



## مدل سازی تحلیلی تغییر شکل قطره مایع قرار گرفته در معرض جریان گاز

آرش بدیع سیچانی<sup>1</sup>، محسن دوازده امامی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، mohsen@cc.iut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 29 اردیبهشت 1394  
پذیرش: 11 تیر 1394  
ارائه در سایت: 22 تیر 1394

کلید واژگان:

تقابل آیرودینامیکی قطره  
تغییر شکل بزرگ  
حل تحلیلی  
فروپاشی ثانویه

### چکیده

در این پژوهش، مدلی تحلیلی و غیر خطی برای تعیین تغییر شکل قطره (مناسب برای استفاده در شبیه سازی افشانه ها) همراه با تخمین نیروی آیرودینامیکی با دقت بالا ارائه و ارزیابی می شود. در مدل سازی تنها مد اساسی نوسانی قطره در نظر گرفته می شود. این رویکرد در بسیاری از مدل های فروپاشی مبتنی بر تغییر شکل از جمله TAB، DDB، و NLTAB نیز استفاده شده است. اما این مدل ها دارای کاستی هایی همچون استفاده مکرر از ضرایب کالیبراسیون، تجزیه و تحلیل دو بعدی، و تقریب نامناسب نیروی آیرودینامیکی در تغییر شکل های بزرگ هستند. هدف این مقاله، اصلاح این نقایص است. فرمول بندی بر اساس معادله انرژی مکانیکی است. برای پروفیل توزیع فشار در اطراف قطره، از تابعی دو تکه ای ثابت و سینوسی که به عدد رینولدز و تغییر شکل قطره بستگی دارد، استفاده می شود. معادله جنبشی نهایی با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم به طور عددی حل شده و نتایج آن با سایر مدل ها و آزمایش مقایسه می شود. نتایج نشان می دهد که مدل حاضر، در حالت غیر دائم، تغییر شکل را بیشتر از سایر مدل ها پیش بینی می کند که سازگاری بیشتری با داده های تجربی دارد. در حالت دائم، نتایج مدل حاضر بین نتایج مدل TAB و NLTAB قرار دارد. خطوط جریان به دست آمده از شبیه سازی VOF با آنچه در تحلیل محاسبه شده مطابقت دارد که نشان دهنده صحت مفروضات مورد استفاده در مدل سازی است. به طور کلی، مدل حاضر می تواند برآورد مناسبی را برای تغییر شکل قطره فراهم آورد و این در حالی است که این مدل نظری از ضرایب کالیبراسیون بی نیاز است.

## Analytical modeling of deformation of a liquid drop exposed to a gas flow

Arash Badie Sichani, Mohsen Davazdah Emami\*

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

\* P.O.B. 8415683111 Isfahan, Iran, mohsen@cc.iut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 19 May 2015  
Accepted 02 July 2015  
Available Online 13 July 2015

#### Keywords:

Droplet aerodynamic interaction  
Large deformation of droplet  
Theoretical analysis  
Secondary breakup models

### ABSTRACT

A theoretical nonlinear droplet deformation model with an accurate estimation of aerodynamic force, which is appropriate for Lagrangian droplet tracking schemes, is presented and validated. The modeling is based on keeping track only of the fundamental oscillation mode. This conventional approach has been used in many deformation-based breakup models including Taylor Analogy Breakup, Droplet Deformation and Breakup, and Nonlinear Taylor Analogy Breakup. However, these models have some shortcomings such as the use of several calibration coefficients, two-dimensional analysis, and rough approximation of aerodynamic forces in large deformations. This paper is intended to amend these defects. The formulation is based on mechanical energy equation. The pressure distribution profile around the deformed droplet is approximated using a piecewise sinusoidal function which depends on Reynolds number and droplet deformation. The final kinetic equation is numerically solved using a fourth-order Runge-Kutta method and the results are compared with those of other models, experiments, and a Volume of Fluid simulation. Numerical results show that the present model predicts slightly greater deformations in comparison with other models for the unsteady case, which is more consistent with the experimental data. Considering the steady case, the results of present model stand between that of Taylor Analogy Breakup and Nonlinear Taylor Analogy Breakup model, and provide satisfactory predictions. The stream lines obtained from simulation match those calculated analytically, suggesting the appropriateness of the assumptions used in the modeling. Overall, the present model is found to be appropriate for the estimation of droplet deformation.

### 1- مقدمه

ثانویه<sup>2</sup> نامیده می شود. افشانه ها به طور گسترده ای در صنایع مختلف از قبیل خنک کاری، موتورهای احتراقی، پوشش دهی فلزات، کشاورزی، صنایع غذایی و دارویی استفاده می شوند لذا همواره شناخت مکانیسم های مؤثر در شکل-

پدیده تغییر شکل قطره در اثر نیروهای آیرودینامیکی ناشی از دمش گاز، در زمینه های مختلف از جمله شکل گیری افشانه ها<sup>1</sup> نقش دارد که شکست

2- Secondary breakup

1- Spray

Please cite this article using:

A. Badie Sichani, M. Davazdah Emami, Analytical modeling of deformation of a liquid drop exposed to a gas flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 417-428, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Badie Sichani, M. Davazdah Emami, Analytical modeling of deformation of a liquid drop exposed to a gas flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 417-428, 2015 (In Persian)

گاز ثابت است، شکل گرفته‌اند لذا عملکرد آنها در شرایط کاربردی که اصولاً سرعت دمش متغیر است دقت بالایی ندارند.

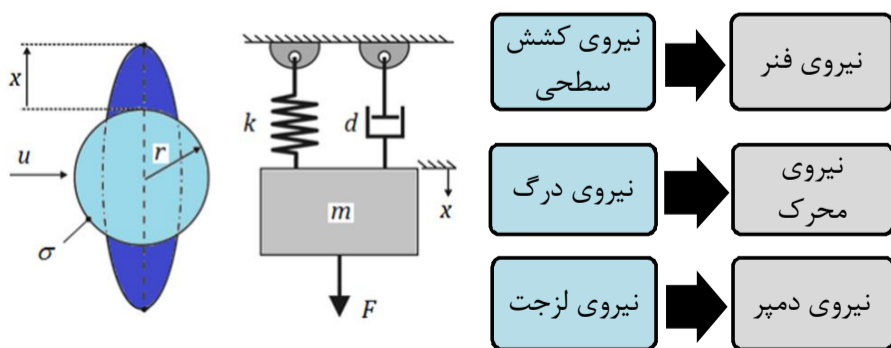
در ادامه به مدل‌های بر مبنای پدیده شناسی می‌پردازیم. معروف‌ترین مدل ارائه شده در این شاخه مدل شکست تشابه تیلور<sup>3</sup> (TAB) است [10]. در این مدل، با الهام از شباهت بین نوسانات یک قطره با یک سیستم جرم-فنر-دمپر، معادله دیفرانسیل مرتبه دو برای محاسبه تکامل شکل قطره از کروی به بیضی پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این، فرض می‌شود که اگر مقدار تغییر شکل بیشتر از یک حد خاص شود، شکست رخ دهد. شکل 1 تشابه تیلور را نشان می‌دهد.

اصلاحات متعددی بر روی مدل TAB صورت گرفته است که می‌توان به مدل‌های E-TAB [11]، T-TAB [12]، DM-TAB [13] اشاره کرد. همچنین اثر آشفتگی بر کاهش عدد وبر بحرانی توسط امیدوار و خالقی مدل‌سازی شده است [14].

در مدل E-TAB اندازه و تعداد قطرات حاصل از فرآیند شکست بر مبنای فرکانس ارتعاشی قطرات تخمین زده شده و کار آیرودینامیکی انجام گرفته بر روی قطره مادر از طریق حاصل ضرب نیروی درگ در تغییر شکل طولی قطره محاسبه می‌شود. اثر آشفتگی بر شکست قطره در مدل T-TAB به صورت یک ترم نیروی محرک اضافی در معادله ارتعاشی در نظر گرفته شده است. در DM-TAB، سیستمی شامل دو جرم متصل شده توسط یک فنر برای مدل‌سازی معرفی می‌شود.

اگرچه نسخه‌های مذکور از مدل TAB، آن را به شیوه‌های مختلف تعمیم و بهبود داده‌اند اما هیچ توضیحی در مورد این فرضیه که چرا نوسانات قطره باید توسط یک معادله دیفرانسیل خطی توصیف شود، ارائه نمی‌دهند. علاوه بر این، این مدل‌ها به حداقل چهار ثابت کالیبراسیون نیاز دارند که فاقد پشتوانه تئوریک هستند.

خط مشی دیگر، استفاده از روش‌های شبه تحلیلی برای محاسبه تغییر شکل قطره است که موضوع مورد مطالعه در این مقاله است. مهم‌ترین مزیت این خط مشی، نیاز حداقل به ضرایب کالیبراسیون است و می‌توان آن را با اطمینان بیشتری، در شرایط فیزیکی که مدل براساس آن فرمول بندی شده، بکار برد. البته این روش مستلزم بکارگیری فرضیات ساده‌کننده‌ای است. مدل‌های غیرخطی NL-TAB [15]، مدل کولکارتی و سوچکا [16] و مدل سیچانی و دوازده امامی [17] از جمله مدل‌هایی هستند که تحت این دسته طبقه‌بندی می‌شوند. در مدل DDB، به کمک معادله انرژی مکانیکی برای مرکز ثقل نیمه از قطره، معادله ارتعاشی غیر خطی استخراج می‌شود که درک بهتری از فیزیک تغییر شکل قطره را فراهم آورده است. اما فرمول بندی آن برای بیضی دو بعدی نوشته شده است و تردیدهایی در مورد نتایج حاصل از آن وجود دارد [18].



شکل 1 تناظر بین ارتعاش قطره و سیستم جرم-فنر-دمپر بر اساس تشابه تیلور

گیری افشانه‌ها مورد توجه محققان بوده است.

هنگامی که مایعی با سرعت بالا در محیطی گازی و از طریق مجرای تزریق می‌شود به صورت قطرات کوچکی پاشیده می‌شود. این قطرات با محیط گازی تقابل هیدرودینامیکی دارند و دچار تغییر شکل شده و اگر تغییر شکل از مقدار معینی بیشتر شود به قطرات کوچکتر شکسته<sup>1</sup> می‌شوند. برای شبیه‌سازی این فرآیند معادلات پایستگی جرم و ممنتوم برای گاز همراه با جملات چشمه مربوط به افشانه حل می‌شود. مکان و سرعت هر قطره توسط الگوریتم‌های تعقیب ذره (توصیف لاگرانژی) دنبال و در هر مرحله زمانی مقادیر تازه‌سازی می‌شوند. برای این منظور نیاز است که به روشی میزان تغییر شکل قطره و افزایش سطح پیشانی قطره محاسبه شود تا بتوان بر مبنای آن نیروی درگ وارد بر قطره و نیز احتمال شکست آن را تعیین کرد. در واقع تخمین میزان تغییر شکل قطره در تعیین مسیر حرکت قطرات، عمق نفوذ افشانه، و تبادل ممنتوم بین دو فاز مایع و گاز نقش کلیدی دارد. از این جهت تحقیق حاضر بر روی ارائه روشی برای محاسبه این کمیت متمرکز شده است.

خط مشی‌های متفاوتی که برای محاسبه تغییر شکل قطره در معرض جریان گاز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد عبارتند از: حل کامل عددی معادلات ناویر-استوکس، روابط تجربی و مبتنی بر تحلیل ابعادی، مدل‌های بر مبنای پدیده شناسی<sup>2</sup>، و مدل‌های شبه تحلیلی که در ادامه به تاریخچه و معایب و مزایای هر دسته پرداخته می‌شود.

حل عددی مسائل چند-فازی می‌تواند به روش‌هایی چون حجم سیال (VOF) یا سطوح تراز (LS) انجام گیرد. برای نمونه، در شبیه‌سازی انجام شده به روش VOF، تغییر شکل و شکست قطره در عدد وبر 20 بررسی شده است [1]. جزئیات فرآیند شکست قطره در حال سقوط نیز به کمک شبیه‌سازی مستقیم (DNS) توسط جلال و مهرآوران منتشر شده است [2]. در میان سایر تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌توان به بررسی اثر توربولانس بر کشش سطحی قطره توسط شیرانی و همکاران [3]، تغییر شکل قطره و اثر سیرکولاسیون داخل قطره توسط فرشچی و رحیمیان [4،5]، و نیز شکست قطره در اثر موج ضربه توسط انصاری و دارمی زاده [6] اشاره کرد.

اگرچه شبیه‌سازی از طریق حل کامل عددی این فرآیند (DNS) به روش VOF دقت بالایی دارد و جزئیات فرآیند در آن به خوبی محاسبه می‌شود، اما استفاده از آن برای حل همزمان تغییر شکل صدها هزار قطره موجود در افشانه‌ها، هزینه محاسباتی بسیار بالایی نیز به همراه دارد و کاربرد عملی در مهندسی ندارد. در عوض امروزه، استفاده از روش توصیف لاگرانژی برای شبیه‌سازی افشانه‌ها با توجه به هزینه محاسباتی معقولشان متداول شده است. در توصیف لاگرانژی افشانه، قطرات از طریق الگوریتم‌های ردیابی ذره دنبال می‌شوند. تغییر شکل و فروپاشی قطرات می‌بایست با استفاده از مدلی با هزینه محاسباتی کم و با قابلیت تطبیق برای مایعات و شرایط تزریق مختلف، تعیین شود.

استفاده از روابط تجربی برای این منظور، می‌تواند به عنوان راهکار دیگر مورد توجه قرار گیرد. از جمله مدل‌های کلاسیک در این زمینه مدل پیلیج-اردمن است که در آن، زمان لازم برای شکست قطره توسط روابط تجربی محاسبه می‌شود [7]. نسخه مدرن‌تری از این روش که بر مبنای آزمایشات فیذ و همکاران [8] شکل گرفته و در [9] منتشر شده است. روابط تجربی اصولاً بر مبنای شرایط خاص آزمایش است و بویژه هنگامی که سرعت دمش

1- Break-up  
2- Phenomenological models

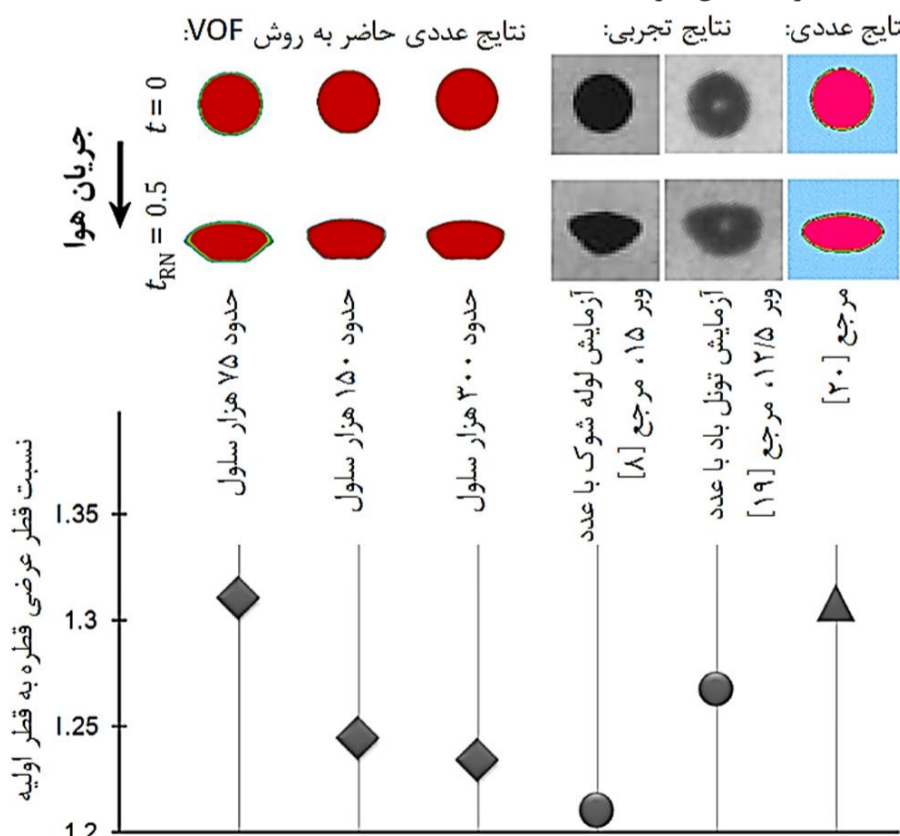
معادلات حاکم بر مسئله در روش VOF عبارتند از معادلات پایداری، ممنوم و معادله انتقال نسبت حجمی،  $\alpha$  که در رابطه (1) ارائه شده است:

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \underline{e}) + \kappa \sigma \delta_s \hat{n} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha v) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $\kappa$  انحناى سطح و  $\delta_s$  تابع دیراک در سطح است تا اعمال ترم کشش سطحی تنها در فصل مشترک دو فاز انجام گیرد. همچنین در این معادله با توجه به زیر بحرانی بودن عدد  $Re \sim 1000$  و  $Ma < 0/3$  از اثرات آشفتگی و تراکم پذیری صرف نظر شده است. اثر جاذبه به علت کوتاه بودن مدت زمان فرآیند، قابل ملاحظه نیست. مهمترین پارامترهای بدون بعد در مطالعه تغییر شکل قطره اعداد وبر و اونسورج هستند و به ترتیب به صورت  $We = \rho_g U^2 D / \sigma$  و  $Oh = \mu_l / \sqrt{\rho_l D \sigma}$  تعریف می‌شوند. از نظر فیزیکی عدد وبر عبارت است از نسبت نیروی اینرسی (گاز) به نیروی کشش سطحی و عدد اونسورج نیز به صورت نسبت نیروی لزجت به ترکیبی از نیروی اینرسی و نیروی کشش سطحی تعبیر می‌شود.

مسئله دارای تقارن محوری فرض می‌شود. در حالت اولیه، قطره آب در شرایط استاندارد و به طور ساکن و در میان لوله قرار دارد. در این شرایط کشش سطحی آب  $\sigma = 0/0708 \text{ (kg.s}^{-2}\text{)}$  است. شعاع لوله 25 برابر شعاع قطره و طول آن 54 برابر قطر قطره است. شرط مرزی بر روی دیواره لوله شرط لغزش بوده و با توجه به فاصله مرزها از قطره می‌توان جریان داخل لوله را همانند جریان آزاد در نظر گرفت. دمش گاز (هوای استاندارد) به صورت یکنواخت از ورودی وارد می‌شود و در خروجی شرط فشار ثابت در نظر گرفته می‌شود.

شکل 2 ارزیابی نتایج حاصل را برای پروفیل قطره و نیز تغییر شکل جانبی را نشان می‌دهد. نتایج مشابهی به کمک شبکه‌های حل با حدود 75، 150 و 300 هزار سلول محاسباتی بدست آمده است. استقلال جواب از شبکه مشاهده می‌شود. همچنین نتایج حاضر تطابق خوبی با تصاویر تجربی و نتایج عددی سایر محققان دارد.



شکل 2 شبیه‌سازی تغییر شکل قطره آب در جریان هوا با عدد وبر 15 و عدد اونسورج 0/0045 براساس سه شبکه حل با 75، 150 و 300 هزار سلول محاسباتی در مقایسه با نتایج تجربی [8،19] و سایر نتایج عددی [20]

در تحقیقات شامل [15]، معادله انرژی مکانیکی برای قطره در سه بعد بکار گرفته شده و مدل NL-TAB حاصله در مقایسه با نتایج تجربی ارزیابی شده است. اشکال وارده به این مدل استفاده از توزیع فشار متقارن (نسبت به دایره استوایی) حول قطره است. در واقع، چنین توزیع فشاری در مقایسه با توزیع فشار واقعی، که در آن جدایی جریان رخ می‌دهد، تفاوت زیادی دارد. در مدل کولکارنی و سوچکا، تغییر شکل قطره در رژیم شکست کیسه‌ای<sup>1</sup> به طور ساده‌ای فرمول‌بندی شده است. در مطالعات انجام شده توسط سیچانی و دوازده امامی نشان داده شد که براساس فرض جریان پتانسیل و بکارگیری روش انرژی همواره می‌توان معادلات دینامیکی مرتبه دومی برای پارامترهای تغییر شکل ارائه کرد [17]. سپس این روش را برای توصیف دینامیک قطره در رژیم کیسه‌ای بکار بردند.

هدف از این پژوهش، استخراج معادله ارتعاشی قطره با دقت بالا با بکارگیری حداقل فرضیات ساده کننده است. به ویژه، از پروفیلی دو قطعه‌ای سینوسی (در بخش پیشانی قطره) و ثابت (پس از جدایی جریان در پایین دست) برای تخمین توزیع فشار حول قطره استفاده شده و در نتیجه ترم نیروی محرک با دقت بالا محاسبه می‌شود. تفاوت کار حاضر با تحقیق انجام شده در مرجع [17] از نظر نحوه محاسبه نیروی آیرودینامیکی وارد بر قطره است. در مرجع [17] از تبدیل خطی پروفیل ضریب فشار مربوط به کره برای تخمین ضریب فشار در حالت غیر کروی استفاده شده که یک روش تقریبی است اما در کار حاضر از پروفیل دو قطعه‌ای مذکور با دقت بالا برای این منظور استفاده می‌شود. همچنین در این تحقیق نشان می‌دهیم که پس از خطی‌سازی معادله ارتعاشی حاصل، برای اعداد رینولدز در نزدیکی 100، مدل حاصل منطبق بر مدل TAB خواهد بود. بنابراین، سه مورد از ضرایب کالیبراسیون مورد استفاده در TAB از طریق تئوری محاسبه می‌شود.

در بخش دوم، مسئله تعریف شده و فیزیک آن بررسی می‌شود. سپس معادلات حاکم بر تغییر شکل قطره به کمک معادله انرژی استخراج می‌شود. بویژه نیروی محرک در معادله ارتعاشی قطره است با دقت بالا محاسبه می‌شود. در بخش سوم، نتایج حاصل از این مدل با سایر مدل‌ها و نتایج تجربی از آزمایش لوله شوک و تونل باد مقایسه می‌شود. در نهایت، در بخش چهارم، خلاصه‌ای از مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش ارائه می‌شود.

## 2- فیزیک مسئله و فرمول‌بندی

### 2-1- تعریف مسئله و فیزیک حاکم

از آنجا که کاربرد مدل برای پیش‌بینی تغییر شکل قطرات در افشانه‌ها است تعریف مسئله نیز بر اساس شرایط حاکم بر قطرات در این فرآیند انجام می‌شود. بر این اساس حالت اولیه قطره به صورت کروی و بدون ارتعاش در نظر گرفته می‌شود. سپس در اثر دمش گاز که سرعت آن می‌تواند متغیر باشد به صورت یک دیسک در می‌آید. شکست قطره می‌تواند در شرایطی که دمای گاز محصور کننده به اندازه کافی بالا باشد، متأثر از تبخیر و انتقال حرارت نیز باشد. اما با توجه به آنکه نرخ تبخیر در شرایط کاربرد بسیار کم است از افشانه‌ها نسبت به نرخ فروپاشی بسیار کمتر است می‌توان از اثرات تبخیر در مدل‌سازی صرف نظر کرد.

به منظور درک فیزیک حاکم بر این مسئله، در این تحقیق، شبیه‌سازی مستقیم عددی به روش VOF، برای قطره آب در جریان هوا با عدد وبر 15 به کمک نرم افزار اوپن-فوم<sup>2</sup> صورت گرفته است.

1- Bag breakup regime  
2- OpenFOAM

اصطکاکی مربوط به تنش برشی در سطح قطره، نیروهای فشاری در اثر تغییر شکل قطره، نیروی غیر دائم باست (اثر غیر دائم بودن لایه مرزی)، نیروهای شناوری، و نیروی‌های مربوط به اثر جرم مجازی. برای اعداد رینولدز در حدود 1000 سهم نیروی‌های اصطکاکی نسبت به فشاری ناچیز است. از طرفی، بر اساس نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل ابعادی مشخص می‌شود که نسبت سرعت تغییر شکل قطره مایع به سرعت اولیه دمش گاز از مرتبه بزرگی  $\sqrt{\rho_g/\rho_l}$  است [21]. این مقدار با توجه به کوچک بودن چگالی گازها نسبت به مایعات در حدود چند درصد است. بر این مبنا تحولاتی که در محیط گازی روی می‌دهد بسیار سریع‌تر از مایع است و شرایط جریان گاز حول قطره شبه دائم است [8]. جرم مجازی و نیروی باست برای جریان‌های حبابی (دینامیک حباب) و امولسیون مهم است ولی می‌تواند با خطای کوچک برای مسائل قطره در معرض گاز نادیده گرفته شود چرا که در آن  $\rho_g/\rho_l \ll 1$  [22].

آشفته‌گی می‌تواند در تسریع فرآیند شکست مؤثر باشد اما مکانیسم آن دقیقاً شناخته شده نیست. به علاوه آشفته‌گی بیشتر در مراحل اولیه فروپاشی<sup>1</sup> جت مایع (با جایی که تراکم قطرات بالاست) اهمیت دارد که از موضوع این تحقیق خارج است و در این تحقیق از آن صرف نظر می‌شود. لذا جریان درون قطره آرام فرض می‌شود.

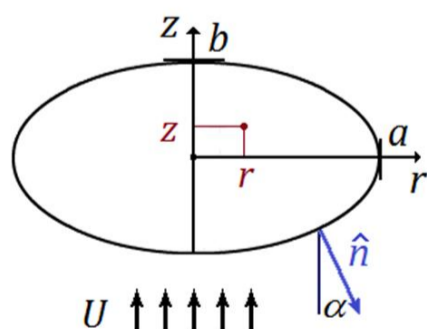
سطح آزاد قطره، در صورتی که شرایط مرزی مناسب به آن اعمال شود، می‌تواند هر شکل هندسی سازگار با اصل بقاء جرم را اختیار کند. اما در مراحل اولیه فرآیند، شکل قطره عمدتاً یک ساختار هندسی بیضی‌گون دارد که در شکل 2 و 3 نیز قابل مشاهده است. به این ترتیب سطح آزاد قطره به صورتی که نمایش داده شده در شکل 4 مدل‌سازی می‌شود.

فرض دیگر ناچیز بودن اثرات ورتیسیتیه و سیرکولاسیون درون قطره در شرایط کاربردی است. با توجه به تحقیقات کلیفت و همکاران [23]، به علت لزجت کم گازها نسبت به مایعات اثر تنش برشی به کندی موجب ایجاد چرخش سیال درون قطره می‌شود. به این ترتیب می‌توان از فرض جریان پتانسیل استفاده کرد که درستی آن نیز در بخش 2-2-2 بررسی می‌شود.

در نهایت پروفیل ضریب فشار موضعی در سطح قطره، که در محاسبه کار آیرودینامیکی از آن استفاده می‌شود، به صورت تابعی دو قطعه‌ای پیوسته فرض می‌شود و در بخش 2-2-3 به شرح آن پرداخته خواهد شد. در ادامه بر مبنای فرضیات مدل، میدان سرعت به طور تحلیلی محاسبه می‌شود.

### 2-2-2- میدان سرعت

در این بخش، میدان سرعت با روشی استدلالی و تنها بر مبنای فرض تقارن هندسی و معادله بقاء جرم بدست می‌آید. برای این منظور حجمی استوانه‌ای از سیال را بین دو صفحه موازی و بدون حضور جاذبه مطابق شکل 5 تصور کنید. سپس سیال بر اثر نزدیک شدن دو صفحه از وضعیت سکون به حرکت



شکل 4 پارامترهای هندسی بکار رفته شده در مدل‌سازی تغییر شکل قطره در مختصات استوانه‌ای

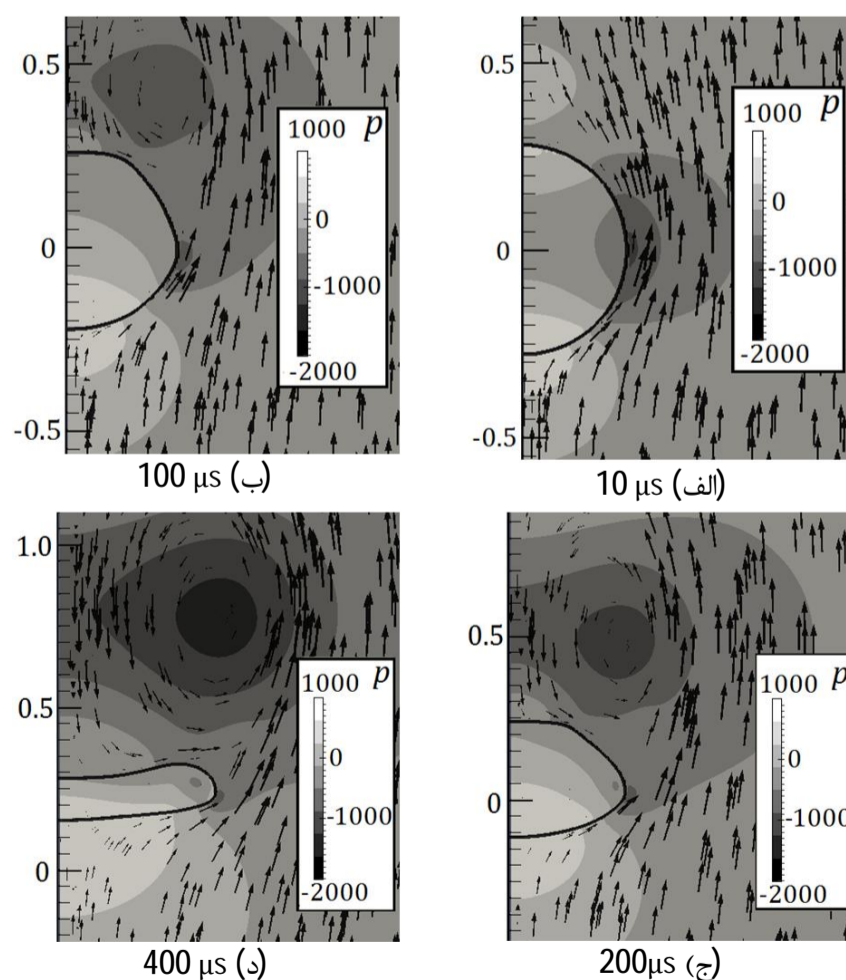
شکل 3 میدان‌های سرعت و فشار را در این فرآیند نشان می‌دهد. بر اساس نتایج شبیه‌سازی میدان سرعت در همان لحظات اولیه به جریان پتانسیل شبیه است. زیرا در این مقطع جریان بدون چرخش است. اما به تدریج با رشد لایه مرزی و تولید ورتیسیتیه از طریق فصل مشترک یک لوله گردابه‌ای حلقوی در پایین دست جریان ایجاد می‌شود.

این گردابه با افزایش مقطع عرضی قطره بزرگ‌تر می‌شود. میدان فشار همانطور که انتظار می‌رفت فشار بیشتر را در سطح پیشانی و نیز داخل قطره نشان می‌دهد. در حالی که در لبه‌های قطره فشار کمتر است. این اختلاف فشار عامل ایجاد یک جریان داخلی درون قطره است که منجر به تغییر شکل قطره می‌شود. کمترین میزان فشار در مرکز گردابه مشاهده می‌شود. این موضوع مربوط حرکت دورانی سیال حول این ناحیه است که نیازمند نیروی جانب مرکز است. این نیرو توسط گرادیان فشار تأمین می‌شود و به این ترتیب فشار در مرکز گردابه کمینه است. این شبیه‌سازی به درک پایه‌ای از فرآیند تغییر شکل کمک می‌رساند. همچنین امکان ارزیابی فرضیاتی را که در فرمول‌بندی استفاده می‌شود، فراهم می‌آورد که در بخش 2-2 به آن پرداخته می‌شود.

### 2-2- استخراج معادله ارتعاشی

#### 2-2-1- فرضیات مدل

همان‌طور که در بخش 1-2 اشاره شد معادلات تغییر شکل قطره پیچیده بوده لذا امکان ارائه حل تحلیلی وجود ندارد. برای مدل‌سازی تحلیلی لازم است از فرضیات ساده کننده استفاده شود. در این بخش این فرضیات مطرح شده و مورد بحث قرار می‌گیرند. علت اصلی پیچیدگی این مسئله، تقابل دو طرفه میان محیط گازی و قطره است که نیاز به حل کوپل معادلات جریان در دو فاز دارد. برای درک اجرای این تقابل، لازم است نیروی هیدرودینامیکی وارد بر قطره را به طور مجزا در نظر بگیریم. متداول‌ترین این نیروها عبارتند از: نیروی حاصل از فشار هیدرودینامیکی به علاوه فشار در بی‌نهایت، نیروی



شکل 3 میدان‌های سرعت و فشار (پاسکال) برای قطره کروی که به طور ناگهانی در معرض جریان گاز با عدد وبر 15 قرار می‌گیرد. (واحد اندازه‌ها میلی‌متر است).

می‌توان نشان داد که خطوط جریان براساس معادله (6) از معادله  $r^2z = cte$  پیروی می‌کنند. شکل 6 خطوط جریان را، در چهارچوب سکون قطره، یکبار بر مبنای میدان سرعت معادله (6) و بار دیگر بر مبنای حل عددی نشان می‌دهد. در لحظات نخستین دمش که قطره کروی است، خطوط جریان در قطره مطابقت خوبی با حل تحلیلی دارد زیرا در این مرحله جریان داخل قطره بدون چرخش است و اثرات ورتیسیت هوز از مرزها به داخل قطره منتقل نشده است. در مرحله بعدی تغییر شکل که قطره حالت پهن شده دارد، اعوجاج‌های مختصری در خطوط جریان نزدیک به استوای قطره مشاهده می‌شود که مربوط به چرخش ایجاد شده در این نواحی است اما همچنان تطابق مناسبی با خطوط جریان تحلیلی وجود دارد. به این ترتیب میدان سرعت محاسبه شده در حل تحلیلی، دقت کافی را برای مقاصد مدل‌سازی دارد.

### 2-2-3- معادله انرژی

هدف این بخش بدست آوردن معادله حاکم بر پارامتر تغییر شکل بدون بعد قطره،  $y = a/R$ ، به کمک معادله انرژی است. سیچانی و دوازده امامی نشان دادند که براساس روش انرژی همواره می‌توان معادلات دیفرانسیل مرتبه دومی برای پارامترهای تغییر شکل به فرم رابطه (7) استخراج کرد [17]:

$$m_{ki}\ddot{q}_i + I_{kij}\dot{q}_i\dot{q}_j + b_{ki}\dot{q}_i + s_k = f_k \quad (7)$$

که در آن  $q_i$  پارامتر تغییر شکل بوده و سایر ضرایب وابسته به مدهای اصلی میدان سرعت هستند.

در این تحقیق نیز از معادله بالانس انرژی مکانیکی برای بدست آوردن معادله‌ای به فرم (7) استفاده می‌کنیم که در رابطه (8) ارائه می‌شود:

$$\frac{dE_k}{dt} + \Phi + \frac{dE_p}{dt} = \dot{W}_p^{ex} \quad (8)$$

که در آن  $E_k$  انرژی جنبشی قطره نسبت به مرکز ثقل آن،  $\Phi$  نرخ استهلاک انرژی در داخل قطره،  $E_p$  انرژی پتانسیل،  $\dot{W}_p^{ex}$  نرخ کار انجام شده توسط فشار وارده از طرف گاز (در چهارچوب قطره) است.

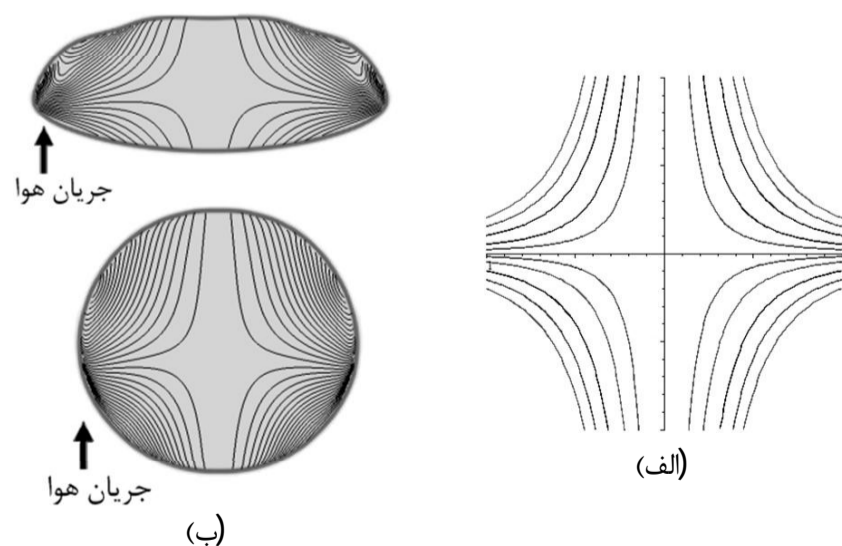
دو ترم نخست معادله (8) را می‌توان به میدان سرعت داخل قطره، معادله (6)، مربوط ساخت و در رابطه (9) ارائه می‌شود (بخش 6-1):

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{8\pi}{15}\rho_l R^5 [(1 + 2y^{-6})\dot{y} - 6y^{-7}\dot{y}^2]\dot{y} \quad (9)$$

$$\Phi = 16\pi\mu_l R^3 \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2$$

انرژی پتانسیل، مربوط به کشش سطحی است و تغییرات آن متناسب با تغییر مساحت سطح قطره بیضی‌گون است و رابطه (10) بدست می‌آید:

$$E_p = \sigma S \Rightarrow \frac{dE_p}{dt} = \sigma(4\pi R^2) \frac{d(S/S_0)}{dy} \frac{dy}{dt} \quad (10)$$



شکل 6 خطوط جریان بر مبنای (الف) حل تحلیلی (ب) حل عددی میدان سرعت

در می‌آید. حرکت ذرات مادی از سیال که در لحظات نخست بر روی صفحه فرضی میانی قرار داشته‌اند در تمام لحظات بعدی نیز باید بر روی اینصفحه قرار داشته باشند زیرا شرایط این ذرات سیال از هر نظر نسبت به جهت موازی با محور استوانه متقارن است (شکل 5-ب). اما صفحه میانی، استوانه را به دو استوانه کم ارتفاع‌تر تقسیم می‌کند که وضعیتی مشابه با استوانه اولیه دارند با این تفاوت که سرعت حرکت صفحات موازی نسبت به هم نصف وضعیت اولیه است. به این ترتیب سرعت سیال واقع شده بر صفحات میانی متناظر با این استوانه‌ها نیز برابر با میانگین صفحات مجاور آنها در دو قاعده است (شکل 5-ج). با بسط این فرآیند می‌توان توزیع خطی سرعت را برای صفحات موازی با قاعده‌های استوانه نتیجه گرفت. اگر توزیع سرعت برای  $v_z$  برحسب  $z$  خطی باشد به معنای ثابت بودن مشتق در جهت  $z$  است. به این ترتیب با در نظر گرفتن معادله پیوستگی در دستگاه مختصات استوانه‌ای (با فرض ثابت بودن چگالی و شرط تقارن در جهت  $\theta$ ) رابطه (2) را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} = -c_1$$

$$\Rightarrow v_r = -\frac{1}{2}c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (2)$$

که در آن  $v$  سرعت و اندیس آن مؤلفه را مشخص می‌کند.  $c_1$  و  $c_2$  ثابت هستند. پیوستگی سرعت در محور استوانه  $c_2 = 0$  را ایجاد می‌کند و لذا مؤلفه سرعت در راستای  $r$  نیز در هر لحظه توزیعی خطی نسبت به  $r$  دارد. حال ذراتی از سیال را که بر روی سطح کره‌ای با مرکز واقع شده بر محور استوانه را در نظر بگیرید (شکل 5-د). این ذرات بر اثر میدان سرعت توصیف شده به طور خطی نسبت به  $z$  و  $r$  در آن جهات حرکت می‌کنند و کره فرضی به شکل بیضی‌گون در می‌آید (شکل 5-ه).

با توجه به پروفیل خطی برای میدان سرعت درون قطره و شرایط مرزی، میدان سرعت به صورت رابطه (3) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} v_z|_{z=0} = 0 \\ v_z|_{z=b} = \dot{b} \end{cases} \Rightarrow v_z = \frac{\dot{b}}{b}z$$

$$v_r|_{r=a} = \dot{a} \Rightarrow v_r = \frac{\dot{a}}{a}r \quad (3)$$

متغیرهای  $a, b$  که اقطار بیضی‌گون هستند از طریق معادله بقاء جرم در رابطه (4) به یکدیگر مربوط هستند:

$$m_{\text{spheroid}} = m_{\text{sphere}} \Rightarrow \rho_l \frac{4}{3}\pi a^2 b = \rho_l \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow a^2 b = R^3 \quad (4)$$

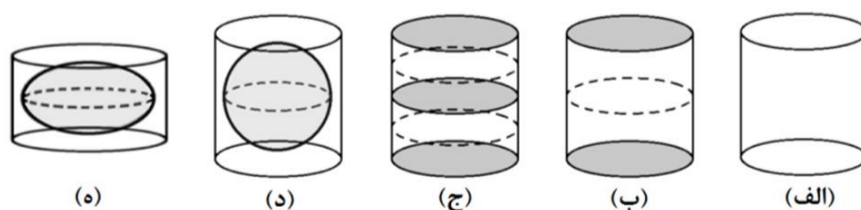
از طرفی با گرفتن مشتق زمانی از رابطه (4) داریم (رابطه 5):

$$\frac{2\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} = 0 \quad (5)$$

میدان سرعت با ترکیب روابط (3) و (5) به صورت رابطه (6) تبدیل می‌شود:

$$\vec{v} = (r\hat{e}_r - 2z\hat{e}_z) \frac{\dot{a}}{a} \quad (6)$$

در ادامه صحت میدان سرعت محاسبه شده از طریق مقایسه با حل عددی به روش VOF که در بخش 2-1 به آن اشاره شد، پرداخته می‌شود.



شکل 5 توجیه میدان سرعت خطی درون قطره در تغییر شکل از حالت کروی به بیضی‌گون

ترتیب نقطه‌ای از سطح قطره که بر مبنای فرض  $\alpha_s \cong \alpha_{s,0}$  بدست می‌آید تقریب خوبی برای نقطه جدایی جریان است.

اکنون، به طریقه محاسبه پارامترهای توزیع فشار پرداخته می‌شود. همانطور که در شرط اول اشاره شده،  $\alpha_{s,0}$  طوری انتخاب می‌شود که نرم اختلاف توزیع فشار پیشنهادی برای  $C_p$  و روابط تجربی شامل برای توزیع فشار حول کره [15] کمینه باشد. با انجام محاسبات عددی مقدار  $\alpha_{s,0}$  بر حسب  $Re$  بدست می‌آید. استفاده از کمیت  $\zeta_{s,0}$ ، مؤلفه  $z$  بدون بعد نقطه جدایی جریان،  $z_s/b$ ، محاسبات را ساده‌تر می‌کند. لذا رابطه (12) برای تعیین نقطه جدایی،  $\zeta_{s,0}$ ، که به کمک برازش منحنی بدست آمده، پیشنهاد می‌شود:

$$\zeta_{s,0} = \min\left(\frac{65}{Re + 30} - 0.65, 0\right) \quad (12)$$

شکل 8 پروفیل پیشنهادی بر اساس معادلات (11) و (12) را در مقایسه با منحنی‌های بدست آمده از روابط شامل نشان می‌دهد. تطابق قابل قبولی بین منحنی‌ها مشاهده می‌شود که نشان دهنده تقریب مناسب بکار رفته برای  $C_p$  است.

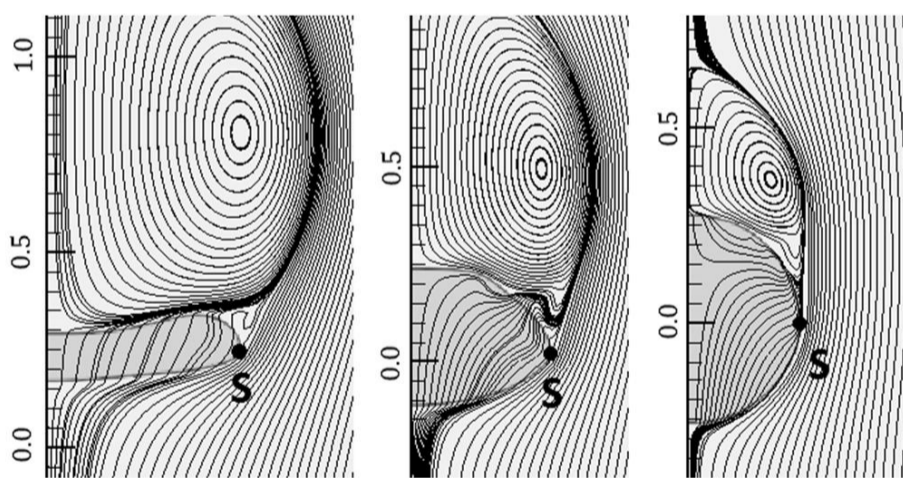
پارامتر توزیع فشار،  $a_p$ ، را می‌توان از طریق محاسبه نیروی درگ بر مبنای پروفیل فشار پیشنهادی شده، معادله (11)، به ضریب درگ مربوط ساخت که در رابطه (13) ارائه شده است (پیوست، بخش 2-6):

$$a_p = \frac{C_D}{y^6 \left( \frac{(y^6-1)(1-\zeta_s^2)}{1+(y^6-1)\zeta_s^2} + \ln\left(\frac{1-\zeta_s^2}{y^6} + \zeta_s^2\right) \right)} \quad (13)$$

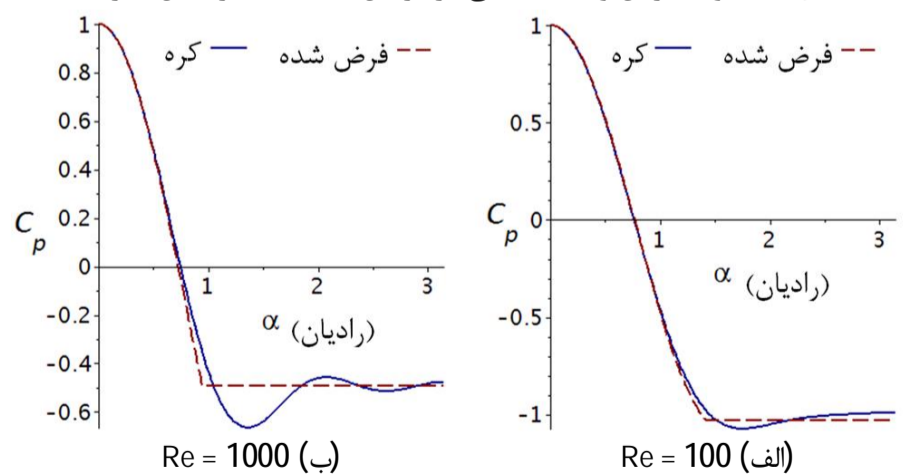
که در آن  $\zeta_s = \zeta_{s,0} / [\zeta_{s,0}^2 + (1 - \zeta_{s,0}^2)y^6]^{1/2}$ ، نقطه جدایی است.

با مشخص شدن پارامترهای پروفیل توزیع فشار امکان محاسبه نرخ انجام کار نیروی آیرودینامیکی وارد بر قطره (در چهارچوب سکون) فراهم است. معادله کلی برای محاسبه نرخ کار انجام شده بر قطره توسط نیروی‌های فشاری خارجی،  $\dot{W}_p^{ex}$ ، عبارت است از رابطه (14):

$$\dot{W}_p^{ex} = \int_A -\vec{v} \cdot \hat{n} p dA \quad (14)$$



شکل 7 خطوط جریان و نقطه جدایی در مراحل مختلف تغییر شکل قطره



شکل 8 مقایسه توزیع فشار فرض شده و توزیع فشار حول کره [15] به ازای اعداد رینولدز مختلف

که در آن  $S/S_0$  مساحت بدون بعد سطح قطره و تابعی از  $\gamma$  است [15].  $S_0$  مساحت در حالت کروی است.

محاسبه ترم نیروی آیرودینامیکی نسبت به سایر ترم‌ها پیچیده‌تر است. زیرا روش تحلیلی کم هزینه‌ای برای محاسبه توزیع فشار اطراف یک بیضی-گون وجود ندارد و از طرفی حل عددی هم به علت پرهزینه بودن مناسب نیست. روش پیشنهادی در این تحقیق، استفاده از پروفیل معادله (11) برای تخمین فشار بدون بعد،  $C_p$ ، (ضریب موضعی پسا) است:

$$C_p = \begin{cases} 1 - a_p \sin^2 \alpha, & \alpha < \alpha_s \\ 1 - a_p \sin^2 \alpha_s, & \alpha \geq \alpha_s \end{cases}, C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (11)$$

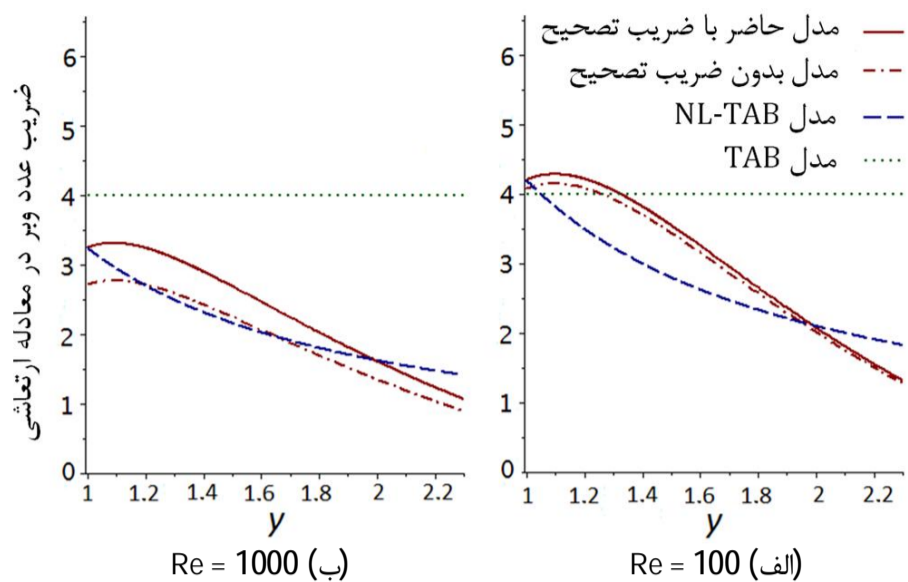
که در آن  $\alpha$  زاویه بردار نرمال سطح با محور  $z$  در جهت منفی است (شکل 4). پروفیل پیشنهادی بر اساس دو پارامتر  $a_p$  و  $\alpha_s$  که آنها را پارامترهای توزیع فشار می‌نامیم، تعیین می‌شود. این دو پارامتر خود تابع عدد رینولدز و تغییر شکل قطره می‌باشند و می‌بایست طوری انتخاب شوند که توزیع فشار حاصل تا حد ممکن به توزیع فشار حاصل از شبیه‌سازی/نتایج تجربی نزدیک باشد. سایر کمیت‌ها عبارتند از  $U$ ،  $\rho$ ،  $p_\infty$ ،  $p$  که به ترتیب کمیت‌های فشار موضعی در سطح قطره، فشار در دور دست، چگالی گاز و سرعت گاز نسبت به قطره می‌باشند.

تعریف  $C_p$  به صورت یک تابع دو قطعه‌ای شامل یک بخش سینوسی و یک بخش ثابت صورت گرفته است. بخش سینوسی که برای  $\alpha < \alpha_s$  استفاده می‌شود سازگار با فرض جریان پتانسیل است که مطابقت خوبی با توزیع فشار در سطح کره در جریان غیر لزج، پیش از نقطه جدایی دارد. بر اساس اصول کلاسیک آیرودینامیک، فشار روی سطح بیضی‌گون در ناحیه پس از جدایی جریان کم و بیش ثابت باقی می‌ماند لذا  $C_p$  برای  $\alpha \geq \alpha_s$  ثابت در نظر گرفته شده است. البته  $\alpha_s$  لزوماً زاویه‌ای نیست که در آن جدایی رخ می‌دهد. در واقع اثر جدایی جریان بر فشار، چند درجه جلوتر از نقطه جدایی نمایان می‌شود.  $\alpha_s$  طوری باید انتخاب شود که نرم اختلاف توزیع فشار پیشنهادی با توزیع فشار تجربی کمینه باشد.

در این تحقیق، برای تعیین پارامترهای توزیع فشار در وضعیت‌های غیر کروی از روشی بر مبنای دو شرط زیر استفاده می‌شود:

شرط اول: برای وضعیت کروی پارامتر  $\alpha_s$  را با  $\alpha_{s,0}$  نشان می‌دهیم و طوری انتخاب می‌شوند که به ازای آن نرم اختلاف توزیع فشار پیشنهادی برای  $C_p$  از توزیع فشار تجربی/عددی کمینه باشد. در ادامه حدس زده می‌شود که برای  $\gamma \geq 1$  نیز  $\alpha_s \cong \alpha_{s,0}$  باشد. یعنی  $\alpha_s$  همان مقدار مربوط به وضعیت کروی را داشته باشد.

شرط دوم: پارامترهای  $a_p$  و  $\alpha_s$  طوری انتخاب می‌شوند که ضریب درگ حاصل از توزیع فشار پیشنهادی، با مقادیر ارائه شده در مراجع [21,24] برای مقادیر مختلف تغییر شکل مطابقت داشته باشد. اگر فرض کنیم نیروی درگ عمدتاً ناشی از توزیع فشار است (و نه تنش برشی) می‌توان از ضریب درگ به عنوان یک قید برای انتخاب توزیع  $C_p$  پیشنهادی استفاده کرد. در ادامه، صحت فرضی را که در شرط اول مطرح شد بررسی می‌کنیم. خطوط جریان اطراف قطره و نقطه جدایی که از حل عددی به روش VOF بدست آمده در شکل 7 نشان داده شده است. بر اساس فرض مطرح شده، جدایی جریان برای لحظات مختلف در حوالی نقطه‌ای روی می‌دهد که بردار نرمال به سطح آنها با یکدیگر موازی است. برای مثال، در شکل 7 جدایی جریان برای هر سه مورد از وضعیت قطره در نزدیکی استوای قطره و اندکی متمایل به قطب پیشانی قطره روی می‌دهد. می‌توان خطوطی موازی و مماس بر قطرات را تصور کرد که سطح قطرات را در نزدیکی نقطه جدایی قطع می‌کند. به این



شکل 9 مقایسه ضریب عدد و بر در ترم نیروی آیرودینامیکی در مدل‌های مختلف بر حسب  $y$  برای اعداد رینولدز متفاوت

باشد، مقادیر موجود در  $y = 1$  برای نمودار NL-TAB برابر همان مقدار مربوط به تئوری خطی است که مقدار دقیقی را با فرض توزیع فشار تجربی حول کره ارائه می‌دهد. بر این مبنای، خطای مدل حاضر برای اعداد رینولدز بالاتر از 100 به صورت نقصانی است. خطای نقصانی از مقدار صفر در اعداد رینولدز حدود 100 به 18% در اعداد رینولدز بالا میل می‌کند. علت چنین خطایی عمدتاً مربوط به وجود اندرشت<sup>2</sup> در نمودار توزیع فشار برای کره است. این موضوع در شکل 8 به خوبی نمایان است. در واقع پروفیل تخت، فشار بیشتری را برای ناحیه‌ای که اندرشت وجود دارد، در نظر می‌گیرد. با توجه به اینکه این ناحیه در نزدیکی استوای قطره واقع شده است در مدل حاضر نیروی آیرودینامیکی کمتری برای پهن کردن قطره برآورد می‌شود. به این ترتیب می‌توان ضریب تصحیح،  $k_{corr}$ ، را برای اصلاح نیروی آیرودینامیکی مدل معرفی کرد تا دقت مدل حاضر بیشتر شود. این ضریب در رابطه (18) ارائه شده است:

$$k_{corr} = \frac{6k_2}{5C_D^{sphere} f(1, \zeta_{s,0})} \quad (18)$$

که در آن  $k_2$  ضریب مربوط به مد اساسی نوسان قطره در بسط سری هارمونیک توزیع فشار است [15].

افزایش نامحسوس نیروی آیرودینامیکی، پس از میزان کمی پهن شدن قطره، به این صورت قابل توجیه است که پهن‌شدگی باعث افزایش ضریب درگ شده که با توجه به توزیع فشار فرض شده موجب انجام کار بیشتر بر قطره در چهارچوب سکون قطره می‌شود. به این ترتیب نیروی آیرودینامیکی پس از میزان کمی تغییر شکل قطره افزایش می‌یابد. اما وقتی پهن‌شدگی افزایش می‌یابد جابجایی موثر نیرو نیز کاهش می‌یابد (مثل وضعیتی که در آن بخواهیم اهرمی جرم‌دار را با وارد کردن نیرویی به انتهای نزدیک به تکیه-گاهش حرکت دهیم) و افزایش سطح پیشانی قطره آنقدر نیست که بتواند این کاهش را جبران کند لذا قطره، نیروی محرک را کمتر از مقداری واقعی آن حس می‌کند. این اثر با تغییر شکل بیشتر، افزایش می‌یابد تا جایی که نهایتاً غالب شده و موجب کاهش نیروی آیرودینامیکی مؤثر بر قطره از نقطه نظر ارتعاشی می‌شود. نکته دیگر در مورد شکل 9 آن است که مدل TAB نسبت به دو مدل دیگر، نیروی آیرودینامیکی را در اعداد رینولدز بالا دست بالا در نظر می‌گیرد.

در ادامه مقایسه‌ای بین سایر ترم‌های معادله ارتعاشی مدل حاضر و مدل TAB صورت می‌گیرد. با توجه به آنکه مدل TAB یک مدل خطی است، لازم است برخی ترم‌های معادله (17) نیز خطی‌سازی شود تا امکان مقایسه ترم‌ها

عبارت حاصل برای کار نیروی آیرودینامیکی حجیم است و محاسبه آن در پیوست، بخش 3-6، آمده است. برای خلاصه نویسی، به جز ترم  $\dot{y}/y$ ، بخشی را که تابع  $y$  و  $\zeta_s$  است، با  $f(y, \zeta_s)$  در رابطه (15) نشان می‌دهیم:

$$\dot{W}_p^{ex} = \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \left(\frac{\dot{y}}{y}\right) C_D f(y, \zeta_s) \quad (15)$$

برخلاف پیچیده بودن عبارت ریاضی  $f$ ، رفتار این تابع نسبت به  $y$  هموار است و می‌توان، با استفاده از برازش منحنی، آن را با تابعی ساده تقریب زد. به کمک ابزارهای برازش منحنی در نرم‌افزار میپل<sup>1</sup> تابعی به فرم رابطه (16) حاصل شده است:

$$f(y, \zeta_s) \approx C_1 + C_2 e^{C_3 y},$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-3.99\zeta_s^3 + 4.14\zeta_s^2 + 0.0849\zeta_s - 0.00917}{4.41\zeta_s^2 - 0.824\zeta_s + 0.0813} \\ C_2 = 17.25\zeta_s^3 + 15.62\zeta_s^2 + 1.957\zeta_s + 2.485 \\ C_3 = -0.6 - 0.4\sqrt{1 + 190\zeta_s^2} \end{cases} \quad (16)$$

با محاسبه ترم نیروی آیرودینامیکی امکان بازنویسی معادله انرژی بر حسب  $y$ ، مشتقات  $y$ ، و خواص فیزیکی وجود دارد. ترم‌های معادله انرژی، معادله (8)، به ترتیب با معادلات (9)، (10)، و (15) جایگزین می‌شود و پس از بدون بعدسازی، معادله ارتعاشی قطره به صورت رابطه (17) بدست می‌آید:

$$(1 + 2y^{-6})\ddot{y} - 6y^{-7}(\dot{y})^2 + 120 Oh \frac{1}{y^2}\dot{y} + 60\left(\frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy}\right) = 5C_D f(y, \zeta_s) \frac{1}{y} We \quad (17)$$

که در آن  $We$  و  $Oh$  اعداد و بر و اونسورج هستند.

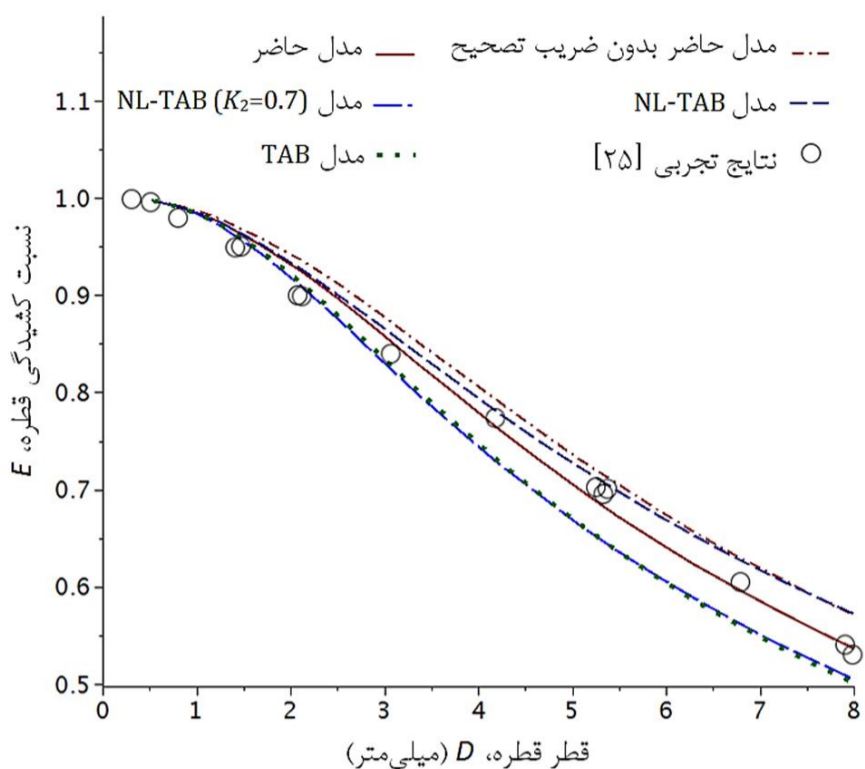
در معادله (17)، مشتق‌های زمانی براساس زمان مشخصه نوسان آزاد قطره،  $t^* = t\sqrt{\sigma/\rho_l D^3}$ ، بدون بعد سازی شده است. ترم  $1/S_0 dS/dy$  توسط تقریب ارائه شده در [15] قابل محاسبه است. کمیت دیگر که می‌بایست نحوه محاسبه آن در معادله (17) مشخص شود ضریب درگ،  $C_D$ ، است که نقش مستقیمی در ترم نیروی آیرودینامیکی دارد.

روش معمول برای محاسبه  $C_D$  در وضعیت‌های غیر کروی، میانمایی ضریب درگ کره و دیسک می‌باشد. در مدل لیو و همکاران، برای درگ رابطه خطی نسبت به میزان تغییر شکل،  $y$ ، ارائه می‌شود [24] و در این تحقیق از این روش استفاده می‌شود.

همان‌طور که انتظار می‌رفت معادله ارتعاشی بدست آمده فرمی غیر خطی و منطبق بر معادله (7) دارد. در بخش 2-3 به مقایسه تئوریک مدل حاضر با مدل NL-TAB و TAB پرداخته شده و تصحیح‌نهایی لازم نیز بر مدل حاضر اعمال می‌شود.

**3-2- مقایسه معادله ارتعاشی مدل حاضر با مدل‌های TAB و NL-TAB**  
برای مقایسه معادلات ارتعاشی مدل‌های مختلف، لازم است معادلات آن‌ها هم مقیاس باشند. بنابراین، معادله هر مدل در ضریب مناسب ضرب شده به طوری که ضریب ژهنگامی که  $1 \rightarrow y$  به عدد 3 میل کند.

ابتدا ضریب عدد و بر در مدل‌ها بررسی می‌شود. در شکل 9 نمودار ضریب عدد  $We$  در مدل حاضر بدون ضریب تصحیح (معادله 17) و با ضریب تصحیح، در مقایسه با مدل‌های TAB، NL-TAB به ازای اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده است. با توجه به شکل 9، مشخص می‌شود که مدل حاضر بدون ضریب تصحیح مقدار یکسانی با مدل NL-TAB در  $y = 1$  ندارد. از آنجا که مدل NL-TAB طوری فرمول‌بندی شده که با تئوری خطی [15] سازگار



شکل 10 نسبت کشیدگی قطره معلق در تونل باد بر حسب قطر قطره

### 3-2- حالت غیر دائم (آزمایش لوله شوک)

آزمایشات لوله شوک که توسط دای و فیث [8] انجام شده داده‌های تجربی را برای اعداد وبر در محدوده 15-150 و عدد رینولدز در محدوده 1500-3300 فراهم آورده است. برای حل عددی معادله ارتعاشی مدل‌ها از روش رانج- کوتای مرتبه چهار استفاده می‌شود و به منظور هر چه بیشتر نزدیک شدن شبیه‌سازی به شرایط آزمایش اثر تغییر سرعت قطره در اثر نیروی درگ بر سرعت نسبی دمش گاز در محاسبات لحاظ شده است. این اثر موجب کاهش چند درصدی عدد وبر لحظه‌ای در طول فرآیند می‌شود. البته مقصود از عدد وبر در نمودارها مقدار اولیه آن است.

در ادامه تغییر شکل قطره در یک فرآیند غیر دائم مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل 11 نمودارهای بدست آمده از مدل‌های TAB، NL-TAB و مدل حاضر را در مقایسه با نتایج تجربی نشان می‌دهد. در نمودارها، از زمان نرمال شده نسبت به زمان مشخصه رنجر و نیکولز [26]،  $t_{RN} = tU(\rho/\rho_l)^{1/2}/D$  استفاده شده است. با توجه به نمودارهای شکل 11 معلوم می‌شود که مدل حاضر میزان تغییر شکل قطره در آزمایش لوله شوک را بیشتر از سایر مدل‌ها پیش‌بینی می‌کند. این موضوع باعث نزدیک‌تر شدن نتایج مدل حاضر به نتایج تجربی (نسبت به سایر مدل‌ها) به ویژه در محدوده عدد وبر 20 تا 32 شده است. اما به طور کلی هر سه مدل تغییر شکل قطره را در بیشتر موارد کمتر از نتایج تجربی در نظر می‌گیرند. نمودارهای سه مدل پس از آنکه تغییر شکل قطره بیش از  $\gamma > 1/2$  ( $t_{RN} > 0/5$ ) می‌شود، متمایز می‌شوند و برای مقادیر کوچکتر از آن هر سه نمودار تقریباً بر یکدیگر منطبق هستند. در اعداد وبر پایین و تغییر شکل بیش از  $\gamma > 1/8$  ( $t_{RN} > 1/5$ ) اختلاف زیادی بین نتایج مدل‌های مختلف و نتایج تجربی مشاهده می‌شود. به نظر می‌رسد مدل‌های برمبنای شکل بیضی‌گون قادر به پیش‌بینی میزان تغییر شکل قطره برای این محدوده نیستند. سوالی که در اینجا ممکن است مطرح شود مربوط به بیشتر بودن تغییر شکل قطره در مدل حاضر نسبت به مدل TAB است. این در حالی است که، همان‌طور که در بخش قبل نیز اشاره شد، مدل حاضر نیروی آیرودینامیکی را در اعداد رینولدز در حدود 1000، کمتر از مدل TAB در نظر می‌گیرد (شکل 9) و لذا به نظر می‌رسد تغییر شکل قطره در مدل حاضر می‌بایست از مدل TAB کمتر باشد. چنین نتیجه‌ای متناقضی با توجه به ضریب ترم  $\gamma$  در معادله ارتعاشی مدل حاضر،

در دو معادله فراهم آید. معادله خطی شده در رابطه (19) ارائه شده است:

$$3\ddot{\gamma} - 6\dot{\gamma}^2 + 120\text{Oh}\dot{\gamma} + 192(\gamma - 1) = 5C_D^{\text{sphere}} f(1, \zeta_{s,0})\text{We} \quad (19)$$

و برای معادله مدل TAB رابطه (20) را داریم [10]:

$$3\ddot{\gamma} + 60\text{Oh}\dot{\gamma} + 192(\gamma - 1) = 4\text{We} \quad (20)$$

با مقایسه معادله خطی‌سازی شده، رابطه (19)، با معادله مدل TAB، رابطه (20)، معلوم می‌شود که ضریب  $\ddot{\gamma}$  و ضریب  $\gamma - 1$  در هر دو معادله یکسان است. ضریب ترم  $\dot{\gamma}$  در معادله (19) دو برابر معادله TAB است. اما معادله (19) دارای یک ترم اضافی همواره منفی،  $-6\dot{\gamma}^2$ ، نیز هست. اگر این ترم را با ترم استهلاک معادله (19) ترکیب کنیم ضریب استهلاک ظاهری به صورت  $120\text{Oh} - 6\dot{\gamma}$  بدست می‌آید.

در این بخش روش جدید و نسبتاً دقیقی برای محاسبه ترم نیروی آیرودینامیکی ارائه و براساس آن مدل تغییر شکل جدیدی معرفی شد. در این مدل از وارد کردن ضرایب تجربی برای کالیبره کردن آن استفاده نشده که نقطه قوتی برای آن حساب می‌شود. به علاوه، سازگاری مدل حاضر با سایر مدل‌ها نیز نشان داده شد. در بخش بعد نتایج حاصل از کاربرد مدل جدید، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### 3-3- نتایج

برای ارزیابی مدل حاضر از نتایج تجربی مربوط به تغییر شکل قطره در اثر دمش گاز در وضعیت دائم (آزمایش تونل باد و قطره معلق) و در وضعیت غیر دائم (آزمایش لوله شوک) استفاده می‌شود. ابتدا به ارزیابی مدل در حالت تغییر شکل دائم پرداخته می‌شود.

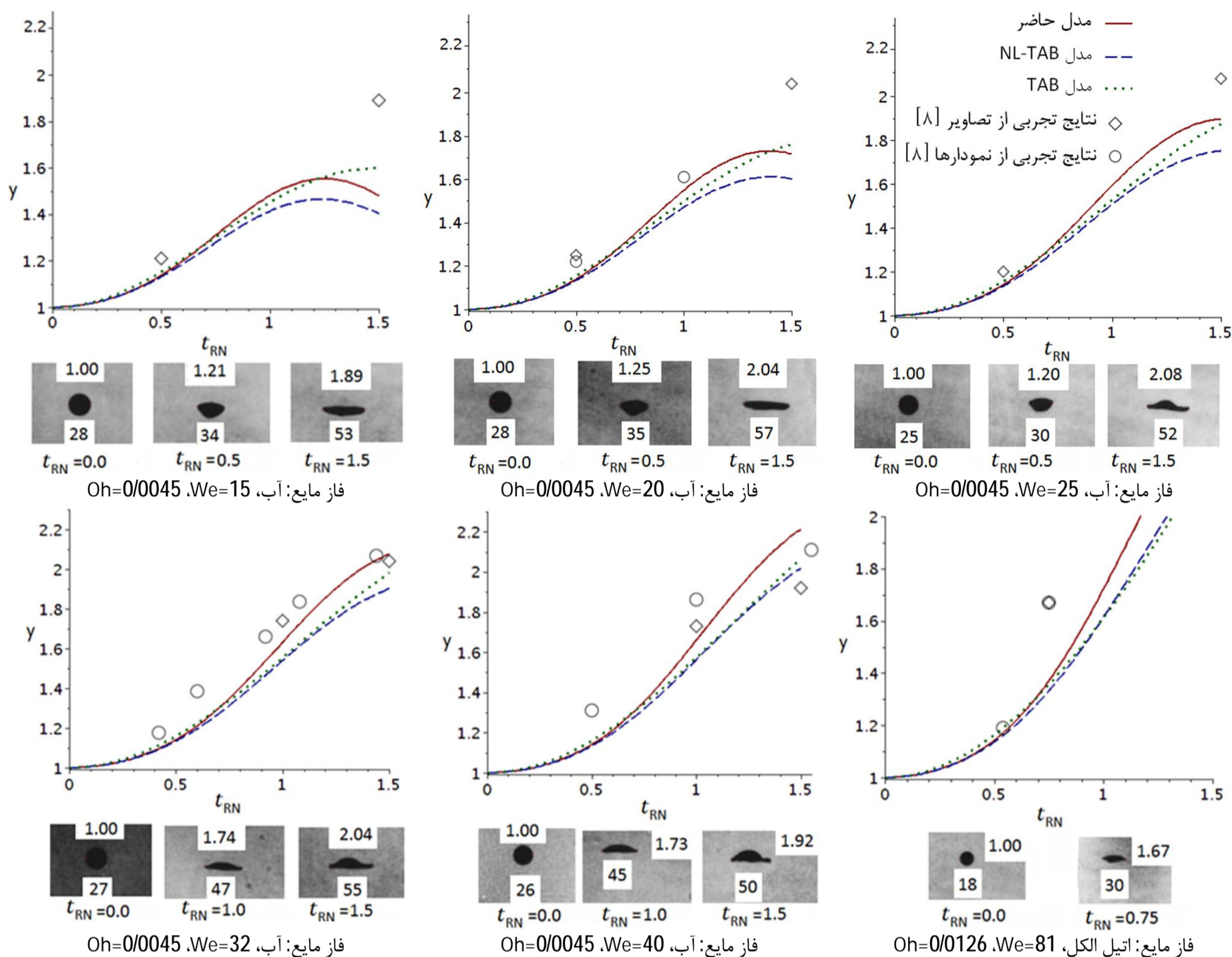
#### 3-1- حالت دائم (قطره معلق در تونل باد)

نتایج تجربی آزمایشات تونل باد برای قطره معلق در حالت دائم در [25] ارائه شده است و می‌تواند برای سنجش میزان تغییر شکل قطره در اثر نیروی آیرودینامیکی استفاده شود. در این حالت، نیروی درگ وارد بر قطره با وزن آن برابر است. با بکارگیری معادله بالانس نیرو برای قطره و نیز معادله مدل تغییر شکل می‌توان نسبت کشیدگی قطره  $1$ ،  $E = b/a = \gamma^{-3}$ ، را برحسب قطر اولیه قطره محاسبه کرد. محاسبات برای مدل‌های مختلف انجام شده و در کنار نتایج تجربی در شکل 10 نشان داده شده است. ضریب درگ،  $C_D$ ، در محاسبات بر مبنای مدل لیو و همکاران [24] لحاظ شده است.

با توجه به شکل 10 مشخص می‌شود که مدل حاضر مقادیری بین مدل‌های TAB و NL-TAB را برای میزان کشیدگی قطره ارائه می‌دهد. بر مبنای پیش‌بینی مدل‌ها برای قطر کمتر از 2/5 میلی‌متر، که معادل اعداد وبر کمتر از 2/15، نسبت کشیدگی به یک نزدیکتر است و لذا قطره کروی‌تر در مقایسه با اندازه‌گیری تجربی پیش‌بینی می‌شود. با افزایش قطر قطره، پیش‌بینی مدل حاضر تطابق مناسبی با داده‌های تجربی دارد.

در مورد مدل NL-TAB اگر ضریب  $K_2$  به طور ثابت برابر با 0/7 در نظر گرفته شود (که در مرجع مدل نیز از این روش استفاده می‌شود) نتایج این مدل نیز تقریباً بر مدل TAB منطبق می‌شود. چنین روشی در واقع کالیبره کردن مدل نسبت به نتایج تجربی است. اما در مدل حاضر سعی شده یک روند صرفاً تئوریک و بدون استفاده از ضرایب مدل برای بدست آوردن معادله حاکم بر ارتعاش قطره استفاده شود.





شکل 11 نتایج حاصل از مدل‌های مختلف برای پیش‌بینی تغییر شکل قطره و نتایج تجربی [8] در آزمایش لوله شوک (اعداد نوشته شده در پایین تصاویر تعداد یاخته‌های گرافیکی است که در عرض قطره شمرده شده و اعداد بالای تصاویر نسبت آنها به حالت اولیه قطره است.)

از نتایج تجربی پیش‌بینی می‌کنند. در بازه زمانی میانی در نمودار  $We = 65$  به نظر می‌رسد مدل حاضر تخمین بهتری ارائه می‌دهد. اما در بازه زمانی پایانی که مصادف با شروع فرآیند شکست است اختلاف زیادی بین نتایج تجربی و مدل‌ها به ویژه برای نمودار  $We = 32$  مشاهده می‌شود. علت کاهش شتاب قطره در نتایج تجربی می‌تواند مربوط به کاهش سطح پیشانی مؤثر قطره باشد. کاهش سطح پیشانی خود ناشی از ایجاد حفره میانی در قطره است و این فرآیندها در مدل‌های بر مبنای شکل بیضی‌گون قطره در نظر گرفته نمی‌شود. به این ترتیب این اختلاف بین نتایج تجربی و مدل‌ها ایجاد می‌شود.

### 3-3- رژیم ارتعاشی (عدد وبر زیر بحرانی)

نوسان جانبی قطره برحسب زمان نرمال شده  $t_{RN}$  در شکل 13 رسم شده است. بر خلاف محاسبات قبلی، این بار کاهش سرعت دمش گاز در نظر گرفته نمی‌شود. با توجه به شکل معلوم می‌شود که دامنه نوسان قطره در مدل حاضر، کوچکتر از مدل TAB است. علت این موضوع به این صورت قابل توجیه است که در محاسبات، عدد رینولدز در حدود 1000 است و نیروی آیرودینامیکی در نظر گرفته شده در معادله ارتعاشی تقریباً هشتاد درصد مدل TAB است (شکل 9). به این ترتیب دامنه کوچکتری نسبت به مدل TAB محاسبه می‌شود. اگر چه مدل TAB به طور گسترده‌ای به عنوان یک مدل

معادله (17)، و معادله ارتعاشی مدل TAB، معادله (20)، حل می‌شود؛ این ضریب برای مدل حاضر برابر  $1 + 2\gamma^{-6}$  است و هنگامی که تغییر شکل افزایش می‌یابد به سرعت به مقدار 1 میل می‌کند. اما برای مدل TAB ضریب  $\gamma$  برابر با مقدار ثابت 3 است. نتیجه آنکه فرکانس ارتعاشی سیستم در مدل حاضر بیشتر از مدل TAB می‌باشد و لذا تغییر شکل قطره زودتر به مقدار حداکثر خود می‌رسد. به این ترتیب برای آزمایش لوله شوک تغییر شکل بیشتری توسط مدل حاضر پیش‌بینی می‌شود. همانطور که اشاره شد مدل حاضر در مسائل غیر دائم تغییر شکل قطره را اندکی کمتر از نتایج تجربی در نظر می‌گیرد. یکی از دلایلی که می‌توان برای این موضوع متصور شد دست پایین گرفتن مقدار نیروی درگ در مسائل غیر دائم است. در واقع سرعت دمش و نیز سطح قطره نسبت به چهارچوب قطره، هر دو متغیر هستند که موجب ایجاد لایه مرزی غیر دائم و نیروی باست شده و لذا فرض دائم بودن جریان پیرامون قطره ممکن است موجب ایجاد خطایی از مرتبه 10% در تخمین نیروی درگ شود. نمودار تغییرات سرعت قطره،  $V_d$ ، نسبت به سرعت نسبی دمش گاز،  $U_\infty - V_d$ ، در شکل 12 برای مدل‌های مختلف و نتایج تجربی نشان داده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که تبادل مومنتوم در مدل حاضر نسبت به مدل‌های دیگر بیشتر است که علت آن مربوط به تغییر شکل بیشتر قطره و در نتیجه افزایش سطح پیشانی و نیز نیروی درگ، در مدل حاضر است. در لحظات اولیه هر سه مدل میزان سرعت قطره را کمتر

کالیبره شده در ادبیات فن پذیرفته شده است، باید اشاره کرد که این مدل برای گرفتن نتایج بهتر در شرایط عملی افشانه‌های کم فشار کالیبره شده که در آن قطرات عدد رینولدز از مرتبه عدد 100 دارند. در این حالت، تفاوت چندانی بین نیروی آیرودینامیکی پیش‌بینی شده توسط مدل TAB و مدل حاضر وجود ندارد. فرکانس نوسان پیش‌بینی شده در مدل‌های غیر خطی از جمله مدل حاضر، بیشتر از TAB است. در واقع، در هر شش تا هفت چرخه، نمودار TAB یک سیکل عقب می‌افتد.

دلیل این مسئله مربوط به ضریب  $\tau$  در معادله ارتعاشی (رابطه 17) است که در مدل حاضر با افزایش میزان تغییر شکل قطره کاهش می‌یابد و به سمت عدد یک میل می‌کند در حالی که این ضریب در مدل TAB ثابت و برابر سه است. با توجه به اینکه این ضریب نقش توده جرمی را در معادله ارتعاشی می‌بایست در مدل حاضر بالاتر باشد که با آنچه در شکل مشاهده می‌شود مطابقت دارد. نمودارهای شکل 13، نرخ کاهش دامنه را در مدل حاضر بیش‌تر از مدل TAB نشان می‌دهد و بدان معناست که انرژی مکانیکی زودتر مستهلک می‌شود.

#### 4- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل تغییر شکل قطره جدیدی بر مبنای معادله انرژی ارائه شد و نحوه محاسبه ترم نیروی آیرودینامیکی در معادله ارتعاشی بهبود بخشیده شد. فرضیات مورد استفاده در مدلسازی از طریق حل عددی VOF صحت سنجی و نتایج عددی بدست آمده از مدل حاضر با مدل‌های دیگر و نتایج تجربی مقایسه شد. خلاصه نتایج حاصل از این تحقیق عبارتند از:

1- مدل حاضر علی‌رغم عدم استفاده از ثوابت کالیبراسیون نتایج قابل قبول و در برخی موارد بهتر از سایر مدل‌ها مطرح همچون مدل TAB ارائه می‌دهد. به ویژه در رژیم کیسه‌ای ساقه‌دار، تغییر شکل پیش‌بینی شده توسط مدل حاضر به نتایج تجربی مشاهده شده در لوله شوک نزدیک‌تر است.

2- مدل پیشنهادی در مسئله قطره معلق که به منظور پیش‌بینی تغییر شکل در حالت دائم مورد مطالعه قرار گرفت، نتایجی بین مدل TAB و NLTAB بدست می‌دهد که در تغییر شکل‌های بزرگ‌تر با نتایج تجربی بهتر تطابق دارد. به این ترتیب مدل پیشنهادی برای تغییر شکل‌های بزرگ‌تر مناسب‌تر است.

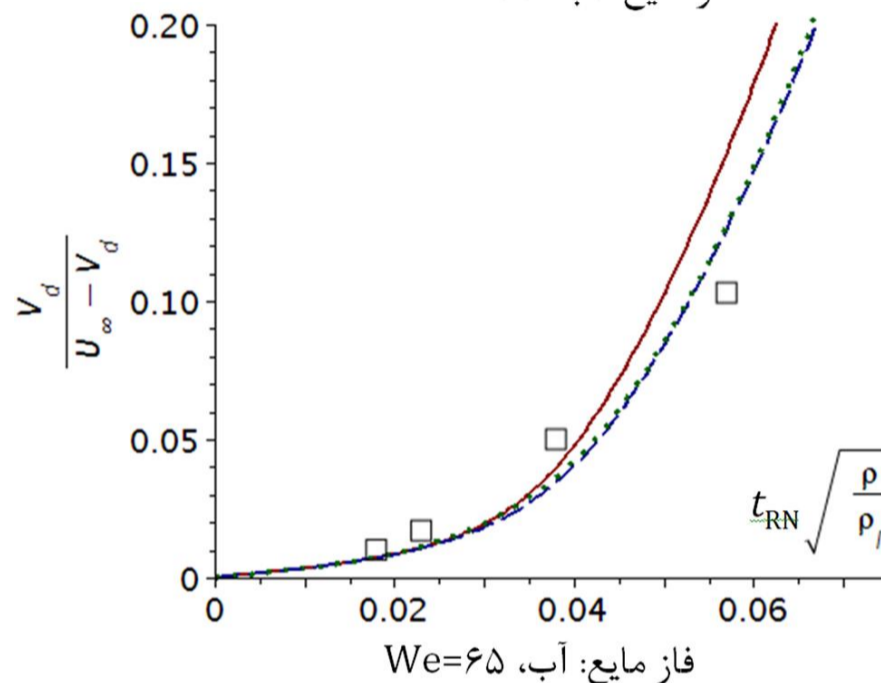
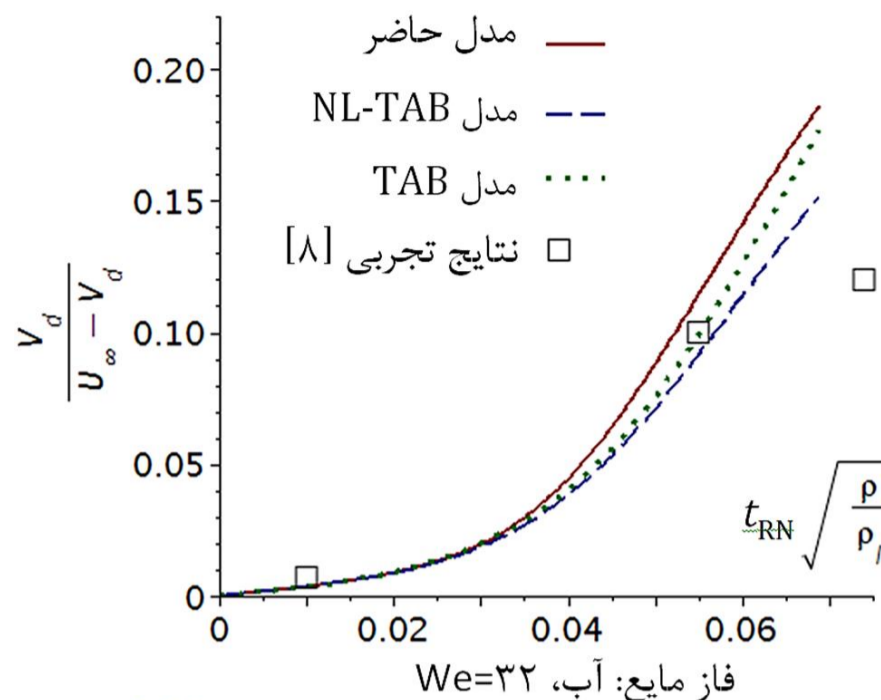
3- در اعداد زیر بحرانی و بر، رفتار نوسانی قطره بر اساس مدل حاضر تفاوت‌های اندکی با مدل TAB دارد. در مدل پیشنهادی دامنه نوسان تقریباً 20٪ کوچکتر و فرکانس ارتعاشی کمی بالاتر است. همچنین میرایی دامنه بیشتری نسبت به مدل TAB مشاهده می‌شود.

4- در این تحقیق نشان داده شد که معادله خطی شده مدل حاضر در عدد رینولدز 100 تقریباً بر مدل TAB منطبق می‌شود. به این ترتیب ضرایب تجربی در مدل TAB پشتوانه‌ای تئوریک می‌یابند.

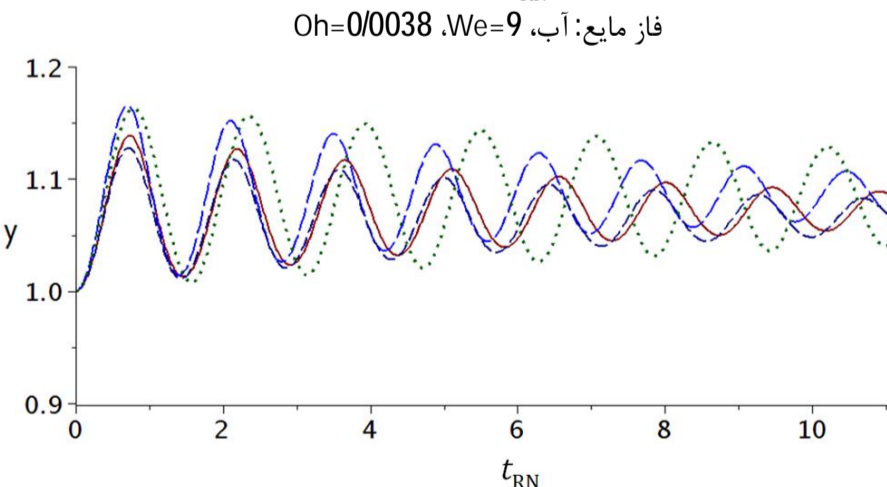
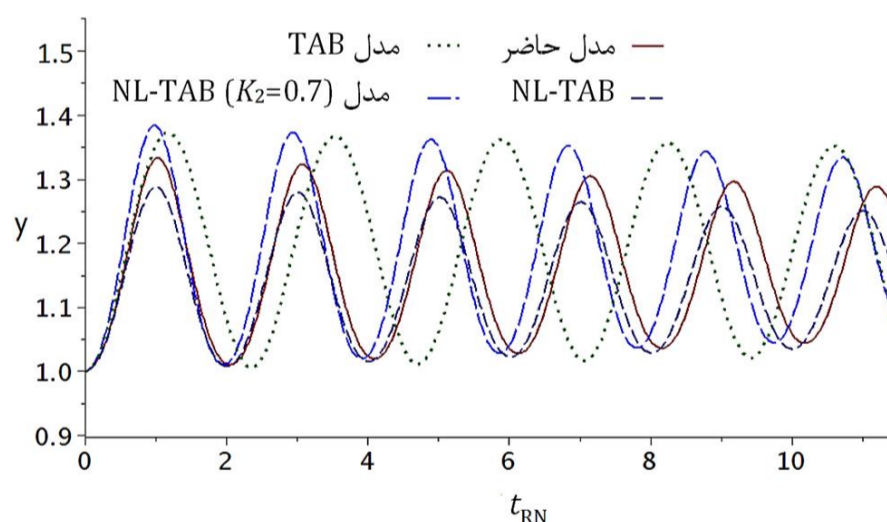
5- بر خلاف مدل‌های پیشین اثر عدد رینولدز در معادله ارتعاشی مدل حاضر لحاظ شد.

#### 5- فهرست علائم

$a, b$	اقطار کوچک و بزرگ بیضی‌گون (m)
$a_p$	پارامتر توزیع فشار در معادله (11)
$C_D, C_p$	ضریب درگ و ضریب فشار موضعی
$D$	قطر اولیه قطره (m)



شکل 12 تغییرات سرعت نسبی قطره در مدل‌های مختلف و نتایج تجربی برای آزمایش لوله شوک در اعداد ویر متفاوت



شکل 13 نوسان جانبی قطره براساس پیش‌بینی مدل‌های مختلف

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_l \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \int_{-b}^b \int_0^{a\sqrt{1-(z/b)^2}} (r^2 + 4z^2) 2\pi r dr dz$$

$$= \frac{4\pi}{15} \rho_l R^5 (1 + 2y^{-6}) \dot{y}^2 \quad (22)$$

با گرفتن مشتق زمانی از معادله (22)، رابطه (23) حاصل می‌شود:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{8\pi}{15} \rho_l R^5 [(1 + 2y^{-6}) \ddot{y} - 6y^{-7} \dot{y}^2] \dot{y} \quad (23)$$

رابطه کلی محاسبه نرخ استهلاک انرژی به صورت رابطه (24) است:

$$\Phi = 2\mu_l \int_{\forall} \underline{e} : \underline{e} dV, \quad \underline{e} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \quad (24)$$

با گرفتن گرادیان از میدان سرعت (در دستگاه مختصات استوانه‌ای)، و محاسبه عبارات موجود در معادله (24)، نرخ استهلاک به صورت رابطه (25) محاسبه می‌شود:

$$\Phi = 2\mu_l \int_{\forall} 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 dV = 12\mu_l \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 V = 16\pi\mu_l R^3 \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2 \quad (25)$$

## 6-2- محاسبه پارامتر توزیع فشار، $a_p$ ، بر حسب ضریب درگ، $C_D$

نیروی درگ در اعداد رینولدز بالا، عمدتاً از توزیع فشار نامتعادل حول قطره نشأت می‌شود. از آنجا که تحلیل ما در مطالعه حاضر به  $Re \geq 100$  محدود می‌شود، سهم تنش برشی در ضریب درگ نادیده گرفته می‌شود. بر این اساس، ضریب درگ را می‌توان به ضریب فشار موضعی به صورت رابطه (26) مربوط ساخت:

$$C_D = \frac{1}{A_p} \int_A -\hat{e}_z \cdot \hat{n} C_p dA = \frac{1}{\pi a^2} \int_{z=-b}^b -\hat{e}_z \cdot \hat{n} C_p 2\pi r ds \quad (26)$$

که در آن  $ds$  المان نصف النهاری  $(ds^2 = dr^2 + dz^2)$ ، و  $A_p$  سطح پیشانی قطره است.  $C_p$ ، از پروفیل پیشنهادی رابطه (11) جای گذاری می‌شود.

برای محاسبه بردار نرمال به سطح بیضی گون می‌بایست گردیان معادله سطح بیضی گون،  $G = r^2/a^2 + z^2/b^2 - 1 = 0$ ، محاسبه و بر اندازه آن تقسیم شود. بر این اساس رابطه (27) بدست می‌آید:

$$\hat{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{\frac{2r}{a^2} \hat{e}_r + \frac{2z}{b^2} \hat{e}_z}{\sqrt{\left(\frac{2r}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{b^2}\right)^2}} \quad (27)$$

تعریف پارامترهای بدون بعد در رابطه (28)، محاسبات را ساده‌تر می‌کند:

$$\zeta \triangleq \frac{z}{b} \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (28)$$

برای بردار نرمال و مشتق المان نصف النهاری، رابطه (29) بدست می‌آید:

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_r + y^3 \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \hat{e}_z}{\sqrt{1 + y^6 \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}}}, \quad \frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + y^6 \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}} \quad (29)$$

رابطه (26) به کمک عبارات محاسبه شده به صورت رابطه (30) بازنویسی می‌شود:

$$C_D = \int_{-1}^1 \hat{e}_z \cdot \underbrace{\left(-\frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{y^3} \hat{e}_r - 2\zeta \hat{e}_z\right)}_{\triangleq \vec{\ell}} C_p d\zeta \quad (30)$$

که در آن بردار  $\vec{\ell}$  برای خلاصه نویسی در بخش بعدی تعریف شده است.

با توجه به معادله (11)،  $C_p$  به صورت تابعی دو قطعه‌ای تعریف شده است. لذا انتگرال معادله (30) باید به دو بخش جدا شود. عبارات  $\sin \alpha$  در رابطه (11) می‌تواند برحسب پارامتر تغییر شکل،  $y$ ، و پارامتر نقطه جدایی،  $\zeta_j$ ، به صورت رابطه (31) نوشته شود:

$\underline{e}$  تانسور نرخ کرنش ( $s^{-1}$ )

$E$  نسبت کشیدگی قطره که برابر است با  $b/a$

$E_k, E_p$  انرژی جنبشی و پتانسیل در مرجع قطره ( $kgm^2s^{-2}$ )

$k_2$  ضریب مد اساسی نوسان قطره در بسط توزیع فشار

Ma عدد ماخ

$\hat{n}$  بردار یکه نرمال به سطح

Oh عدد اونسورج

$P$  فشار ( $kgm^{-1}s^{-2}$ )

$R$  شعاع اولیه قطره (m)

$S$  مساحت سطح قطره ( $m^2$ )

$t$  زمان (s)

$t_{RN}$  زمان بدون بعد رنجر و نیکولز

$U$  سرعت دمش گاز نسبت به قطره ( $ms^{-1}$ )

$v$  میدان سرعت ( $ms^{-1}$ )

We عدد وبر

$W_p^{ex}$  نرخ کار آیرودینامیکی در مرجع قطره ( $kgm^{-1}s^{-2}$ )

$y$  پارامتر تغییر شکل قطره که برابر است با  $a/R$

## علائم یونانی

$\alpha$  نسبت حجمی مایع، زاویه بین  $\hat{n}$  و  $-\hat{e}_z$

$\delta_s$  تابع دیراک سطح

$\Phi$  نرخ استهلاک انرژی مکانیکی ( $kgm^2s^{-3}$ )

$\kappa$  انحنای سطح ( $m^{-1}$ )

$\rho$  چگالی ( $kgm^{-3}$ )

$\sigma$  کشش سطحی ( $kgs^{-2}$ )

$\mu$  لزجت دینامیکی ( $kgm^{-1}s^{-1}$ )

$\zeta_s$  طول بدون بعد نقطه جدایی جریان

## بالانویس‌ها

sphere حالت کروی

## زیرنویس‌ها

0 حالت کروی یا اولیه

$d$  مربوط به قطره

$g$  گاز

$l$  مایع

$r$  مؤلفه شعاعی

$s$  نقطه جدایی جریان

spheroid حالت بیضی گون

$z$  مؤلفه در راستای جریان گاز

## 6- پیوست

### 6-1- استخراج ترم‌های انرژی مکانیکی و نرخ استهلاک در معادله ارتعاشی

معادله اساسی انرژی مکانیکی قطره به صورت رابطه (21) است:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_m |\vec{v}|^2 dm \quad (21)$$

انتگرال گیری روی جرم قطره می‌تواند به انتگرال گیری روی حجم تبدیل شود و به کمک میدان سرعت، معادله (6)، می‌توان رابطه (22) را نوشت:

## 7- مراجع

- [1] T. Kékesi, G. Amberg, L. Prah Wittberg, Drop deformation and breakup, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 66, pp. 1-10, 2014.
- [2] M. Jalaal, K. Mehravaran, Fragmentation of falling liquid droplets in bag breakup mode, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 47, pp. 115-132, 2012.
- [3] E. G. Shirani, F., A. Ahmadi, Modeling and Simulation of Interfacial Turbulent Flows, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 43-49, 2011.
- [4] M. h. Rahimian and M. Farshchi, Dynamic and Deformation of a liquid Droplet in a Convective Two-Dimensional Laminar Flow, *Journal of Advanced Materials in Engineering (Esteghlal)*, Vol. 16, No. 2, pp. 1-15, 1998. (In Persian)
- [5] M. Farshchi, M. H. Rahimian, Unsteady Deformation and Internal Circulation of a Liquid Drop in a Zero Gravity Uniform Flow, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, No. 3, pp. 665-672, 1999.
- [6] M. R. Ansari, A. Daramizadeh, Numerical simulation of droplet breakup by shock wave collision, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 41-49, 2012. (In Persian)
- [7] M. Pilch, C. A. Erdman, Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 13, No. 6, pp. 741-757, 1987.
- [8] Z. Dai, G. M. Faeth, Temporal properties of secondary drop breakup in the multimode breakup regime, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 27, No. 2, pp. 217-236, 2001.
- [9] C. Chryssakis, D. N. Assanis, A unified fuel spray breakup model for internal combustion engine applications, *Atomization and Sprays*, Vol. 18, No. 5, pp. 375-426, 2008.
- [10] P. J. O'Rourke, A. A. Amsden, The TAB method for numerical calculation of spray droplet breakup, *SAE (Society of Automotive Engineers) Technical Paper 872089*, 1987.
- [11] F. X. Tanner, Liquid jet atomization and droplet breakup modeling of non-evaporating diesel fuel sprays, *SAE (Society of Automotive Engineers) Technical Paper 970050*, 1997.
- [12] H. P. Trinh, C. P. Chen, Development of Liquid Jet Atomization and Breakup Models Including Turbulence Effects, *Atomization and Sprays*, Vol. 16, No. 8, pp. 907-932, 2006.
- [13] M. Marek, The double-mass model of drop deformation and secondary breakup, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 16-17, pp. 7919-7939, 2013.
- [14] A. Omidvar, H. Khaleghi, An Analytical Approach for Calculation of Critical Weber Number of Droplet Breakup in Turbulent Gaseous Flows, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 37, No. 8, pp. 2311-2321, 2012.
- [15] R. Schmehl, Advanced modeling of droplet deformation and breakup for CFD analysis of mixture preparation, in *18th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems (ILASS-Europe)*, Zaragoza, Spain, 2002.
- [16] V. Kulkarni, P. E. Sojka, Bag breakup of low viscosity drops in the presence of a continuous air jet, *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 26, No. 7, pp. 072103, 2014.
- [17] A. B. Sichani, M. D. Emami, A droplet deformation and breakup model based on virtual work principle, *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 27, No. 3, pp. 032103, 2015.
- [18] M. W. Lee, J. J. Park, M. M. Farid, S. S. Yoon, Comparison and correction of the drop breakup models for stochastic dilute spray flow, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 9, pp. 4512-4520, 2012.
- [19] A. Wierzba, Deformation and breakup of liquid drops in a gas stream at nearly critical Weber numbers, *Experiments in Fluids*, Vol. 9, No. 1, pp. 59-64, 1990.
- [20] S. Khosla, C. E. Smith, R. P. Throckmorton, Detailed understanding of drop atomization by gas crossflow using the volume of fluid method, in *19th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems (ILASS-Americas)*, Toronto, Canada, 2006.
- [21] L. P. Hsiang, G. M. Faeth, Near-limit drop deformation and secondary breakup, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 18, No. 5, pp. 635-652, 1992.
- [22] G. M. Faeth, Mixing, transport and combustion in sprays, *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 13, No. 4, pp. 293-345, 1987.
- [23] R. Clift, J. R. Grace, M. E. Weber, *Bubbles, drops and particles* New York: Academic Press, 1978.
- [24] A. B. Liu, D. Mather, R. D. Reitz, Modeling the Effects of Drop Drag and Breakup on Fuel Sprays, *SAE Technical Paper No. 930072*, 1993.
- [25] H. R. Pruppacher, K. V. Beard, A wind tunnel investigation of the internal circulation and shape of water drops falling at terminal velocity in air, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 96, No. 408, pp. 247-256, 1970.
- [26] J. A. Nicholls, A. A. Ranger, Aerodynamic shattering of liquid drops, *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 285-290, 1969.

$$\sin \alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^6 \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}}} \quad (31)$$

به این ترتیب انتگرال موجود در رابطه (30) به صورت (32) در می‌آید:

$$C_D = \int_{-1}^{\zeta_s} -2\zeta \left(1 - \frac{a_p}{1 + y^6 \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}}\right) d\zeta + \int_{\zeta_s}^1 -2\zeta \left(1 - \frac{a_p}{1 + y^6 \frac{\zeta_s^2}{1-\zeta_s^2}}\right) d\zeta \quad (32)$$

با محاسبه انتگرال‌های معادله (32)، رابطه بین  $C_D$  و  $a_p$  در رابطه (33) بدست می‌آید:

$$a_p = \frac{(y^6 - 1)^2}{y^6 \left( \frac{(y^6 - 1)(1 - \zeta_s^2)}{1 + (y^6 - 1)\zeta_s^2} + \ln\left(\frac{1 - \zeta_s^2}{y^6} + \zeta_s^2\right) \right)} C_D \quad (33)$$

پارامتر  $\zeta_s$  برحسب  $\zeta_{s,0}$  قابل محاسبه است. زیرا، شرط اول برای پارامترهای توزیع فشار (بخش 2-2-3) عنوان می‌کند که  $\alpha_s = \alpha_{s,0}$ . پس  $\sin \alpha_s = \sin \alpha_{s,0}$  و با توجه به معادله (31)، رابطه (34) بدست می‌آید:

$$\zeta_s = \frac{\zeta_{s,0}}{\sqrt{\zeta_{s,0}^2 + (1 - \zeta_{s,0}^2)y^6}} \quad (34)$$

## 3-6- محاسبه کار نیروی آیرودینامیکی

روند کار در این بخش نیز مشابه بخش 2-6 است. محاسبات با بسط معادله (14) شروع می‌شود و رابطه (35) بدست می‌آید:

$$\frac{\dot{W}_p^{\text{ex}}}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)(\pi a^2)} = \frac{\int_{z=-b}^b -\vec{v} \cdot \hat{n} p 2\pi r ds}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)(\pi a^2)} = \int_{-1}^1 -\vec{v} \cdot \hat{n} C_p \frac{2r b ds}{a a dz} d\zeta \quad (35)$$

با ترکیب معادله (31) و (35) و نیز استفاده از  $\vec{\ell}$  (تعریف شده معادله (30))، رابطه (36) را خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{W}_p^{\text{ex}}}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)(\pi a^2)} = \int_{-1}^1 \vec{v} \cdot \vec{\ell} C_p d\zeta \quad (36)$$

با بسط انتگرال رابطه (36) و محاسبه انتگرال‌ها، عبارت نهایی ارائه شده در رابطه (37) بدست می‌آید:

$$\frac{\dot{W}_p^{\text{ex}}}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} = \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \frac{3}{2} \left( \frac{\gamma}{(y^6 - 1)^2} - \frac{\zeta_s(1 - \zeta_s^2)^2}{1 + (y^6 - 1)\zeta_s^2} \right) a_p \gamma = (\zeta_s^3 - 4\zeta_s - 3)y^6 + \zeta_s(1 - \zeta_s^2) + y^6(y^6 + 2) \left( \frac{\tan^{-1}\sqrt{y^6 - 1} + \tan^{-1}(\zeta_s\sqrt{y^6 - 1})}{\sqrt{y^6 - 1}} \right) \quad (37)$$

که در آن  $a_p$  توسط معادله (33) داده می‌شود.

عبارت ریاضی معادله (37) برای محاسبه کار نیروی آیرودینامیکی بسیار طولانی است و برای مقاصد مدلسازی مناسب نیست. به کمک روش‌های برازش منحنی معادله ساده‌تری قابل استخراج است و می‌تواند به عنوان تقریب برای تخمین کار نیروی آیرودینامیکی استفاده شود. معادلات (15) و (16) به همین منظور مورد استفاده قرار می‌گیرند.