



بهینه‌سازی پوسته هدفمند تحت بارهای هیدرومکانیکی و بار متحرک شعاعی بر اساس الگوریتم رقابت استعماری

فرید وکیلی تهامی^{1*}، محمد رضا خوشروان²، آرش محمد علیزاده فرد³

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 5166614766، f_vakili@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 خرداد 1395

پذیرش: 23 مرداد 1395

ارائه در سایت: 03 مهر 1395

کلید واژگان:

الگوریتم رقابت استعماری

پوسته استوانه‌ای

ماده هدفمند

بار متحرک

روش نقاط کنترلی

چکیده

هدف اصلی این پژوهش استفاده از الگوریتم رقابت استعماری برای تعیین حالت بهینه پوسته استوانه‌ای هدفمند دارای لایه پیزوالکتریک می‌باشد. پارامترهای طراحی این بهینه‌سازی شامل درصد حجمی مواد در نظر گرفته شده‌اند. پوسته مورد بحث دربردارنده سیال داخلی بوده و در عین حال تحت بار متحرک شعاعی خارجی قرار دارد. به منظور فرمول‌بندی مسئله، معادلات حاصل از تئوری مرتبه اول برشی و ماکسول ترکیب شده تا روابط حاکم استخراج و با حل آن‌ها با استفاده از روش تحلیلی-عددی مقادیر جابه‌جایی‌های دینامیکی تعیین شوند. در ادامه با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی و تنش-کرنش، توزیع تنش دینامیکی در پوسته به دست آمده است. تحلیل دینامیکی به علت وجود بار متحرک ضروری است چراکه پاسخ دینامیکی و ناپایا در مقایسه با مقادیر استاتیکی قابل توجه‌اند. به منظور اعتبارسنجی تحلیل دینامیکی، از نتایج تجربی و تحلیلی موجود در ادبیات فن استفاده شده است. یک برنامه‌ی کامپیوتری تدوین شده است که روش تحلیل دینامیکی را با الگوریتم بهینه‌سازی رقابت استعماری مرتبط ساخته تا مقادیر بهینه‌ی طراحی را ارائه کند. مزیت عمده‌ی روش پیشنهادی، استفاده از نقاط کنترلی در راستای ضخامت پوسته به جای توابع پیش‌فرض برای درصد حجمی مواد که محدودیت‌هایی را از نظر بهینه‌سازی اعمال می‌کنند می‌باشد. در بین این نقاط، درصد حجمی مواد با استفاده از روش میان‌یابی با توابع هرمیت پیش‌بینی شده است. بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری انجام گرفته است. نتایج بهینه‌سازی کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد و مزیت این روش انعطاف‌پذیری و همگرایی آسان‌تر آن در تعیین ساختار بهینه است.

Optimization of an FG cylindrical shell under hydro-mechanic and moving radial load employing imperialist competitive algorithm

Farid Vakili-Tahami*, Mohammad Reza Khoshrovan, Arash Mohammad Alizadeh Fard

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 5166614766, Tabriz, Iran, f_vakili@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 June 2016
Accepted 13 August 2016
Available Online 24 September 2016

Keywords:

Imperialist Competitive Algorithm
Cylindrical Shell
Functionally Graded Materials
Moving Load
Control Point Method

ABSTRACT

The main objective of this research is to employ Imperialist Competitive Algorithm (ICA) to determine the optimum condition for an FG cylindrical shell with outer piezoelectric layer. Design parameter in this problem is volume fraction of the material. The shell is subjected to outer radial moving load and internal pressurized fluid. To formulate the problem, First Order Shear Deformation theory and Maxwell's equation have been combined to develop governing equations and by solving these equations using analytical-numerical methods, the dynamic deformation has been obtained. Then, by adopting displacement-strain and stress-strain relationships, distribution of the dynamic stresses within the shell has been calculated. Due to the moving of the external load, the use of dynamic analysis is necessary so that the dynamic and transient response is significant compared with the static one. To validate the dynamic analysis the results are compared with those provided in the literature based on other solution methods or experimental measurements. Finally, a computer code has been developed to link the dynamic solution method with the optimization algorithm based on ICA to obtain the optimum values of the design parameters. The major advantage of this method is the use of control points along the thickness to define volume fraction rather than using predefined functions which usually impose unnecessary restrictions. The volume fraction between these control points is obtained by Hermite interpolation method. The results show the efficiency of the method and its major strength which is the flexibility and higher convergence rate to determine the optimum configuration.

1-مقدمه

توانایی ایجاد ویژگی‌های مطلوب در قطعات هدفمند با تغییر درصد حجمی

مواد باعث شده است که بتوان با استفاده از این مواد، قطعاتی کوچکتر،

سبکتر و چند منظوره تولید کرد. نخستین بار این مواد در ژاپن و برای تولید

مواد هدفمند، کامپوزیت‌های غیرهمگن پیشرفته‌ای هستند که ساختار آن‌ها

به صورت میکروسکوپی تغییر می‌کند تا خصوصیات مطلوب ماده را ارائه کنند.

Please cite this article using:

F. Vakili-Tahami, M. R. Khoshrovan, A. M. Alizadeh Fard, Optimization of an FG cylindrical shell under hydro-mechanic and moving radial load employing imperialist competitive algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 318-328, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

عایق‌های حرارتی در تجهیزات فضایی [1] مطرح شدند. امروزه، کاربرد این مواد رو به گسترش است؛ سلول‌های با لایه‌ی نازک فتوولتائیک در صنایع اپتیک، لنزها، مولدهای لیزر [2]، سپرها و عایق‌های حرارتی و مواردی از این دست جزء زمینه‌های بالقوه کاربرد مواد هدفمند هستند. همچنین این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن راکتورها و توربین‌ها [3] نیز کاربرد زیادی دارند. با ایجاد سازه‌های هوشمند، دستیابی به خواص مطلوب در کنار افزایش کارایی با حذف یا کاهش اثرات ناخواسته میسر شده و این امر موجب افزایش تمایل به مطالعه‌ی اثرات استفاده از مواد هوشمند و لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان سنسور یا عملگر شده است. این مواد ممکن است کاربردهای متنوعی همچون پایش سلامت سازه، سامانه‌های کنترل تنش‌های حرارتی و مکانیکی و کنترل ارتعاشات فعال را به‌منظور افزایش عملکرد و طول عمر آن‌ها داشته باشند. غالباً سازه‌های دارای این مواد در برابر بارهای متحرک قرار دارند که به‌علت تغییر نیرو در زمان و مکان، خیز و تنش‌های دینامیکی نیز ایجاد می‌کنند. بدین جهت بررسی رفتار سازه‌های هوشمند در معرض این‌گونه بارها اهمیت دوچندانی دارد [4-8]؛ همچنین باید توجه داشت که در بیشتر کاربری‌ها، پوسته‌ها تحت فشار سیال داخلی قرار دارند. به‌سبب می‌توان دریافت که استفاده از ساختارهای هدفمند نیازمند طراحی بهینه است چرا که در غیر این صورت ممکن است نقض غرض شود. تمایل به دستیابی به طرح‌های بهینه موجب تشویق محققان به استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی در طراحی این سازه‌ها شده است.

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی بر روی مواد هدفمند انجام پذیرفته است. از جمله در سال 2010 میلادی علی‌بیگلر و چن [9] به تحلیل الاستیک یک پوسته استوانه‌ای هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک پرداخته‌اند. آنها با استفاده از بسط سری‌های فوریه در راستای طولی و محیطی پاسخ معادله حرکت را به‌دست آورده و تاثیر توزیع گرادین مواد، اعمال ولتاژ و نسبت شعاع بر ضخامت پوسته را روی رفتار استاتیکی پوسته هدفمند مطالعه نموده‌اند. در همین سال شنگ و وانگ [8] رفتار پوسته استوانه‌ای هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان سنسور و عملگر را تحت شوک حرارتی و بار متحرک بررسی نموده‌اند. آنها بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به تحلیل پاسخ دینامیکی سازه پرداخته‌اند. در سال 2011 میلادی اکبری الشتری و خرسند [10] به حل سه‌بعدی حرارتی-مکانیکی یک پوسته استوانه‌ای هدفمند با لایه پیزوالکتریک و با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی پرداخته‌اند. آنها با فرض یک توزیع توانی برای گرادین مواد در راستای ضخامت، نتایج عددی را با شرایط مرزی متفاوت به‌دست آورده و تاثیر ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک و تغییر توزیع گرادین مواد و نسبت ضخامت به شعاع پوسته را روی نتایج نشان داده‌اند. در سال 2014 میلادی جعفری و همکارانش [11] ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای هدفمند با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها بر اساس تئوری غیرخطی دائل و به روش شبه‌تحلیلی پاسخ دینامیکی سیستم را به‌دست آورده‌اند. در ادامه تاثیر نیروهای القایی و ولتاژ اعمالی بر روی رفتار ارتعاشی سیلندر استوانه‌ای هدفمند بررسی شده است.

با این وجود، مطالعات کمتری درمورد طراحی بهینه توزیع مواد هدفمند در سازه‌های هوشمند و سازه‌های دارای لایه‌های مختلف پیزوالکتریک انجام گرفته است. از میان تحقیقات انجام شده در زمینه بهینه‌سازی این سازه‌ها، بیشتر پژوهش‌ها سعی در کاهش تنش‌های حرارتی داشته و برخی دیگر در زمینه کمینه‌سازی تنش‌های مکانیکی انجام گرفته‌اند. در سال 2002 میلادی، چو و ها [12] به بهینه‌سازی کسر حجمی مواد هدفمند در پوشش حرارتی

$\text{Ni-Al}_2\text{O}_3$ به‌منظور کمینه‌سازی تنش‌های حرارتی حالت پایا با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی تابع جریمه داخلی و روش انتخاب طلایی پرداخته‌اند. در سال 2005 میلادی کیان و باترا [13] فرکانس‌های طبیعی بهینه در یک صفحه هدفمند با گرادین دوسویه را تعیین نموده‌اند. ایشان با استفاده از الگوریتم ژنتیک به طراحی بهینه توزیع گرادین مواد با هدف کمینه نمودن فرکانس طبیعی اول و یا دوم سازه پرداخته‌اند. در سال 2006 میلادی، گوپی و ول [14] کاربرد روش المان آزاد گالرکین را در طراحی بهینه رفتار ترموالاتیسیک ماده هدفمند بررسی کرده‌اند. آنها پس از تعیین کسر حجمی سرامیک در تعدادی از نقاط، توزیع مواد را با استفاده از میان‌یابی تعیین و سپس به کمک الگوریتم ژنتیک به کمینه‌سازی وزن سازه و تنش حرارتی پرداخته‌اند. در سال 2009 میلادی نعمت‌الله [15] به بررسی توزیع گرادین بهینه با هدف کمینه‌سازی تنش‌های حرارتی پرداخته است. لازم به ذکر است در تحقیق وی، کسر حجمی مواد با استفاده از قانون توانی تعیین شده است. در سال 2014 میلادی، اشجاری و خوشروان [16] به بهینه‌سازی وزن ورق هدفمند با وجود قیدهای تنش و جابه‌جایی پرداخته‌اند. ایشان برای بهینه‌سازی از نقاط کنترلی استفاده کرده و بهینه‌سازی را با استفاده از الگوریتم تجمع ذرات انجام داده‌اند. در همین سال طاهری و همکارانش [17] به بهینه‌سازی توزیع مواد در یک ورق هدفمند و با استفاده از روش حل ایزوژئومتری و بهره‌گیری از نقاط کنترلی پرداخته‌اند.

در پژوهش حاضر، ساختار بهینه یک پوسته استوانه‌ای هدفمند با لایه پیزوالکتریک به عنوان یک ساختار هوشمند به‌دست آمده است. این پوسته دربردارنده‌ی سیال داخلی بوده و همچنین تحت بار متحرک شعاعی می‌باشد. نقطه اثر بار متحرک جانبی در طول پوسته با سرعت معینی در حرکت است. وجود لایه‌های پیزوالکتریک و به‌طور کلی سنسورها در مخازن و خطوط لوله (حداقل در قسمتی از آنها) از آن نظر اهمیت دارد که می‌توان از خروجی این سنسورها در جهات مختلف همچون بررسی سلامت سازه و بررسی احتمال وجود ترک، بررسی تغییرشکل‌ها در بدنه لوله‌های تحت بارهای متحرک (به‌طور مثال عبور متحرک‌های خارجی و یا ترافیک از روی لوله‌های حاوی گاز، بنزین و یا نفت) و یا حتی در اندازه‌گیری متغیرهای حالت برای سیال داخلی از قبیل فشار و سرعت، و موارد دیگر از این دست استفاده کرد. به‌دلیل حرکت بار، در تحلیل رفتار سازه اثرات دینامیکی ناشی از حرکت آن می‌باید در نظر گرفته شود. در نتیجه تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها تابع زمان بوده و این اثر دینامیکی، موجب افزایش مقادیر تنش، کرنش و جابه‌جایی [4] نسبت به حالت بار ایستا می‌گردد. از این‌رو، به‌جای معادلات تعادل، از معادلات حرکت وابسته به زمان استفاده شده و رفتار وابسته به زمان سازه بررسی شده است. بدین منظور، با درنظر گرفتن اندرکنش سیال و دیواره پوسته، ابتدا تنش‌های ناشی از اثرات دینامیکی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و سری‌های فوریه به‌دست آمده است. به‌منظور اعتبارسنجی، نتایج تحلیل انجام شده با نتایج تجربی و تحلیلی دیگر مطالعات مقایسه شده‌اند. در مرحله‌ی بعد، توزیع تنش تسلیم با استفاده از معیار هاشین-شتریکمن به‌دست آمده و به کمک آن سازه‌ی تنیده بهینه تعیین شده است. برای تعیین ساختار بهینه، درصد حجمی مواد در نقاط کنترلی در راستای ضخامت لایه هدفمند به‌عنوان متغیرهای طراحی معرفی شده‌اند.

2- مشخصات مسئله

در این پژوهش، یک پوسته استوانه‌ای هدفمند با شعاع میانی R ، ضخامت h و طول L مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین فرض شده است که یک لایه

نقطه‌ی کنترلی h می‌باشند. مقادیر \bar{H} با رابطه‌ی (6) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\bar{H}_1(z) &= B_0 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right) + B_1 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right) \\ \bar{H}_2(z) &= \frac{1}{3} B_1 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right) \\ \bar{H}_3(z) &= B_2 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right) + B_3 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right) \\ \bar{H}_4(z) &= -\frac{1}{3} B_2 \left(\frac{z - z_n}{z_{n+1} - z_n} \right)\end{aligned}\quad (6)$$

که در آن B_k مطابق رابطه‌ی (7) چندجمله‌ای برنشتاین است [18]:

$$B_k(t) = \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k} \quad (7)$$

شیب توزیع درصد حجمی مواد نیز با رابطه‌ی (8) تعریف می‌شود [16]:

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{4\lambda_2 - 3\lambda_1 - \lambda_3}{2(z_{n+1} - z_n)} \\ S_{N+1} &= \frac{-4\lambda_N + 3\lambda_{N+1} + \lambda_{N-1}}{2(z_{n+1} - z_n)} \\ S_n &= \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}}{2(z_{n+1} - z_n)}, n = 2, 3, \dots, N\end{aligned}\quad (8)$$

4- تعیین خواص معادل

با توجه به اینکه مواد هدفمند از دو یا چند فاز متفاوت تشکیل شده‌اند، خواص مؤثر این مواد باید از طریق کسرهای حجمی و مشخصات فازهای تشکیل‌دهنده تعیین شوند. در این پژوهش مطابق رابطه‌ی (9) از قانون اختلاط برای تعیین خواص معادل استفاده شده است [19]:

$$P_{\text{eff}}(z) = \sum_{j=1}^M P_j \lambda_j, \sum_{j=1}^M \lambda_j = 1 \quad (9)$$

که در آن P_j خاصیت فیزیکی مورد بحث برای ماده j ام و M تعداد کل مواد است. با توجه به بازه‌ی تغییرات کوچک ضریب پواسون [9] از اثر تغییرات آن چشم‌پوشی شده است. برای تعیین تنش تسلیم، از مدل هاشین-اشتریکمن [20] استفاده شده است. دو حد بالا و پایین این مدل به ترتیب در روابط (10) و (11) ارائه شده‌اند که در آنها $S_y^{(1)}$ و $S_y^{(2)}$ به ترتیب تنش‌های تسلیم فاز ضعیف و قوی و λ_1 و λ_2 درصد‌های حجمی متناظر با هریک از این دو فاز هستند [20].

$$S_y = \frac{5\lambda_2}{3 + 2\lambda_2} S_y^{(2)} + \frac{3\lambda_1}{3 + 2\lambda_2} S_y^{(1)} \sqrt{1 + \frac{2\lambda_2}{3} \left[1 - \left(\frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \right)^2 \right]} \quad (10)$$

$$\frac{2}{5} \sqrt{1 + \frac{3\lambda_1}{2}} < \frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \leq 1 \text{ و } \lambda_1 < 1 \Rightarrow S_y = S_{LB1}$$

$$\frac{S_y^{(2)}}{S_y^{(1)}} \leq \frac{2}{5} \sqrt{1 + \frac{3\lambda_1}{2}} \text{ و } \lambda_1 < 1 \Rightarrow S_y = S_{LB2}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow S_y = S_y^{(1)}$$

که در آنها

$$S_{LB1} = \frac{5\lambda_1}{3 + 2\lambda_1} S_y^{(1)} + \frac{3\lambda_2}{3 + 2\lambda_1} S_y^{(2)} \sqrt{1 + \frac{2\lambda_1}{3} \left[1 - \left(\frac{S_y^{(1)}}{S_y^{(2)}} \right)^2 \right]}$$

$$S_{LB2} = S_y^{(2)} \sqrt{1 + \frac{3\lambda_1}{2}} \quad (11)$$

پیزوالکتریک با ضخامت h_p بر روی پوسته‌ی خارجی لایه هدفمند موجود باشد. پوسته استوانه‌ای دربردارنده‌ی سیال داخلی با چگالی $\hat{\rho}$ می‌باشد. ساختار سازه مورد بررسی در شکل 1 قابل مشاهده است. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود ردیفی از بارهای جانبی شعاعی در راستای طولی استوانه با سرعت ثابت V در حال حرکت بوده و داخل پوسته مورد مطالعه سیال وجود دارد. رابطه‌ی (1) تابع توزیع بار را توصیف می‌کند:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{N_p} F_i(t) \delta(x - x_i) \frac{\delta(\theta - \theta_i)}{R} \pi_i(t) \quad (1)$$

که در آن $F(t)$ تغییرات بارها با زمان و δ تابع دلتای دیراک است.

همچنین در رابطه‌ی (1)، $P_i(t)$ ، تابع باکسکار¹ و x_i (مکان اعمال بار)، با روابط (2) و (3) محاسبه می‌شوند. در این رابطه، θ_i زاویه اعمال بار می‌باشد؛ به‌طور مثال در صورت صفر بودن آن، نیروی شعاعی جانب به مرکز از کنار لوله به‌صورت افقی اعمال می‌گردد.

$$\Pi_i(t) = H(t - t_{i-1}) - H(t - t_{i-1} - t_L), t_L = \frac{L}{V} \quad (2)$$

$$x_i = V \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t - t_{i-1} \quad (3)$$

در این روابط H نشانگر تابع پله‌ای هویساید و V سرعت حرکت بار می‌باشند.

3- الگوی توزیع مواد

به‌منظور تعیین توزیع درصد حجمی مواد بهینه، می‌توان مقادیر درصد حجمی مواد را در نقاط کنترلی تعیین کرده و در فاصله‌ی بین این نقاط از میان‌یابی استفاده کرد. با انتخاب $N+1$ نقطه‌ی کنترلی و تقسیم پوسته‌ی هدفمند به N بازه با ضخامت یکسان، موقعیت هر نقطه کنترلی با رابطه‌ی (4) تعیین می‌شود:

$$z_n = z_b + \frac{z_t - z_b}{N} (n - 1), n = 1, \dots, N + 1 \quad (4)$$

که در آن z_b و z_t به ترتیب موقعیت n امین، اولین و آخرین نقطه‌ی کنترلی می‌باشند. درصد حجمی مواد متناظر با نقطه‌ی کنترلی شماره n با λ_n نمایش داده شده است. پس از تعیین مقادیر درصد حجمی مواد در نقاط کنترلی، توزیع درصد حجمی مواد را می‌توان در بین این نقاط با استفاده از توابع میان‌یابی درجه سوم هر میت² (\bar{H}) مطابق رابطه‌ی (5) تعیین نمود.

$$\lambda(z) = \lambda_n \bar{H}_1(z) + (z_{n+1} - z_n) S_n \bar{H}_2(z) + \lambda_{n+1} \bar{H}_3(z) + (z_{n+1} - z_n) S_{n+1} \bar{H}_4(z) \quad (5)$$

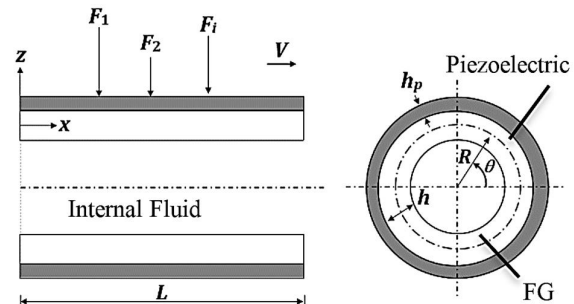


Fig. 1 Schematic drawing of the cylindrical shell with applied loads

شکل 1 شکل شماتیک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بارهای اعمال شده

که در آن λ_n و S_n مقدار درصد حجمی و شیب توزیع درصد حجمی مواد در

¹Boxcar Function

²Cubic Hermite spline

5- تحلیل اثرات هیدرومکانیکی

در محاسبه‌ی اثر سیال داخل پوسته، فرض شده است که سیال موجود غیرویسکوز و غیرقابل تراکم بوده و همچنین حرکت سیال غیرچرخشی باشد. با فرض غیرچرخشی بودن سیال، تحلیل را می‌توان با یک تابع پتانسیل (ψ) انجام داد. تابع پتانسیل مذکور از دو بخش ناشی از سرعت محوری سیال (ξ) و ناشی از حرکت شعاعی پوسته (ϕ) تشکیل شده است که با رابطه (12) قابل بیان هستند. تابع پتانسیل (ϕ) معادله لاپلاس (13) را ارضا می‌کند.

$$\psi = -\xi x + \phi \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

در پژوهش حاضر پوسته به عنوان مخزن حاوی سیال در نظر گرفته شده و از این‌رو مقدار ξ صفر در نظر گرفته شده است. فشار هیدروستاتیک p اعمالی بر روی پوسته را می‌توان از رابطه‌ی برنولی محاسبه کرد:

$$p = \bar{\rho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{r=R_i} \quad (14)$$

که در آن $\bar{\rho}$ چگالی سیال مورد بحث است. در سطح مشترک میان پوسته و سیال نیز رابطه (15) برقرار است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R_i} = \frac{\partial w}{\partial t} + \xi \frac{\partial w}{\partial x} \quad (15)$$

که در آن w جابه‌جایی در جهت شعاع می‌باشد. تابع پتانسیل (ϕ) را می‌توان مطابق رابطه (16) جداسازی نمود:

$$\phi(x, r, \theta, t) = \Re(r) F(x) T(t) \cos(n\theta) \quad (16)$$

که در آن n تعداد موج‌های محیطی را نمایش می‌دهد. با جانشانی رابطه (16) در معادله (13) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F} \frac{d^2 \Re}{dr^2} + \frac{1}{r} \mathcal{F} \frac{d\Re}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \mathcal{F} \Re + \Re \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx^2} = 0 \quad (17)$$

که به شکل زیر جداسازی می‌شود:

$$\frac{d^2 \Re}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Re}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \eta^2 \right) \Re = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{dx^2} + \eta^2 \mathcal{F} = 0 \quad (19)$$

با دخالت دادن شرایط سطح مشترک و در نظر گرفتن این نکته که پاسخ معادلات فوق باید از نظر فیزیکی ممکن (محدود) باشند می‌توان به پاسخ زیر دست یافت:

$$\Re = \mathcal{A} I_n(\zeta r) \quad (20)$$

که در آن $\zeta = m\pi/L$ بوده و I_n تابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی n است؛ همچنین m تعداد نیم‌موج‌های محوری را نمایش می‌دهد. با ترکیب روابط (20) و (15) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{A} \zeta F(x) T(t) \cos(n\theta) I_n'(\zeta R) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (21)$$

با تعیین ضریب \mathcal{A} از رابطه‌ی فوق و با توجه به رابطه‌ی (20) می‌توان نوشت:

$$\Re = \frac{1}{F(x) T(t) \cos(n\theta) \zeta I_n'(\zeta R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (22)$$

جانشانی پاسخ (22) در (16)، رابطه‌ی (23) را نتیجه می‌دهد:

$$\phi = \frac{1}{\zeta I_n'(\zeta R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (23)$$

با ترکیب رابطه‌ی (23) و (14)، پاسخ (24) تعیین می‌شود:

$$p = \frac{\bar{\rho}}{\zeta I_n'(\zeta R)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \quad (24)$$

6- تعیین میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش - کرنش

جابه‌جایی‌ها در یک پوسته‌ی استوانه‌ای را بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (25) تعیین کرد [21]:

$$\begin{aligned} u_1(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) + z \phi_x(x, \theta, t) \\ v_1(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) + z \phi_\theta(x, \theta, t) \\ w_1(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن (u, v, w) و (u_1, v_1, w_1) به ترتیب جابه‌جایی در صفحه‌ی میانی و جابه‌جایی در هر نقطه‌ی دلخواه می‌باشند. همچنین ϕ_x و ϕ_θ به ترتیب چرخش عمود بر صفحات میانی در راستای محورهای x و θ می‌باشند. برای پوسته‌ی هدفمند رابطه‌ی تنش-کرنش با رابطه‌ی (26) تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

که در آن ε و γ به ترتیب کرنش‌های عمودی و برشی در صفحه‌ی میانی می‌باشند. همچنین منته‌های تنش با روابط (27) تعیین می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

در این رابطه κ انحنا صفحه‌ی میانی می‌باشد. ضرایب A, B, C, D نیز از روابط (28) و (29) تعیین می‌شوند [22]:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} C_{44} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} dz \\ C_{55} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} dz \end{aligned} \quad (29)$$

برای لایه‌ی پیزوالکتریک رابطه‌ی تنش-کرنش و جابه‌جایی الکتریکی مطابق روابط (30) و (31) می‌باشند [9,8]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^p \\ \sigma_\theta^p \\ \tau_{x\theta}^p \\ \tau_{\theta z}^p \\ \tau_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11e} & Q_{12e} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12e} & Q_{22e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} \\ \bar{\gamma}_{\theta z} \\ \bar{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31e} \\ 0 & 0 & e_{32e} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24e} & 0 \\ e_{15e} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$Q_x^E = e_{15} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Q_x^E = e_{24} \int_{h/2}^{h/2+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (40)$$

با توجه به رابطه‌ی (1)، کار بار متحرک به‌صورت رابطه‌ی (41) است:

$$W_p = \int \int \sum_{i=1}^{N_p} F_i(t) \delta(x - x_i) \frac{\delta(\theta - \theta_i)}{R} U_i(t) w(x, \theta, t) R d\theta dx \quad (41)$$

با تلفیق تئوری مرتبه اول برشی و اصل همیلتون، معادلات حرکت (42) برای پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند با لایه‌ی خارجی پیزوالکتریک به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial(N_x + N_x^p)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(N_{x\theta} + N_{x\theta}^p)}{\partial \theta} = (I_1 + I_1^p) \ddot{u} + (I_2 + I_2^p) \ddot{\phi}_x$$

$$\frac{\partial(N_{x\theta} + N_{x\theta}^p)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(N_\theta + N_\theta^p)}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (Q_\theta + Q_\theta^p) = (I_1 + I_1^p) \ddot{v} + (I_2 + I_2^p) \ddot{\phi}_\theta$$

$$\frac{\partial(Q_x + Q_x^p)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(Q_\theta + Q_\theta^p)}{\partial \theta} - \frac{1}{R} (N_\theta + N_\theta^p) + f(x, t) = (I_1 + I_1^p) \ddot{w}$$

$$\frac{\partial(M_{x\theta} + M_{x\theta}^p)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(M_{x\theta} + M_{x\theta}^p)}{\partial \theta} - (Q_\theta + Q_\theta^p) = (I_2 + I_2^p) \ddot{u} + (I_3 + I_3^p) \ddot{\phi}_x$$

$$\frac{\partial(M_{x\theta} + M_{x\theta}^p)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(M_\theta + M_\theta^p)}{\partial \theta} - (Q_\theta + Q_\theta^p) = (I_2 + I_2^p) \ddot{v} + (I_3 + I_3^p) \ddot{\phi}_\theta \quad (42)$$

در این روابط کرنش‌ها، انحناها و ممان‌های اینرسی جرمی به‌ترتیب مطابق روابط (43) تا (45) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{\theta z} = \phi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (43)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}$$

$$\kappa_{x\theta} = \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} \quad (44)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{eff}(z) (1, z, z^2) dz$$

$$(I_1^p, I_2^p, I_3^p) = \int_{h/2}^{h/2+h_p} \rho^p (1, z, z^2) dz \quad (45)$$

با جانشانی معادلات (27)، (35)، (36)، (43) و (44) در معادلات حرکت، معادلات (46) به‌دست می‌آیند:

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\phi_x + L_{15}\phi_\theta + L_{16}\psi_x = (I_1 + I_1^p) \ddot{u} + (I_2 + I_2^p) \ddot{\phi}_x$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\phi_x + L_{25}\phi_\theta + L_{26}\psi = (I_1 + I_1^p) \ddot{v} + (I_2 + I_2^p) \ddot{\phi}_\theta$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\phi_x + L_{35}\phi_\theta + L_{36}\psi + f(x, t) = (I_1 + I_1^p) \ddot{w}$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\phi_x + L_{45}\phi_\theta + L_{46}\psi = (I_2 + I_1^p) \ddot{u} + (I_3 + I_3^p) \ddot{\phi}_x$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\phi_x + L_{55}\phi_\theta + L_{56}\psi = (I_2 + I_2^p) \ddot{v} + (I_3 + I_3^p) \ddot{\phi}_\theta \quad (46)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15e} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24e} & 0 & 0 \\ e_{31e} & e_{32e} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} \\ \bar{\gamma}_{\theta z} \\ \bar{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11e} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22e} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (31)$$

که در آن E میدان الکتریکی است که با توجه به روابط (32) به‌صورت تابعی از پتانسیل الکتریکی φ به‌دست می‌آید:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_\theta = -\frac{1}{R+z} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (32)$$

تابع φ مطابق رابطه‌ی (33) تعریف می‌شود:

$$\varphi(x, \theta, z, t) = P(z_p) \psi(x, \theta, t) \quad (33)$$

که در آن z_p موقعیت هر نقطه در ضخامت پیزوالکتریک نسبت به سطح میانی آن می‌باشد و P با رابطه‌ی (34) به‌دست می‌آید:

$$P(z_p) = \left[\left(z - \frac{h+h_p}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_p}{2} \right)^2 \right] \quad (34)$$

منتجه‌های تنش لایه‌ی پیزوالکتریک با روابط (35) و (36) تعیین می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x^p \\ N_\theta^p \\ N_{x\theta}^p \\ M_x^p \\ M_\theta^p \\ M_{x\theta}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p & 0 & B_{11}^p & B_{12}^p & 0 \\ A_{21}^p & A_{22}^p & 0 & B_{21}^p & B_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^p & 0 & 0 & B_{66}^p \\ B_{11}^p & B_{12}^p & 0 & D_{11}^p & D_{12}^p & 0 \\ B_{21}^p & B_{22}^p & 0 & D_{21}^p & D_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^p & 0 & 0 & D_{66}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^E \\ N_\theta^E \\ N_{x\theta}^E \\ M_x^E \\ M_\theta^E \\ M_{x\theta}^E \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x^p \\ Q_\theta^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^p & 0 \\ 0 & C_{55}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x^E \\ Q_\theta^E \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ضرایب A^p, B^p, D^p و C^p نیز از روابط (37) و (38) تعیین می‌شوند:

$$(A_{ij}^p, B_{ij}^p, D_{ij}^p) = \int_{h/2}^{h_p+h/2} Q_{ije}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (37)$$

$$C_{44}^p = \int_{\frac{h}{2}}^{h_p+\frac{h}{2}} Q_{55e} dz$$

$$C_{55}^p = \int_{h/2}^{h_p+h/2} Q_{44e} dz \quad (38)$$

برای تعیین نتیجه‌های پیزوالکتریک می‌توان روابط (39) و (40) را نوشت:

$$\begin{Bmatrix} N_x^E \\ N_\theta^E \\ N_{x\theta}^E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2e_{31e} \int_{h/2}^{h/2+h_p} z_p dz \\ 2e_{32e} \int_{h/2}^{h/2+h_p} z_p dz \\ 0 \end{Bmatrix} \psi$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^E \\ M_\theta^E \\ M_{x\theta}^E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2e_{31e} \int_{h/2}^{h/2+h_p} z z_p dz \\ 2e_{32e} \int_{h/2}^{h/2+h_p} z z_p dz \\ 0 \end{Bmatrix} \psi \quad (39)$$

معادله‌ی ماکسول نیز به شکل رابطه‌ی (47) می‌باشد [23]:

$$\int_{h/2}^{h/2+h_p} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{1}{R} D_z \right) dz = 0 \quad (47)$$

با جانشانی معادله‌ی (31) در (47) رابطه‌ی (48) به دست می‌آید:

$$L_{61}u + L_{62}v + L_{63}w + L_{64}\phi_x + L_{65}\phi_\theta + L_{66}\psi = 0 \quad (48)$$

ضرایب L_{ij} این معادلات در پیوست ارائه شده است. در پژوهش حاضر دو تکیه‌گاه ابتدا و انتهای سازه از نوع تکیه‌گاه ساده فرض شده‌اند و از این رو، پاسخ‌های معادلات به‌صورت روابط (49) خواهند بود:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_{mn}(t) \cos(\zeta_m x) \cos(n\theta) \\ v &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{mn}(t) \sin(\zeta_m x) \sin(n\theta) \\ w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N w_{mn}(t) \sin(\zeta_m x) \cos(n\theta) \\ \phi_x &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \phi_{mn}(t) \cos(\zeta_m x) \cos(n\theta) \\ \phi_\theta &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \bar{\phi}_{mn}(t) \sin(\zeta_m x) \sin(n\theta) \\ \psi &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \psi_{mn}(t) \sin(\zeta_m x) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن مقادیر (50) برقرارند:

$$\zeta_m = \frac{m\pi}{L} \quad (50)$$

با جانشانی معادلات (49) در (46) و (48) روابط (51) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} T_{11}u_{mn} + T_{12}v_{mn} + T_{13}w_{mn} + T_{14}\phi_{mn} + T_{15}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{16}\psi_{mn} + (I_1 + I_1^E)\ddot{u}_{mn}(t) \\ + (I_2 + I_2^E)\ddot{\phi}_{mn}(t) = 0 \\ T_{21}u_{mn} + T_{22}v_{mn} + T_{23}w_{mn} + T_{24}\phi_{mn} + T_{25}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{26}\psi_{mn} + (I_1 + I_1^E)\ddot{v}_{mn}(t) \\ + (I_2 + I_2^E)\ddot{\bar{\phi}}_{mn}(t) = 0 \\ T_{31}u_{mn} + T_{32}v_{mn} + T_{33}w_{mn} + T_{34}\phi_{mn} + T_{35}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{36}\psi_{mn} + (I_1 + I_1^E)\ddot{w}_{mn}(t) \\ = \frac{2}{\pi RL} \sum_{i=1}^{N_p} F_i(t) \sin[\lambda_m x_i(t)] \cos(n\theta_0) \\ T_{41}u_{mn} + T_{42}v_{mn} + T_{43}w_{mn} + T_{44}\phi_{mn} + T_{45}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{46}\psi_{mn} + (I_2 + I_2^E)\ddot{u}_{mn}(t) \\ + (I_3 + I_3^E)\ddot{\phi}_{mn}(t) = 0 \\ T_{51}u_{mn} + T_{52}v_{mn} + T_{53}w_{mn} + T_{54}\phi_{mn} + T_{55}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{56}\psi_{mn} + (I_2 + I_2^E)\ddot{v}_{mn}(t) \\ + (I_3 + I_3^E)\ddot{\bar{\phi}}_{mn}(t) = 0 \\ T_{61}u_{mn} + T_{62}v_{mn} + T_{63}w_{mn} + T_{64}\phi_{mn} + T_{65}\bar{\phi}_{mn} \\ + T_{66}\psi_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

در دسته معادلات (51)، ضرایب T_{ij} در پیوست موجودند. با توجه به آخرین رابطه‌ی (51)، پتانسیل الکتریکی القاء شده با (52) به دست می‌آید:

$$\psi_{mn} = \frac{1}{T_{66}} [-T_{61}u_{mn} - T_{62}v_{mn} - T_{63}w_{mn} - T_{64}\phi_{mn} - T_{65}\bar{\phi}_{mn}] \quad (52)$$

با جانشانی رابطه‌ی (52) در پنج معادله‌ی نخست (51)، معادلات حاکم بر

مسئله به شکل رابطه‌ی (53) به دست می‌آیند:

$$[M]\{\ddot{q}\} + \left([K_E] - \frac{1}{T_{66}} \{K_{P1}\}\{K_{P2}\}^T \right) \{q\} = \{F_M\} \quad (53)$$

که در آن روابط (54) تا (59) برقرارند:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 + I_1^P & 0 & 0 & I_2 + I_2^P & 0 \\ 0 & I_1 + I_1^P & 0 & 0 & I_2 + I_2^P \\ 0 & 0 & I_1 + I_1^P + \frac{\hat{p} I_n(\zeta R)}{\zeta I_n'(\zeta R)} & 0 & 0 \\ I_2 + I_2^P & 0 & 0 & I_3 + I_3^P & 0 \\ 0 & I_2 + I_2^P & 0 & 0 & I_3 + I_3^P \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$[K_E] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\{K_{P1}\}^T = \{T_{16} \ T_{26} \ T_{36} \ T_{46} \ T_{56}\} \quad (56)$$

$$\{K_{P2}\}^T = \{T_{61} \ T_{62} \ T_{63} \ T_{64} \ T_{65}\} \quad (57)$$

$$\{q\}^T = \{u_{mn} \ v_{mn} \ \phi_{mn} \ \bar{\phi}_{mn}\}^T \quad (58)$$

$$\{F_M\}^T = \left\{ 0 \ 0 \ \frac{2}{\pi L} \sum_{i=1}^{N_p} F_i(t) \sin[\lambda_m x_i(t)] \cos(n\theta_0) \ 0 \ 0 \right\} \quad (59)$$

در روابط فوق $\{F_M\}^T$ نیروهای مربوط به بار متحرک است. برای حل دستگاه فوق از روش حل نیومارک [24] استفاده شده است.

7- طراحی بهینه

شکل کلی مسئله‌ی طراحی موجود به‌صورت رابطه‌ی (60) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} J(\chi, \varsigma) & \text{ کمینه‌سازی تابع} \\ \varpi(\chi, \varsigma) & \leq 0 \quad \text{با توجه به قید} \\ \chi_{i, LB} & \leq \chi_i \leq \chi_{i, UB} \quad (i = 1, \dots, m) \\ \chi & = [\chi_1, \dots, \chi_i, \dots, \chi_m] \end{aligned} \quad (60)$$

که در آن J ، c و ς به ترتیب تابع هدف، بردار متغیرهای طراحی و بردار ثوابت می‌باشند. هر متغیر طراحی بین دو حد پایین ($\chi_{i, LB}$) و بالا ($\chi_{i, UB}$) محدود شده است. طراحی شامل دسته‌ای از قیود (ϖ) است.

1-7- الگوریتم رقابت استعماری

الگوریتم رقابت استعماری از مجموعه روش‌های بهینه‌سازی است که بر اساس شبیه‌سازی پدیده‌های اجتماعی و انسانی می‌باشد. این الگوریتم نخستین بار در سال 2007 میلادی توسط آتش‌پز گرگری و لوکاس [25] ارائه شده است. در این روش، جمعیت تصادفی اولیه‌ای شامل چندین کشور تولید می‌شود. انتخاب جمعیت اولیه کشورها به‌صورت تصادفی انجام می‌شود. پس از این مرحله مقدار تابع هدف هریک از اعضا محاسبه شده و بر اساس مقدار این تابع کشورهای موجود به دو دسته شامل کشورهای استعمارگر و تحت استعمار بخش‌بندی می‌شوند. واضح است که کشورهای استعمارگر از نقطه نظر تابع هدف در وضعیت بهتری به سر می‌برند. پس از تعیین استعمارگرها، مابقی کشورها به‌صورت تصادفی به کشورهای

8- اعتبارسنجی

اعتبارسنجی در چند مرحله و با استفاده از نتایج تجربی و تحلیلی موجود در ادبیات فن انجام گرفته است. در مرحله‌ی نخست، با تعیین فرکانس‌های طبیعی سیستم، نتایج با گزارش‌های تجربی و تئوری آمابیلی [26] در مورد پوسته‌های فلزی مقایسه شده است. مشخص است که در این حالت بار عبوری صفر است.

در مطالعه‌ی مرجع مشخصات چنین‌اند:

$$\begin{aligned} L &= 520 \text{ mm}, R = 149.4 \text{ mm}, h = 0.519 \text{ mm} \\ \rho &= 7800 \text{ kg/m}^3, \hat{\rho} = 1000 \text{ kg/m}^3 \\ E &= 198 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (67)$$

شکل 2 نتیجه این مقایسه را نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، تطابق بسیار خوبی میان نتایج تجربی و نتایج پژوهش حاضر موجود است. اعتبارسنجی دوم با استفاده از نتایج پژوهش شنگ و وانگ [8] انجام یافته است. این محققان در سال 2009 میلادی پژوهشی در مورد پوسته‌های هدفمند دارای لایه‌ی پیزوالکتریک بدون سیال داخلی و تحت تاثیر بار متحرک انجام داده‌اند. توزیع مواد در این مرجع به‌صورت توانی در نظر گرفته شده و مطابق رابطه (68) می‌باشد:

$$\lambda(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \quad (68)$$

در مطالعه این پژوهشگران، لایه‌ی هدفمند حاصل ترکیب دو ماده‌ی آلومینیوم و زیرکونیا و لایه‌ی پیزوالکتریک از جنس PZT-4 می‌باشند. فرضیات و ابعاد هندسی چنین‌اند:

$$\begin{aligned} L &= 4000 \text{ mm} \\ R &= 1000 \text{ mm} \\ h &= 10 \text{ mm}, \quad h_p = 1 \text{ mm} \\ \theta_0 &= \pi/4 \\ V &= 80 \text{ m/s} \\ F &= 50 \text{ kN} \\ \alpha &= 1 \end{aligned} \quad (69)$$

دیگر خواص فیزیکی مواد را می‌توان در این مرجع یافت. شکل 3 نتایج این مقایسه را نمایش می‌دهد. چنانچه از این شکل نیز برمی‌آید، توافق خوبی میان نتایج موجود است. با انجام این دو مقایسه می‌توان به صحت حل هم از نظر وجود اثرات هیدرومکانیکی و همچنین از نظر وجود بار متحرک پی‌برد.

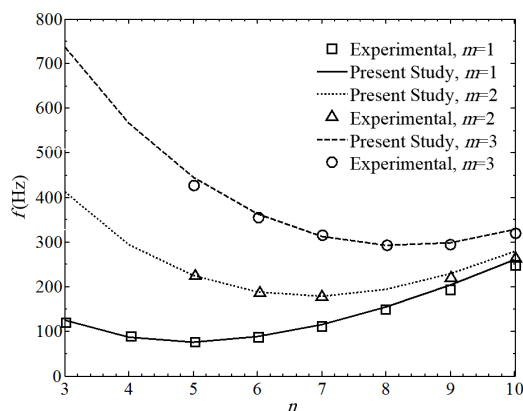


Fig. 2 Comparing the experimental data [26] with the results of the present study for variation of the natural frequency in different vibration modes

شکل 2 مقایسه نتایج تجربی برگرفته از منبع [26] با نتایج مطالعه حاضر برای تغییرات فرکانس طبیعی در مدهای ارتعاشی مختلف

استعمارگر انتساب می‌یابند که مجموعه‌ای تحت عنوان امپراطوری‌ها را تشکیل می‌دهند؛ همچنین می‌توان از هزینه نرمال شده به‌منظور این تقسیم‌بندی بهره برد [25]:

$$C_n = c_n - \max\{c_i\} \quad (61)$$

که در آن c هزینه استعمارگر و n نشان‌دهنده شماره استعمارگر با بیشترین مقدار هزینه نرمال شده می‌باشد.

قدرت نسبی نرمال شده استعمارگر نیز با رابطه (62) قابل محاسبه است [25]:

$$P_n = \left| \frac{C_n}{\sum_{i=1}^N C_i} \right| \quad (62)$$

که در آن N تعداد امپراطوری‌ها می‌باشد. در این حال تعداد مستعمره‌های اولیه یک امپراطوری چنین محاسبه می‌شود [26]:

$$\bar{N}_n = \text{round}\{NP_n\} \quad (63)$$

که در آن N تعداد کل مستعمره‌های موجود در جمعیت اولیه می‌باشد. با توجه به رابطه (63)، برای امپراطوری m به تعداد \bar{N}_n مستعمره به‌صورت تصادفی انتخاب می‌شود.

در مرحله‌ی بعدی تلاش می‌شود کشورهای مستعمره خود را به ساختار کشورهای استعمارگر نزدیک کنند. در حین اجرای الگوریتم ممکن است برخی از مستعمره‌ها از نظر مقدار تابع هدف به موقعیت برتری دست یابند که در این حالت موقعیت مستعمره و استعمارگر تغییر می‌یابد. هزینه‌ی کل امپراطوری m (C_n^t) با رابطه‌ی (64) محاسبه می‌شود [25]:

$$C_n^t = C_n^{\text{imp}} + \beta C_n^s \quad (64)$$

که در آن C_n^{imp} هزینه امپراطوری مذکور، C_n^s مجموع هزینه مستعمره‌های امپراطوری و β ضریب ثابتی بین صفر تا یک و نزدیک به یک است [26]. پس از محاسبه هزینه امپراطوری‌ها، مستعمره‌ها از امپراطوری‌های ضعیف جدا شده و به موارد قوی‌تر ملحق می‌شوند؛ بدین‌منظور در هر مرحله، هر استعمارگر که قدرت کمتری داشته باشد یکی از مستعمره‌های خود را از دست داده و میان دیگر استعمارگرها برای تصاحب آن رقابت درمی‌گیرد. این روند تا همگرایی الگوریتم به مقدار بهینه ادامه می‌یابد.

7-2- فرمول‌بندی مسئله‌ی بهینه‌سازی

تابع هدف و قید مطرح در مسئله به‌صورت رابطه‌ی (65) می‌باشند:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{S_y}{\theta} - FS \right) dz & \quad \text{کمینه‌سازی تابع} \\ \frac{S_y}{\theta} & \geq FS & \quad \text{با توجه به قید} \end{aligned} \quad (65)$$

که در آن FS ضریب اطمینان و $\hat{\theta}$ بیشینه مقادیر میدان تنش معادل در راستای z و در طول بازه‌ی زمانی و در دو راستای طول و زاویه است. برای محاسبه‌ی مقدار $\hat{\theta}$ ابتدا مقدار تنش معادل فون-میسز (σ^*) با استفاده از رابطه‌ی (66) محاسبه شده و سپس بیشترین مقدار تنش برای هر نقطه در راستای z در بازه‌ی زمانی، طول قطعه و بازه‌ی زاویه‌ی موجود محاسبه می‌شود.

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_\theta)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 + 6(\tau_{x\theta}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{\theta z}^2)} \quad (66)$$

در محاسبات بهینه‌سازی، متغیرهای طراحی همان مقادیر کسره‌های حجمی در هریک از نقاط کنترلی می‌باشند.

نمودار همگرایی الگوریتم طراحی در شکل 4 قابل مشاهده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود پس از 350 تکرار تغییر چندانی در مقدار بهینه ایجاد نمی‌شود. همچنین شکل 5 مقایسه‌ی میان تنش مجاز و تنش معادل سازه را نمایش می‌دهد. چنان‌چه مشاهده می‌شود تمامی نقاط سازه دارای تنشی نزدیک به تنش مجاز بوده و تنیده می‌باشند. توزیع درصد حجمی مواد در راستای ضخامت برای سازه بهینه نیز در شکل 6 قابل مشاهده است. در این شکل درصد ذرات آلومینیوم موجود در هر موقعیت نشان داده شده است.

10- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با ارائه‌ی روش حل تحلیلی-عددی، رفتار مکانیکی پوسته‌ی هدفمند با لایه پیزوالکتریک که در معرض اثرات هیدرومکانیکی و بار متحرک شعاعی می‌باشد، بررسی شده است. در این روش از تئوری مرتبه اول برشی و معادله‌ی معادله ماکسول استفاده شده است. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد هدفمند با استفاده از قانون اختلاط و رابطه‌ی هاشین-اشتریکمن تعیین شده‌اند. برای بررسی اثرات هیدرومکانیکی از تابع پتانسیل استفاده شده و اندرکنش سیال و جامد شبیه‌سازی شده است. پس از تعیین معادلات حرکت،

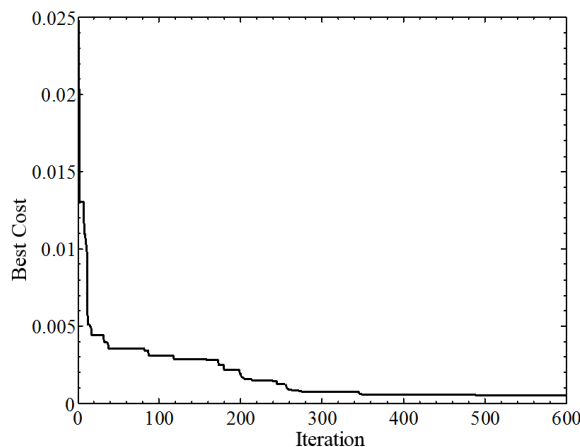


Fig. 4 Convergence diagram of the ICA

شکل 4 نمودار همگرایی الگوریتم رقابت استعماری

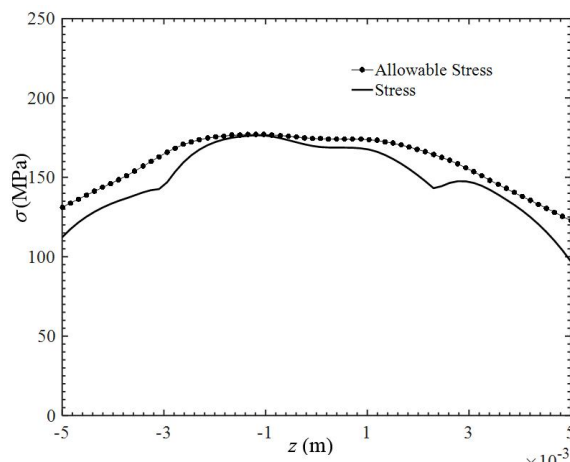


Fig. 5 Comparing the distribution of effective stress and allowable stress along the shell thickness

شکل 5 مقایسه توزیع تنش معادل با تنش مجاز در راستای ضخامت پوسته

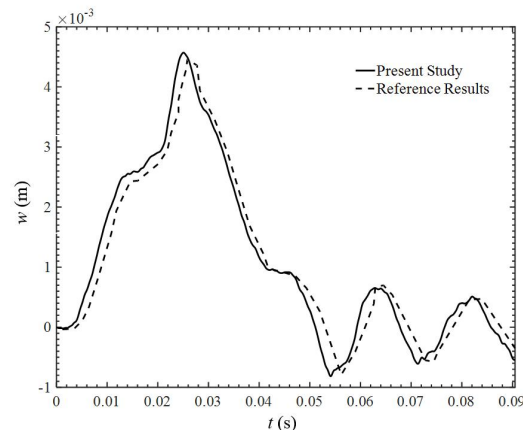


Fig. 3 Comparing the results for radial displacement provided by [8] and the present study

شکل 3 مقایسه نتایج برگرفته از منبع [8] با نتایج مطالعه حاضر در محاسبه جابه‌جایی شعاعی

9- نتایج

در این مطالعه، لایه هدفمند با ترکیب آلومینیوم 2024 و سیلیکون کاربید و لایه پیزوالکتریک از جنس PZT-4 در نظر گرفته شده است. مشخصات این مواد در جدول 1 و 2 موجود است. ضریب پواسون برای تمام مواد برابر با 0.3 فرض شده است. ابعاد هندسی و فرضیات اعمال بار نیز در جدول 3 مشاهده می‌شوند. به منظور تعیین تعداد جملات لازم برای همگرایی سری‌های فوریه آزمون همگرایی انجام گرفته که نشان از کفایت تعداد 30 تکرار برای هر کدام از مقادیر M و N دارد.

جدول 1 خواص فیزیکی آلومینیوم 2024 و سیلیکون کاربید [27]

Table 1 Physical properties of Al 2024 and SiC [27]

SiC	2024 Al	
440	78	E (GPa)
3190	2970	ρ (kg/m ³)
490	112	S_y (MPa)

جدول 2 خواص فیزیکی مورد استفاده برای PZT-4 [23]

Table 2 Physical properties of PZT-4 [23]

-5.2	e_{31} (C/m ²)	138.499	C_{11} (GPa)
-5.2	e_{32} (C/m ²)	138.499	C_{22} (GPa)
15.08	e_{33} (C/m ²)	114.754	C_{33} (GPa)
12.72	e_{24} (C/m ²)	73.643	C_{13} (GPa)
12.72	e_{15} (C/m ²)	73.643	C_{23} (GPa)
1.306×10^{-9}	ζ_{11} (C ² /Nm ²)	77.371	C_{12} (GPa)
1.306×10^{-9}	ζ_{22} (C ² /Nm ²)	25.6	C_{44} (GPa)
1.115×10^{-9}	ζ_{33} (C ² /Nm ²)	25.6	C_{55} (GPa)
0.25×10^{-4}	P (C/Cm ²)	30.6	C_{66} (GPa)
0.3	ν	7500	ρ (kg/m ³)

جدول 3 مشخصات مسئله حاضر

Table 3 characteristics of the present problem

0.2	R (m)
0.01	h (m)
0.001	h_p (m)
1	L (m)
$\pi/4$	q_0
6	V (m/s)
1400	F (N)

$$\xi_{33e} = \xi_{33} + \frac{e_{33}^2}{Q_{33}^e} \quad (86)$$

$$p_{xe} = p_x \quad (87)$$

$$p_{\theta e} = p_{\theta} \quad (88)$$

$$p_{ze} = p_z \quad (89)$$

$$L_{11} = \bar{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{A}_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (90)$$

$$L_{12} = \frac{\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad (91)$$

$$L_{13} = \frac{\bar{A}_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad (92)$$

$$L_{14} = \bar{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{B}_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (93)$$

$$L_{15} = \frac{\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad (94)$$

$$L_{16} = 2e_{31e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz \frac{\partial}{\partial x} \quad (95)$$

$$L_{22} = \bar{A}_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{C}_{55}}{R^2} \quad (96)$$

$$L_{23} = \frac{\bar{A}_{22} + \bar{C}_{55}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (97)$$

$$L_{25} = \bar{B}_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{B}_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\bar{C}_{55}}{R^2} \quad (98)$$

$$L_{26} = \left[e_{24e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz + 2e_{31e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (99)$$

$$L_{31} = -\frac{\bar{A}_{21}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad (100)$$

$$L_{33} = \bar{C}_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{C}_{55}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \quad (101)$$

$$L_{34} = \bar{C}_{44} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\bar{B}_{21}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (102)$$

$$L_{35} = \frac{\bar{C}_{55}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\bar{B}_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (103)$$

$$L_{36} = -\frac{2e_{32e}}{R} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz + \frac{e_{24e}}{R} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + e_{15e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (104)$$

$$L_{43} = \left(\frac{\bar{B}_{12}}{R} - \bar{C}_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad (105)$$

$$L_{44} = \bar{D}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \bar{C}_{44} \quad (106)$$

$$L_{45} = \frac{\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \quad (107)$$

$$L_{46} = \left[2e_{31e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z z_p dz - e_{15e} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz \right] \frac{\partial}{\partial x} \quad (108)$$

$$L_{32} = \left(-\frac{\bar{C}_{55}}{R} + \frac{\bar{B}_{22}}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (109)$$

$$L_{55} = \bar{D}_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\bar{D}_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \bar{C}_{55} \quad (110)$$

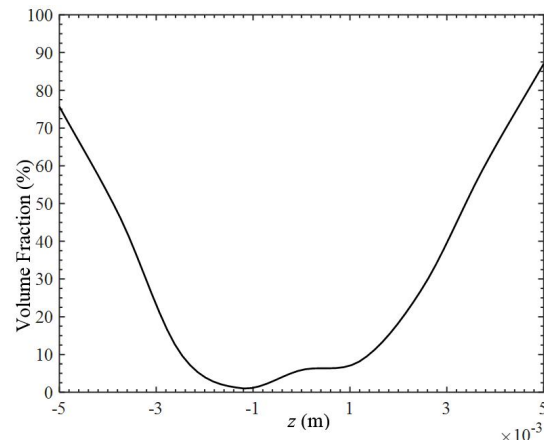


Fig. 6 Distribution of the volume fraction along the shell thickness

شکل 6 توزیع درصد حجمی مواد در راستای ضخامت

این معادلات با ترکیب سری‌های فوریه و روش نیومارک حل شده است که نتیجه آن تعیین جابه‌جایی‌های دینامیکی و در نهایت مقادیر تنش می‌باشد. با استفاده از نتایج به‌دست آمده تابع هدف بهینه‌سازی به‌منظور تنیده کردن سازه معرفی شده است تا نحوه توزیع مواد در لایه هدفمند با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری تعیین شود. بدین‌منظور از ترکیب روش نقاط کنترلی با میان‌یابی به کمک توابع هرمیت استفاده شده است. نتایج، کارایی روش پیشنهادی در بررسی رفتار مکانیکی و نیز بهینه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای هدفمند را نشان می‌دهد؛ استفاده از روش نقاط کنترلی طراح را از معرفی الگوی توزیع پیش‌فرض که باعث اعمال قید بر نحوه توزیع می‌باشد فارغ خواهد نمود.

11- پیوست

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij}^p + A_{ij} \quad (70)$$

$$\bar{B}_{ij} = B_{ij}^p + B_{ij} \quad (71)$$

$$\bar{C}_{ij} = C_{ij}^p + C_{ij} \quad (72)$$

$$\bar{D}_{ij} = D_{ij}^p + D_{ij} \quad (73)$$

$$Q_{11e} = Q_{11}^p - \frac{Q_{13}^p Q_{13}^p}{Q_{33}^p} \quad (74)$$

$$Q_{12e} = Q_{12}^p - \frac{Q_{13}^p Q_{23}^p}{Q_{33}^p} \quad (75)$$

$$Q_{22e} = Q_{22}^p - \frac{Q_{23}^p Q_{23}^p}{Q_{33}^p} \quad (76)$$

$$Q_{44e} = Q_{44}^p \quad (77)$$

$$Q_{55e} = Q_{55}^p \quad (78)$$

$$Q_{66e} = Q_{66}^p \quad (79)$$

$$e_{31e} = e_{31} - \frac{Q_{13}^p e_{13}}{Q_{33}^p} \quad (80)$$

$$e_{32e} = e_{32} - \frac{Q_{23}^p e_{33}}{Q_{33}^p} \quad (81)$$

$$e_{15e} = e_{15} \quad (82)$$

$$e_{24e} = e_{24} \quad (83)$$

$$\xi_{11e} = \xi_{11} \quad (84)$$

$$\xi_{22e} = \xi_{22} \quad (85)$$

$$T_{34} = \bar{C}_{44}\zeta_m - \frac{\bar{B}_{21}}{R}\zeta_m \quad (136)$$

$$T_{35} = -\frac{\bar{C}_{55}}{R}n + \frac{\bar{B}_{22}}{R^2}n \quad (137)$$

$$T_{36} = -\frac{2e_{32e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz + n^2 \frac{e_{24e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz + \zeta_m^2 e_{15e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz \quad (138)$$

$$T_{43} = \frac{\bar{B}_{12}}{R}\zeta_m - \bar{C}_{44}\zeta_m \quad (139)$$

$$T_{44} = \bar{D}_{11}\zeta_m^2 + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2}n^2 + \bar{C}_{44} \quad (140)$$

$$T_{45} = -\frac{\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}}{R}\zeta_m n \quad (141)$$

$$T_{46} = -\left[2e_{31e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z z_p dz - e_{15e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz\right]\zeta_m \quad (142)$$

$$T_{55} = \bar{D}_{66}\zeta_m^2 + \frac{\bar{D}_{22}}{R^2}n^2 + \bar{C}_{55} \quad (143)$$

$$T_{56} = \left[-e_{24e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz + \frac{2e_{32e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z z_p dz\right]n \quad (144)$$

$$T_{61} = -\frac{h_p e_{31e}}{R}\zeta_m \quad (145)$$

$$T_{62} = \frac{h_p e_{32e}}{R^2}n \quad (146)$$

$$T_{63} = -h_p e_{15e}\zeta_m^2 - \frac{h_p e_{24e}}{R^2}n^2 + \frac{h_p e_{32e}}{R^2} \quad (147)$$

$$T_{64} = -\left(h_p e_{15e} + h_p e_{31e} + \frac{e_{31e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z dz\right)\zeta_m \quad (148)$$

$$T_{65} = \left(\frac{h_p e_{24e}}{R} + \frac{h_p e_{32e}}{R} + \frac{e_{32e}}{R^2}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z dz\right)n \quad (149)$$

$$T_{66} = \zeta_m^2 \xi_{11e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz + n^2 \xi_{22e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R(R+z)} dz - 2\xi_{33e}h_p - \frac{2\xi_{33e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz \quad (150)$$

12- مراجع

- [1] M. Koizumi, FGM activities in Japan, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-4, 1997.
- [2] M. Wośko, B. Paszkiewicz, T. Piasecki, A. Szyzka, R. Paszkiewicz, M. Tłaczała, Application and modelling of functionally graded materials for optoelectronic devices, *Proceedings of 2005 International Students and Young Scientists Workshop*, Photonics and Microsystems, pp. 87-89, 7-8 July, 2005
- [3] J. Fleig, K. Kreuer, J. Maier, *Handbook of Advanced Ceramics, Materials, Applications, and Processing*, pp. 1-60, 2003.
- [4] M. Ruzzene, A. Baz, Dynamic stability of periodic shells with moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 4, pp.

$$L_{56} = \left[-e_{24e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz + \frac{2e_{31e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z z_p dz\right]\frac{\partial}{\partial \theta} \quad (111)$$

$$L_{61} = \frac{h_p e_{31e}}{R}\frac{\partial}{\partial x} \quad (112)$$

$$L_{62} = \frac{h_p e_{32e}}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \quad (113)$$

$$L_{63} = h_p e_{15e}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h_p e_{24e}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{h_p e_{32e}}{R^2} \quad (114)$$

$$L_{64} = \left(h_p e_{15e} + h_p e_{31e} + \frac{e_{31e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z dz\right)\frac{\partial}{\partial x} \quad (115)$$

$$L_{65} = \left(\frac{h_p e_{24e}}{R} + \frac{h_p e_{32e}}{R} + \frac{e_{32e}}{R^2}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z dz\right)\frac{\partial}{\partial \theta} \quad (116)$$

$$L_{66} = -\xi_{11e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} P(z_p) dz - \xi_{22e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R(R+z)} dz \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\xi_{33e}h_p - \frac{2\xi_{33e}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z_p dz \quad (117)$$

$$L_{12} = L_{21} \quad (118)$$

$$L_{24} = L_{15} \quad (119)$$

$$L_{41} = L_{14} \quad (120)$$

$$L_{42} = L_{15} = L_{51} \quad (121)$$

$$L_{52} = L_{25} \quad (122)$$

$$L_{54} = L_{45} \quad (123)$$

$$T_{11} = \bar{A}_{11}\zeta_m^2 + \frac{\bar{A}_{66}}{R^2}n^2 \quad (124)$$

$$T_{12} = -\frac{\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}}{R}\zeta_m n \quad (125)$$

$$T_{13} = -\frac{\bar{A}_{12}}{R}\zeta_m \quad (126)$$

$$T_{14} = \bar{B}_{11}\zeta_m^2 + \frac{\bar{B}_{66}}{R^2}n^2 \quad (127)$$

$$T_{15} = -\frac{\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}}{R}\zeta_m n \quad (128)$$

$$T_{16} = 0 \quad (129)$$

$$T_{22} = \bar{A}_{66}\zeta_m^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2}n^2 + \frac{\bar{C}_{55}}{R^2} \quad (130)$$

$$T_{23} = \frac{\bar{A}_{22} + \bar{C}_{55}}{R^2}n \quad (131)$$

$$T_{24} = -\frac{\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}}{R}\zeta_m n \quad (132)$$

$$T_{25} = \bar{B}_{66}\zeta_m^2 + \frac{\bar{B}_{22}}{R^2}n^2 - \frac{\bar{C}_{55}}{R^2} \quad (133)$$

$$T_{26} = n\left[e_{24e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{P(z_p)}{R+z} dz + 2e_{31e}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} z z_p dz\right] \quad (134)$$

$$T_{33} = \bar{C}_{44}\zeta_m^2 + \frac{\bar{C}_{55}}{R^2}n^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \quad (135)$$

- [16] M. Ashjari, M. Khoshnavan, Mass optimization of functionally graded plate for mechanical loading in the presence of deflection and stress constraints, *Composite Structures*, Vol. 110, pp. 118-132, 2014.
- [17] A. Taheri, B. Hassani, N. Moghaddam, Thermo-elastic optimization of material distribution of functionally graded structures by an isogeometrical approach, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, No. 2, pp. 416-429, 2014.
- [18] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, American Mathematical Society, pp. 1-5, 1953.
- [19] H.-S. Shen, *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*, CRC press, pp. 3-9, 2009.
- [20] F. Vakili-Tahami, M. Zehsaz, A. Mohammad Alizadeh Fard, Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 23-34, 2014 (in Persian).
- [21] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, pp. 109-165, 2004.
- [22] G. Sheng, X. Wang, Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 27, No. 6, pp. 1075-1087, 2008.
- [23] S. S. Vel, B. P. Baillargeon, Analysis of static deformation, vibration and active damping of cylindrical composite shells with piezoelectric shear actuators, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 127, No. 4, pp. 395-407, 2005.
- [24] S. S. Law, X. Q. Zhu, *Moving loads: dynamic analysis and identification techniques*, CRC Press, Balkema, pp. 27-45, 2011.
- [25] E. Atashpaz-Gargari, C. Lucas, Imperialist competitive algorithm: an algorithm for optimization inspired by imperialistic competition, *Proceedings of 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 4661-4667, 25-28 September, 2007.
- [26] M. Amabili, Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells with imperfections, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No. 4, pp. 921-975, 2003.
- [27] JAHM Software, Material Properties Database MPDB, v7.59, 2012.
- [5] A. Jafari, H. Ghiasvand, Dynamic response of a pseudoelastic shape memory alloy beam to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 316, No. 1, pp. 69-86, 2008.
- [6] P. Malekzadeh, A. Fiouz, H. Razi, Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load, *Composite Structures*, Vol. 90, No. 2, pp. 105-114, 2009.
- [7] S. Khalili, A. Jafari, S. Eftekhari, A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2497-2511, 2010.
- [8] G. Sheng, X. Wang, Studies on dynamic behavior of functionally graded cylindrical shells with PZT layers under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 323, No. 3, pp. 772-789, 2009.
- [9] A. Alibeigloo, W. Chen, Elasticity solution for an FGM cylindrical panel integrated with piezoelectric layers, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 4, pp. 714-723, 2010.
- [10] R.A. Alashti, M. Khorsand, Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 88, No. 5, pp. 167-180, 2011.
- [11] A. Jafari, S. Khalili, M. Tavakolian, Nonlinear vibration of functionally graded cylindrical shells embedded with a piezoelectric layer, *Thin-Walled Structures*, Vol. 79, pp. 8-15, 2014.
- [12] J. Cho, D. Ha, Volume fraction optimization for minimizing thermal stress in Ni-Al₂O₃ functionally graded materials, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 334, No. 1, pp. 147-155, 2002.
- [13] L. Qian, R. Batra, Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, No. 1, pp. 415-424, 2005.
- [14] A. J. Goupee, S. S. Vel, Two-dimensional optimization of material composition of functionally graded materials using meshless analyses and a genetic algorithm, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 195, No. 44, pp. 5926-5948, 2006.
- [15] M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials, *Acta mechanica*, Vol. 208, No. 3-4, pp. 147-161, 2009.