مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 123-132

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مود سهِ چندین ترک در نیم صفحه الاستیک

حامد حقیری[1]، علیرضا فتوحی[2*]، علیرضا شفیعی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، طراحی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
* یزد، صندوق پستی 741-89195، afotuhi@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 01 آبان 1393
پذیرش: 24 دی 1393
ارائه در سایت: 06 اسفند 1393

کلید واژگان:
ضریب شدت تنش دینامیکی
ناپیوستگی جابجایی
معادله انتگرالی فوق تکین
لاپلاس معکوس عددی

چکیده

در تحلیل سازه‌ها پاسخ دینامیکی و اثرات امواج الاستیک بر روی ضرایب شدت تنش از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. این مطالعه، به تحلیل تنش دینامیکی پادصفحه‌ای نیم صفحه همگن شامل چندین ترک برای محاسبه ضرایب شدت تنش با اثر تقابل امواج الاستیک با مرز صفحه و ترک در موقعیت‌های مختلف می پردازد. روش حل، استفاده از تکنیک توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی برای حل مسائل ترک در شکست دینامیکی است. با اعمال تبدیلات انتگرالی (فوریه و لاپلاس) به معادله الاستودینامیک و استفاده از شرایط مرزی حاکم، حل ناپیوستگی جابجایی انجام شده و سپس با توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی برروی سطوح ترک معادلات انتگرالی با مرتبه فوق تکین حاصل می‌شود. حل معادله انتگرالی با استفاده از بسط سری چبیشِف و روش عددی نقاط نظم یافته در محیط لاپلاس صورت می‌پذیرد. در نهایت با استفاده از الگوریتم لاپلاس معکوس عددی، ضرایب شدت تنش در حوزه زمان بدست می‌آیند. با مقایسه نتایج موجود از حل صفحه بی‌نهایت مشاهده می‌شود، تئوری ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین توانایی مدلسازی چندین ترک با آرایش‌های مختلف بعنوان قابلیت تئوری، در قالب نمودارهایی آورده شده است.

Evaluation of dynamic mode-III stress intensity factors of multiple cracks in an elastic half-plane

Hamed Haghiri, Alireza Fotuhi*, Alireza Shafiei

Department of Mechanical Engineering, University of Yazd, Yazd, Iran
* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, afotuhi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 October 2014
Accepted 14 January 2015
Available Online 25 February 2015

Keywords:
Dynamic stress intensity factor
Displacement discontinuity
Hypersingular integral equation
Numerical Laplace inversion

ABSTRACT

In a structural analysis, dynamic response of a crack is of significant importance as well as the impacts of elastic waves on stress intensity factors (SIF). In this paper, dynamic analyses of multiple cracks on a half-plane subjected to anti-plane shear stresses are presented. Stress intensity factors are calculated and the interaction of elastic waves with the boundary of plane and the cracks' tips is investigated at different locations. The distribution discontinuous displacement techniques are used, enabling us to solve the crack problems in dynamic fracture mechanics. Integral transformations (Laplace and Fourier) are applied to elastodynamics equations and by using a set of appropriate boundary conditions, the crack problem is solved through discontinuous displacement method. As a result, the stress equations with hypersingularity terms are obtained. Using Chebyshev series expansion and collocation points in Laplace domain, the crack solution is achieved. Finally, different algorithms of numerical Laplace inversion are presented and the stress intensity factors (SIF) are obtained. The presented results are compared with published data and a good agreement is observed. Moreover, it is also demonstrated that the present theoretical study is capable of modelling multiple cracks with different arrangements.

1- مقدمه

شکست‌های فاجعه‌بار سازه‌هایی چون هواپیماها، کشتی‌ها، نیروگاه‌ها و دیگر ادوات مهندسی با استفاده از تئوریهای مرسوم مقاومت مصالح قابل‌بیان نیستند. همه‌ی سازه‌های مهندسی آماده ظهور ترک توسط طبیعت خود سازه یا در نتیجه ساخت و فرآیند سرهم کردن می‌باشند. یک ترک کوچک می‌تواند همچون مکانیزم خستگی، فرسودگی و غیره رشد و ایجاد ناپایداری کند. برای مثال در فولاد 4340 سرعت رشد ترک به مرتبه یک تا دو هزار متر بر ثانیه می‌رسد. مهار نکردن این ناپایداری می‌تواند مستوجب آسیب جدی به سازه و حتی در صورت ادامه پیدا کردن به شکست سازه منجر شود. مکانیک شکست دینامیکی به تحلیل ضرایب شدت تنش و تأثیر امواج تنش، بر روی این ضرایب می‌پردازد.

هنگامی که جسم الاستیک خطی شامل ترک، تحت بارگذاری دینامیکی قرار می‌گیرد، میدان تنش در نزدیک نوک ترک، تکینگی با ریشه مرتبه اول دارد. به دلیل سختی در ارضای شرایط مرزی، تنها تعداد محدودی از حل‌های

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Haghiri, A.R. Fotuhi, A.R. Shafiei, Evaluation of dynamic mode-III stress intensity factors of multiple cracks in an elastic half-plane, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 123-132, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

نوع بسته (مانند روش‌های تابع گرین[1]، وینر-هاف[2] وکاگنیار-دهوپ[3]) برای ارزیابی ضریب شدت تنش موجود است [1]. همچنین بازتاب موج‌های تنش و تحلیل آن در اثر برخورد به سطح جسم، یکی از مراحل پیچیده در تحلیل مسائل شکست دینامیکی شناخته می‌شود. با این حال، محققان علم مکانیک تلاش می‌کنند تا با ارائه روش‌هایی تا حد امکان گویا، بر دشواری این حوزه از مطالعات غلبه کنند. مائو با استفاده از روش توابع مختلط، فرمولاسیون انتگرال کوشی را برای یک ترک در نیم صفحه بی‌نهایت تحت بار هارمونیِ زمانی پیشنهاد داد و ظاهراً اولین مطالعه دینامیکی مسئله ترک بوده است[2]. لُبِر و سیح به پراکندگی موج برشی هارمونیک قطبی در اثر یک ترک محدود در نیم صفحه بی‌نهایت تحت کرنش پادصفحه‌ای پرداختند. آن‌ها با استفاده از تبدیلات انتگرالی به یک سیستم معادلات انتگرالی کوپل شده رسیده و میدان تنش در نزدیکی نوک ترک را بصورت پارامتری مورد بحث قرار دادند. آنها نتیجه گرفتند که روش وینر-هاف در نقطه تکینگی، مسیر حل را پیچیده می‌کند، ازاینرو روش تبدیلات انتگرالی را برای حل مسئله بصورت تحلیلی ارجح دانستند [3].

ژانگ با استفاده از نظریه نمایش[4]، برای اختلاف جابجایی روی سطوح ترک، و اعمال چندجمله‌ای چبیشف برای کاهش حل معادله انتگرالی به دستگاه معادله جبری، ضریب شدت تنش را برای ترک‌های مستقیم با زاویه موج‌های برشی متفاوت تحت بار هارمونیک تعیین کرد [4]. تنش حول ترک محدود در صفحه بی‌نهایت الاستیک جامد تحت موج برشی با استفاده از مدل نابجایی[5] و در نظر گرفتن حل تابع گرین، توسط هوآنگ و سُو پیشنهاد شد [5]. بعلاوه این مدل نسبت به بدست آوردن میدان تنش دینامیکی برای ترک‌های بی‌نهایت با طول برابر در الاستیک جامد تحت موج برشی تعمیم‌پذیر بود. ما و چن [6] مسئله گذرا یک ترک زاویه‌دار نیمه محدود تحت تنش پادصفحه‌ای روی مرزِ نیم صفحه، برای بررسی پدیده تقابل موج تنش با ماده تضعیف‌شده، حل دقیقی ارائه دادند. آن‌ها ترکشن روی سطح ترک را بصورت نمایی درنظر گرفتند و با استخراج معادلات در حوزه لاپلاس، به کمک روش وینر-هاف میدان‌های تنش و جابجایی را بدست آوردند. همچنین این راه حل در زمان‌های طولانی باتوجه به پراکندگی و پراش موج‌های تنش معتبر است. هوآنگ به تقابل موج تنش برشی با ترک محدود در نیم صفحه پرداخت. وی با استفاده مدل نابجایی و روش تصویر سازی به سیستم معادلات انتگرال تکین کوشی دست یافت. کرنل معادله انتگرالی شامل توابع بسل به کمک روش عددی گالِرکین حل شدند. تفاوت حل عددی برای دو نوع شرط مرزی، ترکشن آزاد و سطح قیدگذاری شده مورد بررسی و در نهایت ضریب شدت تنش بر حسب توابعی از عدد موج، زاویه برخورد موج و موقعیت ترک محاسبه شد [7].

وِن و همکاران [8] حل اساسی مود سوم شکست برای یک ورق مستطیلی شامل ترک مایل با درنظرگرفتن تابع ناپیوستگی جابجایی را ارائه دادند. پس از استخراج معادله انتگرالی، ضریب شدت تنش دینامیکی تحت تکنیک عددی تنش معادل محاسبه شد. تأثیر موج تنش بر روی ضریب شدت تنش بصورت پارامتری از اهداف این مطالعه بوده است. ما و آینگ [9] مسئله گذرای نیم صفحه شامل ترک نیم بی‌نهایت تحت دو جفت نیروی متمرکز، با استفاده از اصل جمع آثار و حل اساسی، معادلات را استخراج نموده و با ارائه روش جدیدی از تکنیک وینر-هاف مسئله پراکندگی و پراش موج تنش در حالت پادصفحه‌ای را مورد تحلیل قرار دادند. شول و لیی [10] معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم را با استفاده از تبدیلات انتگرالی استخراج کردند. حل معادلات به کمک روش‌های عددی گوس لاگوئر[6] و گوس لِژندر[7] در محیط لاپلاس صورت پذیرفت. از لاپلاس معکوس عددی استِهفِست، جهت تعیین ضریب شدت تنش در فضای زمان استفاده شد.

وو و همکاران [12,11] مسئله جسم همگن الاستیک خطی بی‌نهایت شامل چندین ترکِ هم‌راستا و غیرهمراستا تحت باردینامیکی خارج از صفحه را مورد تحلیل قرار دادند. ترک توسط توزیع نابجایی مدلسازی و معادله انتگرالِ تنش با تکینگی از نوع کوشی در حوزه لاپلاس به کمک روش عددی گوس-چبیشف حل شده است. ضرایب شدت تنش برای هر نوک ترک با استفاده از روش عددی میلر و گای بدست آمده است. سُلیار [13] الگوریتمی را برای بررسی تنش گذرا و پایا نزدیک مجموعه‌ای از ترک در محیط بی‌نهایت تحت انتشار امواج برشی ارائه کرده است. این الگوریتم بر مبنای تبدیل انتگرال لاپلاس، فرمولاسیون معکوس پرودنیکُف بهبودیافته[8] و روش معادلات انتگرال مرزی بنا نهاده شده است. بررسی ضرایب شدت تنش برای مجموعه‌ای از ترک‌ها در حالت پایا از اهداف این تحقیق بوده است. چُی، پاسخ ضربه از محیط محدود هدفمند ضعیف شده توسط دو ترک بین سطحی، تحت تغییر شکل پادصفحه ای را مدلسازی کرده است [14]. اعمال تبدیلات لاپلاس و فوریه منجر به کاهش مسئله ترک به حل مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی تکین کُوشی در محیط لاپلاس شده است. پاسخ نوک ترک در مود سه به وسیله‌ی لاپلاس معکوس عددی استِهفِست محاسبه شده است.

به دلیل پیچیدگی‌های ریاضی، اکثر مطالعات مسائل ترک بیشتر به رفتار ترک، تحت بارهای استاتیکی، شبه استاتیکی و بارهای دینامیکی در ترک‌های نیمه محدود درسازه‌های نامحدود متمرکز شده است. دراین مقاله، از تکنیک ناپیوستگی جابجایی[9] [8] برای حل مسائل ترک استفاده می‌شود که اعمال تبدیلات انتگرالی به معادله الاستودینامیک و استفاده از شرایط مرزی حاکم و توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی بر روی ترک منجر به داشتن معادلات انتگرالی با مرتبه فوق تکین می‌گردد.

2- ناپیوستگی جابجایی پادصفحه‌ای در نیم صفحه

برای یک جسم تحت تغییرشکل خارج از صفحه، مؤلفه‌های جابجایی در دو جهت محور مختصات با فرض عدم اغتشاش در لحظه اولیه، در همه زمان‌ها صفر هستند، $u=v=0$، و تنها مؤلفه غیر صفر، جابجایی خارج از صفحه (راستای محور عمود بر صفحه) است $w=w(x,y,t)$. همچنین بر اساس معادلات الاستیسیته، مؤلفه‌های تنش بر حسب جابجایی برای یک جسم، تحت تغییر شکل پادصفحه‌ای در دستگاه مختصات دکارتی به صورت رابطه (1) است:

$$\sigma_{xz}=\mu\frac{\partial w}{\partial x},\sigma_{yz}=\mu\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1}$$

با در نظر گرفتن فرضیات بالا، معادله الاستودینامیک حاکم بر مسئله پادصفحه‌ای به قرار رابطه (2) است:

$$\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

که $b=1/c_s=\sqrt{\rho/\mu}$ و c_s سرعت موج برشی است.

با شناخت از روش‌های المان مرزی غیرمستقیم [15] و تکنیک

1- Green function method
2- Wiener-Hopf method
3- Cagniard–de Hoop method
4- Representation theory
5- Dislocation model

6- Gouus lagueere
7- Gouus legendre
8- Modified Prudnikov inversion
9- Displacement Discontinuity(DD)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

مطرح‌شده به نام ناپیوستگی جابجایی، به صورت اختلاف جابجایی سطح بالا و پایین ترک بعنوان مجهول در حل تحلیلی موجود بکار گرفته می‌شود. با قرار دادن محور مختصات بر روی ناپیوستگی جابجایی و تقسیم شدن به دو ناحیه $-h< y\le 0$ و $y\ge 0$ حل مسئله دنبال می‌شود. شکل 1، ناپیوستگی جابجایی نقطه‌ای بر روی محور x را نشان می‌دهد.

شرایط اولیه، پیوستگی تنش و ناپیوستگی جابجایی نقطه‌ای و تنش آزاد روی مرز برای مسئله حاکم به‌صورت روابط (3-5) بیان می‌شوند:

$$-\infty\le x\le\infty \quad w(x,y,0)=\left.\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{3}$$

$$\sigma_{yz}(x,0^+,t)=\sigma_{yz}(x,0^-,t)$$
$$w(x,0^+,t)-w(x,0^-,t)=\Delta_z(t)\delta(x)$$
$$\sigma_{yz}(x,-h)=0 \tag{4}$$
$$w(x,y,t)|_{x,y\to\infty}=0 \tag{5}$$

که $\delta(..)$ تابع دلتای دیراک و $\Delta_z(t)$ اندازه ناپیوستگی جابجایی دینامیکی است. برای حل معادلات حاکم از تبدیلات انتگرالی کمک گرفته می‌شود. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ از رابطه (6) تعریف می‌شود.

$$f(t)=\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{st}\tilde{F}(s)ds \tag{6}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه (2) و شرایط اولیه در (3) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2\tilde{w}(x,y,s)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}(x,y,s)}{\partial y^2}-b^2s^2\tilde{w}(x,y,s)=0 \tag{7}$$

که $\tilde{w}$ تبدیل لاپلاس w است. تبدیل انتگرالی فوریه نمایی و معکوس آن از رابطه (8)، است:

$$\underline{f}(p)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ipx}dx$$
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{f}(p)e^{ipx}dp \tag{8}$$

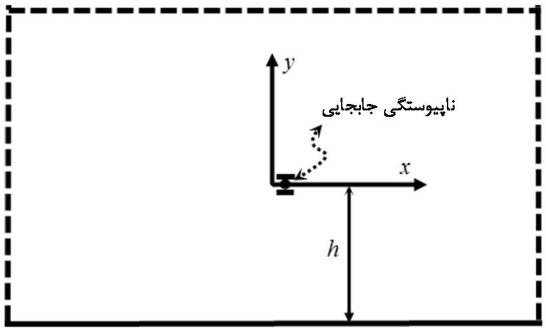
اعمال رابطه (8) به معادله حاکم در فضای لاپلاس، رابطه (7)، نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial^2\underline{\tilde{w}}(p,y,s)}{\partial y^2}-(p^2+b^2s^2)\underline{\tilde{w}}(p,y,s)=0 \tag{9}$$

که $\underline{\tilde{w}}$ تبدیل فوریه $\tilde{w}$ است. با اعمال تبدیلات لاپلاس و فوریه به شرایط (4) و (5) حل معادلات در فضای تبدیل یافته دنبال می‌شود. طبق رابطه (10) داریم:

$$\frac{d}{dy}(\underline{\tilde{w}}(p,0^+,s)-\underline{\tilde{w}}(p,0^-,s))=0$$
$$\underline{\tilde{w}}(p,0^+,s)-\underline{\tilde{w}}(p,0^-,s)=\tilde{\Delta}_z(s)$$
$$\frac{d}{dy}(\underline{\tilde{w}}(p,-h,s))=0$$
$$\underline{\tilde{w}}(p,y,s)|_{y\to\infty}=0 \tag{10}$$

که $\tilde{\Delta}_z(s)$ تبدیل لاپلاس $\Delta_z(t)$ است.



شکل 1 ناپیوستگی جابجایی نقطه‌ای در نیم صفحه الاستیک همگن

حل معادله (9) که یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است، به سادگی برای دو ناحیه از روابط (11) و (12) بدست می‌آید.

$$\underline{\tilde{w}}(p,y,s)=A_1(p,s)e^{-\sqrt{p^2+(bs)^2}y}+B_1(p,s)e^{\sqrt{p^2+(bs)^2}y},\quad -h< y\le 0 \tag{11}$$

$$\underline{\tilde{w}}(p,y,s)=A_2(p,s)e^{-\sqrt{p^2+(bs)^2}y}+B_2(p,s)e^{\sqrt{p^2+(bs)^2}y},\quad y\ge 0 \tag{12}$$

اعمال شرایط تبدیل یافته در رابطه (10) به روابط (11) و (12) ضرایب مجهول در رابطه (13) را نتیجه می‌دهد:

$$A_1(p,s)=-\frac{\tilde{\Delta}_z(s)}{2}e^{-2h\sqrt{p^2+(bs)^2}}$$
$$B_1(p,s)=-\frac{\tilde{\Delta}_z(s)}{2}$$
$$A_2(p,s)=\frac{\tilde{\Delta}_z(s)}{2}\left[1-e^{-2h\sqrt{p^2+(bs)^2}}\right]$$
$$B_2(p,s)=0 \tag{13}$$

با جایگذاری ضرایب (13) در روابط (11) و (12)، و اعمال تبدیل فوریه معکوس، میدان جابجایی پادصفحه‌ای برای کل ناحیه، $-h < y \le \infty$ ، با محاسبه انتگرال‌ها به صورت تحلیلی باتوجه به روش‌های ارائه شده در [17,16] به‌صورت رابطه (14) نتیجه می‌شود:

$$\underline{\tilde{w}}(p,y,s)=-\frac{bs\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\times\left\{\frac{2h+y}{\sqrt{(2h+y)^2+x^2}}K_1\left(bs\sqrt{(2h+y)^2+x^2}\right)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}K_1\left(bs\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\} \tag{14}$$

که K_υ توابع بسل بهبود یافته مرتبه υ از نوع دوم است.

اکنون از میدان جابجایی بدست آمده در فضای لاپلاس، می‌توان میدان تنش پادصفحه‌ای را از رابطه (1) و با توجه به خواص مشتق توابع بسل بدست آورد [18]. طبق روابط (15) و (16) داریم:

$$\tilde{\sigma}_{xz}(x,y,s)=\frac{\mu(bs)^2\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\left\{\frac{x(2h+y)}{r'^2}K_2(bsr')-\frac{xy}{r^2}K_2(bsr)\right\} \tag{15}$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}(x,y,s)=\frac{\mu(bs)^2\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\left\{(\frac{2h+y}{r'})^2K_0(bsr')-(\frac{y}{r})^2K_0(bsr)-\frac{1}{bs}\left(\frac{x^2-(2h+y)^2}{r'^3}K_1(bsr')+\frac{y^2-x^2}{r^3}K_1(bsr)\right)\right\} \tag{16}$$

که $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $r'=\sqrt{(2h+y)^2+x^2}$ تعریف می‌شود.

برای بدست آوردن حل ناپیوستگی جابجایی در صفحه بی‌نهایت می‌توان آن را از مرز نیم صفحه دور نمود، بنابراین با تعریف فرم مجانبی توابع بسل نوع دوم، رابطه (17)، هنگامی که $z\to\infty$ [18] :

$$K_\upsilon(z)\simeq\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z} \tag{17}$$

و اعمال رابطه بالا به مؤلفه‌های تنش، روابط (15) و (16)، هنگامی که $h\to\infty$ ، تنش‌های مربوط به ناپیوستگی جابجایی صفحه بینهایت، روابط (18) و (19)، حاصل شدند:

$$\tilde{\sigma}_{xz}(x,y,s)=-\frac{\mu(bs)^2\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\left\{\frac{xy}{r^2}K_2(brs)\right\} \tag{18}$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}(x,y,s)=-\frac{\mu(bs)^2\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\left\{(\frac{y}{r})^2K_0(brs)+\frac{1}{bs}\frac{y^2-x^2}{r^3}K_1(brs)\right\} \tag{19}$$

نتایج فوق کاملاً با روابط ارائه شده در مرجع [8] تطابق دارد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

2-1- تکنیکی میدان تنش

با استفاده از فرم مجانبی توابع بسل در حوالی صفر می‌توان رفتار تکینگی میدان تنش، (15) و (16)، را بررسی کرد. فرم مجانبی توابع بسل بهبود یافته نوع دوم به صورت رابطه (20) تعریف می‌شود [18]:

$$K_0(z)\big|_{z\to 0} \simeq -\ln(\frac{z}{2})-\gamma$$
$$K_1(z)\big|_{z\to 0} \simeq \frac{1}{z}+\frac{z}{2}(\ln(\frac{z}{2})+\gamma-\frac{1}{2})$$
$$K_2(z)\big|_{z\to 0} \simeq \frac{2}{z^2}-\frac{1}{2} \qquad (20)$$

که γ ثابت اولر و $\gamma = 0/57754899949$ است. در نتیجه با استفاده از روابط (20) ترم‌های تکین تنش بدست می‌آیند، که طبق روابط (21) و (22) عبارت‌اند از:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xz}(x,y,s)\big|_{r\to 0} \simeq -\frac{\mu\tilde{\Delta}_z(s)}{\pi}\frac{xy}{r^4} \qquad (21)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yz}(x,y,s)\big|_{r\to 0} \simeq \frac{\mu\tilde{\Delta}_z(s)}{2\pi}\left\{\frac{x^2-y^2}{r^4}+(bs\frac{y}{r})^2\ln(\frac{bsr}{2})\right\} \qquad (22)$$

از روابط (21) و (22) پیداست تکینگی میدان تنش از دو نوع مرتبه بالا $O(1/r^2)$ و لگاریتمی $O(\ln(r))$ هستند.

3- فرمولاسیون چندین ترک

برای سادگی در نوشتن معادلات، دستگاه مختصات روی مرز نیم صفحه قرار داده می‌شود. فرض کنید، نیم صفحه حاوی N ترک مستقیم و موازی با مرز دارای معادلات پارامتری به صورت رابطه (23) باشد.

$$\alpha_i(q) = x_{Ci} + a_i q$$
$$\beta_i(q) = y_{0i},$$
$$i = 1,2,..,N \quad -1 \le q \le 1 \qquad (23)$$

که مختصات (x_{Ci}, y_{0i}) وسط ترک i ام و a_i نصف طول ترک است. حدود q در رابطه (23) به نحوی انتخاب شده است که با تغییر آن بین (1,1-) کل طول ترک طی شود.

با درنظر گرفتن توزیع پیوسته تابع چگالی ناپیوستگی جابجایی روی سطح ترک j ام بصورت $\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s)$ با مختصات (شکل 2)،

$$\alpha_j(\zeta) = x_{Cj} + a_j\zeta$$
$$\beta_j(\zeta) = y_{0j},$$
$$j = 1,2,..,N \quad -1 \le \zeta \le 1, \qquad (24)$$

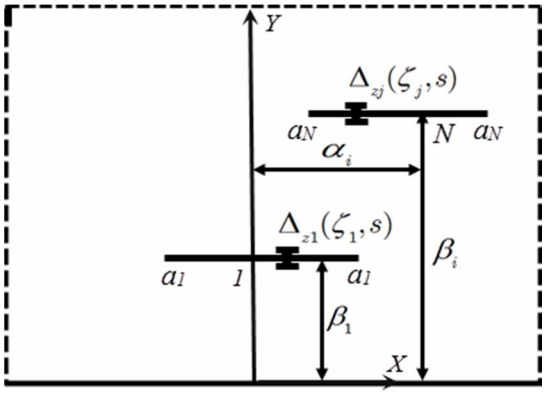
بردار تنش ایجاد شده حاصل از توزیع ناپیوستگی جابجایی با استفاده از اصل جمع آثار نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\sigma}^i_{yz}(q,s) = \sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1}\tilde{K}_{ij}(q,\zeta,s)\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s)d\zeta \qquad (25)$$

لازم بذکر است که پارامترهای با زیراندیس‌های i و j به‌ترتیب تابعی از q و ζ هستند. بنا بر اصل باکنر [19] سمت چپ معادله بالا با توجه به بارگذاری‌های وارده معلوم است. در نتیجه رابطه (25) تبدیل به دستگاه معادلات انتگرالی نسبت به مجهول $\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s)$ می‌شود.

کرنل معادله انتگرالی (25) با توجه به رابطه (16) و تکینگی رابطه (22) به‌صورت $\tilde{K}_{ij}(q,\zeta,s) = \delta_{ij}\bar{\bar{\sigma}}_{yz} + (\tilde{\sigma}_{yz} - \delta_{ij}\bar{\bar{\sigma}}_{yz})$ تعریف می‌شود. بنابراین معادله انتگرالی حاصل از توزیع ناپیوستگی جابجایی برای چندین ترک به صورت رابطه (26) ساده می‌شود،

$$\frac{2\pi\tilde{\sigma}^i_{yz}(q,s)}{\mu} = \sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\delta_{ij}}{r_{ij}^2}+\frac{\delta_{ij}T^2}{2}\left(\ln(\frac{Tr_{ij}}{2})\right)+\tilde{k}^{ij}_{reg}\right\}a_j\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s)d\zeta \qquad (26)$$



شکل 2 توزیع ناپیوستگی جابجایی برای چندین ترک در نیم صفحه همگن

بطوریکه $r_{ij} = \sqrt{(\beta_i-\beta_j)^2+(\alpha_i-\alpha_j)^2}$ ، $T = bs$ و δ_{ij} دلتای کرونکر است. کرنل معادله انتگرالی هنگامی که $i = j$ تکین، و از دو نوع مرتبه دوم و لگاریتمی (تکینگی ضعیف شده[1]) است. $\tilde{k}^{ij}_{reg}$ قسمت غیرتکین کرنل، و طبق رابطه (27) عبارت است از:

$$\tilde{k}^{ij}_{reg} = \left(\frac{T(\beta_i+\beta_j)}{r'_{ij}}\right)^2 K_0(Tr'_{ij}) - \left(\frac{\beta_i-\beta_j}{r_{ij}}\right)^2 K_0(Tr_{ij})$$
$$-T\left[\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2-(\beta_i+\beta_j)^2}{r'^3_{ij}}K_1(Tr'_{ij})+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\delta_{ij}}{Tr_{ij}^2}+\delta_{ij}\frac{T}{2}\ln(\frac{Tr_{ij}}{2})-\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2-(\beta_i-\beta_j)^2}{r_{ij}^3}K_1(Tr_{ij})\right)\right] \qquad (27)$$

که $r'_{ij} = \sqrt{(\beta_i+\beta_j)^2+(\alpha_i-\alpha_j)^2}$ است.

به‌دلیل عدم ناپیوستگی جابجایی در دو نوک ترک، رفتار تابع $\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s)$ در $\zeta = \pm 1$ به‌صورت رابطه (28) فرض می‌شود [21,20]:

$$\tilde{\Delta}_{zj}(\zeta,s) = \tilde{R}_{zj}(\zeta,s)\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (28)$$

حل عددی معادله انتگرالی (26) را می‌توان بر اساس تابع وزن $\sqrt{1-\zeta^2}$ و نوع تکینگی مرتبه بالا برحسب چندجمله‌ای سری چبیشِف مناسب به‌صورت رابطه (29) بسط داد:

$$\tilde{R}_{zj}(\zeta,s) = \sum_{n=0}^{M}\tilde{C}_{nj}(s)U_n(\zeta) \qquad (29)$$

که $U_n(\zeta)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم و از رابطه (30) تعریف می‌شود:

$$n = 0,1,2,.. \quad U_n(\zeta) = \frac{\sin\left[(n+1)\cos^{-1}(\zeta)\right]}{\sin\left[\cos^{-1}(\zeta)\right]}, \qquad (30)$$

با جایگذاری رابطه (30) در معادله انتگرالی (26) ترم‌های تکین مرتبه دوم و ضعیف شده را می‌توان به صورت تحلیلی بر حسب توابع چبیشف محاسبه نمود [23,22]، و در نهایت به فرم استخراج شده به‌صورت رابطه (31) در می‌آید:

$$\frac{\pi\tilde{\sigma}^i_{yz}(q,s)}{\mu} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{M}a_j\tilde{C}_{nj}(s)\left\{\delta_{ij}\Lambda_n(q,s)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\zeta^2}\tilde{k}^{ij}_{reg}(q,\zeta)U_n(\zeta)d\zeta\right\} \qquad (31)$$

که

$$\Lambda_n(q,s) = -\frac{\pi(n+1)}{2a_i^2}U_n(q)+\frac{\pi}{8}T^2\begin{cases}\left(q^2-\frac{1}{2}+\ln\frac{a_iT}{4}\right), & n=0\\ \left(-\frac{T_n(q)}{n}+\frac{T_{n+2}(q)}{n+2}\right), & n\ge 1\end{cases} \qquad (32)$$

1- Weak singular

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

$T_n(q)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول مرتبه n، به‌صورت رابطه (33) بیان می‌شود [22]:

$$n=0,1,2,..\quad T_n(q)=\cos\left[n\cos^{-1}(q)\right], \tag{33}$$

حل معادله (31) را می‌توان به کمک الگوریتم نقاط نظم یافته[1] [20] انجام داد. از لحاظ عددی گسسته کردن معادله توسط ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف، رابطه (34)، انجام و به دستگاه معادلات جبری خطی کاهش پیدا می‌کند. [23]:

$$e=0,1,2...,M\quad q_e=\cos\left[\frac{2e+1}{2M+2}\pi\right], \tag{34}$$

برای محاسبه بخش انتگرالی معادله (31) از روش انتگرال‌گیری فرمول اصلاح‌شده تربیع چبیشف[2] استفاده می‌شود. نقاط تربیع[3] در رابطه (35) است[19]:

$$m=0,1,2,...,NQ\quad \zeta_m=\cos\left[\pi\frac{(m+1)}{NQ+2}\right], \tag{35}$$

بنابراین با معرفی این فرآیند عددی و استفاده از رابطه (36) ضرایب بسط چبیشف، $\tilde{C}_{nj}(s)$ با حل $M+1$ معادله جبری بدست خواهد آمد.

$$\frac{\pi\tilde{\sigma}^i_{yz}(q_e,s)}{\mu}=\sum_{n=0}^{M}a_j\tilde{C}_{nj}(s)\left\{\delta_{ij}\Lambda_n(q_e,s)+\frac{\pi}{2NQ+4}\sum_{m=0}^{NQ}\tilde{k}^{ij}_{\text{reg}}(q_e,\zeta_m)\left[T_n(\zeta_m)-T_{n+2}(\zeta_m)\right]\right\} \tag{36}$$

4- محاسبه ضریب شدت تنش

از آنجا که پیشرفت ترک از نوک آن آغاز می‌شود مطالعه ضریب شدت تنش در هر دو نوک ترک حائز اهمیت است. زیرا وجود نوک‌های ترک مقابل هم باعث افزایش ضریب شدت تنش به‌دلیل برهم‌زدن[4] جریان موج تنش می‌شود. ضریب شدت تنش دینامیکی در فضای لاپلاس برای حالتی که طول ترک $2a_i$ و مبدا مختصات در مرکز ترک قرار گرفته باشد، از روابط (37) و (38) تعریف می‌شود [13]:

$$x>\alpha_i(1)\quad \tilde{K}^{R_i}_{\text{III}}(s)=\lim_{x\to\alpha_i(+1)}\sqrt{2\pi(x-\alpha_i(+1))}\tilde{\sigma}^i_{yz}(x,0,s), \tag{37}$$

$$x<\alpha_i(-1)\quad \tilde{K}^{L_i}_{\text{III}}(s)=\lim_{x\to\alpha_i(-1)}\sqrt{2\pi(\alpha_i(-1)-x)}\tilde{\sigma}^i_{yz}(x,0,s), \tag{38}$$

$\tilde{K}^{R_i}_{\text{III}}$ و $\tilde{K}^{L_i}_{\text{III}}$ به‌ترتیب ضریب شدت تنش دینامیکی مود سوم شکست برای نوک‌های راست و چپ ترک i ام است.

در محاسبه حد بالا برای تعیین ضرایب شدت تنش، ترم‌های تکین موثر است و ترم‌های غیرتکین در حدگیری صفر خواهند شد. بنابراین، بر اساس مرجع [22] فرمولاسیون مربوط به ضرایب شدت تنش چندین ترک برای نوک‌های راست و چپ به‌ترتیب به‌صورت روابط (39) و (40) بدست می‌آید:

$$\tilde{K}^{R_i}_{\text{III}}(s)=\frac{\mu}{2a_i}\sqrt{\pi a_i}\sum_{n=0}^{M}(n+1)\tilde{C}_{ni}(s) \tag{39}$$

$$\tilde{K}^{L_i}_{\text{III}}(s)=\frac{\mu}{2a_i}\sqrt{\pi a_i}\sum_{n=0}^{M}(-1)^n(n+1)\tilde{C}_{ni}(s) \tag{40}$$

که $i=1,2,..,N$.

5- الگوریتم لاپلاس معکوس عددی

در بخش قبل، مجهول ناپیوستگی جابجایی تعیین و نهایتاً ضرایب شدت تنش در فضای لاپلاس بدست آمدند. با استفاده از الگوریتم مناسب لاپلاس معکوس، ضرایب شدت تنش در فضای زمان قابل‌محاسبه هستند. روش لاپلاس معکوس عددی با گسسته سازی نقاط بر روی محور حقیقی یا موهومی محاسبه می‌شوند. ازاینرو روش‌های متعددی پیشنهاد شده است؛ گیور-استهفست، میلر-گای، دوربین و دیگر روش‌ها [25,24]. در این مقاله برای افزایش دقت محاسبات و تأیید نتایج از دو روش لاپلاس معکوس عددی دوربین و اِستِهفِست استفاده می‌شود.

5-1- روش دوربین

دوربین، حل مسئله در فضای لاپلاس را با استفاده از بسط سری فوریه سینوسی -کسینوسی و گسسته سازی روی محور موهومی انجام می‌دهد. رابطه (41) ضریب شدت تنش را در فضای مادی به صورت انتگرال روی خط برُمویچ[5] در فضای زمان بیان می‌کند:

$$K_{\text{III}}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\text{Br}}\tilde{K}_{\text{III}}(s)e^{st}ds \tag{41}$$

محاسبه انتگرال (41) در حالت کلی به‌صورت تحلیلی ممکن نیست. ازاینرو، از روش های عددی استفاده می شود. در نتیجه مقدار تابع $\tilde{K}_{\text{III}}(s)$ برای مقادیر متفاوت پارامتر لاپلاس یعنی $s_k=\eta+2\pi ik/D$ محاسبه می شود که $i=\sqrt{-1}$، $k=0,1,2,..,L$ و η و D ثوابت و L تعداد نقاط گسسته در فضای لاپلاس می‌باشند. در نهایت $K_{\text{III}}(t)$ در حوزه زمان با استفاده از الگوریتم دوربین [26] به صورت رابطه (42) معرفی می‌شود:

$$K_{\text{III}}(t)\approx\frac{e^{\eta t}}{D}\left[\frac{1}{2}\text{Re}\left\{\tilde{K}_{\text{III}}(\eta)\right\}+\sum_{k=0}^{L}\text{Re}\left\{\tilde{K}_{\text{III}}(s_k)\right\}\cos\left(\frac{2\pi kt}{D}\right)-\text{Im}\left\{\tilde{K}_{\text{III}}(s_k)\right\}\sin\left(\frac{2\pi kt}{D}\right)\right] \tag{42}$$

Re و Im به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی را نشان می‌دهد.

5-2- روش اِستِهفِست

اِستِهفست با گسسته سازی روی محور حقیقی، حل انتگرال لاپلاس معکوس (41) را دنبال می‌کند [27]:

$$K_{\text{III}}(t)\approx\frac{\ln 2}{t}\sum_{N=1}^{P}V_N\tilde{K}_{\text{III}}\left(\frac{N}{t}\ln 2\right) \tag{43}$$

که P عدد اِستِهفِست و باید زوج باشد. V_N به صورت رابطه (44) است:

$$V_N=(-1)^{N+P/2}\times\sum_{k=(1+N/2)}^{\min(N,P/2)}\frac{k^{P/2}(2k)!}{(P/2-k)!k!(k-1)!(P-k)!(2k-P)!} \tag{44}$$

در زمان‌های طولانی، ضریب شدت تنش دینامیکی بسته به نوع بارگذاری به سمت حل الاستواستاتیک همگرا می‌شود؛ رابطه (45) محاسبه این حد را از قضیه مقدار نهایی[6] نشان می‌دهد [14]:

$$K_{\text{III}}(t\to\infty)=\lim_{s\to 0}s\tilde{K}_{\text{III}}(s) \tag{45}$$

6- مثال‌های عددی و بحث

برای صحت‌سنجی مدلسازی انجام شده، می‌توان مسئله یک ترک مستقیم به طول $2a$ در صفحه بی‌نهایت، تحت ترکشن برشی وابسته به زمان تابع پله $\sigma_{yz}=\sigma_0H(t)$ روی سطح ترک در نظر گرفت. با حل دستگاه معادلات جبری، (31)، و بدست آوردن ضرایب ناپیوستگی جابجایی و جایگذاری آن در روابط (39) و (40)، باتوجه به الگوریتم‌های لاپلاس معکوس عددی استهفست و دوربین ضرایب شدت تنش دینامیکی در محیط زمان بدست می‌آید. هر دو روش لاپلاس معکوس عددی از معتبرترین روش‌ها در سطح وسیعی از علوم و مهندسی

1- Collocation points method algorithm.
2- Modified chebyshev quadrature formula
3- Quadrature points
4- Disturbed

5- Bromwich integration path (Br)
6- Final-value theorem

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

می‌باشند. مزیت روش استهفست، پیچیدگی و هزینه محاسباتی کمتر نسبت به روش دوربین است و همین باعث شده بیشتر حل عددی لاپلاس معکوس براساس این روش بنا نهاده شود. اما این مطالعه به روشنی قابل اعتمادتر بودن هر کدام از روش‌ها را نشان می‌دهد.

در روش لاپلاس معکوس عددی حساسیت زیاد به ثوابت هر کدام از تکنیک‌ها یعنی در روش استهفست، عدد استهفست P و در روش دوربین عدد D مشاهده می‌شود. در این مقاله، ثوابت لاپلاس معکوس در روش استهفست: $P = 20$ و در روش دوربین: $L = 120$، $\eta = 0.2$ و $D = 40$ در نظر گرفته می‌شود. برنامه نویسی حل عددی با استفاده از نرم افزار متلب انجام می‌شود.

6-1- بارهای پله‌ای، هارمونیک و نوسانی بر روی یک ترک

صفحه بی‌نهایت حاوی ترک مستقیم الخط بر روی بخشی از محور x، $(-a,a)$، را در نظر بگیرید. با وارد کردن تنش برشی یکنواخت پله‌ای، $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ بر روی سطح ترک و اعمال تبدیل لاپلاس، $\tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_0 / s$ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده $K_{III}(t)/K_0$، که $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi a}$، بر حسب زمان بدون بعد $C_s t/a$ محاسبه شده است. شکل3 ضریب شدت تنش دینامیکی را برای یک ترک در صفحه بی‌نهایت نشان می‌دهد.

اوج شدت تنش در $C_s t/a = 2$ به $K_{III}(t)/K_0 = 1.26$ می‌رسد؛ که با حل تحلیلی در مرجع [28] کمتر از 0/7 درصد اختلاف مشاهده می‌شود. پس از آن با گذشت زمان و کاهش اثر امواج تنش، به مقدار استاتیکی خود میل می‌کند. این نتایج با نتایج موجود در [11, 29]، به خوبی مطابقت دارد. همچنین مشخص است در این مورد هر دو الگوریتم از دقت بالایی برخوردار و الگوریتم دوربین به حل تحلیلی نزدیک‌تر است.

به منظور بررسی صحت سنجی روش و همچنین برای ارزیابی الگوریتم‌های ارائه شده، دو بارگذاری دینامیکی مختلف در نظر گرفته می شود. یکی بار هارمونیک $\sigma_{yz} = \sigma_0 \sin(\varpi t)$ و دیگری بار نوسانی $\sigma_{yz} = \sigma_0 \sin|(\varpi t)|$ که تبدیل لاپلاس آن با اعمال رابطه (6)، به‌صورت روابط (46) و (47) بیان می گردد:

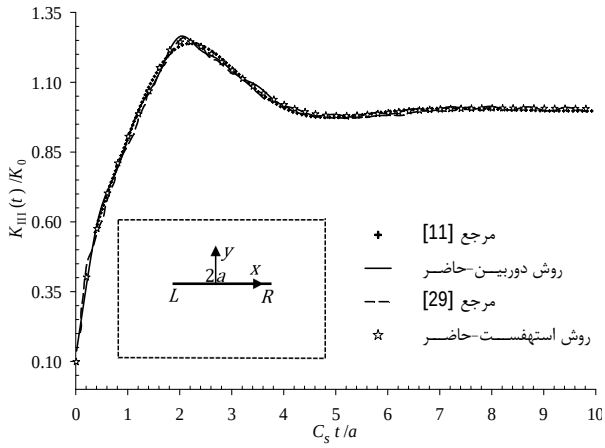
$$\tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_0 \frac{\varpi}{s^2 + \varpi'^2} \tag{46}$$

$$\tilde{\sigma}_{yz} = \sigma_0 \frac{\varpi}{s^2 + \varpi'^2} \coth\frac{\pi s}{2\varpi} \tag{47}$$

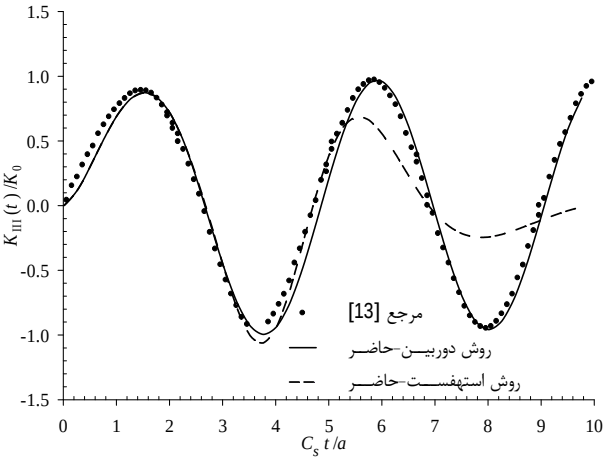
که $\varpi = \omega / c_s$ عدد موج است. ضریب شدت تنش به ازای عدد موج‌های $\varpi = 1.5,2.5$ برای موج هارمونیک و $\varpi = 4.5,5.5$ برای موج نوسانی، نسبت به زمان بی بعد $C_s t/a$ در شکل‌های 4 تا 7 رسم شده است. آنچه مشخص است در فرکانس پایین، $\varpi = 1.5$ دامنه نوسانات ضریب شدت تنش بصورت یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد و در فرکانس $\varpi = 2.5$، افزایش ضریب شدت تنش از صفر به مقدار بیشینه و سپس به حالت پایا می‌رسد.

در بارگذاری نوسانی با فرکانس بالا، $\varpi = 5.5$، رفتار ضریب شدت تنش با آنچه در بارگذاری ضربه حاصل می‌شود نزدیکتر است [13]، (شکل 6). در فرکانس پایین‌تر $\varpi = 4.5$، ضریب شدت تنش صورتی پیچیده‌تر دارد، (شکل7). مقایسه دو الگوریتم با نتایج سُلیار [13]، دقت بالای الگوریتم لاپلاس معکوس دوربین نسبت به روش استهفست را نتیجه می‌دهد.

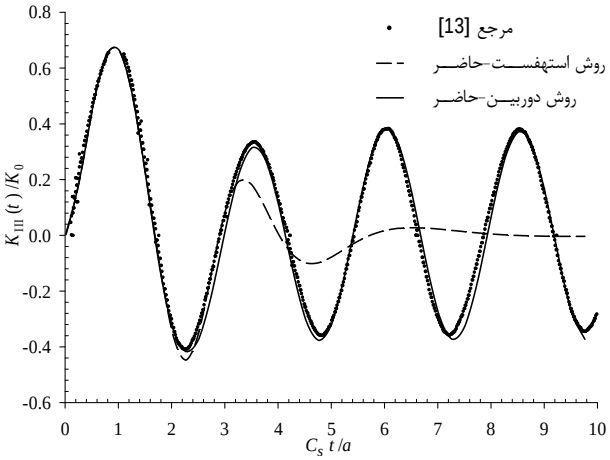
پیداست روش استهفست برای بارگذاری‌های موجی-نوسانی در بازه زمانی ابتدایی دارای دقتی خوب است اما با گذشت زمان دیگر این روش به نسبت روش دوربین قابل‌اعتماد نیست.



شکل 3 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای یک ترک در صفحه بی‌نهایت تحت بار پله‌ای $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$.



شکل 4 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، در صفحه بی‌نهایت تحت بارهارمونیک با عدد موج $\varpi = 1.5$.



شکل 5 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، در صفحه بی‌نهایت تحت بار هارمونیک با عدد موج $\varpi = 2.5$.

6-2- دو ترک هم‌راستا در نیم صفحه

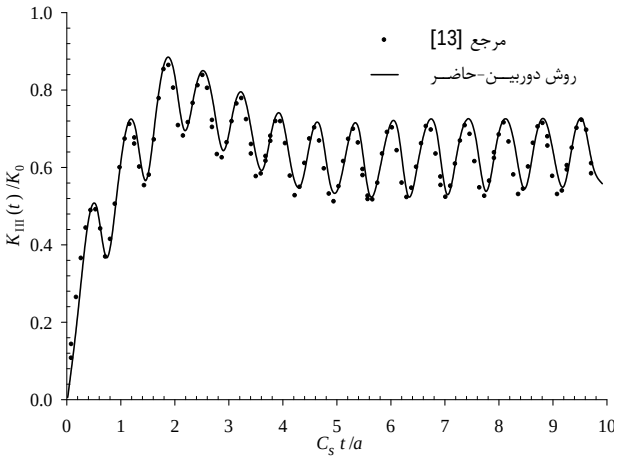
صفحه بی‌نهایت حاوی دو ترک هم‌راستا با طول $2a_1 = 2a_2 = 2a$ در نظر بگیرید که سطوح آن تحت تنش برشی گذرا $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ قرار گرفته است. به دلیل تقارن مسئله نسبت به محور y ضرایب شدت تنش R_2 و L_1 و همچنین R_1 و L_2 یکسان می‌باشند. شکل 8 ضریب شدت تنش را برای دو

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

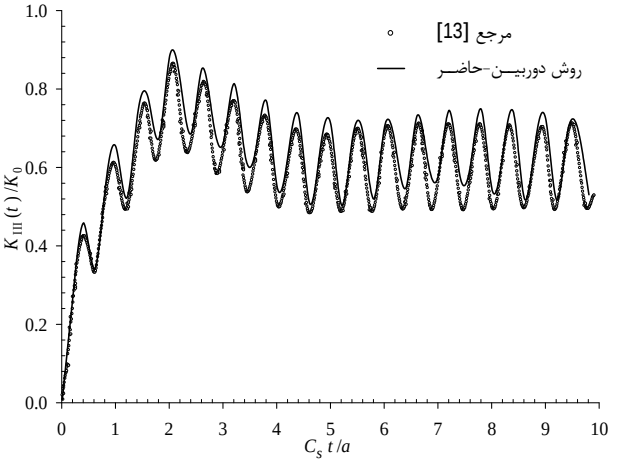
ترک هم‌راستا به فاصله مرکز تا مرکز $3a$ در صفحه بی‌نهایت نشان می‌دهد. به دلیل موج تنش برشی عبوری از ترک اول به ترک دوم و اثر متقابل دو ترک بر هم، ضریب شدت تنش $R_2 > L_2$ است.پیک شدت تنش برای نوک‌های خارجی L_2 و داخلی R_2 به‌ترتیب در زمان بی‌بعد 2/015 و 2/1 دارای مقادیر 1/24 و 1/325 است (شکل 8). از مقایسه این تحلیل نتیجه می‌شود، ضرایب شدت تنش در دو الگوریتم لاپلاس معکوس عددی با مرجع [11]، به خوبی تطابق دارند. به منظور بررسی و تأثیر موقعیت قرارگیری ترک‌ها در نیم صفحه بر روی ضرایب شدت تنش، بعنوان مثال اول فرض می‌شود، فاصله بین دو ترک 1/5 برابر نصف طول آن،یعنی $X_{c1} = -X_{c2} = 1.5a$ ، و ارتفاع از مرز بصورت پارامتریک متناسب با نصف طول ترک تغییر کند، (شکل9).

در مثال دوم، ارتفاع دو ترک از مرز ثابت $h = 1.75a$ و فاصله مرکز تا مرکز ترک ها متغیر، $X_{c1} = -X_{c2}$ ، درنظرگرفته می‌شود (شکل 10).

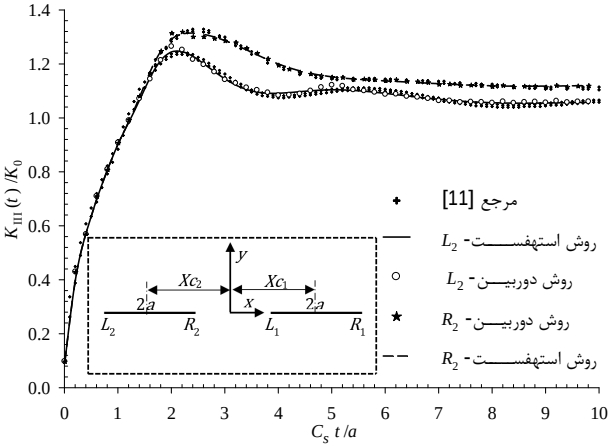
اوج شدت تنش، برای حالت‌هایی که ارتفاع از مرز، $h = 0.5a$، و فاصله نوک‌های ترک تغییر می‌کنند، $X_{c1} = -X_{c2} = 1.25a$، به‌ترتیب در زمان‌های بی‌بعد2/81 و4/21 به 1/7583 و 1/7249، می‌رسد (شکل‌های 9 و10). پس از آن به سرعت همگرا شده و اثر تقابل امواج تنش با مرز و نوک‌های ترک کاهش می‌یابد. نمونه‌های دیگر به خوبی تأثیر این مهم را نشان می‌دهند.



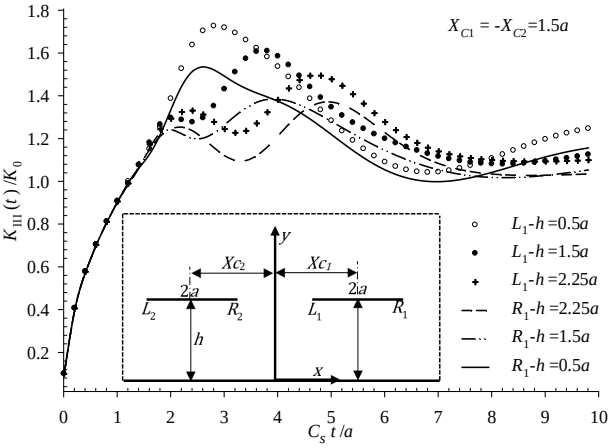
شکل 6 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، در صفحه بی‌نهایت تحت بار نوسانی با عدد موج $\varpi = 5.5$.



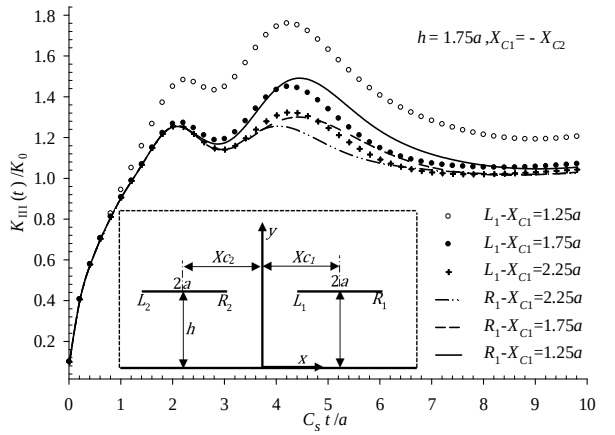
شکل 7 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، در صفحه بی‌نهایت تحت بار نوسانی با عدد موج $\varpi = 4.5$.



شکل 8 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو ترک هم‌راستا در صفحه بی‌نهایت تحت بار برشی پله.



شکل 9 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو ترک هم‌راستا با تغییر ارتفاع از مرز تحت بار برشی پله.



شکل 10 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو ترک هم‌راستا با تغییر فاصله بین دو ترک تحت باربرشی پله.

3-6- دو ترک غیرهم‌راستا در نیم صفحه

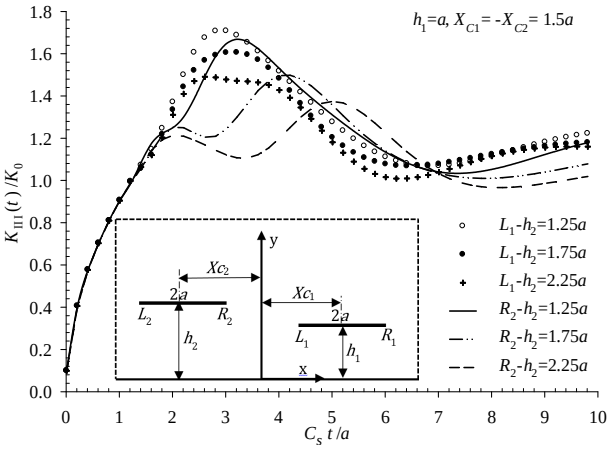
پیش از این تأثیر موقعیت قرارگیری دو ترک هم‌راستا برروی ضرایب شدت تنش مطرح و بحث شد. اکنون حالتی را درنظر بگیرید که دو ترک در یک راستا قرار نگرفته باشند. برای مثال اول، ارتفاع ترک اول از مرز ثابت، $h_1 = a$ ، و ارتفاع ترک دوم متغیر لحاظ شده است. فاصله مرکز تا مرکز دو ترک، $X_{c1} = -X_{c2} = 1.5a$، ثابت در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های 11 و 12 به‌ترتیب

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

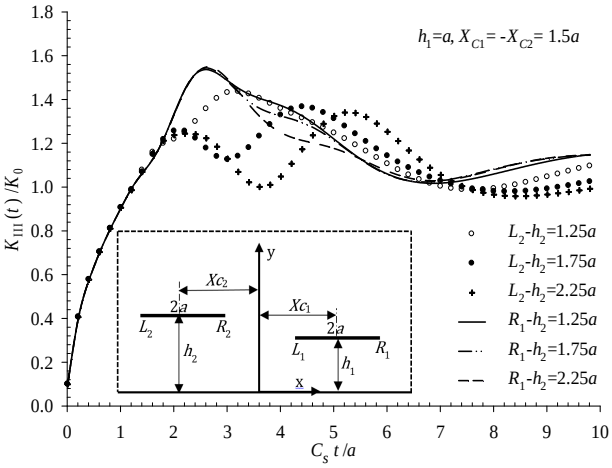
رفتار نوک‌های داخلی و خارجی دو ترک برای سه حالت متفاوت از تغییرات h_2 را نشان می‌دهند. به دلیل غیرهم‌راستا بودن ترک‌ها و عدم تقارن، ضرایب شدت تنش هر یک از نوک‌ها متفاوت است. در مثال عددی دیگر، ارتفاع ترک اول و دوم از مرز ثابت $h_1 = a$ و $h_2 = 2a$ است.

شکل‌های 13و 14 به‌ترتیب ضرایب شدت تنش برای نوک‌های داخلی و خارجی از سه حالت متفاوتِ تغییرات مرکز تا مرکز، $X_{C1} = -X_{C2}$، را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود، پس از به راه افتادن موج تنش از نوک R_1 و منتقل شدن به نوک L_1 و تقابل آن با نوک R_2، ضریب شدت تنش $L_1 > R_2$ و به‌دلیل نزدیک بودن ترک اول به مرز $R_1 > L_2$ است. اوج شدت تنش، برای تقابل دو نوک داخلی و خارجیِ حالتی که ارتفاع از مرز، $h_2 = 1.25a$، و فاصله مرکز تا مرکز ترک $1.5a$، باشد به‌ترتیب در زمان‌های بی‌بعد 2/81 و 2/61، به 1/7076 و 1/5373، شکل‌های 11 و 12، و برای دو نوک داخلی و خارجیِ حالتی که ارتفاع از مرز، $h_2 = 1.5a$، و فاصله مرکز تا مرکز ترک 1/25a، باشد به‌ترتیب در زمان‌های بی‌بعد 3/41 و 2/81، به 1/6037 و 1/5377، شکل‌های 13 و 14، می‌رسد.

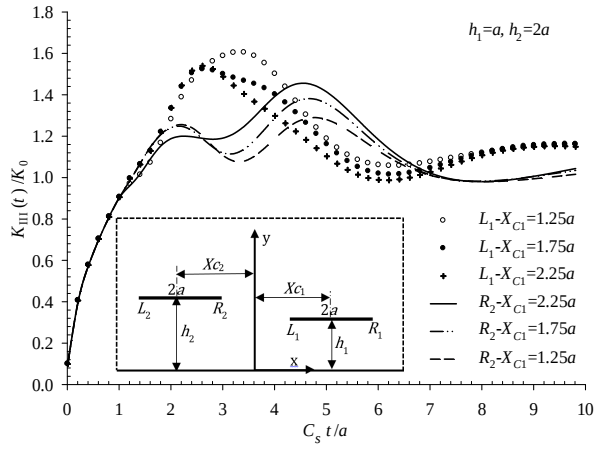
رفت‌وآمد موج‌های تنش برشی از مرز و اندرکنش با نوک‌های ترک باعث به وجود آمدن پیک‌هایی در نمودار ضریب شدت تنش می‌شوند؛ با گذشت زمان، اثر امواج الاستیک برشی کاهش‌یافته و به حالت استاتیکی متمایل می‌شوند. نمونه‌های دیگر با کاهش اثر مرز و افزایش فاصله بین دو ترک به روشنی تأثیر آنچه بحث شد را نشان می‌دهند.



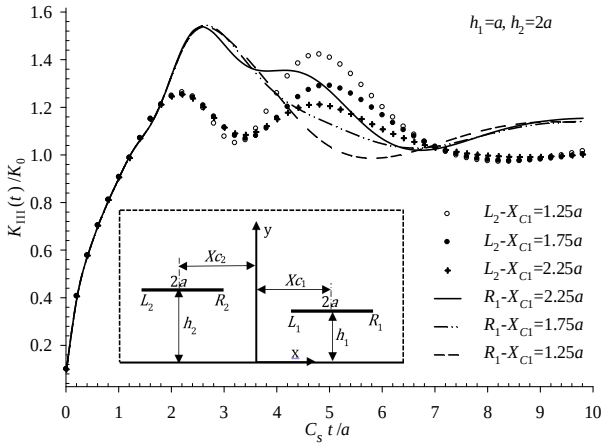
شکل 11 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو نوک داخلی ترک غیرهم‌راستا با تغییر ارتفاع ترک دوم تحت بار برشی پله.



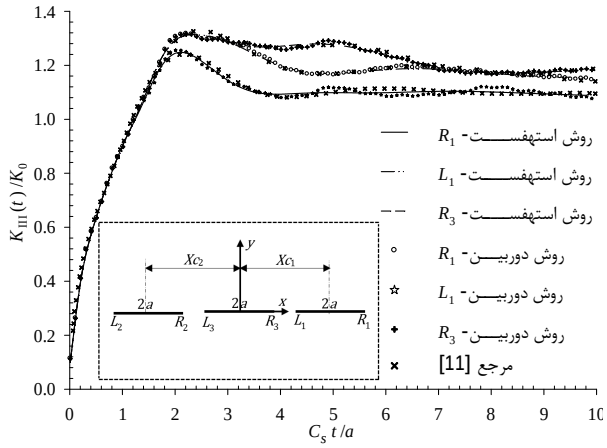
شکل 12 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو نوک خارجی ترک غیرهم‌راستا با تغییر ارتفاع ترک دوم تحت بار برشی پله.



شکل 13 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان‌بی‌بعد، $C_s t/a$، دو نوک داخلی ترک غیرهم‌راستا با فاصله متغیر تحت بار برشی پله.



شکل 14 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای دو نوک خارجی ترک غیرهم‌راستا با فاصله متغیرتحت بار برشی پله.



شکل 15 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک هم‌راستا در صفحه بی‌نهایت تحت بار برشی پله.

6-4- سه ترک در نیم صفحه

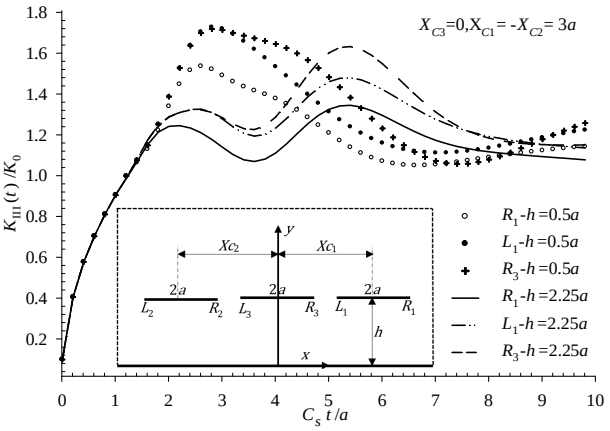
بعنوان آخرین مثال عددی، تحلیل پارامتریک از تأثیر امواج تنش برشی بر روی سه ترک هم‌راستا و غیرهم‌راستا و تقابل آن‌ها با مرز صفحه انتخاب شده است. در ابتدا، فرض کنید طول ترک‌ها $2a_1 = 2a_2 = 2a_3 = 2a$ و سطوح ترک تحت تنش برشی پله‌ای $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ قرار گرفته باشد. به دلیل تقارن

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

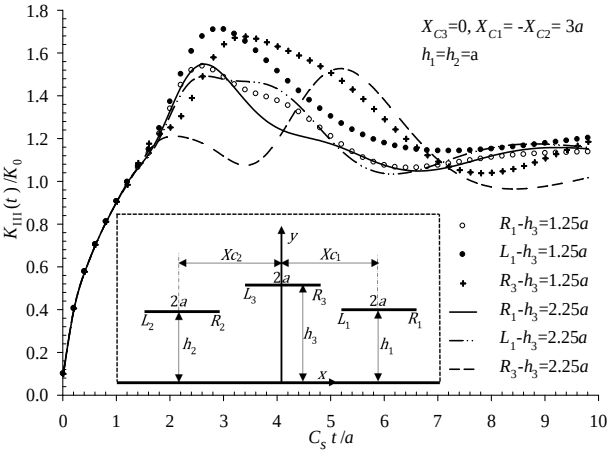
مسئله نسبت به محور y ضرایب شدت تنش $L_1 = R_2$ ، $L_2 = R_1$ و $L_3 = R_3$ هستند. شکل 15 ضرایب شدت تنش را برای سه ترک هم‌راستا با مختصات $X_{C1} = -X_{C2} = 3a$ در صفحه بی‌نهایت نشان می‌دهد. پیک شدت تنش در نوک‌های داخلی، R_3 و L_1 بطور یکسان در زمان بی‌بعد2/21، دارای مقدار 1/3115 است (شکل 15). به واسطه وجود ترک سوم این مقدار با شیبی کمتر نسبت به نمونه‌های قبل به سوی حالت پایا میل می‌کند. پیداست هر دو الگوریتم لاپلاس معکوس عددی با نتایج [11] به خوبی همپوشانی دارد. برای آرایش سه ترک و تاثیر آن بر روی شدت تنش، چند مثال در ادامه آورده شده است. بعنوان مثال اول، دو نمونه متفاوت از سه ترک هم‌راستا با فواصل مرکز تا مرکز یکسان، $X_{C1} = -X_{C2} = 3a$ ، و ارتفاع متغیر از مرز نیم صفحه را در نظر بگیرید. شکل 16 ضرایب شدت تنش را برای سه ترک مستقیم با فاصله متفاوت از مرز نشان می‌دهد.

اوج شدت تنش برای سه ترک هم‌راستا با موقعیت $h = a, 2.5a$ ، در زمان های بی‌بعد،2/81 و5/41، به‌ترتیب به 1/7264و 1/6328 می‌رسد، (شکل 16). در مثال دوم فرض می‌شود، دو ترک اول و دوم در یک راستا، $X_{C1} = -X_{C2} = 3a$ ، با ارتفاع $h_1 = h_2 = a$ ثابت و ترک سوم در مبداء مختصات به فواصل متغیر از مرز قرارمی‌گیرد.

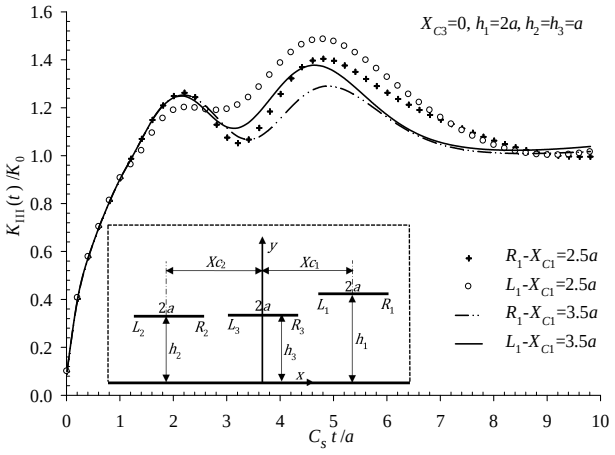
شکل 17 ضرایب شدت تنش را برای ترک‌های غیرهم‌راستا نشان می‌دهد. اوج شدت تنش در نوک R_3 برای $h_3 = 1.25a, 2.25a$ ، در زمان‌های بی‌بعد، 3/41 و 5/21 به‌ترتیب به 1/677و 1/5275 می‌رسد.



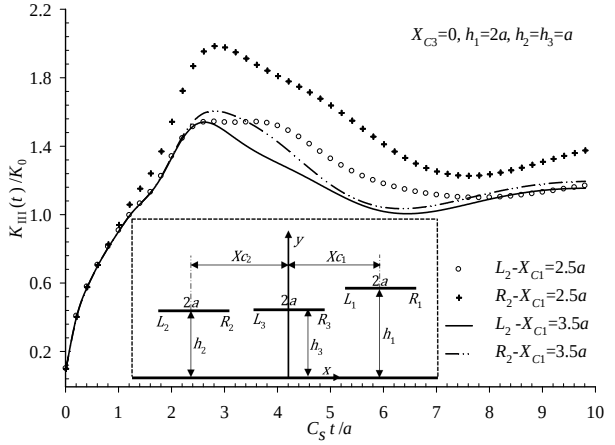
شکل 16 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک هم‌راستا با ارتفاع متغیر از مرز تحت بار برشی پله.



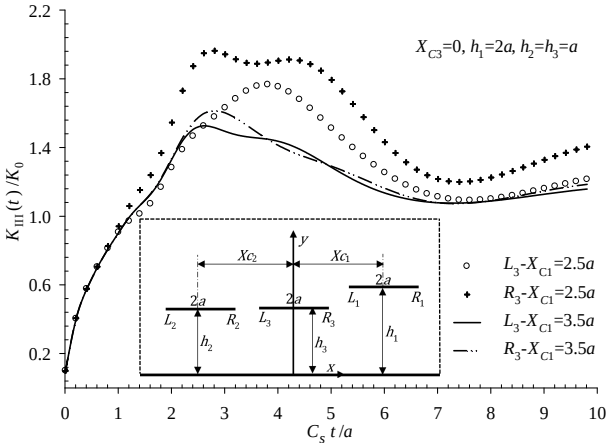
شکل 17 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان‌بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک غیرهم‌راستا با تغییر ارتفاع ترک سوم تحت بار برشی پله.



شکل 18 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک غیرهم‌راستا تحت بار برشی پله: ترک سوم.



شکل 19 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک غیرهم‌راستا تحت بار برشی پله: ترک دوم.



شکل 20 ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد، $K_{III}(t)/K_0$، بر حسب زمان بی‌بعد، $C_s t/a$، برای سه ترک غیرهم‌راستا تحت بار برشی پله: ترک سوم.

پیداست، وقتی ترک سوم از مرز فاصله می‌گیرد اثر تقابل موج تنش برشی از مرز با نوک‌های دیگرِ ترک کمتر شده و از شدت آن کاسته می‌شود. افزایش تعداد ترک موجب اغتشاشات امواج تنش می‌شود. نوع آرایش، نزدیک و دور بودن ترک‌ها از مرز می‌تواند باعث افزایش ضریب شدت تنش و به نحوی منجر به رشد سریع ترک شود. برای مثال، این افزایش هنگامی که سه ترک به صورت غیرمتقارن در نیم صفحه قرار گیرد، یعنی، $h_1 = 2a, h_2 = h_3 = a$ ، و

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]

ترک سوم در مبدأ ثابت $X_{C3}=0$ و فاصله مرکز تا مرکز دو ترک دیگر از مبدأ متغیر باشد، مشخص است (شکل‌های 18 تا 20). پیک شدت تنش در نوک راست ترک اول R_1، برای $X_{C1}=-X_{C2}=2.5a,3.5a$ در زمان بی‌بعد یکسان 4/81 به‌ترتیب1/4042 و 1/2891، و نوک چپ آن L_1 در زمان‌های بی‌بعد 4/81 و 4/61 به 1/4840 و 1/3774 می‌رسند، (شکل 18).

این افزایش پیک شدت تنش، در نوک راست ترک دوم R_2 در زمان بی‌بعد یکسان 2/81 به ترتیب با شدت تنش 1/9848 و 1/6063 مشهود است، (شکل 19). نوک L_2 در فاصله $X_{C1}=2.5a$ به دلیل تقابل با ترک سوم نسبت به نمونه دیگر مدت بیشتری در پیک شدت تنش می‌ماند. همچنین این مقدار در نوک R_3، برای فاصله مرکز تا مرکز $2.5a$ و $3.5a$ در زمان بی‌بعد2/81 به‌ترتیب،1/9631 و 1/6146، و در L_3 در زمان بی‌بعد3/81 و2/61 به‌ترتیب به مقدار 1/7652و1/5268 می‌رسد، (شکل 20).

7- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با استفاده از روش ناپیوستگی جابجایی به‌صورت تابع مکان-زمان حل مسئله دینامیکی ترک با توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی در نیم صفحه همگن دنبال شده است. ضرایب شدت تنش در فضای مادی با ارائه دو الگوریتم متفاوت لاپلاس معکوس عددی بدست آمدند.

معادله انتگرالی حاصل از روش توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی با تکینگی نوع مرتبه بالا و تکینگی ضعیف شده (تکینگی لگاریتمی) است. به این دلیل، حل معادله انتگرالی بر اساس بسط سری چبیشف پاسخ مطلوب‌تری را نتیجه می‌دهد؛ کما اینکه در نمودارهای صحت سنجی مشاهده می‌شود. از مقایسه دو الگوریتم لاپلاس معکوس عددی نتیجه می‌شود که روش دوربین برای بارگذاری‌های نوسانی به مراتب از روش استهفست دقیق‌تر و برای بارگذاری ضربه نتایج به هم نزدیک است. تأثیر امواج تنش برشی و تقابل چندین ترک مستقیم و موازی با مرز نیم صفحه الاستیک تحت ترکشن‌های مختلف وابسته به زمان بر روی ضرایب شدت تنش دینامیکی از اهداف مهم مطالعه پارامتریک مسائل ترک بوده است. هنگامی که ترک به مرز صفحه نزدیک و یا فاصله بین ترک‌ها کم می‌شود، حداکثرهای شدت تنش با سرعت افزایش می‌یابد. همچنین قرار گرفتن ترک‌ها در موقعیت‌های حساس (نزدیک بودن ترک‌ها به یکدیگر و یا فاصله آن‌ها با مرز) سبب افزایش مدت زمان پیک شدت تنش می‌شود. این مهم هنگام وجود سه ترک نسبت به دو ترک مشهود است.

8- مراجع

[1] P. Wen, *Dynamic fracture mechanics: displacement discontinuity method*, southampton, United Kingdom and Billerica: MA: Computational Mechanics Publications(Topics in Engineering). 1996.

[2] A. W. Maue, Die beugung elastischer wellen an der halbebene, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 33, No. 1 - 2, pp. 1-10, 1953.

[3] J. Loeber, G. Sih, Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 44, No. 1, pp. 90-98, 1968.

[4] D. Gross, C. Zhang, Diffraction of SH waves by a system of cracks: solution by an integral equation method, *International journal of solids and structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 41-49, 1988.

[5] J. Huang, H. So, Determination of dynamic stress intensity factors of multiple cracks, *International journal of fracture*, Vol. 36, No. 3, pp. 187-198, 1988.

[6] C.-C. Ma, S.-K. Chen, Exact transient full-field analysis of an antiplane subsurface crack subjected to dynamic impact loading, *Journal of applied mechanics*, Vol. 61, No. 3, pp. 649-655, 1994.

[7] J.-Y. Huang, Interaction of SH-waves with a finite crack in a half-space, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 51, No. 2, pp. 217-224, 1995.

[8] P. Wen, M. Aliabadi, D. Rooke, Dynamic analysis of mode III cracks in rectangular sheets, *International journal of fracture*, Vol. 80, No. 2, pp. R37-R41, 1996.

[9] C.-C. Ma, Y.-S. ING, Transient wave analysis of an antiplane crack interaction with half-plane boundary, *International journal of engineering science*, Vol. 34, No. 13, pp. 1507-1517, 1996.

[10] C. W. Shul, K. Y. Lee, Dynamic response of subsurface interface crack in multi-layered orthotropic half-space under anti-plane shear impact loading, *International journal of solids and structures*, Vol. 38, No. 20, pp. 3563-3574, 2001.

[11] K. Wu, J. Chen, Transient analysis of collinear cracks under anti-plane dynamic loading, *Procedia Engineering*, Vol. 10, pp. 924-929, 2011.

[12] K. C. Wu, Y. L. Hou, S. M. Huang, Transient analysis of multiple parallel cracks under anti-plane dynamic loading, *Mechanics of Materials*, Vol. 81, pp. 56-61, 2015.

[13] T. Y. Solyar, Transient and Steady-State Dynamic Stresses Under Antiplane Deformation of Bodies with Cracks, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 194, No. 2, pp. 225-238, 2013.

[14] H. J. Choi, Elastodynamic Interaction of Two Offset Interfacial Cracks in Bonded Dissimilar Media With a Functionally Graded Interlayer Under Antiplane Shear Impact, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 8, pp. 081008, 2014.

[15] M. Aliabadi, Boundary element formulations in fracture mechanics, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 2, pp. 83-96, 1997.

[16] K. Watanabe, *Integral transform techniques for green's function*: Springer, 2013.

[17] B. M. Project, A. Erdélyi, H. Bateman, *Tables of Integral Transforms: Based in Part on Notes Left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project*: McGraw-Hill, 1954.

[18] A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*: CRC press, 2012.

[19] H. Bueckner, Novel principle for the computation of stress intensity factors, *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, Vol. 50, No. 9, 1970.

[20] R. S. St John, *The solution of hypersingular integral equations with applications in acoustics and fracture mechanics*, Phd thesis Thesis, Computational and Applied Mathematics, Old Dominion University, USA, 1998.

[21] I. Karimipour, A. Fotuhi, Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 139-149, 2014. (In Persian)

[22] Y.-S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino, Integral equations with hypersingular kernels—theory and applications to fracture mechanics, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 7, pp. 683-720, 2003.

[23] N. Parsons, P. Martin, Scattering of water waves by submerged plates using hypersingular integral equations, *Applied Ocean Research*, Vol. 14, No. 5, pp. 313-321, 1992.

[24] B. Davies, B. Martin, Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods, *Journal of computational physics*, Vol. 33, No. 1, pp. 1-32, 1979.

[25] A. M. Cohen, *Numerical methods for Laplace transform inversion*: Springer, 2007.

[26] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *The Computer Journal*, Vol. 17, No. 4, pp. 371-376, 1974.

[27] H. Stehfest, Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5], *Communications of the ACM*, Vol. 13, No. 1, pp. 47-49, 1970.

[28] S. A. Thau, L. Tsin-Hwei, Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, No. 7, pp. 731-750, 1971.

[29] J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang, A meshless local boundary integral equation method for dynamic anti-plane shear crack problem in functionally graded materials, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 29, No. 4, pp. 334-342, 2005.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.49.1]