به منظور بررسی دقت طرح و تأثیر ریز نمودن تقسیمات طولی مدل، نتایج برای دو شبکه المان بندی ساختار یافته دیگر ($h = L/64$ و $h = L/128$) مورد بررسی قرار گرفته اند. با توجه به حل کاملا همبسته معادله‌های حاکم و عدم دسترسی به حل تحلیلی، از یک شبکه بسیار ریز ($h = L/256$) بعنوان مدل پایه برای محاسبه خطاهای نرم ($E_{L_2} = \sqrt{\int \|\mathrm{X_{Base}} - X\|_2}$) استفاده شده است. شرایط مرزی و اولیه مسئله عبارتند از:

$P_w|_{x=0} = 3 \times 10^5\,(\mathrm{Pa}),\ P_w|_{x=300} = 1.5 \times 10^5\,(\mathrm{Pa})\,,$
$S_{\mathrm{in}}|_{x=0} = 0.75(-),\ S_w|_{x=300} = 0.3(-),\ S_w(,0) = 0.3(-).$

مقایسه نمودار پروفیل طولی متغیرهای فشار و درجه اشباع مدل حاضر (شکل 6) با مدل گالرکین ناپیوسته گرونینگر [28] بدون بازسازی میدان سرعت و نیز نتایج حاصل از نسخه OBB-DG مدل حاضر با استفاده از محدودکننده شیب چاونت-جافر اصلاح شده با درجات تقریب ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) بیانگر مطابقت مطلوب نتایج مدل مورد بررسی می‌باشد.

1- Sparse Matrix

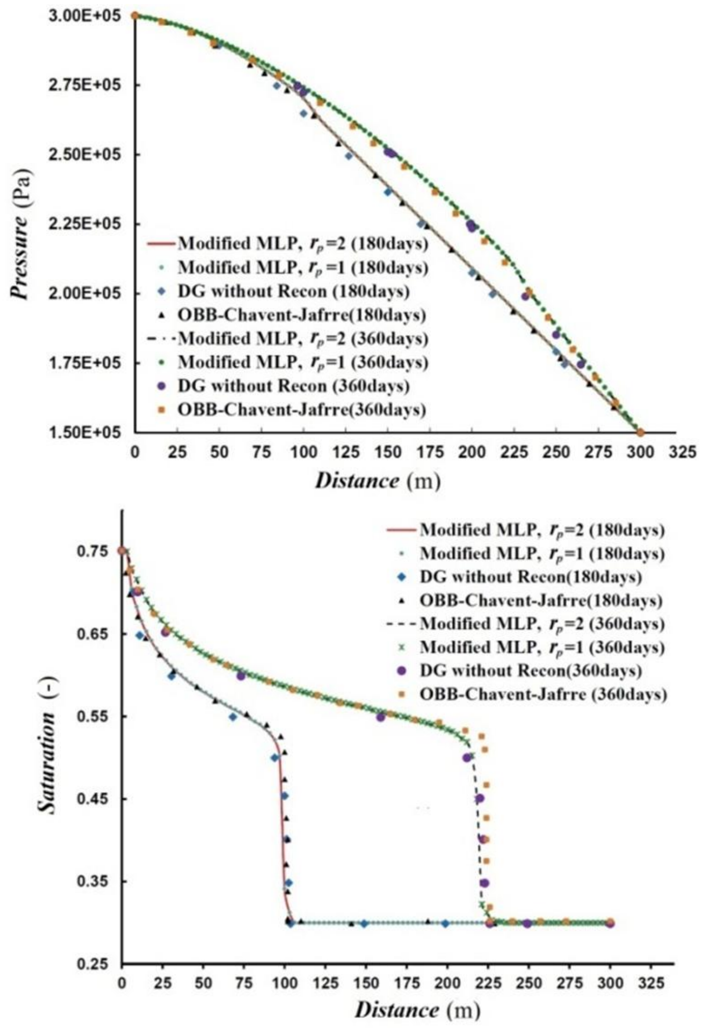


Fig. **6** comparing (Top) the saturation (-) and (Bottom) pressure (Pa) profiles along the x axis at 180 and 360 days for current model, Gruninger's [29] DG scheme and OBB-DG version of current model using modified Chavent-Jaffre slope limiter

شکل 6 مقایسه (پایین) توزیع درجه اشباع (-) (بالا) پروفیل فشار (پاسکال) در امتداد محود x در مدل حاضر با مدلهای گالرکین ناپیوسته گرونینگر [29] و نسخه OBB-DG مدل حاضر با استفاده از محدودکننده شیب چاونت-جافر اصلاح شده پس از گذشت 180 و 360 روز

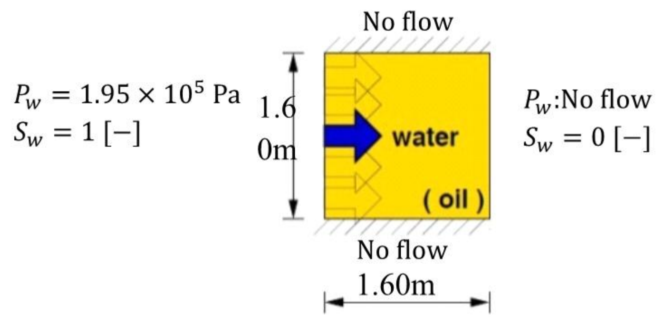


Fig. 7 The geometry and boundary conditions for Mcwhorter problem

شکل 7 هندسه و شرایط مرزی مسئله مک ورتر

جدول 1 مشخصات فیزیکی سیال و محیط متخلخل مسئله باکلی- لورت و مک ورتر

Table 1 Properties for the porous medium and fluids used in the Buckley-Leverett and Mcwhorter

مک ورتر	باکلی-لورت	پارامتر
0.3	0.20	ϕ
10^{-10}	10^{-11}	$K[\mathrm{m}^2]$
5000	1000	P_d[Pa]
2.0	2.0	$\zeta[-]$
0.0	0.20	$S_{rw}[-]$
0.0	0.15	$S_{rn}[-]$
0.001	0.001	μ_w[kg/(ms)]
0.001	0.01	μ_n[kg/(ms)]

جدول 2 خطای نرم (E_{L_2}) متغیر های اصلی پس از گذشت 360 روز

Table 2 The Norm error (E_{L_2}) at 360 days for main variables

h=L/128	h=L/64	h=L/32	ضریب همگرایی/E_{L_2}
0.0323	0.0458	0.1533	$E_{L_2} - (P_w)$
0.495	1.74	-	ضریب همگرایی(P_w)
0.2038	0.2774	0.4274	$E_{L_2} - (S_w)$
0.45	0.618	-	ضریب همگرایی(S_w)

جدول 2 خطاهای نرم و ضریب همگرایی متغیر های اصلی به ازای ($r_p = 1, r_s = 1, RT_0$) را به ازای انواع تقسیمات شبکه المان نشان می‌دهد.

مقادیر خطای نرم متغیرهای اصلی نشان می‌دهد که با ریزتر نمودن شبکه المان‌ها، بر دقت نتایج و ضریب همگرایی افزوده می‌شود.

5-2- مسئله مک ورتر

معادله مک ورتر، فرم بیضوی معادله اشباع می‌باشد که در آن از ترم انتقال صرفنظر شده است. این مسئله با استفاده از نسخه NIPG با مقدار پنالتی ($\sigma_F = 0.01$) و درجات خطی تقریبی ($r_s = 1$) گسسته سازی شده است. دامنه مدل بصورت یک ستون مربعی با ابعاد× $\Omega = (0\mathrm{m}, 1.60\mathrm{m})$ $(0\mathrm{m}, 1.60\mathrm{m})$ تعریف می‌شود. محیط متخلخل از نفت (فاز غیرترکننده) اشباع شده است. در مرز سمت راست از شار گرادیان فشار صرفنظر می‌گردد و از سمت چپ $\Gamma_{\mathrm{dir}} = \{0\} \times (0, 1.60)$ آب (فاز ترکننده) به آن تزریق می‌گردد. مرزهای بالا و پایین بصورت نفوذ ناپذیر تعریف می‌گردند. شرایط مرزی مفروض مطابق شکل 7 نشان داده شده است و جدول 1 مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل را توصیف می‌نماید. برای این مدل‌سازی به منظور حفظ تقارن از یک شبکه ساختار یافته با تعداد 512 المان ($\Delta x = 0.05$ و $\Delta y = 0.4$) استفاده شده است. شرایط اولیه مسئله عبارتند از:

$P_w(,0) = 1.95 \times 10^5$ Pa, $S_w(,0) = 0$

به منظور کنترل صحت نتایج مدل‌سازی کد تهیه شده با استفاده از درجات تقریبی خطی، پروفیل مقادیر درجه اشباع S_wدر جهت محور x و برای مدت 8000 ثانیه با استفاده از بازه های زمانی $\Delta t = 50\,s$ با نتایج حل تحلیلی معادله و همچنین نتایج مدل نسخه NIPG گالرکین ناپیوسته باستین (محدود کننده دورلوفسکی-اوشر-انگکویست) [30] با مقدار پنالتی و تقسیم بندی طولی مشابه در شکل 8 مقایسه شده اند.

مقایسه نتایج بیانگر دقت قابل قبول روش گالرکین ناپیوسته در حل فرم بیضوی معادله درجه اشباع می‌باشد. همچنین می‌توان مشاهد نمود که علی رغم استفاده از دو نوع محدودکننده شیب متفاوت در مدل حاضر، نتایج مطابقت مطلوبی با یکدیگر دارند و این در حالی است که زمان پردازش مورد نیاز برای فرآیند محدود شدگی و تثبیت نتایج با استفاده از محدودکننده شیب MLP اصلاح شده حدود یک-چهارم محدودکننده چاونت-جافر می‌باشد.

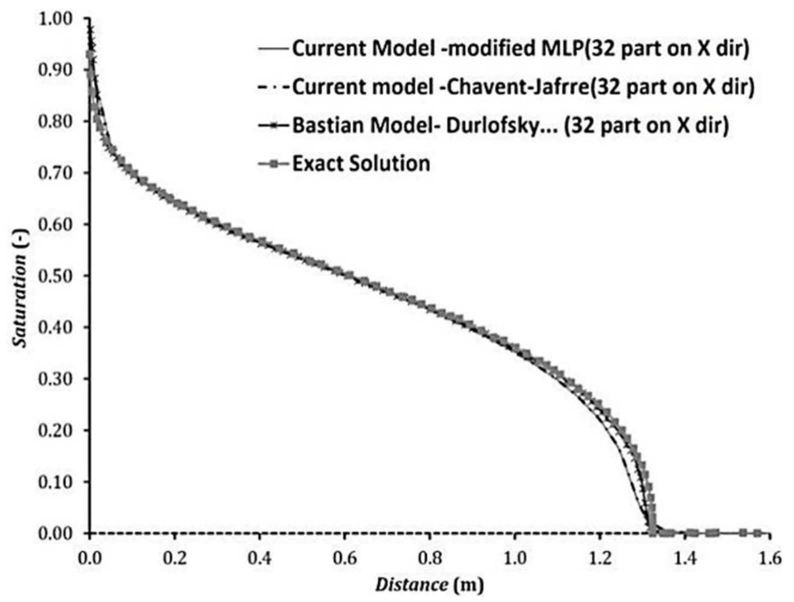


Fig. **8** comparing the saturation (-) profiles along the x axis of current model, Bastian [30] and analytical solution comparison at 8000 seconds

شکل 8 مقایسه پروفیل درجه اشباع (-) در امتداد محود x با مدل حاضر، مدل باستین [30] و حل تحلیلی معادله پس از 8000 ثانیه

6- کاربرد مدل

6-1- مسئله نمونه 1

در اینجا مدل تهیه شده برای مدل‌سازی مسئله چاه های پنجگانه، بعنوان یک مسئله شناخته شده در زمینه مدل‌سازی بازیافت ثانویه در مخازن نفت، بررسی می‌گردد. در این مسئله چهار چاه برداشت نفت در گوشه‌های یک مخزن مربعی همگن و یک چاه تزریق آب در مرکز آن استقرار یافته اند. مطابق شکل 9 یک چهارم هندسه فوق بدلیل تقارن هندسی مدل-سازی می‌گردد. در این مسئله از نسخه پنالتی داخلی نامتقارن وزنی گالرکین ناپیوسته (NWIP) با مقدار پنالتی σ_F=50 و یک شبکه المان های مثلثی بدون ساختار با تعداد 864 المان استفاده شده است. درجات تقریب معادلات فشار و درجه اشباع در این مسئله (r_p={1,2},r_s=1,RT_0) می‌باشند. در این مسئله اندازه گام های زمانی برابر 0.025 روز در نظر گرفته شده است.

مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل در جدول 3 نشان داده شده اند. شرایط مرزی و اولیه عبارتند از:

$P_{\rm dir}^{-} = 3.45 \times 10^6$ Pa, $S_{\rm in} = 0.95(-)\ \Gamma_{\rm in}$
$P_{\rm dir}^{+} = 2.41 \times 10^6$ Pa, $\Gamma_{\rm out}$
$P_w(,0) = 2.41 \times 10^6$ Pa, $S_w(,0) = 0.20(-)$

نتایج مدل حاضر با نتایج مدل تهیه شده توسط کلیبر و ریویه [10] با استفاده از نسخه های OBB-DG و ($\sigma_F = 1$, NIPG)، شبکه ریز یکنواخت با تعداد 4224 المان و شرایط مرزی و خصوصیات فیزیکی یکسان مقایسه شده اند. لازم به ذکر است در مدل ارائه شده توسط کلیبر و ریویه از تکنیک اعمال پنالتی در معادله درجه اشباع به منظور برقراری پیوستگی میدان فشار استفاده شده است و نوسانات غیرفیزیکی با استفاده از محدودکننده شیب "وجه-محور" دورلوفسکی-اوشر-انگکویست اصلاح شده استفاده گردیده است. در اشکال 10، 11و 12 به ترتیب پروفیل قطری و کانتورهای متغیرهای اصلی مدل حاضر و مدل کلیبر و ریویه برای مدت 15 و 30 روز با یکدیگر مقایسه شده اند.

جدول3 مشخصات فیزیکی سیالات و محیط متخلخل مسئله 1و 2

Table 3 The porous medium and fluids properties used in test cases 1 and 2

پارامتر	مسئله نمونه 1	مسئله نمونه 2
ϕ	0.20	0.25-0.3
$K[\mathrm{m}^2]$	10^{-11}	$8\times10^{-9}-10^{-12}$
P_d[Pa]	5000	1000
$\zeta[-]$	2.0	2.0
$S_{rw}[-]$	0.15	0.15
$S_{rn}[-]$	0.0	0.0
μ_w[kg/(ms)]	0.0005	0.00089
μ_n[kg/(ms)]	0.002	0.0162

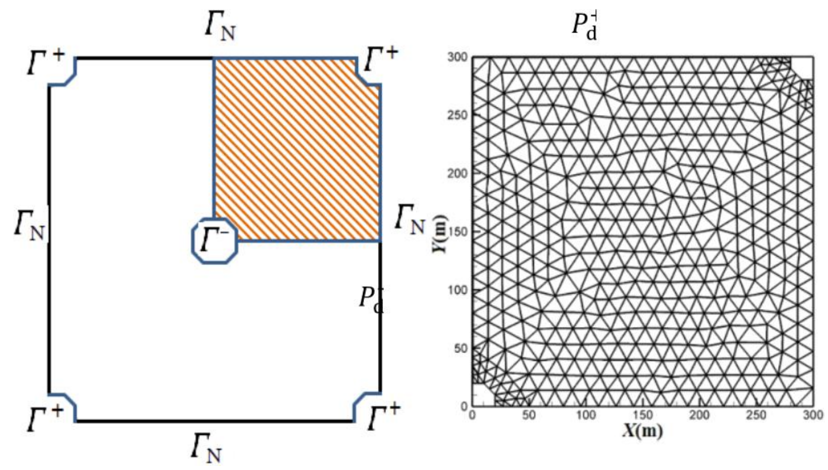


Fig. 9 (left) The five-spot geometry and the boundary condition, unstructured grid used in sample case 1 (right).

شکل 9 (چپ) هندسه و شرایط مرزی مسئله چاه های پنجگانه (راست) شبکه المان بندی بدون ساختار مسئله نمونه 1

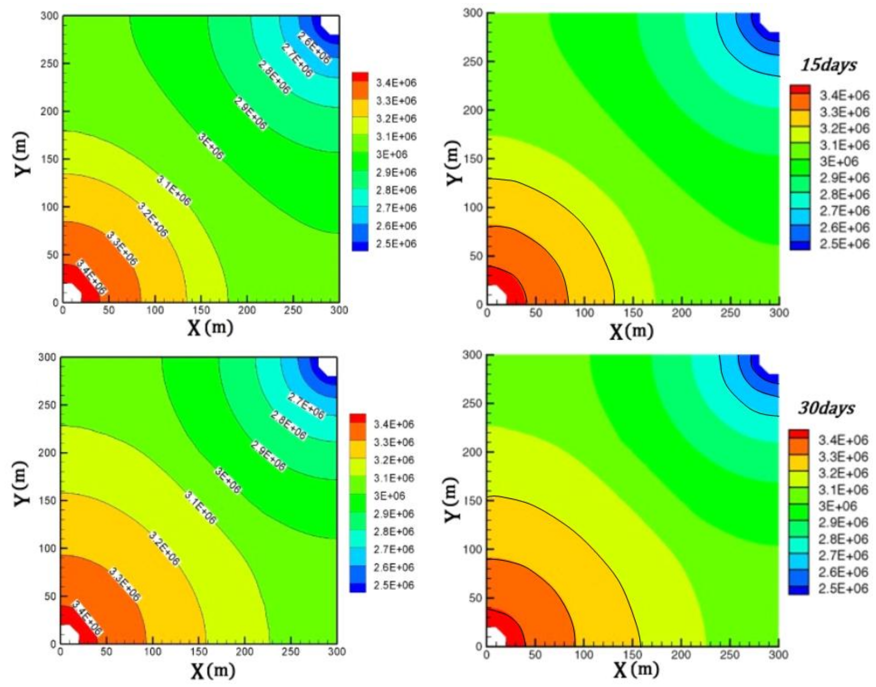


Fig. 10 Comparing the pressure (Pa) (top) and saturation (-) (Bottom) diagonal profiles on $x = y$ for the OBB-DG current study and Klieber and Rivière [10] with fined mesh

شکل10 مقایسه توزیع فشار (پاسکال) (بالا) و درجه اشباع آب (-) (پایین) در امتداد پروفیل قطری $x = y$ با استفاده از نسخه OBB-DG در مدل حاضر و نتایج مدل کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت

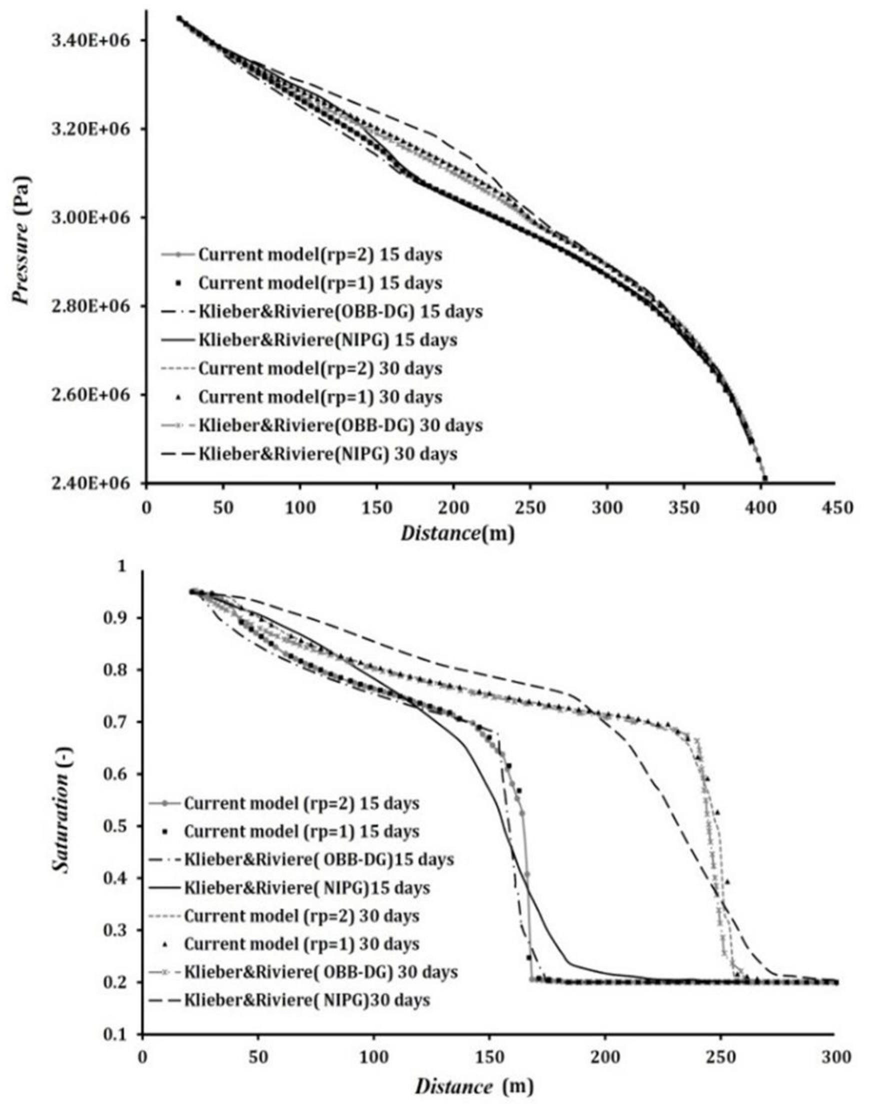


Fig. 11 The wetting phase pressure (Pa) contours at 15 and 30 days (Left) the current study with NWIP ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) (Right) Klieber and Rivière [10] with OBB-DG and fined mesh

شکل11 مقایسه کانتورهای توزیع فشار فاز ترکننده (پاسکال) پس از 15 و 30 روز (چپ) با نسخه NWIP در مدل حاضر ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) (راست)، مدل (OBB-DG) گالرکین ناپیوسته کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت

مقایسه کیفی پروفیل قطری متغیرهای اصلی (شکل10) بیانگر آنست که نتایج مدل حاضر با شبکه ای به مراتب درشتر، به ازای درجات تقریب مختلف و استفاده از نسخه NWIP دارای پخش عددی کمتری نسبت به نتایج نسخه NIPG کلیبر و ریویه می‌باشد و البته مطابقت مطلوبی با نسخه OBB-DG کلیبر و ریویه [10] دارد.

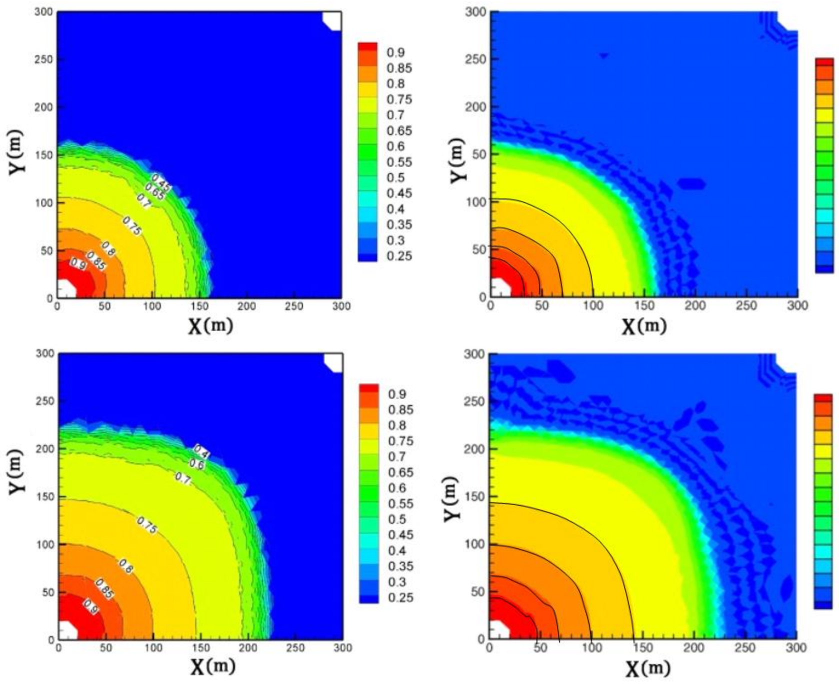


Fig. 12 The wetting phase saturation (-) contours at 15 and 30 days (Left) the current study with NWIP ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) (Right) Klieber and Rivière [10] with OBB-DG and fined mesh

شکل12 مقایسه کانتورهای توزیع درجه اشباع فاز ترکننده (-) پس از 15 و 30 روز (چپ) با نسخه NWPG در مدل حاضر($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) (راست)، مدل (OBB-DG) گالرکین ناپیوسته کلیبر و ریویه [10] با شبکه ریز یکنواخت

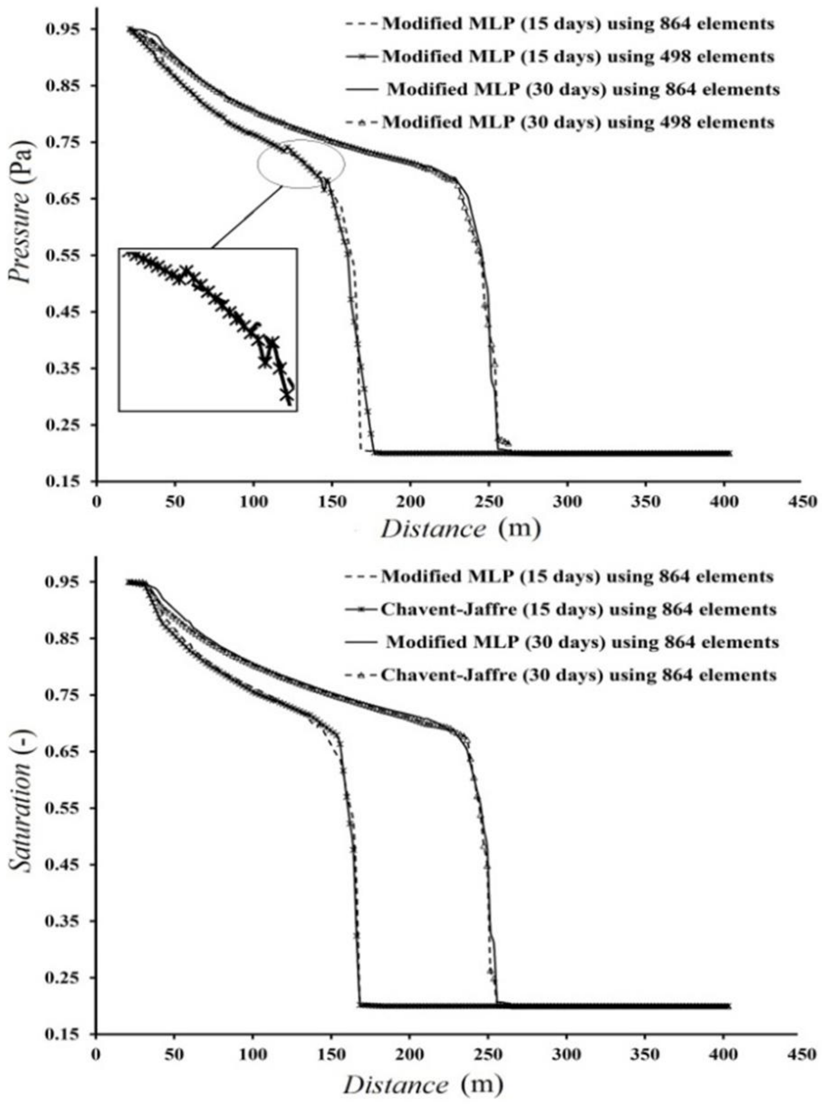


Fig. 13 comparing the saturation (-) diagonal profiles at 15 and 30 days (top) using the grids with 498 and 864 elements and (Bottom) two vertex-based slope limiters, namely modified MLP and Chavent-Jaffre

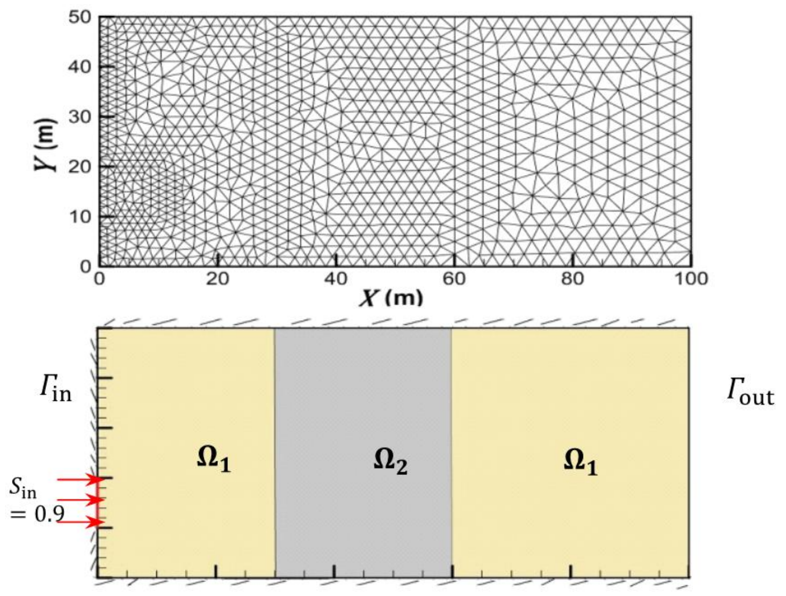
شکل 13 مقایسه پروفیل قطری مقادیر درجه اشباع فاز ترکننده (-) پس از 15 و 30 روز (بالا) با دو شبکه المان بندی با تعداد 498 و 864 المان (پایین) با استفاده از دو محدودکننده گره-محور MLP اصلاح شده و چاونت-جافر

استفاده از یک شبکه نسبتا درشتر با 498 المان منجر به ایجاد ناهمواری هایی در محل پیشانی در قیاس با شبکه ریزتر (با 864 المان) شده است (شکل 13- بالا) اما دقت آن مطلوب بوده و علت این امر تأثیر توامان نگاشت میدان سرعت، مقیاس نمودن ترم‌های پنالتی و خاصیت غیر نوسانی محدودکننده MLP اصلاح شده می‌باشد.

همچنین مقایسه پروفیل قطری درجه اشباع با بکارگیری محدودکننده‌های MLP اصلاح شده و چاونت- جافر مؤید عملکرد قابل قبول محدودکننده MLP اصلاح شده می‌باشد (شکل 13-پایین)، ضمن آنکه زمان پردازش فرآیند محدود شدگی به ازای استفاده از محدودکننده شیب MLP اصلاح شده کمتر از یک-سوم چاونت- جافر می‌باشد.

6-2- مسئله نمونه 2

در یک آبخوان ناهمگن با دامنه $\Omega_1 \cup \Omega_2 = (0\mathrm{m}, 100\mathrm{m}) \times (0\mathrm{m}, 50\mathrm{m})$ آلاینده سبک تتراکراید سدیم از وجه سمت چپ $\Gamma_{\rm in} = \{0\} \times (10, 20)$ وارد می‌شود و شرط مرزی رابین حاکم است. مرز سمت راست از نوع شرط خروجی $\Gamma_{\rm out} = \{100\} \times (0,50)$ می‌باشد و مرزهای باقیمانده نفوذ ناپذیر می‌باشند (شکل 14). شروط مرزی و اولیه عبارتند از:



$K_{\Omega_1} = 10^{-12}[\mathrm{m}^2],\ K_{\Omega_2} = 8 \times 10^{-9}[\mathrm{m}^2],\ \phi_{\Omega_1} = 0.25,\ \phi_{\Omega_2} = 0.3$

Fig. 14 Unstructured grid and boundary condition used in sample case 2

شکل 14 شبکه المان بندی بدون ساختار و شرایط مرزی مسئله 2

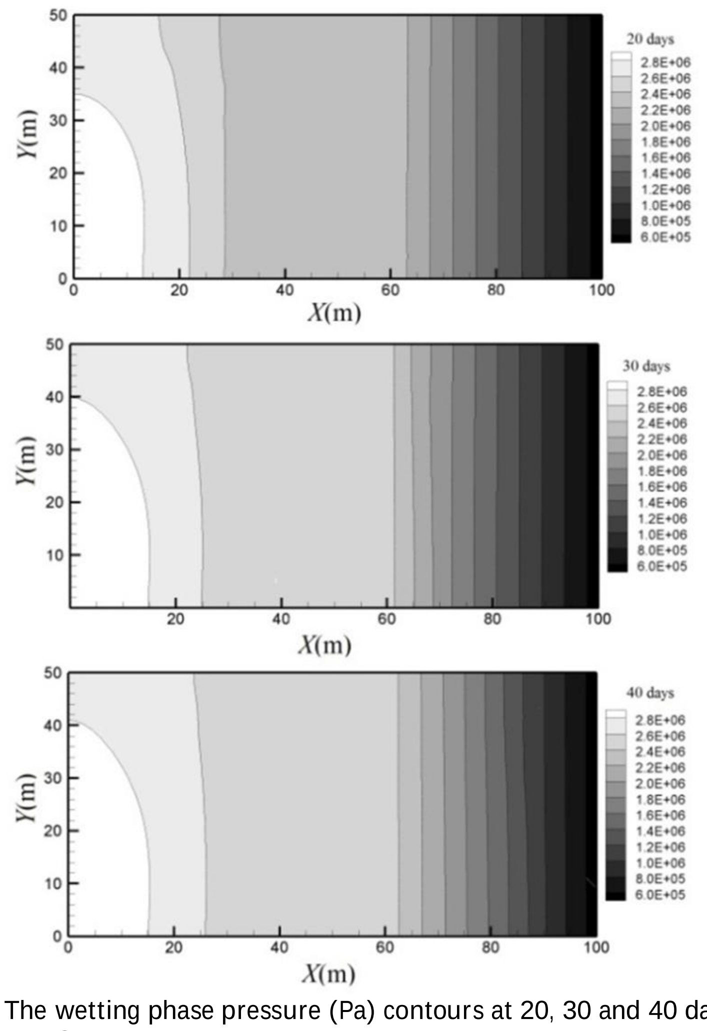


Fig. 15 The wetting phase pressure (Pa) contours at 20, 30 and 40 days and using ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) approximation

شکل15 کانتورهای توزیع فشار (پاسکال) برای زمان های 20، 30 و 40 روز و درجات تقریب ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$)

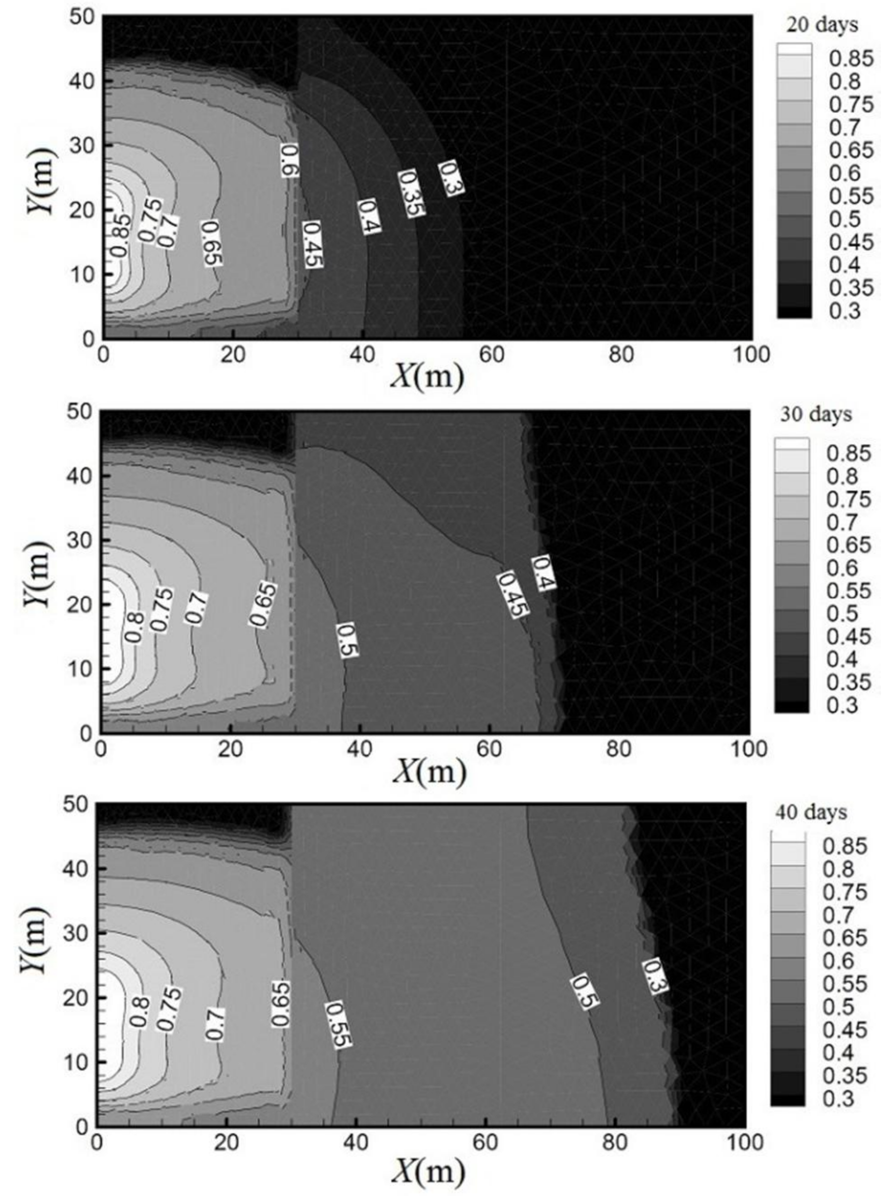


Fig. 16 The wetting phase saturation (-) contours at 20, 30 and 40 days and using ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$) approximation

شکل 16 کانتورهای توزیع درجه اشباع فاز ترکننده (-) پس از 20، 30 و 40روز و درجات تقریب ($r_p = 2, r_s = 1, RT_0$)

$P_{\mathrm{dir}}^{-} = 3.00 \times 10^6$ Pa, $S_{\mathrm{in}} = 0.9(-)$ Γ_{in},
$P_{\mathrm{dir}}^{+} = 5.00 \times 10^5$ Pa, Γ_{out},
$P_w(,0) = 5.00 \times 10^5$ Pa, $S_w(,0) = 0.25(-)$

پارامترهای فیزیکی محیط متخلخل و سیالات موجود در جدول 3 توصیف شده اند و شبکه المان بندی مثلثی آن از نوع بدون ساختار با تعداد 1882 المان می‌باشد. در این مسئله از نسخه پنالتی داخلی متقارن وزنی (SWIP, $\sigma_F = 100$) استفاده شده است. در این مسئله اندازه گام های زمانی برابر 0.020 روز در نظر گرفته شده است.

ترسیمه‌های فشار و درجه اشباع برای مدت 20،30 و 40 روز در شکل‌های 15 و 16 نمایش داده شده است. همچنین پروفیل طولی متغیرهای اصلی در شکل 17 برای مدت زمان 10 تا 40 روز و درجات تقریب ($r_p = \{1,2\}, r_s = 1, RT_0$) با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج بیانگر آنست که در محل ناپیوستگی ها و گرادیان های شدید ناشی از ناهمگنی دامنه آبخوان، وضوح نتایج نسبتا مطلوب می‌باشد. این امر ناشی از استفاده از نوآوری های بکار رفته در فرمولاسیون گسسته سازی مکانی معادلات و حذف نوسانات غیرفیزیکی با استفاده از محدود کننده غیر نوسانی MLP اصلاح شده می‌باشد.

7- نتیجه گیری

در این تحقیق طرح عددی گالرکین ناپیوسته دارای بقاء محلی به منظور مدلسازی جریان های دوفازی با روش حل کاملا ضمنی متوالی ارائه گردید که دارای ویژگی های قابل توجه ذیل می‌باشد:

- در مدل حاضر بدلیل سازگاری محدودکننده غیر نوسانی MLP اصلاح شده با مدل، از ایجاد نوسانات غیر فیزیکی به نحوه مطلوبی جلوگیری شده است.

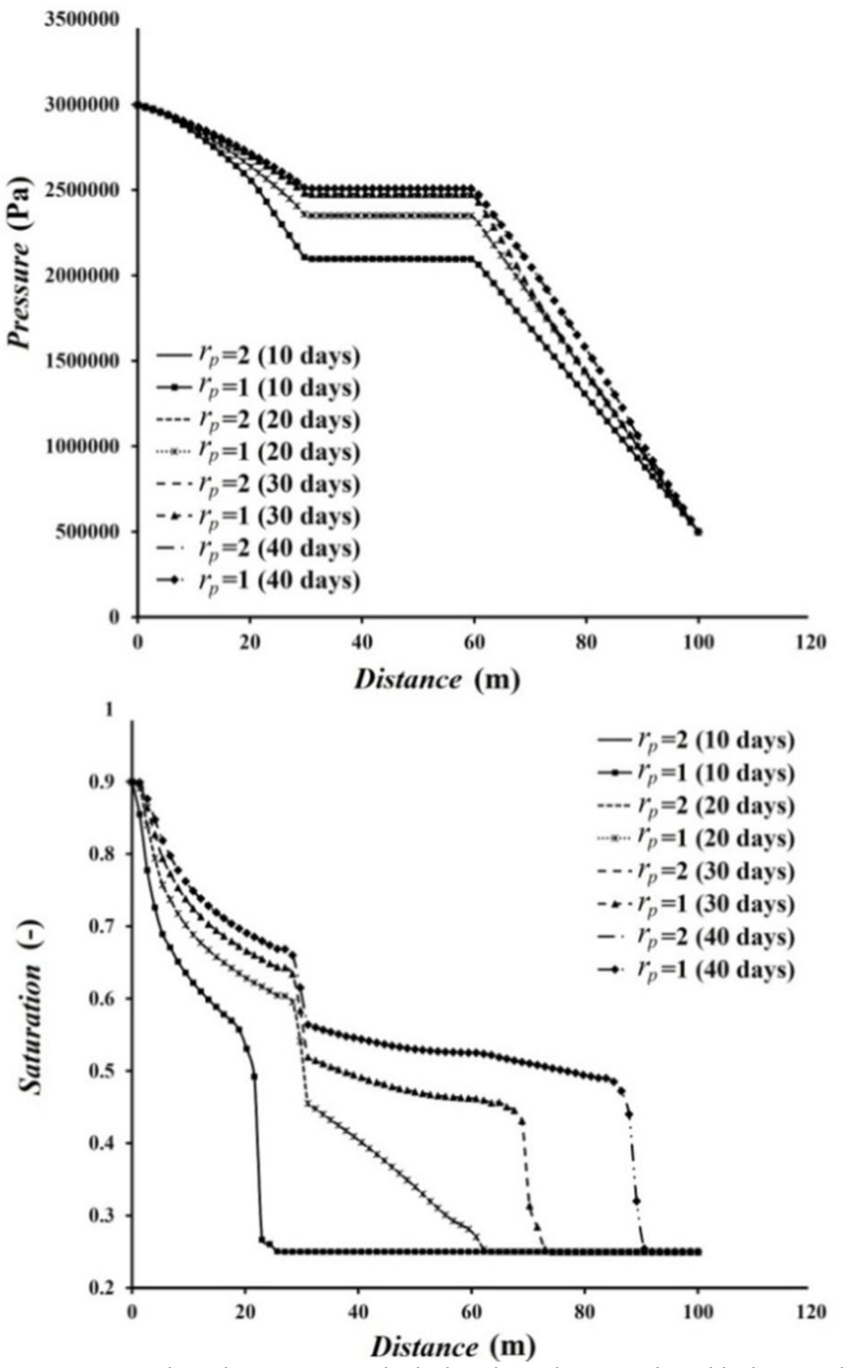


Fig. 17 comparing the pressure (Pa) (Top) and saturation (-) (Bottom) profiles along the x axis ($x = 15, y$) for current model using SWIP and ($r_p = \{1,2\}, r_s = 1, RT_0$) approximation at 30 days

شکل 17 مقایسه پروفیل فشار (بالا) و درجه اشباع آب (پایین) در امتداد محور طولی ($x = 15, y$) با استفاده از نسخهSWIP و درجات تقریب ($r_p = \{1,2\}, r_s = 1, RT_0$) پس از 30 روز

- این طرح دارای بقاء محلی در هر وجه $F \in \mathcal{F}_h^i$ المان بوده و قادر است محل گرادیان‌های شدید را علی رغم استفاده از شبکه های المان بندی نه چندان ریز، با دقتی مطلوب تعیین نماید.
- حساسیت مدل حاضر به انتخاب مقدار پارامتر پنالتی در قیاس با روش های استاندارد گالرکین ناپیوسته بسیارکمتر است. لذا می‌توان با استفاده از هر دو نسخه NWIP و SWIP به نتایج نسبتا مشابه و مطلوبی دست یافت.
- استفاده از مفهوم المان محدود ترکیبی در پردازش و بازسازی میدان سرعت u_t در فضای H(div)، موجب حفظ بقای محلی و پیوستگی بردار نرمال سرعت در محل تماس المان ها می‌گردد.
- استفاده از فرمولاسیون وزنی عملگر متوسط در حل مسائل محیط‌های ناهگمن بر وضوح نتایج در اطراف ناپیوستگی می‌افزاید و ناپایداری ها را می‌کاهد.
- در این تحقیق دامنه پارامتر پنالتی($\sigma_F > 0$) بین 10 تا 100 متغیر است که در نسخه روش پنالتی داخلی نامتقارن وزنی (NWIP) این پارامتر در بازه $\sigma_F \in [10,50]$ انتخاب می‌گردد و در نسخه پنالتی داخلی متقارن وزنی (SWIP) از مقادیر بزرگتر از 50 استفاده شده است.
- در این مدل برای حصول همگرایی در هر گام زمانی، علیرغم استفاده از یک گام تاخیر زمانی برای محاسبه ضرایب غیرخطی که بمنظور خطی سازی

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.12.43.1]

معادلات صورت می‌گیرد، به فرآیند تکرار مانند آنچه در روش پیکارد دیده می‌شود نیازی نیست. علت این امر وجود روشهای تثبیت کننده در گسسته سازی مکانی معادلات می‌باشد. لذا زمان پردازش در این مدل کوتاه تر از مدل‌هایی می‌باشد که مبتنی بر تکرار بوده و فاقد تثبیت کننده می‌باشد.

8- فهرست علائم

$\lvert F\rvert_{d-1}$	طول وجه (m)
K	تانسور نفوذ پذیری ذاتی (m^2)
k_{rn}	نفوذ پذیری نسبی فاز غیرترکننده (-)
k_{rw}	نفوذ پذیری نسبی فاز ترکننده (-)
$\Bbbk_{T,F}$	بردار نرمال نفوذ پذیری (m^2)
P_c	فشار مویینگی (Pa)
P_d	فشار مویینگی ورودی (Pa)
$\mathbb{P}_r^d$	فضای تکه ای نا پیوسته مرتبه r
P_{dir}	فشار در مرز دیریشله (Pa)
q_n	ترم چشمه-چاه فاز غیر ترکننده (kg/m^2s)
q_w	ترم چشمه-چاه فاز ترکننده (kg/m^2s)
S_e	درجه اشباع موثر (-)
S_{in}	درجه اشباع ورودی مرز رابین (-)
$\lvert T\rvert_d$	سطح مقطع المان مثلثی (m^2)
$\mathbb{V}_{r_p}$	فضای ابعادی محدود معادله فشار
$\mathbb{V}_{r_s}$	فضای ابعادی محدود معادله اشباع
$w_{\mathcal{F}}$	ضرائب وزنی عملگر متوسط

علایم یونانی

ζ	ضریب توزیع حفرات(-)
η	ترم متقارن کننده (-)
Γ_D, Γ_N	مرزهای دیریشله و نیومن
λ_α	تحرک پذیری فاز α ((ms)/kg)
μ_n	گرانروی فاز غیر ترکننده (kg/(ms))
μ_w	گرانروی فاز غیر ترکننده (kg/(ms))
$\{\psi\}_w$	عملگر متوسط وزنی
ρ_α	چگالی فاز α (kg/m^3)
τ	زمان کل (T)
ϕ	تخلخل (-)

زیرنویس‌ها

N	فاز غیر ترکننده
W	فاز ترکننده

9- مراجع

[1] J. Douglas Jr, D. Peaceman, H. Rachford Jr, A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement, *Trans. SP AIME,* Vol. 216, pp. 297-308, 1959.

[2] R. Helmig, *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*: Springer-Verlag, 1997.

[3] H. Hoteit, A. Firoozabadi, Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures, *Advances in Water Resources,* Vol. 31, No. 1, pp. 56-73, 2008.

[4] G. Lin, J. Liu, F. Sadre-Marandi, A comparative study on the weak Galerkin, discontinuous Galerkin, and mixed finite element methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 273, pp. 346-362, 2015.

[5] Z. Chen, G. Huan, B. Li, An improved IMPES method for two-phase flow in porous media, *Transport in Porous Media,* Vol. 54, No. 3, pp. 361-376, 2004.

[6] B. Cockburn, C.-W. Shu, Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, *Journal of scientific computing,* Vol. 16, No. 3, pp. 173-261, 2001.

[7] B. Cockburn, C.-W. Shu, The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems, *SIAM Journal on Numerical Analysis,* Vol. 35, No. 6, pp. 2440-2463, 1998.

[8] P. Bastian, B. Riviere, *Discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media,* University of Heidelberg Technical Report 2004-28, 2004.

[9] B. Riviere, *The DGIMPES model in IPARS: discontinuous Galerkin for two-phase flow integrated in a reservoir simulator framework,* Technical Report 02-29, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2002.

[10] W. Klieber, B. Riviere, Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods, *Computer methods in applied mechanics and engineering,* Vol. 196, No. 1, pp. 404-419, 2006.

[11] L. J. Durlofsky, B. Engquist, S. Osher, Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics,* Vol. 98, No. 1, pp. 64-73, 1992.

[12] O. J. Eslinger, *Discontinuous galerkin finite element methods applied to two-phase, air-water flow problems,* Thesis, University of Texas at Austin, 2005.

[13] R. Fučík, J. Mikyška, Discontinous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures, *Procedia Computer Science,* Vol. 4, No. 11, pp. 908-917, 2011.

[14] A. Ern, I. Mozolevski, L. Schuh, Discontinuous Galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 199, No. 23, pp. 1491-1501, 2010.

[15] M. Fortin, F. Brezzi, *Mixed and hybrid finite element methods*: Springer, 1991.

[16] I. Mozolevski, L. Schuh, Numerical simulation of two-phase immiscible incompressible flows in heterogeneous porous media with capillary barriers, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 242, pp. 12-27, 2013.

[17] T. Arbogast, M. Juntunen, J. Pool, M. F. Wheeler, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in a porous medium enforcing H (div) velocityand continuous capillary pressure, *Computational Geosciences,* Vol. 17, No. 6, pp. 1055-1078, 2013.

[18] J. Kou, S. Sun, Upwind discontinuous Galerkin methods with mass conservation of both phases for incompressible two-phase flow in porous media, *Numerical Methods for Partial Differential Equations, ,* Vol.1,No. 5, pp. 1674-1699, 2014.

[19] M. Jamei, H. R. Ghafouri, An efficient discontinuous Galerkin method for two-phase flow modeling by conservative velocity projection, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow,* Vol. 26, 2016.

[20] M. Jamei, H. R. Ghafouri, A Novel Discontinuous Galerkin Model for Two-Phase Flow in Porous Media Using Improved IMPES Method, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow,* Vol. 26, 2016.

[21] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, *Computational methods for multiphase flows in porous media*: Siam, 2006.

[22] R. Brooks, T. Corey, *Hydraulic Properties Of Porous Media,* Colorado State University Hydrology Paper 3, 1964.

[23] D. A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*: Springer, 2011.

[24] A. Ern, A. F. Stephansen, P. Zunino, A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection–diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity, *IMA Journal of Numerical Analysis,* Vol. 29, pp. 235–256, 2009.

[25] B. Rivière, *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation*: Society for Industrial and Applied Mathematics: Siam, 2008.

[26] B. Riviere, Numerical study of a discontinuous Galerkin method for incompressible two-phase flow, ECCOMAS Proceedings, 2004.

[27] J. S. Park, S.-H. Yoon, C. Kim, Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids, *Journal of Computational Physics,* Vol. 229, No. 3, pp. 788-812, 2010.

[28] C. Grüninger, Using DUNE-PDELAB for Two-Phase Flow in Porous Media, *Advances in DUNE,* Springer, pp. 131-141, 2012.

[29] C. Grüninger, *Discontinuous Galerkin methods for two-phase flows in porous media,* Thesis, University of Stuttgart, 2010.

[30] P. Bastian, *Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media*: Springer,pp1-22, 2003.