مجلهٔ فنی و مهندسی مدرس– مهندسی مکانیک دوره ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹ صص ۹–۲۰ (دریافت مقاله: آذر ۱۳۸۲، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۷)



### شبیه سازی مستقیم جریان جت دوبعدی مغشوش به روش تفاضل . .

محدود فشر ده محمد جواد مغربی<sup>۱\*</sup>، حسین ایزی<sup>۲</sup>، احد ضرغامی<sup>۳</sup> ۱- دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد ۲- کارشناس ارشد مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود ۳- دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود \*مشهد، صندوق پستی ۱۱۱۱-۹۱۷۷۹، mjmaghrebi@um.ac.ir

**چکیدہ**- در این پڑوهش معادلات بی بعد شده ناویر استوکس در شکل چرخشی برای جت دوبعدی صفحهای به روش مستقیم عددی حل شده است. با در نظر گرفتن توزیع سرعت در ورودی دامنه محاسباتی، از نیم عرض جت به عنوان طول مشخصه و از سرعت خط مرکزی به عنوان سرعت مشخصه به منظور بی بعد سازی استفاده شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، گسسته سازی شده و از نگاشت (πζ) ح) جه دامنه محاسباتی، از نیم عرض جت به عنوان طول مشخصه و از محدود فشرده، گسسته سازی شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، گسسته سازی شده و از نگاشت (πζ) – γ – β cot(πζ) محدود فشرده، گسته سازی شده و از نگاشت (πζ) محاسباتی از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده و محاسباتی اکار کی دو تریم محدود فشرده، گسته سازی شده و از نگاشت (πζ) محاسبات در دامنه زمان از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده و محاسباتی اکار کری خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه محدی کاملا لزج استوکس و جریان شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. در این مطالعه جریان جریان سه مدود مرتبه سوم استفاده و مربان استوکس و جریان شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. در این مطالعه جریان سه مدی کاملا لوج استوکس و جریان ایدنال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است. در این مطالعه جریان جت مغشوش در دستگاه مختصات خود تشابه ایررسی شده و توزیع شدت توربولانس و تنش رینولدز به دست آمده است. نتایج بیانگر رفتار غیر خودتشابهی لایه برشی است. **کلیدواژ گان:** جریان جت دوبعدی، اختلف محدود فشرده، خود تشابهی، نیم عرض جت سوع خری جت مرکزی.

# Direct Numerical Simulation of 2D Forced Jet using the Compact Finite Difference Method

M.J. Maghrebi<sup>1\*</sup>, H.Eazi<sup>2</sup>, A.Zarghami<sup>3</sup>

1- Associate prof., Dept. of Mech. Eng., School of Engineering, Ferdowsi Uni. of Mashhad

2- Graduate student, Department of Mech. Eng., Shahrood University of Technology

3- Ph.D. candidate, Department of Mech. Eng., Shahrood Uni. of Tech., Shahrood

#### \*P.O.B. 91775-1111, mjmaghrebi@um.ac.ir

Abstract- The dimensionless form of Navier-Stokes equations for two dimensional jet flows are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of jet flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the jet Reynolds number. These two characteristics are jet half-width and centerline velocity. Governing equations are discretized in streamwise and cross stream directions using a sixth order compact finite difference scheme and a mapped compact finite difference method, respectively. Cotangent mapping of  $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$  is used to relate the physical domain of y to the computational domain of  $\zeta$ . The compact third order Runge-Kutta method is used for time-advancement of the simulation. convective outflow boundary condition is employed to create a non-reflective type boundary condition at the outlet. An inviscid Stuart flow and a completely viscose solutions of Navier Stokes equations are used for the verification of numerical simulations. Results for perturbed jet flow in self-similar coordinates were also investigated which indicate that the time-averaged statistics for velocity, vorticity, turbulence intensities and Reynolds stress distribution tend to collapse on top of each other at flow downstream locations.

Keywords: 2D Jet Flow, Compact Finite Difference, Jet Half-width, Jet Centerline

#### ۱- مقدمه

جریان جت دوبعدی حالت پایدار به کمک تئوری لایه مرزی توسط شلیختینگ [۱] و بیکلی [۲] تحلیل شده است. آنها توزیع سرعت جریان را بهدست آوردند و نتایجی را درباره چگونگی تناسب بین سرعت خط مرکزی و نیم عرض جت نسبت به جهت جریان ارائه کردند.

حل عددی جریان آرام در یک چهارم سطح توسط انصاری، شیشکین و هگارتی [۳] انجام شده است. آنان ارتباط لزجت سینماتیک با طول اصلی جریان را بررسی و تابع جریان را بهصورت تابعی از x و y معرفی کردند. روش مشهای شیشکین بهوسیله انصاری [٤] بهطور کامل مطالعه شد. وی به بررسی جت آرام دوبعدی غیر قابل تراکم براساس این روش و طرح مش یکنواخت تکهای پرداخته و با مقایسه نتایج بهدست آمده با نتایج تئوری شیلیختینگ [۱] خطاها را بررسی کرده و با توجه به تغییرات لزجت سینماتیکی به بررسی خطاها پرداخته است.

جتهای آرام صفحهای و متقارن مرکزی به کمک تکنیک SFC(روشی مبتنی بر استفاده از تابع جریان بهصورت نوعی مختصات) توسط تسوکیجی [۵] و تاکاشی [٦] و زاربی [۷] بررسی شده و توافق خوبی در مقایسه با نتایج تئوری بهدست آمده است.

حل جریان جت صفحهای تراکمناپذیر به کمک روشهای مستقیم عددی، DNS' و حل لاگرانژ مستقیم مونت کارلو، DSMC توسط مرگان و آرمغیلد [۸] انجام و این دو روش مقایسه شد. در هر دو روش مشخص شده که سرعت جت در جهت اصلی جریان با  $^{1/-} x$  و نیم عرض جت متناسب با  $^{1/r} x$  است. همچنین با مقایسه این دو روش مشخص شد که DNS سریعتر همگرا میشود. جزییات بیشتر در مورد شبیه سازی مستقیم عددی جریان جت در [۹ و ۱۰] آورده شده است.

۱.

در این پژوهش معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی به طور مستقیم شبیه سازی شده است. از روش اختلاف محدود فشرده برای مشتقات اول و دوم و برای پیشروی محاسبات در زمان از رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در مرز ورودی توزیعی به مشکل شرح است. در مارز ورودی توزیعی به مشکل شرط مرزی جابه جایی استفاده شده است. از نتایج تحلیلی جریان سه بعدی کاملالزج استوکس و جریان ایدئال استوارت برای بررسی صحت نتایج استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم
در این تحقیق شکل چرخشی معادلات ناویر استوکس
بهصورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدلسازی
یا سادهسازی بهصورت عددی تحلیل شده است.
شکل بی بعد معادله ناویراستوکس برای جریانهای
تراکمناپذیر بهصورت زیر است:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} (\nabla^{\mathsf{r}} U)$$
(1)

با توجه به اتحاد زير:

$$\nabla(A.B) = (B.\nabla)A + (A.\nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$$
(Y)

برای 
$$A = B = U = (U, V, W)$$
 داریم

$$(\stackrel{\mathbf{r}}{U}.\nabla)\stackrel{\mathbf{r}}{U} = \stackrel{\mathbf{r}}{\omega} \times \stackrel{\mathbf{r}}{U} + \frac{1}{\mathbf{r}}\nabla(\stackrel{\mathbf{r}}{U}\stackrel{\mathbf{r}}{U}) \tag{(7)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\mathbf{f}}{H} - \nabla (p + \frac{U U}{\mathbf{Y}}) + \frac{\mathbf{i}}{\mathrm{Re}} (\nabla^{\mathbf{f}} U) \qquad (\varepsilon)$$

کے در آن 
$$\overset{\mathbf{I}}{W} = (H_{\gamma}, H_{\gamma}, H_{\gamma}) = \overset{\mathbf{I}}{U} \times \overset{\mathbf{I}}{\omega}$$
با اعمال ملگر کرل به دوسمت معادله (٤)، داریم:

<sup>1-</sup> Direct Numerical Simulation

فنی و مهندسی مدرس- مکانیک

$$\frac{\mathbf{r}}{2} + \frac{\mathbf{i}}{\mathrm{Re}} \nabla^{\mathsf{T}} U \qquad (11) \qquad \qquad \frac{\partial (\nabla \times U)}{\partial t} = \nabla \times H - \nabla \times \nabla (p + \frac{U U}{\mathbf{r}}) + \frac{\mathbf{i}}{\mathrm{Re}} \nabla^{\mathsf{T}} (\nabla \times U) \qquad (0)$$

با توجه به اینکه  $\bullet = (\circ, \nabla \times \nabla(scalar))$  معادله (٥) به رابطه زير تبديل مي شود:

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \overset{\mathbf{f}}{H} + \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{Re}} \nabla^{\mathbf{v}} \overset{\mathbf{f}}{\omega}$$
(7)

معادله (۷) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial \nabla^{\mathsf{v}} U}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times H) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^{\mathsf{v}} U^{\mathsf{r}}$$
(9)

که در آن  $\overset{1}{W} = (H_{,,}H_{,,}H_{,}) = \overset{1}{U} \times \overset{1}{\omega}$  جمله های غير خطي است.

مزيت استفاده از اين شكل معادلات ناوير استوكس، كاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای حافظه مـورد نیاز و همچنین نیاز نداشتن به تعیین فـشار در مرزهـای مـسأله است. البته بهایی که برای این دو مزیت پرداخته می شود، تغییر مرتبه معادله ديفرانسيل حاكم از دو به چهار است [۹]. با جداسازی سرعت لحظهای به صورت زیر [۱۱]:  $U(x, y, t) = u(x, y, t) + U_{1}(y)$  $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ 

$$V(x, y, t) = v(x, y, t)$$

و با در نظر گرفتن اولین مؤلف معادله (۹) در جهت اصلی جریان (x) و در حالت دوبعدی معادله زیر بهدست می آید. برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] مراجعه شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{\mathsf{Y}} u = \frac{\partial^{\mathsf{Y}} H_{\mathsf{Y}}}{\partial y^{\mathsf{Y}}} - \frac{\partial^{\mathsf{Y}} H_{\mathsf{Y}}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{Re}} \nabla^{\mathsf{Y}} U \tag{11}$$

۳- شرایط مرزی و شرط اولیه

معادله (۱۱) معادلهای مرتبه چهار بوده و به اعمال چهار شرط مرزی نیاز دارد. مقادیر u در مرزهای ورودی و خروجي دامنه محاسباتي بهعنوان شرط مرزي دريشله مشخص می شوند. همچنین با توجه به معادل ه پیوستگی، در مرزهای ورودی و خروجی دامنه محاسباتی  $\partial u/\partial x$ بهعنوان شرط مرزی نیومن مشخص و معرفی می شود. در شبيهسازي، سرعت يايه ( U.(y ) (يكبي از مؤلفه هاي سرعت لحظهای در جهت اصلی جریان) با توزیع ل مطابق نتایج تحلیلی شلیختینگ U. (y) = ۱/ cosh ' y [۱] برقرار میشود.

در مرز خروجی از شرط مرزی جابهجایی به کار برده شده توسط تروسیلا [۱۲] استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچ گونه برگشت جریان به داخل دامنه مشاهده شود. از معادله جابهجایی برای تولید شرط مرزی دریشله برای هر دو مؤلفه سرعت استفاده شده که معادلـه آن بهصورت زیر است:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{11}$$

در این معادله، مؤلفه های سرعت u و v جایگزین 🕊 می شود. c سرعت موج یا سرعت جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. به بیان دیگر، c سرعت جابه جایی ساختارهای با مقیاس بـزرگ درون لایـه اسـت. هـدف از کاربرد این شرط مرزی آن است که به سیال اجازه داده شود در وضعیتی طبیعی دامنه محاسباتی را ترک کند. بنابراین C بهصورت سرعت متوسط جريان معرفي مي شود.

<sup>1.</sup> Large scale structure

توزیع سرعت متوسط y 'ارcosh اولیه برای به طور یکنواخت در تمامی ایستگاههای x، شرط اولیه برای جریان دوبعدی جت غیراجباری است. از همین شرط برای شرط اولیه جریان اجباری جت استفاده می شود. براساس مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه سازی جریان اجباری و غیراجباری جت مناسب است. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی ((-x))، باید مجاز به خروج از مرزها ( $x = L_x$ ) باشد. جریان جت همچنین باید به حالت ایستای آماری'، هنگامی که مؤلفه های سرعت متوسط، مستقل از زمان باشند، برسد.

۴- مراحل محاسبات الگوريتم حل معادله ناوير استوكس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است: ۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای *u* ، از معادله ييوستگي مي توان مقدار ٧ را محاسبه کرد. ۲. با توجه به اینکه  $\omega = \nabla \times U$  و برای حالت. دوبعـــدی داریـــم •= ، و •= ، و لـــذا مقـــدار . حساب می شود.  $\omega_r = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ . بنا به تعریف  $\omega = U \times \omega$  که برای حالت دوبعدی  $H_{r} = -U . \omega$  و در نتيجه  $M_{r} = V . \omega$  و  $H_{r} = \cdot$ ٤. محاسبه جملات غيرخطي در معادله ناوير استوكس که به شکل  $\frac{\partial^{\mathsf{Y}} H_{\mathsf{v}}}{\partial \mathsf{v}^{\mathsf{v}}} - \frac{\partial^{\mathsf{v}} H_{\mathsf{v}}}{\partial x \, \partial \mathsf{v}}$  است. . محاسبه جملات لزجتی که به شکل  $\nabla^{*}U$  است.  $B_{\mathbf{R}}$ ٦.پس از محاسبه سمت راست معادل ه (١١)، بـ هروش رانج کوتای مرتبه سـوم، سـمت راسـت معادلـه پواسـون محاسبه می شود.  $abla^{\mathbf{i}} u = R$ 

۷. با مشخص شدن R، معادله پواسون بالا در شکل گسسته حل می شود. حل این معادله در شکل ماتریسی به شکل  $\Delta u + \Delta u B = C$  است که بر طبق الگوریتم بارتلز [۱۳]، مقدار  $\Delta u$  از آن استخراج می شود. ۸ با مشخص شدن  $\Delta u$ ، که تفاضل u در دو زیر مرحله زمانی است، u جدید به دست می آید. ۹. کلیه مراحل بالا برای یک زیر دامنه زمانی است که از uی تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه مرحله جدید استفاده می شود.

۹-۱- محاسبه مشتقات مادی مشتقات مادی با به کار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد لیله [۱٤] محاسبه شده است. لیله مشتق اول تابع f(x) را به طور ضمنی <sup>۲</sup>با معادله زیر توصیف کرده است:

$$\alpha f_{j-1}' + f_j' + \alpha f_{j+1}' =$$

$$\frac{\alpha + \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}h} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{\mathbf{Y}\alpha - \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}h} (f_{j+1} - f_{j-1})$$
(1Y)

که علامت پریم مشتق اول، j تعداد گره Nx = J - 1 که در آن  $1 - \Delta x = Lx/Nx$  که در آن  $1 - J \le J$ اگر در این معادله،  $1/4 = \alpha$  یا  $1/4 = \alpha$  قرار داده شود، طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم بهدست خواهد آمد. در مرزها یعنی جایی که 1 = j یا J = J نوعی طرح مرتبه سوم یکطرفه ضمنی استفاده شده است:

$$f_{\gamma}' + \mathbf{Y}f_{\gamma}' = \frac{\gamma}{\mathbf{Y}h}(-\Delta f_{\gamma} + \mathbf{Y}f_{\gamma} + f_{\gamma}) \tag{117}$$

$$f'_{J} + \mathbf{Y}f'_{J-1} = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}h} (\Delta f_{J} - \mathbf{Y}f_{J-1} - f_{J-1}) \tag{12}$$

<sup>1.</sup> Statistical stationary

<sup>2.</sup> Implicitly

روش مشابهی را می توان برای گره J به کار برد:  $f_J'' + \Upsilon f_{J-1}'' = \frac{\Upsilon}{h} (\frac{df}{dx})_{x=Lx} - \frac{\Upsilon}{\Upsilon h^{\Upsilon}} (f_J - f_{J-1})$  (۲۰) it (۲۰) it (f\_J - f\_{J-1}) (10) it (



**شکل ۱** مرتبه خطا در محاسبه مشتق دوم با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده [۱۱].

y محدودسازی دامنه y -۲-۴

جریان جت، جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب است، در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم، یعنی  $\infty \ge y \ge \infty$  است. برای گنجاندن y در دامنه محاسباتی از نوعی تابع یکب میک مثلثاتی استفاده میکنیم تا مختصات فیزیکی y به مختصات در همسایگی مرزها یعنی در Y = j یا I - J = j، از معادله (۱۲) به ازای  $\gamma = 1$  استفاده می شود. همان طور کسه لیلسه بحث کسرده است، بسا قسرار دادن (۱۰  $(+ \alpha - 1))$  ( $\gamma = 1$  ( $+ \alpha = 1$ )  $\alpha$  در معادله (۱۲) ( $+ \alpha - 1$ )  $(+ \alpha - 1) = \alpha$  به جای  $\alpha$  در معادله (۱۲) برای گرههای Y = j و Y - J = j می توان پایداری عددی معادله (x = 1  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$  را تضمین نمود. برای محاسبه مشتق دوم تابع (x) f، از طرح اختلاف محدود فشرده با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است:

$$\alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' = \frac{\mathfrak{P}(1-\alpha)}{\mathfrak{P}h^{\mathfrak{r}}} (f_{j+1} - \mathfrak{Y}f_j + f_{j-1})$$

$$+ \frac{1 \cdot \alpha - 1}{\mathfrak{N}\mathfrak{P}h^{\mathfrak{r}}} (f_{j+1} - \mathfrak{Y}f_j + f_{j-1})$$

$$(10)$$

که در آن ۲/۴=۵. در اینجا مسأله ناهنجاری نیـز مـورد توجه قرار گرفته و معادلـه در ۲/۵ ضـرب شـده اسـت. در مرزها از طرح مرتبه سوم یکطرفه ضمنی استفاده شده است:

$$f_{y}'' + v f_{y}'' = \frac{v}{h^{v}} (v r f_{y} - v v f_{y} + v \Delta f_{y} - f_{y})$$
(17)

$$f_{J}'' + \eta f_{J-\eta}'' =$$

$$\frac{1}{h^{\gamma}} (\eta r f_{J} - r \eta f_{J-\eta} + \eta \Delta f_{J-\eta} - f_{J-\eta})$$
(1V)

$$f_{n}'' + \mathbf{v} f_{r}'' = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}h} (-\Delta f_{n}' + \mathbf{v} f_{r}' + f_{r}') = \frac{-\mathbf{v}}{h} f_{n}' + \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}h} (f_{n}' + \mathbf{v} f_{r}' + f_{r}')$$
(1A)

$$f_{y}'' + \mathbf{v}f_{y}'' = \frac{-\mathbf{v}}{h} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=\cdot} - \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}h^{\mathbf{v}}} \left(f_{y} - f_{y}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = . \tag{(YV)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{7A}$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، ماتریس سمت راست معادله (۱۲) دارای عناصر صفر روی قطر اصلی است و لذا نمی توان به انتگرال گیری پرداخت. برای حل این مشکل با مشتق گیری از دو سمت معادله برحسب y، معادله زیر بهدست می آید:

$$\frac{\partial^{2} v}{\partial y^{r}} = -\frac{\partial^{2} u}{\partial x \, \partial y} \tag{74}$$

با وجود دو شرط مرزی برای ۷ بهصورت • = v → v = این معادله به شکل زیر حل میشود [۱۱].

چنانچه از معادله (۲۵)، بهجای سمت چپ معادل (۲۹) و بسرای <sup>۲</sup>کdv/d و dv/d از معادل آن مطابق طسرح اختلاف محدود فشرده استفاده شود، آنگاه می توان با اعمال شرایط مرزی  $0 = (x, y = \pm\infty, t)$  م حل را انجام داد.

۴-۴- پیشروی در زمان طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده بهوسیله رای [۱۵] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی بهکار میرود. برای پیشروی زمانی معادلهای بهصورت معادله (۳۰)، مطابق جدول ۱ می توان فرایند را انجام داد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \tag{(7.)}$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt، سمت راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \tag{(1)}$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض شبکه است. برای مشتق گیری تابع f نسبت به y از قانون زنجیرهای بهصورت زیر استفاده می شود:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{\mathbf{Y}}{\pi\beta} \cos^{\mathbf{Y}}(\pi\zeta/\mathbf{Y}) \frac{df}{d\zeta}$$
(YY)

$$\frac{df}{dy} = \lambda_{\gamma} \frac{df}{d\zeta} \tag{(YT)}$$

$$\frac{d^{\mathsf{Y}}f}{dy^{\mathsf{Y}}} = \lambda_{\mathsf{Y}} \frac{d^{\mathsf{Y}}f}{d\zeta^{\mathsf{Y}}} + \lambda_{\mathsf{Y}} \frac{df}{d\zeta} \tag{YE}$$

$$\lambda_{\rm r} = \lambda_{\rm r}^{\rm r} \tag{(°)}$$

$$\lambda_{r} = -\frac{\mathbf{r}}{\pi\beta^{r}}\sin(\pi\zeta/\mathbf{r})\cos^{r}(\pi\zeta/\mathbf{r}) \tag{(71)}$$

$$-F - 1$$
 انتگرال گیری از معادله پیوستگی  
با حل معادله(۹) می توان  $u(x, y, t)$  را به دست آورد.

. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادلـه پیوستگی استفاده میشود: ۴–۵– **حل معادله پواسون** پس از محاسبه سـمت راسـت معادلـه نـاویر اسـتوکس و پیشروی در زمان، مقدار ∇<sup>'</sup>u بهدست میآید. لذا داریم:

$$\nabla^{\mathsf{r}} u = C \tag{(*)}$$

$$\nabla^{\mathsf{r}} u = \frac{\partial^{\mathsf{r}} u}{\partial x^{\mathsf{r}}} + \frac{\partial^{\mathsf{r}} u}{\partial y^{\mathsf{r}}} = C \tag{(77)}$$

و جایگزین کردن عملگرهای مشتقات دوم در جهتهای x و y معادله زیردر شکل گسسته بهدست میآید[۱۱]:

$$(D \mathsf{Y} X u^T)^T + D \mathsf{Y} u = C \tag{(32)}$$

توجه کنید که برای اعمال عملگر مشتق دوم در جهت X باید تابع مورد نظر را ترانهاده و سپس در ماتریس عملگر DtX ضرب کرده و سپس از نتیجه ضرب دو ماتریس ترانهاده گرفته شود. با توجه به اینکه:

$$(ST)^T = T^T S^T \tag{(ro)}$$

معادله(۳٤) به معادله زیر تبدیل میشود:

$$u \cdot D \mathsf{Y} X^{T} + D \mathsf{Y} u = C \tag{(77)}$$

روش حل معادلـه ماتريـسى AX + XB = C توسـط بـــارتلز [۱۳] ارائـــه شـــده كـــه در آن A = D Y و B = D  $YX^{T}$  مى باشد.

## ۵- ارزیابی نتایج بهمنظور ارزیابی صحت شبیه سازی ها، نتایج به دست آمده با بعضی از حل های دقیق معادله ناویر استوکس در حالت های خاص مقایسه شده است.

شود. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه  
شود. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه  
$$\Delta t$$
  
خطی از  $R$  در مرحله زمانی حال و مرحله زمانی  
گذشته محاسبه می شود. پس از گذشت مرحله سوم،  
گذشته محاسبه می شود. پس از گذشت مرحله سدم  
زمان به اندازه  $\Delta t$  پیش رفته و مقدار  $u$  محاسبه شده  
برابر با مقدار  $u$  پس از گذشت یک  $\Delta t$  زمانی است. از  
مساوی قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با  
ضرایب طرح داریم:

$$c_{1} + c_{\tau} + c_{\tau} + d_{1} + d_{\tau} + d_{\tau} = 1$$

$$c_{1}^{\tau}c_{\tau} + c_{\tau}(c_{1} + c_{\tau}(1 + \frac{d_{\tau}}{c_{\tau}}))^{\tau} + c_{1}^{\tau}d_{\tau} = 1/\tau$$

$$c_{1}c_{\tau} + c_{\tau}(\frac{d_{\tau}}{c_{\tau}}(1 + \frac{d_{\tau}}{c_{\tau}}) + c_{\tau}(1 + \frac{d_{\tau}}{c_{\tau}})) = 1/\tau$$

$$c_{1}c_{\tau}c_{\tau} = 1/\rho$$

$$c_{1} = \Lambda/10 \qquad \qquad d_{1} = \cdot$$

$$c_{r} = 0/17 \qquad \qquad d_{r} = -1V/9 \cdot$$

$$c_{r} = T/F \qquad \qquad d_{r} = -0/17$$

ول۱ طرح پیشروی زمانی رائج کوتای مرتبه سوم	جدو
---	-----

دومين موقعيت	اولين موقعيت	زمان
$R(u^n)$	$u^n$	t <sup>n</sup>
R' = R(u')	$u' = u^n + c_{\Lambda} \Delta t R$	$t' = t^{n} + (c_{1} + d_{1})\Delta t$
R'' = R(u'')	$u'' = u' + (c_{v}R' + d_{v}R)\Delta t$	$t'' = t' + (c_{\tau} + d_{\tau})\Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_{n}R'' + d_{n}R')\Delta t$	$t^{n+1} = t'' + (c_n + d_n)\Delta t$

#### 1-5- معادله ديفيوژن وابسته به زمان

حل عددی معادله ناویر استوکس با حل تحلیلی معادله دیفیوژن ارزیابی گردید. معادله دیفیوژن مربوط به حالتی است که •= H. یک حل خاص برای معادله دیفیوژن به صورت زیر است [۱۱]:

$$u(x, y, t) = \cos(x) \times \frac{y - 1}{(1 + \frac{\mathbf{f}t}{Re})^{1.0}} \qquad (\mathbf{TV})$$
$$\times \exp(-\mathbf{f}t / Re) \times \exp(-\frac{(y - 1)^{\mathbf{f}}}{(1 + \frac{\mathbf{f}t}{Re})})$$

برای این مقایسه باید از معادله فوق برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده شود. در نتیجه شـرط مـرزی خروجی جابه جایی و تشکیل جمله هـای غیـرخطی در ایـن مقایـسه نمی توانند ارزیابی شوند. امـا حـل معادلـه پواسـون و کیفیـت پیشرفت در زمان را می توان ارزیابی کـرد. توجه شـود کـه uشرط پایـداری را ارضـا میکند و حـل را می تـوان بـرای شبیه سازی جریان جت کاملاً لزج استفاده کرد. پارامترهای این آزمـایش ۳ /  $\pi = x_{L_x} = 7\pi / e$  و ۱۰ = B و ۲۰ = t و زمان را برای u نشان می دهد.



**شکل ۲** تحلیل خطا برای *u* در معادله دیفیوژن وابسته به زمان

#### ۲-۵- گردابههای استوارت

حل دقیق برای معادله ناویر استوکس غیر لزج برای لایههای اختلاطی دوبعدی بهوسیله استوارت [۱٦] ارائه شده است. جریان در جهت اصلی جریان متناوب بوده و با سرعت متوسط لایه C، به سمت پاییندست جریان حرکت میکند. حل به شکل تابع جریان  $\psi$  که به ترتیب زیر به مؤلفههای سرعت  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = v$  وابسته است.

$$\psi(x, y, t) = cy + \ln(a\cosh(y - y)) + b\cos(x - ct))$$
(TA)

که در آن  $-\sqrt{a'-1}$ . به سادگی می توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابه جایی را ارضا می کند که c سرعت جابه جایی موج است. بنابراین حل استوارت می تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابه جایی به کار رود. در این تست تشکیل جمله لزج بررسی نمی شود اما تشکیل جمله های غیر خطی و پیشروی محاسبات در زمان به خوبی ارزیابی می گردند. مؤلف ه ای سرعت v, u و همچنین مؤلفه ورتیسیته  $\omega$ ، با مشتق گیری از رابطه فوق به دست می آیند[۱۱]:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c + \frac{a \sinh(y - y)}{a \cosh(y - y) + b \cos(x - ct)}$$
(79)

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{b \sin(x - ct)}{a \cosh(y - y) + b \cos(x - ct)} \qquad (\varepsilon \cdot)$$

$$\omega = \frac{1}{\left[a\cosh\left(y - y\right) + b\cos\left(x - ct\right)\right]^{r}} \qquad (\varepsilon_{1})$$

فنی و مهندسی مدرس– مکانیک



**شکل ۳** تحلیل خطا برای u و v مقایسه با حل تحلیلی استوارت.

### ۶- شبیه سازی جریان جـت دوبعـدی آرام (Re = ۳۰۰)

برای شبیهسازی جریان جت آرام باید سرعت به حالت پایدار و ثابت در هر مکان برسد. این موضوع در شکل **٤** برای مؤلفه **u** نشان داده شده است این شکل تاریخچه مؤلفه سرعت **u** را در پنج ایستگاه با فاصله مساوی در جهت جریان نشان میدهد.



 $L_X$  شکل ٤ گذر زمانی u در پنج فاصله مساوی در طول برای شبیهسازی جت دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

در شکل ۵ توزیع سرعت جت در حالت بی.بعـد و در مقاطع مختلف نشان داده شده کـه در آن y بـا <sub>۱/۲</sub> (نـیم

عرض جت) و u با U<sub>m</sub> (سرعت خط مرکزی) بـی.بعـد شده است.



**شکلہ** توزیع سرعت *u* در مختصات خرد تـشابہ بـرای شبیہسازی جت دوبعدی آرام

Y-جریان جت دوبعدی مغشوش (Re=T۰۰) برای مطالعه جت دوبعدی مغشوش، جریان جت را در حالتی توسعه میدهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار داده میشود. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y حاصل از حل معادله اورسامرفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان جت [۱۷] است که فقط برای توزیع y بهکار برده میشود.

مؤلفه های اغتشاش u و v از ناپایدارترین مود حاصل از حل معادله پایداری دو مود ناپایداری به دست می آیند. سرعت لحظهای در شبیه سازی همراه با اغتشاشها باید به حالت سکون (پایدار) بر سد و در واقع سرعت متوسط مستقل از زمان می شود. به عنوان نمونه، گذر زمانی v در سه فاصله مساوی در جهت طول  $L_x$  در شکل  $\Gamma$  نشان داده شده است. با توجه این شکل مشاهده می شود که مؤلفه های سرعت v به حالت پایدار و ایستا رسیده اند. همچنین با توجه به این شکل مشخص است که لایه

برشی متناوب اسـت کـه اغتـشاش اعمـال شـده در مـرز ورودی دامنه محاسباتی دلیل آن است.

شکلهای ۷ و ۸ نتایج شبیه سازی را برای سرعت متوسط در جهت جریان اصلی و گردابه در مقاطع مختلف، در مختصات خود تشابه نشان می دهد. در این شکل به خوبی می توان پدیده خود تشابهی را برای سرعت متوسط و گردابه مطالعه کرد. دیده می شود که در حالت مغشوش، جریان، رفتار خودمشابه از خود نشان نمی دهد، که این ناشی از اعمال اغتشاشها در مرز ورودی است.

در شکل ۹ چگونگی توسعه سرعت متوسط خط مرکزی و نیم عرض جت با توجه به جهت جریان نشان داده شده است. در شکلهای ۱۰ و ۱۱ پارامترهای شدت توربولانس و در شکل ۱۲ توزیع تنش رینولدز نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشخص شده با دور شدن از مرز ورودی، این تنشها افزایش مییابد، که ایس رفتار، بار دیگر بیانگر رفتار غیرخودتشابه در جریان جت است.



**شکل ۳** گذر زمانی ۷ در سه فاصله مساوی در طول  $L_x$  برای شبیهسازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی





**شکل ۷** توزیع سرعت *u* در مختصات خود تـشابه بـرای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



 $^{X}$  شکل ۹ سرعت خط مرکزی  $u_{m}$  و نیم عرض جت برای

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03

#### ۸- نتیجه گیری

در این پژوهش، جریان جت دوبعدی تراکمناپذیر بهکمک حل مستقیم عددی معادله ناویر استوکس در شکل چرخشی مطالعه شد. دقت مناسب این روش با بررسی و ارزیابی دو جواب تحلیلی ارزیابی گردید. نتایج نـشان میدهند که شبیهسازی انجام شده برای جریان کاملاً لـزج و ایدئال، پاسخ مطلوب و قابـل قبـولی را ارائـه مـیکنـد. جريان جت آرام بررسي و توزيع سرعت در مقاطع مختلف در جهت جریان ترسیم شد. در مقادیر متوسط عدد رینولدز (Re=۳۰۰) و بدون هیچ گونـه اغتـشاشی در ورودی نیز جریان جت بررسی شـد و توزیـع سـرعت در مقاطع مختلف در جهت اصلی جریان بهدست آمد. همچنین چگونگی کاهش سرعت خط مرکزی با پیـشروی در جهت جریان ترسیم و نشان داده شد کـه ایـن پـارامتر با x<sup>-1/۳</sup> متناسب است. رابطه نیم عرض جت با پیـشروی در جهت جریان نیز تناسب ۲٬۳ را نشان داد که این تناسب، با نتایج تئوری و عددی توافق خوبی دارد. همچنین مقادیر تنش رینولدز در حالت بی بعد برای جریان جت مغشوش بهدست آمد و دیده شد که با دور شدن از مرز ورودی، مقادیر این تنشها بیشتر شده و منجر به بروز رفتار غیرخودمشابه در مؤلف های سرعت و ورتیسیته جريان جت مي شود.

#### ۹- منابع

- [1] Schlichting, H., "Boundary-layer Theory", 8th ed., Spriger-Verlag, 2000.
- [2] Bickley, W., "The Plane Jet", Phil. Mag. Ser.7, 23, 1939, pp727-731.
- [3] Ansari, A.R., Hegarty. A.F., Shishkin. G.I., "Parameter-uniform numerical methods for a laminar jet problem, International Journal for Numerical Methods in Fluids 43, 2003, pp937–951.



 $y / b_{_{1/r}}$  تغییرات  $\sqrt{u'v'} / U_m$  در برابر تغییرات ۲۲ شکل ۲

محمد جواد مغربی و همکاران

شبیه سازی مستقیم جریان جت دوبعدی مغشوش ...

- [11] M.J. Maghrebi, "A Study of the Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Plane Wakes", PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
- [12] Monica de mier torrecilla, "Introduction to Numerical Simulation of Fluid Flows", Technical University of Munich, 2004.
- [13] Bartles. R.H., Stewart. GW, "Solution of the Matrix Equation AX+XB=C [F4]", Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.
- [14] Lele. S.K., "Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution", Journal of Computational Physics, 103, 1992, pp16-42.
- [15] Wray. A., Hussaini. M.Y., "Numerical Experiments in Boundary Layer Stability", Proc. R. Scotland.A, vol. 392, 1984, pp373-389.
- [16] Stuart. J. T., "On finite amplitude oscillations in laminar mixing layer", Journal of fluid mechanics, 29. (3), 1967, pp417-440.
- [١٧] سلمانی ماهینی، الف. "تحلیل پایداری خطی جریان

جـت"، پایان نامیه کارشناسی ارشد، دانشکده

مكانيك، دانشگاه صنعتي شاهرود.١٣٨٤.

- [4] Ansari. A.R., "Shishkin Meshes and their Applications", Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Winter Conference in Mathematics, 2004, Hawally 32093, P.O. Box 7207, Kuwait.
- [5] Tsukiji.T., Takahashi.K, "Numerical analysis of an axisymmetric jet using a streamline coordinate system", JSME Intl. J., Vol. 30, 1987, pp1406-1413.
- [6] Takahashi. K., Tsukiji. T., "Numerical analysis of a laminar jet using a streamline coordinates system", Transactions of the CSME, Vol 9, 1985, pp65-170.
- [7] Zarbi. G., Takahashi. K., "Prediction of the laminar two-dimensional jet flow through a convergent channel", JSME Intl. J., Series II, Vol. 24, 1991, pp115-121.
- [8] Morgan. P. L., Auld. D., Armfield. S. W., "A comparison of Eulerian and Lagrangian schemes for the simulation of an incompressible planar jet", ANZIAM J. 45 (E), 2004, pp310–325.
- [9] Akhavan, R., Ansari, A., Kang, S., and Mangiavacchi, N. "Subgrid-Scale intraction in a Numerically Simulated Planar Turbulent Jet and Implication for Modeling", J Fluid Mech., 408, 2000, pp83-120.
- [10] Stanley, S.A., Sarkar, S., and Mellado, J.P., "A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation", J Fluid Mech., 450, 2002, pp337-407.