مجلهٔ فنی و مهندسی مدرس- مهندسی مکانیک
دوره ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹ ص‌ص ۹-۲۰
(دریافت مقاله: آذر ۱۳۸۶، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۷)

شبیه‌سازی مستقیم جریان جت دوبعدی مغشوش به‌روش تفاضل محدود فشرده

محمد جواد مغربی[۱*]، حسین ایزی[۲]، احد ضرغامی[۳]

۱- دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
۲- کارشناس ارشد مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
*مشهد، صندوق پستی ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵، **mjmaghrebi@um.ac.ir***

چکیده- در این پژوهش معادلات بی‌بعد شده ناویر استوکس در شکل چرخشی برای جت دوبعدی صفحه‌ای به‌روش مستقیم عددی حل شده است. با در نظر گرفتن توزیع سرعت در ورودی دامنه محاسباتی، از نیم عرض جت به‌عنوان طول مشخصه و از سرعت خط مرکزی به‌عنوان سرعت مشخصه به‌منظور بی‌بعد سازی استفاده شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، گسسته سازی شده و از نگاشت $y=-\beta\cot(\pi\zeta)$ برای ارتباط‌دهی دامنه فیزیکی $-\infty\le y\le\infty$ به دامنه محاسباتی $0\le\zeta\le 1$ استفاده شده است. برای توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده و شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه‌بعدی کاملا لزج استوکس و جریان ایدئال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است. در این مطالعه جریان جت مغشوش در دستگاه مختصات خود تشابه بررسی شده و توزیع شدت توربولانس و تنش رینولدز به‌دست آمده است. نتایج بیانگر رفتار غیرخودتشابهی لایه برشی است.

کلیدواژگان: جریان جت دوبعدی، اختلاف محدود فشرده، خود تشابهی، نیم عرض جت، سرعت خط مرکزی.

Direct Numerical Simulation of 2D Forced Jet using the Compact Finite Difference Method

M.J. Maghrebi[1*], H.Eazi[2], A.Zarghami[3]

1- Associate prof., Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Ferdowsi Uni. of Mashhad
2- Graduate student, Department of Mech. Eng., Shahrood University of Technology
3- Ph.D. candidate, Department of Mech. Eng., Shahrood Uni. of Tech., Shahrood
***P.O.B. 91775-1111, mjmaghrebi@um.ac.ir**

Abstract- The dimensionless form of Navier-Stokes equations for two dimensional jet flows are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of jet flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the jet Reynolds number. These two characteristics are jet half-width and centerline velocity. Governing equations are discretized in streamwise and cross stream directions using a sixth order compact finite difference scheme and a mapped compact finite difference method, respectively. Cotangent mapping of $y=-\beta\cot(\pi\zeta)$ is used to relate the physical domain of y to the computational domain of ζ. The compact third order Runge-Kutta method is used for time-advancement of the simulation. convective outflow boundary condition is employed to create a non-reflective type boundary condition at the outlet. An inviscid Stuart flow and a completely viscose solutions of Navier Stokes equations are used for the verification of numerical simulations. Results for perturbed jet flow in self-similar coordinates were also investigated which indicate that the time-averaged statistics for velocity, vorticity, turbulence intensities and Reynolds stress distribution tend to collapse on top of each other at flow downstream locations.

Keywords: 2D Jet Flow, Compact Finite Difference, Jet Half-width, Jet Centerline

۱- مقدمه

جریان جت دوبعدی حالت پایدار به‌کمک تئوری لایه مرزی توسط شلیختینگ [۱] و بیکلی [۲] تحلیل شده است. آنها توزیع سرعت جریان را به‌دست آوردند و نتایجی را درباره چگونگی تناسب بین سرعت خط مرکزی و نیم عرض جت نسبت به جهت جریان ارائه کردند.

حل عددی جریان آرام در یک چهارم سطح توسط انصاری، شیشکین و هگارتی [۳] انجام شده است. آنان ارتباط لزجت سینماتیک با طول اصلی جریان را بررسی و تابع جریان را به‌صورت تابعی از x و y معرفی کردند. روش مش‌های شیشکین به‌وسیله انصاری [٤] به‌طور کامل مطالعه شد. وی به بررسی جت آرام دوبعدی غیر قابل تراکم براساس این روش و طرح مش یکنواخت تکه‌ای پرداخته و با مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج تئوری شیلیختینگ [۱] خطاها را بررسی کرده و با توجه به تغییرات لزجت سینماتیکی به بررسی خطاها پرداخته است.

جت‌های آرام صفحه‌ای و متقارن مرکزی به‌کمک تکنیک SFC (روشی مبتنی بر استفاده از تابع جریان به‌صورت نوعی مختصات) توسط تسوکیجی [۵] و تاکاشی [٦] و زاربی [۷] بررسی شده و توافق خوبی در مقایسه با نتایج تئوری به‌دست آمده است.

حل جریان جت صفحه‌ای تراکم‌ناپذیر به‌کمک روش‌های مستقیم عددی، DNS [1] و حل لاگرانژ مستقیم مونت کارلو، $DSMC$ توسط مرگان و آرمفیلد [۸] انجام و این دو روش مقایسه شد. در هر دو روش مشخص شده که سرعت جت در جهت اصلی جریان با $x^{-1/3}$ و نیم عرض جت متناسب با $x^{2/3}$ است. همچنین با مقایسه این دو روش مشخص شد که DNS سریعتر همگرا می‌شود. جزییات بیشتر در مورد شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان جت در [۹ و۱۰] آورده شده است.

1- Direct Numerical Simulation

در این پژوهش معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی به‌طور مستقیم شبیه‌سازی شده است. از روش اختلاف محدود فشرده برای مشتقات اول و دوم و برای پیشروی محاسبات در زمان از رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در مرز ورودی توزیعی به‌شکل $U_0(y)=1/\cosh^2 y$ قرار داده شده و در مرز خروجی از شرط مرزی جابه‌جایی استفاده شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه‌بعدی کاملا لزج استوکس و جریان ایدئال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم

در این تحقیق شکل چرخشی معادلات ناویر استوکس به‌صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل‌سازی یا ساده‌سازی به‌صورت عددی تحلیل شده است.

شکل بی‌بعد معادله ناویراستوکس برای جریانهای تراکم‌ناپذیر به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+(\vec{U}.\nabla)\vec{U}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (1)$$

با توجه به اتحاد زیر:

$$\begin{aligned}\nabla(A.B)&=(B.\nabla)A+(A.\nabla)B+\\ &B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B)\end{aligned} \qquad (2)$$

برای $A=B=\vec{U}=(U,V,W)$ داریم:

$$(\vec{U}.\nabla)\vec{U}=\vec{\omega}\times\vec{U}+\frac{1}{2}\nabla(\vec{U}.\vec{U}) \qquad (3)$$

که در آن $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. اگر معادله (۳) در معادله (۱) جایگزین شود معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=\vec{H}-\nabla(p+\frac{\vec{U}.\vec{U}}{2})+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (4)$$

که در آن $\vec{H}=(H_1,H_2,H_3)=\vec{U}\times\vec{\omega}$. با اعمال عملگر کرل به دوسمت معادله (٤)، داریم:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1389.10.3.7.2]

$$\frac{\partial(\nabla\times\vec{U})}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}-\nabla\times\nabla\left(p+\frac{\vec{U}\cdot\vec{U}}{2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{2}(\nabla\times\vec{U}) \qquad (۵)$$

با توجه به اینکه $\nabla\times\nabla(scalar)=0$، معادلـه (۵) بـه رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{2}\vec{\omega} \qquad (۶)$$

با اعمال مجدد عملگر کـرل بـه دوسـمت معادلـه (۶) معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\nabla\times(\nabla\times\vec{U})}{\partial t}=\nabla\times(\nabla\times\vec{H})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{2}(\nabla\times(\nabla\times\vec{U})) \qquad (۷)$$

با توجه به معادله پیوستگی $(\nabla\cdot\vec{U}=0)$ و با اعمال رابطه زیر:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{U})=\nabla(\nabla\cdot\vec{U})-\nabla^{2}\vec{U} \qquad (۸)$$

معادله (۷) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial\nabla^{2}\vec{U}}{\partial t}=-\nabla\times(\nabla\times\vec{H})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{4}\vec{U} \qquad (۹)$$

کـه در آن $\vec{H}=(H_1,H_2,H_3)=\vec{U}\times\vec{\omega}$ جملـه‌هـای غیرخطی است.

مزیت استفاده از این شکل معادلات ناویر استوکس، کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای حافظه مـورد نیاز و همچنین نیاز نداشتن به تعیین فـشار در مرزهـای مـسأله است. البته بهایی که برای این دو مزیت پرداخته می‌شود، تغییر مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار است [۹].

با جداسازی سرعت لحظه‌ای به‌صورت زیر [۱۱]:

$$U(x,y,t)=u(x,y,t)+U_0(y) \qquad (۱۰)$$
$$V(x,y,t)=v(x,y,t)$$

و با در نظر گرفتن اولین مؤلفـه معادلـه (۹) در جهـت اصلی جریان (x) و در حالت دوبعدی معادله زیر به‌دست می‌آید. برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] مراجعه شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{2}u=\frac{\partial^{2}H_1}{\partial y^{2}}-\frac{\partial^{2}H_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{4}U \qquad (۱۱)$$

۳- شرایط مرزی و شرط اولیه

معادله (۱۱) معادله‌ای مرتبه چهار بوده و به اعمـال چهـار شرط مـرزی نیـاز دارد. مقـادیر u در مرزهـای ورودی و خروجی دامنه محاسباتی به‌عنـوان شـرط مـرزی دریـشله مشخص می‌شوند. همچنین با توجه به معادلـه پیوسـتگی، $\partial u/\partial x$ در مرزهای ورودی و خروجی دامنـه محاسـباتی به‌عنوان شرط مرزی نیومن مشخص و معرفی می‌شود. در شبیه‌سـازی، سـرعت پایـه $U_0(y)$ (یکـی از مؤلفـه‌هـای سـرعت لحظـه‌ای در جهـت اصـلی جریـان) بـا توزیـع $U_0(y)=1/\cosh^{2}y$ مطابق نتـایج تحلیلـی شـلیختینگ [۱] برقرار می‌شود.

در مرز خروجی از شرط مرزی جابه‌جایی به‌کـار بـرده شده توسط تروسـیلا [۱۲] اسـتفاده شـده اسـت. در مـرز خروجی نباید هیچ گونه برگشت جریان بـه داخـل دامنـه مشاهده شود. از معادله جابه‌جایی برای تولید شرط مـرزی دریشله برای هر دو مؤلفه سرعت استفاده شده که معادلـه آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-c\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (۱۲)$$

در این معادله، مؤلفه‌هـای سـرعت u و v جـایگزین ψ می‌شود. c سرعت موج یا سرعت جریان در جهـت اصـلی در مرز خروجی است. به بیان دیگر، c سـرعت جابـه‌جـایی ساختارهای با مقیـاس بـزرگ[۱] درون لایـه اسـت. هـدف از کاربرد این شرط مرزی آن است که به سیال اجازه داده شـود در وضعیتی طبیعی دامنه محاسباتی را ترک کنـد. بنـابراین c به‌صورت سرعت متوسط جریان معرفی می‌شود.

1. Large scale structure

[DOR: 20.1001.1.10275940.1389.10.3.7.2]

توزیع سرعت متوسط $U_0(y) = 1/\cosh^2 y$ به‌طور یکنواخت در تمامی ایستگاههای x، شرط اولیه برای جریان دوبعدی جت غیراجباری است. از همین شرط برای شرط اولیه جریان اجباری جت استفاده می‌شود. براساس مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه‌سازی جریان اجباری و غیراجباری جت مناسب است. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی ($x=0$)، باید مجاز به خروج از مرزها $(x=L_x)$ باشد. جریان جت همچنین باید به حالت ایستای آماری[1]، هنگامی که مؤلفه‌های سرعت متوسط، مستقل از زمان باشند، برسد.

۴- مراحل محاسبات

الگوریتم حل معادله ناویر استوکس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u ، از معادله پیوستگی می‌توان مقدار v را محاسبه کرد.

۲. با توجه به اینکه $\omega = \nabla\times U$ و برای حالت دوبعدی داریم $\omega_1=0$ و $\omega_2=0$ و لذا مقدار $\omega_3=\omega=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$ حساب می‌شود.

۳. بنا به تعریف $H=U\times\omega$ که برای حالت دوبعدی $H_3=0$ و در نتیجه $H_1=V.\omega$ و $H_2=-U.\omega$.

٤. محاسبه جملات غیرخطی در معادله ناویر استوکس که به‌شکل $\frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 H_2}{\partial x\,\partial y}$ است.

٥. محاسبه جملات لزجتی که به‌شکل $\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4 U$ است.

٦.پس از محاسبه سمت راست معادله (١١)، به‌روش رانج کوتای مرتبه سوم، سمت راست معادله پواسون $\nabla^2 u = R$ محاسبه می‌شود.

۷. با مشخص شدن R، معادله پواسون بالا در شکل گسسته حل می‌شود. حل این معادله در شکل ماتریسی به شکل $A\,\Delta u + \Delta u\, B = C$ است که بر طبق الگوریتم بارتلز [۱۳]، مقدار Δu از آن استخراج می‌شود.

۸. با مشخص شدن Δu، که تفاضل u در دو زیر مرحله زمانی است، u جدید به‌دست می‌آید.

۹. کلیه مراحل بالا برای یک زیر دامنه زمانی است که از uی تولید شده در مرحله قبل به‌عنوان شرط اولیه مرحله جدید استفاده می‌شود.

۴-۱- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با به‌کار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد لیله [١٤] محاسبه شده است. لیله مشتق اول تابع $f(x)$ را به‌طور ضمنی[2] با معادله زیر توصیف کرده است:

$$\alpha f'_{j-1}+f'_j+\alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha+2}{3h}(f_{j+1}-f_{j-1})+\frac{4\alpha-1}{12h}(f_{j+2}-f_{j-2}) \qquad (12)$$

که علامت پریم مشتق اول، j تعداد گره $(1\le j\le J)$ و $h=\Delta x=Lx/Nx$ که در آن $Nx=J-1$
اگر در این معادله، $\alpha=1/4$ یا $\alpha=1/3$ قرار داده شود، طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم به‌دست خواهد آمد. در مرزها یعنی جایی که $j=1$ یا $j=J$ نوعی طرح مرتبه سوم یک‌طرفه ضمنی استفاده شده است:

$$f'_1+2f'_2=\frac{1}{2h}(-5f_1+4f_2+f_3) \qquad (13)$$

$$f'_J+2f'_{J-1}=\frac{1}{2h}(5f_J-4f_{J-1}-f_{J-2}) \qquad (14)$$

1. Statistical stationary

2. Implicitly

[DOR: 20.1001.1.10275940.1389.10.3.7.2]

در همسایگی مرزها یعنی در $j=2$ یا $j=J-1$، از معادله (۱۲) به ازای $\alpha=1/4$ استفاده می‌شود. همان‌طور که لیله بحث کرده است، با قرار دادن $\alpha'=(16\alpha+32)/(40\alpha-1)$ به جای α در معادله (۱۲) برای گره‌های $j=2$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}f(u)$ را تضمین نمود.

برای محاسبه مشتق دوم تابع $f(x)$، از طرح اختلاف محدود فشرده با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است:

$$\alpha f''_{j-1}+f''_j+\alpha f''_{j+1}=\frac{4(1-\alpha)}{3h^2}(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1})+\frac{10\alpha-1}{12h^2}(f_{j+2}-2f_j+f_{j-2}) \quad (15)$$

که در آن $\alpha=1/4$. در اینجا مسأله ناهنجاری نیز مورد توجه قرار گرفته و معادله در $1/\alpha$ ضرب شده است. در مرزها از طرح مرتبه سوم یک‌طرفه ضمنی استفاده شده است:

$$f''_1+11f''_2=\frac{1}{h^2}(13f_1-27f_2+15f_3-f_4) \quad (16)$$

$$f''_J+11f''_{J-1}=\frac{1}{h^2}(13f_J-27f_{J-1}+15f_{J-2}-f_{J-3}) \quad (17)$$

با مشتق گیری از معادله (۱۳) معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$f''_1+2f''_2=\frac{1}{2h}(-5f'_1+4f'_2+f'_3)=\frac{-3}{h}f'_1+\frac{1}{2h}(f'_1+4f'_2+f'_3) \quad (18)$$

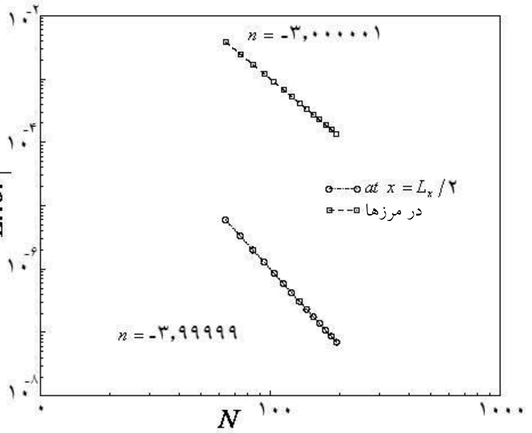
اگر جمله سمت راست معادله (۱۸)، با معادله (۱۲) در حالت $\alpha=1/4$ جایگزین شود، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$f''_1+2f''_2=\frac{-3}{h}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0}-\frac{3}{2h^2}(f_1-f_2) \quad (19)$$

روش مشابهی را می‌توان برای گره J به‌کار برد:

$$f''_J+2f''_{J-1}=\frac{3}{h}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=Lx}-\frac{3}{2h^2}(f_J-f_{J-2}) \quad (20)$$

نزدیک مرزها که $j=1$ و $j=J-1$، از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده که با جایگزینی $\alpha=1/10$ در معادله (۱۵) به‌دست می‌آید. میزان خطا در شکل ۱ برای گره‌های مرزی و داخلی ترسیم شده است[۱۱]. برای محاسبه مشتقات چهارم می‌توان عملگر مشتق دوم را دو بار اعمال کرد که بدین ترتیب جمله‌های لزجتی موجود در سمت راست معادله ناویر استوکس محاسبه می‌شوند.



شکل ۱ مرتبه خطا در محاسبه مشتق دوم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده [۱۱].

۲-۴- روش محدودسازی دامنه y

جریان جت، جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب است، در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم، یعنی $-\infty \le y \le \infty$ است. برای گنجاندن y در دامنه محاسباتی از نوعی تابع یک‌به‌یک مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا مختصات فیزیکی y به مختصات

محاسباتی $۱ \le \zeta \le ۰$ تبدیل شود. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت است، اما در مجموعه فیزیکی، این فواصل مساوی نیستند و در ناحیه مرکزی جریان بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به‌وسیله معادله زیر توصیف شده است [۱۱]:

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \tag{۲۱}$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض شبکه است. برای مشتق‌گیری تابع f نسبت به y از قانون زنجیره‌ای به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{۲}{\pi\beta} \cos^{۲}(\pi\zeta/۲) \frac{df}{d\zeta} \tag{۲۲}$$

با برابر قرار دادن $\lambda_۱ = \frac{۲}{\pi\beta}\cos^{۲}(\pi\zeta/۲)$ رابطه فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{df}{dy} = \lambda_۱ \frac{df}{d\zeta} \tag{۲۳}$$

برای محاسبه مشتق دوم نیز به‌شکل مشابه عمل می‌شود:

$$\frac{d^{۲}f}{dy^{۲}} = \lambda_۲ \frac{d^{۲}f}{d\zeta^{۲}} + \lambda_۳ \frac{df}{d\zeta} \tag{۲٤}$$

$$\lambda_۲ = \lambda_۱^{۲} \tag{۲۵}$$

$$\lambda_۳ = -\frac{۴}{\pi\beta^{۲}} \sin(\pi\zeta/۲) \cos^{۳}(\pi\zeta/۲) \tag{۲٦}$$

۴-۳- انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی

با حل معادله(۹) می‌توان $u(x,y,t)$ را به‌دست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادله پیوستگی استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = ۰ \tag{۲۷}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{۲۸}$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، ماتریس سمت راست معادله (۱۲) دارای عناصر صفر روی قطر اصلی است و لذا نمی‌توان به انتگرال‌گیری پرداخت. برای حل این مشکل با مشتق‌گیری از دو سمت معادله برحسب y، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^{۲} v}{\partial y^{۲}} = -\frac{\partial^{۲} u}{\partial x\, \partial y} \tag{۲۹}$$

با وجود دو شرط مرزی برای v به‌صورت $y = \pm\infty \to v = ۰$ این معادله به شکل زیر حل می‌شود [۱۱].

چنانچه از معادله (۲٤)، به‌جای سمت چپ معادله (۲۹) و برای $d^{۲}v/d\zeta^{۲}$ و $dv/d\zeta$ از معادل آن مطابق طرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، آنگاه می‌توان با اعمال شرایط مرزی $v(x, y = \pm\infty, t) = 0$، حل را انجام داد.

۴-۴- پیشروی در زمان

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به‌وسیله رای [۱۵] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به‌کار می‌رود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به‌صورت معادله (۳۰)، مطابق جدول ۱ می‌توان فرایند را انجام داد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \tag{۳۰}$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt، سمت راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه

[DOR: 20.1001.1.10275940.1389.10.3.7.2]

شود. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i)\Delta t$ پیش می‌رود و u به‌وسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌شود. پس از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt پیش رفته و مقدار u محاسبه شده برابر با مقدار u پس از گذشت یک Δt زمانی است. از مساوی قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با ضرایب طرح داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$
$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$
$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2}(1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$
$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

ضرایب برای یک خانواده از حل فوق با $d_1 = 0$ به‌صورت زیربه دست می‌آید.

$$c_1 = 8/15 \qquad d_1 = 0$$
$$c_2 = 5/12 \qquad d_2 = -17/60$$
$$c_3 = 3/4 \qquad d_3 = -5/12$$

جدول ۱ طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + (c_1 + d_1)\Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2)\Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R)\Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t'' + (c_3 + d_3)\Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R')\Delta t$	

۴-۵- حل معادله پواسون

پس از محاسبه سمت راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 u$ به‌دست می‌آید. لذا داریم:

$$\nabla^2 u = C \qquad (32)$$

که C معلوم و u مجهول است. با بسط این معادله

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \qquad (33)$$

و جایگزین کردن عملگرهای مشتقات دوم در جهت‌های x و y معادله زیردر شکل گسسته به‌دست می‌آید[۱۱]:

$$(D2X\ u^T)^T + D2Y\ u = C \qquad (34)$$

توجه کنید که برای اعمال عملگر مشتق دوم در جهت X باید تابع مورد نظر را ترانهاده و سپس در ماتریس عملگر $D2X$ ضرب کرده و سپس از نتیجه ضرب دو ماتریس ترانهاده گرفته شود. با توجه به این‌که:

$$(ST)^T = T^T S^T \qquad (35)$$

معادله(۳۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$u.D2X^T + D2Y\ u = C \qquad (36)$$

روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ توسط بارتلز [۱۳] ارائه شده که در آن $A = D2Y$ و $B = D2X^T$ و $X = u$ می باشد.

۵- ارزیابی نتایج

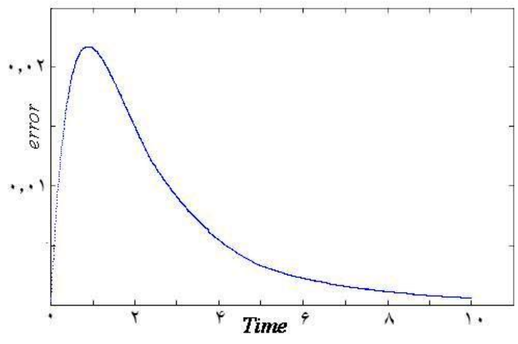
به‌منظور ارزیابی صحت شبیه‌سازی‌ها، نتایج به‌دست آمده با بعضی از حل‌های دقیق معادله ناویر استوکس در حالت‌های خاص مقایسه شده است.

۵-۱- معادله دیفیوژن وابسته به زمان

حل عددی معادله ناویر استوکس با حل تحلیلی معادله دیفیوژن ارزیابی گردید. معادله دیفیوژن مربوط به حالتی است که $H=0$. یک حل خاص برای معادله دیفیوژن به‌صورت زیر است [۱۱]:

$$u(x,y,t)=\cos(x)\times\frac{y-1}{\left(1+\frac{4t}{Re}\right)^{1.5}}\times\exp(-2t/Re)\times\exp\left(-\frac{(y-1)^2}{\left(1+\frac{4t}{Re}\right)}\right) \quad (۳۷)$$

برای این مقایسه باید از معادله فوق برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده شود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابه‌جایی و تشکیل جمله‌های غیرخطی در این مقایسه نمی‌توانند ارزیابی شوند. اما حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان را می‌توان ارزیابی کرد. توجه شود که u شرط پایداری را ارضا می‌کند و حل را می‌توان برای شبیه‌سازی جریان جت کاملاً لزج استفاده کرد. پارامترهای این آزمایش $L_x=2\pi/3$ و $\beta=4$ و $Re=10$ و $t=20$ و $Nx=45$ و $Ny=40$ است. شکل ۲ دقت حل وابسته به زمان را برای u نشان می‌دهد.



شکل ۲ تحلیل خطا برای u در معادله دیفیوژن وابسته به زمان

۵-۲- گردابه‌های استوارت

حل دقیق برای معادله ناویر استوکس غیر لزج برای لایه‌های اختلاطی دوبعدی به‌وسیله استوارت [۱٦] ارائه شده است. جریان در جهت اصلی جریان متناوب بوده و با سرعت متوسط لایه c، به سمت پایین‌دست جریان حرکت می‌کند. حل به شکل تابع جریان ψ که به ترتیب زیر به مؤلفه‌های سرعت $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$ و $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ وابسته است.

$$\psi(x,y,t)=cy+\ln(a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)) \quad (۳۸)$$

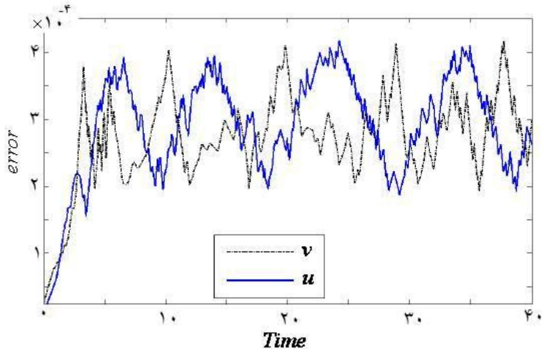
که در آن $b=\sqrt{a^2-1}$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابه‌جایی را ارضا می‌کند که c سرعت جابه‌جایی موج است. بنابراین حل استوارت می‌تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابه‌جایی به کار رود. در این تست تشکیل جمله لزج بررسی نمی‌شود اما تشکیل جمله‌های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان به خوبی ارزیابی می گردند. مؤلفه‌های سرعت u,v و همچنین مؤلفه ورتیسیته ω، با مشتق‌گیری از رابطه فوق به‌دست می‌آیند[۱۱]:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=c+\frac{a\sinh(y-y_0)}{a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)} \quad (۳۹)$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{b\sin(x-ct)}{a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)} \quad (۴۰)$$

$$\omega=\frac{1}{\left[a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)\right]^2} \quad (۴۱)$$

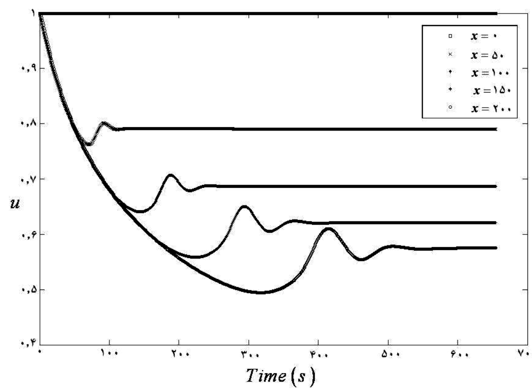
شکل ۳ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می‌دهد.



شکل ۳ تحلیل خطا برای u و v مقایسه با حل تحلیلی استوارت.

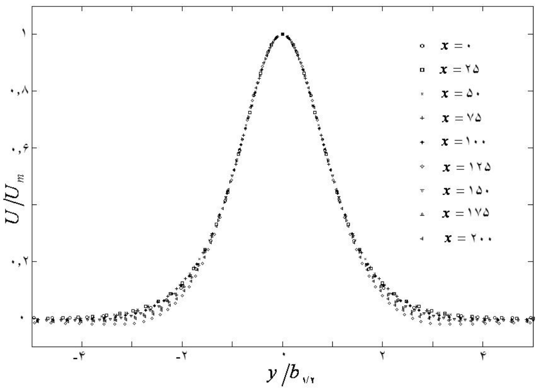
۶- شبیه‌سازی جریان جت دوبعدی آرام (Re =۳۰۰)

برای شبیه‌سازی جریان جت آرام باید سرعت به حالت پایدار و ثابت در هر مکان برسد. این موضوع در شکل ٤ برای مؤلفه u نشان داده شده است این شکل تاریخچه مؤلفه سرعت u را در پنج ایستگاه با فاصله مساوی در جهت جریان نشان می‌دهد.



شکل٤ گذر زمانی u در پنج فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه‌سازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

در شکل ۵ توزیع سرعت جت در حالت بی‌بعد و در مقاطع مختلف نشان داده شده که در آن y با $b_{۱/۲}$ (نیم عرض جت) و u با U_m (سرعت خط مرکزی) بی‌بعد شده است.



شکل۵ توزیع سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی آرام

۷- جریان جت دوبعدی مغشوش (Re=۳۰۰)

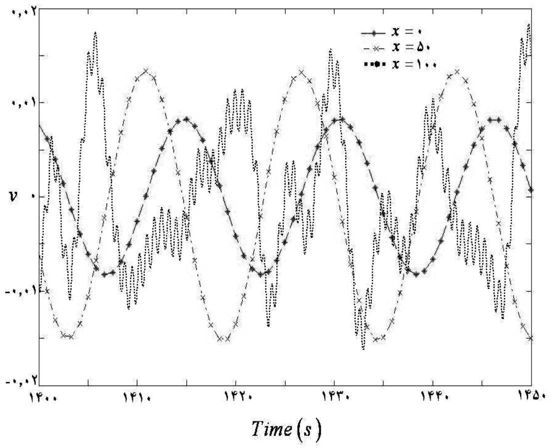
برای مطالعه جت دوبعدی مغشوش، جریان جت را در حالتی توسعه می‌دهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار داده می‌شود. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y حاصل از حل معادله اورسامرفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان جت [۱۷] است که فقط برای توزیع v به‌کار برده می‌شود.

مؤلفه‌های اغتشاش u و v از ناپایدارترین مود حاصل از حل معادله پایداری دو مود ناپایداری به‌دست می آیند. سرعت لحظه‌ای در شبیه‌سازی همراه با اغتشاشها باید به حالت سکون (پایدار) برسد و در واقع سرعت متوسط مستقل از زمان می‌شود. به‌عنوان نمونه، گذر زمانی v در سه فاصله مساوی در جهت طول L_x در شکل ٦ نشان داده شده است. با توجه این شکل مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های سرعت v به حالت پایدار و ایستا رسیده‌اند. همچنین با توجه به این شکل مشخص است که لایه

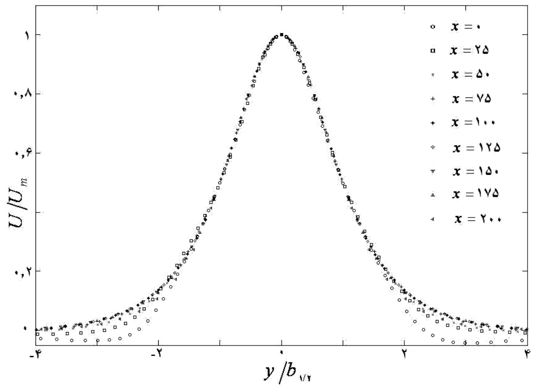
برشی متناوب است که اغتشاش اعمال شده در مرز ورودی دامنه محاسباتی دلیل آن است.

شکل‌های ۷ و ۸ نتایج شبیه‌سازی را برای سرعت متوسط در جهت جریان اصلی و گردابه در مقاطع مختلف، در مختصات خود تشابه نشان می‌دهد. در این شکل به‌خوبی می‌توان پدیده خود تشابهی را برای سرعت متوسط و گردابه مطالعه کرد. دیده می‌شود که در حالت مغشوش، جریان، رفتار خودمشابه از خود نشان نمی‌دهد، که این ناشی از اعمال اغتشاشها در مرز ورودی است.

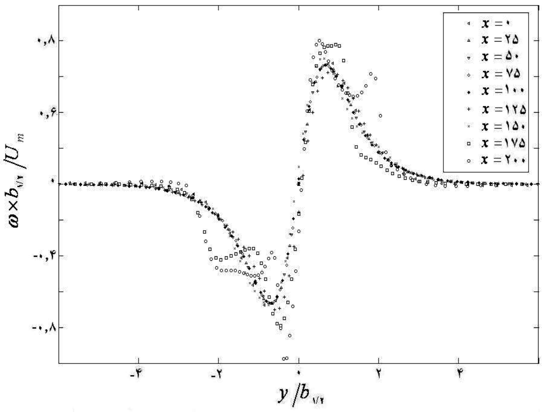
در شکل ۹ چگونگی توسعه سرعت متوسط خط مرکزی و نیم عرض جت با توجه به جهت جریان نشان داده شده است. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ پارامترهای شدت توربولانس و در شکل ۱۲ توزیع تنش رینولدز نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص شده با دور شدن از مرز ورودی، این تنش‌ها افزایش می‌یابد، که این رفتار، بار دیگر بیانگر رفتار غیرخودتشابه در جریان جت است.



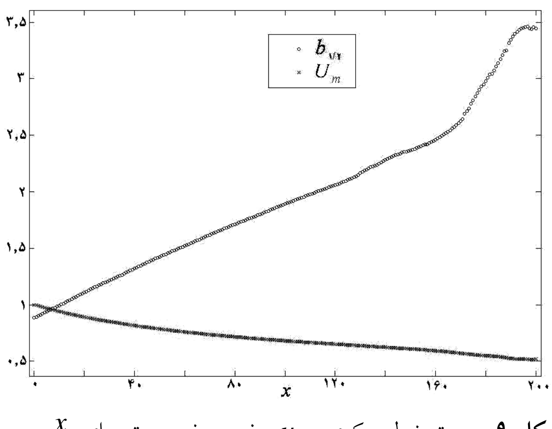
شکل ۶ گذر زمانی v در سه فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



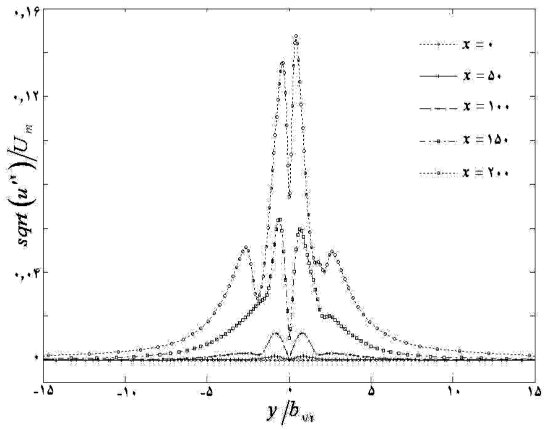
شکل ۷ توزیع سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



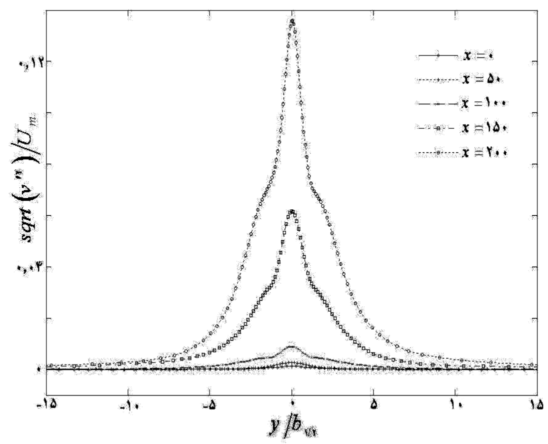
شکل ۸ توزیع گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



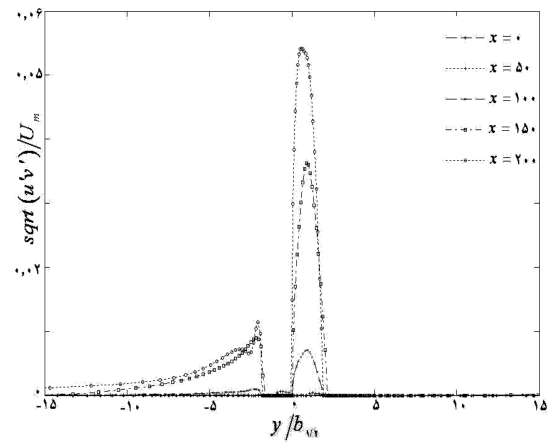
شکل ۹ سرعت خط مرکزی u_m و نیم عرض جت برای x



شکل ۱۰ تغییرات $\sqrt{u'^2}/U_m$ در برابر تغییرات $y/b_{1/2}$



شکل ۱۱ تغییرات $\sqrt{v'^2}/U_m$ در برابر تغییرات $y/b_{1/2}$



شکل ۱۲ تغییرات $\sqrt{u'v'}/U_m$ در برابر تغییرات $y/b_{1/2}$

۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، جریان جت دوبعدی تراکم‌ناپذیر به‌کمک حل مستقیم عددی معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی مطالعه شد. دقت مناسب این روش با بررسی و ارزیابی دو جواب تحلیلی ارزیابی گردید. نتایج نشان می‌دهند که شبیه‌سازی انجام شده برای جریان کاملاً لزج و ایدئال، پاسخ مطلوب و قابل قبولی را ارائه می‌کند. جریان جت آرام بررسی و توزیع سرعت در مقاطع مختلف در جهت جریان ترسیم شد. در مقادیر متوسط عدد رینولدز (Re=۳۰۰) و بدون هیچ‌گونه اغتشاشی در ورودی نیز جریان جت بررسی شد و توزیع سرعت در مقاطع مختلف در جهت اصلی جریان به‌دست آمد. همچنین چگونگی کاهش سرعت خط مرکزی با پیشروی در جهت جریان ترسیم و نشان داده شد که این پارامتر با $x^{-1/3}$ متناسب است. رابطه نیم عرض جت با پیشروی در جهت جریان نیز تناسب $x^{2/3}$ را نشان داد که این تناسب، با نتایج تئوری و عددی توافق خوبی دارد. همچنین مقادیر تنش رینولدز در حالت بی‌بعد برای جریان جت مغشوش به‌دست آمد و دیده شد که با دور شدن از مرز ورودی، مقادیر این تنش‌ها بیشتر شده و منجر به بروز رفتار غیرخودمشابه در مؤلفه‌های سرعت و ورتیسیته جریان جت می‌شود.

۹- منابع

[1] Schlichting, H., “Boundary-layer Theory”, 8th ed., Spriger-Verlag, 2000.
[2] Bickley, W., “The Plane Jet”, Phil. Mag. Ser.7, 23, 1939, pp727-731.
[3] Ansari, A.R., Hegarty. A.F., Shishkin. G.I., “Parameter-uniform numerical methods for a laminar jet problem, International Journal for Numerical Methods in Fluids 43, 2003, pp937–951.

[4] Ansari. A.R., “Shishkin Meshes and their Applications”, Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Winter Conference in Mathematics,2004, Hawally 32093, P.O. Box 7207, Kuwait.

[5] Tsukiji.T., Takahashi.K, “Numerical analysis of an axisymmetric jet using a streamline coordinate system”, JSME Intl. J., Vol. 30, 1987, pp1406-1413.

[6] Takahashi. K., Tsukiji. T., “Numerical analysis of a laminar jet using a streamline coordinates system”, Transactions of the CSME, Vol 9, 1985, pp65-170.

[7] Zarbi. G., Takahashi. K., “Prediction of the laminar two-dimensional jet flow through a convergent channel”, JSME Intl. J., Series II, Vol. 24, 1991, pp115-121.

[8] Morgan. P. L., Auld. D., Armfield. S. W., “A comparison of Eulerian and Lagrangian schemes for the simulation of an incompressible planar jet”, ANZIAM J. 45 (E), 2004, pp310–325.

[9] Akhavan, R., Ansari, A., Kang, S., and Mangiavacchi, N. “Subgrid-Scale intraction in a Numerically Simulated Planar Turbulent Jet and Implication for Modeling”, J Fluid Mech., 408, 2000, pp83-120.

[10] Stanley, S.A., Sarkar, S., and Mellado, J.P., “A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation”, J Fluid Mech., 450, 2002, pp337-407.

[11] M.J. Maghrebi, “A Study of the Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Plane Wakes”, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia,1999.

[12] Monica de mier torrecilla, “Introduction to Numerical Simulation of Fluid Flows”, Technical University of Munich, 2004.

[13] Bartles. R.H., Stewart. GW, “Solution of the Matrix Equation AX+XB=C [F4]”, Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.

[14] Lele. S.K., “Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution”, Journal of Computational Physics, 103, 1992, pp16-42.

[15] Wray. A., Hussaini. M.Y., “Numerical Experiments in Boundary Layer Stability”, Proc. R. Scotland.A, vol. 392, 1984, pp373-389.

[16] Stuart. J. T., “On finite amplitude oscillations in laminar mixing layer”, Journal of fluid mechanics, 29. (3), 1967, pp417-440.

[۱۷] سلمانی ماهینی، الف. "تحلیل پایداری خطی جریان جت"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.۱۳۸٤.