مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1395، دوره 16، شماره 3، ص‌ص 79-86

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

محاسبه ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی در مواد تابعی ارتوتروپیک با روش جابجایی

رحمت الله قاجار[1*]، محمدرضا وراوی[2]، صفا پیمان[3]

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران
3- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران
* تهران، صندوق پستی 19395-1999، ghajar@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 07 آذر 1394
پذیرش: 16 دی 1394
ارائه در سایت: 08 اسفند 1394

کلید واژگان:
ضرایب شدت تنش
مواد تابعی
روش جابجایی
پارامتر ناهمگنی
اجزای محدود

چکیده

ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی از پارامترهای مهم بررسی و پیش‌بینی رفتار شکست در اجسام ترک‌دار می‌باشند. در این پژوهش، از روش جابجایی برای محاسبه ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد تابعی استفاده می‌شود. میدان جابجایی به روش عددی و با استفاده از نرم افزار آباکوس به دست می‌آید. زیر برنامه‌ای به زبان فرترن نوشته می‌شود، تا به کمک آن بتوان، تغییرات پیوسته خواص مواد تابعی را در تحلیل عددی در نظر گرفت. شبکه المانی ناحیه حل با کاربرد المان‌های تکینی 8 گرهی ایجاد می‌شود. نرم‌افزار آباکوس توانایی محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد تابعی را به صورت مستقیم ندارد. لذا برنامه‌ای به زبان متلب برای محاسبه این ضرایب تدوین می‌گردد. با تحلیل یک نمونه تحت بار دینامیکی، رفتار شکست دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک و تاثیر پارامتر ناهمگنی بر آن با در نظر گرفتن تغییرات مواد تابعی در دو راستای عمود برهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. اعتبار سنجی روش با حل مسئله‌های همگن و تابعی با ترک مرکزی تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی انجام می‌گیرد و نتایج با داده‌های موجود در تحقیقات پیشین مقایسه می‌گردد. نتایج نشان می‌دهند که اگر خواص ماده در راستای موازی ترک تغییر کند، با افزایش پارامتر ناهمگنی، ضریب شدت تنش دینامیکی مود I نوک ترک با سفتی بیشتر، افزایش می‌یابد. در حالی که برای تغییر خواص در راستای عمود بر ترک، این ضریب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

Calculation of static and dynamic stress intensity factors in orthotropic functionally graded materials using displacement correlation technique

Rahmatollah Ghajar[1*], Mohammad Reza Varavi[1], Safa Peyman[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
2- Department of Aerospace Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran
*P.O.B 19395-1999 Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 November 2015
Accepted 06 January 2016
Available Online 27 February 2016

Keywords:
Stress intensity factors
Functionally graded materials
Displacement correlation technique
Non- homogeneity parameter
Finite element method

ABSTRACT

Static and dynamic stress intensity factors are important parameters in the fracture behavior of the cracked bodies. In the present study the displacement correlation technique (DCT) is presented to calculate static and dynamic stress intensity factors of functionally graded materials (FGMs). The displacement field is obtained using finite element method (FEM) and ABAQUS software. To consider the variation of material properties, a subroutine is prepared in the UMAT subroutine of the software. Eight-node singularity elements are used in the FEM. As ABAQUS software is not able to calculate stress intensity factors of FGMs, a MATLAB code is developed to obtain these factors. By analyzing an example under dynamic load, dynamic fracture behavior of orthotropic FGMs and effect of non-homogeneity parameter are investigated for two cases of material properties variation directions which are perpendicular to each other. To verify presented method, a center crack in a plate of homogeneous and FGM materials are analyzed under static and dynamic loads, the results are compared with data from the literature. The results show that, if the material properties vary parallel to the crack direction, the mode I dynamic stress intensity factor at the crack tip located in the stiffer part increases with increasing of non-homogeneity parameter, while for variation in the normal direction to the crack, this factor first increases and then decreases.

1- مقدمه

مواد تابعی، دارای تغییرات پیوسته میکرو ساختار، خواص مکانیکی و حرارتی، دو فازی، مانند فازهای سرامیک و فلزی هستند. مواد تابعی با بهینه نمودن سفتی، بالابردن مقاومت در برابر دما، خوردگی، ضربه و کاهش حساسیت در برابر شکست، سبب افزایش و بهبود عملکرد سازه‌ها می‌شوند [1]. اگرچه استفاده از مواد تابعی کاهش حساسیت در برابر شکست را در پی دارد، ولی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
R. Ghajar, M. R. Varavi, S. Peyman, Calculation of static and dynamic stress intensity factors in orthotropic functionally graded materials using displacement correlation technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 79-86, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

هنوز یکی از اصلی‌ترین دلایل واماندگی این مواد، شکست ناشی از ایجاد و رشد ترک در آن‌ها می‌باشد [2]. ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی، یکی از پارامترهای مهم در درک و پیش‌بینی رفتار شکست سازه‌های دارای ترک هستند. بر این اساس، تحقیقات گسترده‌ای برای محاسبه و پیش‌بینی رفتار سازه‌ها با مواد تابعی حاوی ترک انجام شده است.

شکست دینامیکی مواد همگن توسط چن [3] مورد بررسی قرار گرفته است. او از روش عددی تفاضل محدود برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی ورق مستطیل شکل با ترک مرکزی استفاده نمود. این مسئله مورد بررسی سایر محققان نیز قرار گرفته است. آزتورک و اردوغان [4] حالت ترکیبی شکست ماده تابعی ارتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی در یک صفحه بی‌نهایت را بررسی نمودند. توکلی و قاجار [5] اثر پارامتر ناهمگنی بر ضرایب شدت تنش در مواد تابعی ارتوتروپیک در نواری ترک‌دار را با دو روش معادلات انتگرالی و روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد مطالعه قرار دادند. وو و همکاران [6] روش انتگرال جی را با در نظر گرفتن خواص مواد تابعی و اثرات دینامیکی توسعه دادند. سانگ و پائولینو [7] با استفاده از روش انتگرال تعامل و المان محدود، ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد همگن و غیر همگن را به دست آوردند. گائو و همکارانش [8] میدان‌های دینامیکی نوک ترک را در مواد ناهمسانگرد مورد مطالعه قرار دادند. منویلارد و بلیتسچکو [9] شکست دینامیکی مواد ایزوتروپیک، شریعتی و مهدی زاده رخی [10] شکست دینامیکی مواد تابعی دو بعدی را با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند. بایسته و محمدی [11] اثر پارامترهای مختلف بر ضرایب شدت تنش مواد تابعی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی مود اول و ترکیبی و رشد ترک در این مواد را ارائه کردند. کیم و پائولینو [12] انتگرال تعامل را برای تحلیل شکست ماده تابعی به کارگرفتند و ضرایب شدت تنش استاتیکی مود اول و مود ترکیبی مسائل دوبعدی را تعیین نمودند. دگ و همکاران [13] با استفاده از انتگرال جی، مقادیر ضرایب شدت تنش در مواد تابعی ارتوتروپیک تحت بارگذاری‌های حرارتی را به دست آوردند. قاجار و همکاران [14] تأثیر پارامتر ناهمگنی بر ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد تابعی ایزوتروپیک با استفاده از روش انتگرال تعامل بررسی نمودند.

بررسی تحقیقات انجام شده، نشان می‌دهد با وجود اینکه پژوهش‌های تحلیلی و عددی زیادی برای بررسی رفتار و محاسبه پارامترهای مکانیکی شکست مواد تابعی انجام شده است، اما رفتار مواد تابعی ارتوتروپیک حاوی ترک تحت اثر بارگذاری دینامیکی هنوز بطور کامل روشن نشده است. بر این اساس، نیاز به انجام پژوهش‌هایی برای روشن نمودن رفتار مواد تابعی ارتوتروپیک ترک‌دار تحت بارگذاری دینامیکی وجود دارد، لذا پژوهش حاضر در این راستا ارائه می‌شود.

در این مقاله، روش‌های جابجایی و اجزای محدود برای محاسبه ضرایب شدت تنش استاتیکی و دینامیکی مواد تابعی به کار گرفته می‌شوند. حل عددی با در نظر گرفتن تغییرات پیوسته خواص مواد به صورت نمایی در نرم‌افزار آباکوس انجام می‌گیرد. برای اعمال تغییرات پیوسته در نرم‌افزار آباکوس زیر برنامه‌ای به زبان برنامه نویسی فرترن تدوین می‌گردد. از سوی دیگر، نرم‌افزار آباکوس نمی‌تواند به صورت مستقیم، ضرایب شدت تنش در مواد تابعی را محاسبه نماید. برای این منظور، برنامه‌ای به زبان برنامه نویسی متلب تهیه می‌شود. اعتبار سنجی روش مورد استفاده با حل مسئله‌های همگن و تابعی با ترک مرکزی تحت اثر بارهای استاتیکی و دینامیکی انجام می‌گیرد. هدف اصلی این مقاله بررسی رفتار شکست دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک و تأثیر پارامتر ناهمگنی بر آن می‌باشد. در این راستا رفتار دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک با در نظر گرفتن تغییرات مواد تابعی در راستای محورهای x و y بررسی می‌شود.

2- روش جابجایی

روش جابجایی از مهمترین روش‌های محاسبه مستقیم ضرایب شدت تنش مواد ترک‌دار می‌باشد. این روش، از میدان‌های جابجایی نتیجه می‌شود. برای تعیین میدان‌های جابه‌جایی نوک ترک یک مسئله صفحه‌ای، الاستیک خطی ناهمسانگرد در نظر گرفته می‌شود. عمومی‌ترین شکل رابطه تنش- کرنش الاستیک خطی ناهمسانگرد عبارت است از:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{1}$$

که در آن σ_{ij}، ε_{ij} و S_{ijkl} به ترتیب مؤلفه‌های تانسورهای تنش، کرنش و نرمی می‌باشند. به منظور نشان دادن S_{ijkl} به صورت خلاصه، نماد قراردادی a_{ij} به شرح (2) معرفی شده است:

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \qquad i,j = 1,2,\ldots,6 \tag{2}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = \varepsilon_{11},\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22},\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}\\ &\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23},\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13},\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}\\ &\sigma_1 = \sigma_{11},\ \sigma_2 = \sigma_{22},\ \sigma_3 = \sigma_{33}\\ &\sigma_4 = 2\sigma_{23},\ \sigma_5 = 2\sigma_{13},\ \sigma_6 = 2\sigma_{12}\end{aligned} \tag{3}$$

برای مسئله‌های تنش صفحه‌ای رابطه (2) به صورت رابطه (4) تغییر می‌کند:

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \qquad i,j = 1,2,6 \tag{4}$$

همچنین برای مسئله‌های کرنش صفحه‌ای رابطه (2) به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$\varepsilon_i = b_{ij}\sigma_j \qquad i,j = 1,2,6 \tag{5}$$

که در آن:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i2}a_{j3}}{a_{33}} \qquad i,j = 1,2,6 \tag{6}$$

شکل 1 نوک ترک در مختصات سیستم دکارتی مواد تابعی ارتوتروپیک را نشان می‌دهد. مسئله‌های کششی ناهمسانگرد دوبعدی را می‌توان از تابع تحلیلی، $\varphi_k(z_k)$، با متغیر مختلط $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1,2)$ فرمول-بندی کرد که در آن:

$$x_k = x + \alpha_k y,\ \ y_k = \gamma_k y, \qquad k = 1,2 \tag{7}$$

که α_k و γ_k، پارامترهای تابع $\mu_k = \alpha_k + i\gamma_k$ می‌باشند، که μ_k را می‌توان از رابطه (8) مشخص کرد [15]:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2\alpha_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \tag{8}$$

در مسئله‌های صفحه‌ای از جنس ارتوتروپیک، معادلات مشخصه به صورت رابطه (9) کاهش پیدا می‌کند:

$$a_{11}\mu^4 + (2\alpha_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \tag{9}$$

ریشه μ_k همیشه مختلط و یا موهومی خالص در دو جفت مزدوج به صورت $\mu_1, \bar{\mu}_1$ و $\mu_2, \bar{\mu}_2$ که μ_1 و μ_2 در محل نوک ترک محاسبه می‌شوند.

برای ماده ناهمسانگرد، میدان جابجایی نوک ترک توسط سیه و همکاران [15] به صورت رابطه (10) ارائه شده است.

$$u = K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\ \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\{\mu_1 p_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2\sin\theta} - \mu_2 p_1\right.$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

$$\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\}] + K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\{p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\}\Big]$$

$$v = K_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\{\mu_1 q_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\}\Big] + K_{\mathrm{II}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\{q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\}\Big] \quad (10)$$

در رابطه (10) K_{I} و K_{II} ضرایب شدت تنش مود I و مود II، u و v جابجایی در راستای محورهای x و y، r فاصله شعاعی، θ مختصه قطبی، μ_1 و μ_2 اشاره به پارامتر محاسبه شده‌ی رابطه (8) در نوک ترک که $\gamma_k > 0$ $k = 1,2$ می‌باشد. p_k و q_k به صورت رابطه‌های (11) و (12) بدست می‌آیند:

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \qquad k = 1,2 \quad (11)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \qquad k = 1,2 \quad (12)$$

دلالی و اردوغان [16] نشان دادند که برای مواد ناهمگن با پیوستگی ضرایب الاستیک و مشتقات آن‌ها، ویژگی تکین بودن تنش در نوک ترک همانند مواد همگن است. ایسچن [17] میدان‌های استاتیک نوک ترک مواد ناهمگن را با استفاده از روش ویلیامز [18] مورد بررسی قرار داد. او نتیجه گرفت، اگر خواص مواد تابعی از قبیل مدول الاستیسته و ضریب پؤاسون، توابعی پیوسته، محدود و مشتق پذیر در تمام فضای مورد نظر باشند، جمله اول تکینگی تنش و جمله نظیر جابجایی در اطراف نوک ترک، در این مواد، مشابه مواد همگن است. کیم و پائولینو [19] میدان‌های تنش و جابجایی مواد همگن ارتوتروپیک را برای مواد تابعی ارتوتروپیک تحت اثر بارگذاری استاتیکی استفاده نمودند. پارامسواران و شکولا [20]، نشان دادند که میدان‌های تنش مواد ناهمگن تحت بارگذاری دینامیکی مشابه میدان‌های مواد همگن تحت اثر بارگذاری شبه استاتیکی می‌باشند. به این ترتیب، میدان‌های جابجایی بدست آمده برای مواد همگن ارتوتروپیک قابل استفاده برای مواد تابعی هستند.

3- تحلیل اجزای محدود

با روش اجزای محدود می‌توان مقدار متغیر میدانی را در نقاط گرهی هر المان تعیین نمود. مقدار متغیر میدانی در کلیه نقاط ناحیه مورد نظر از توابع

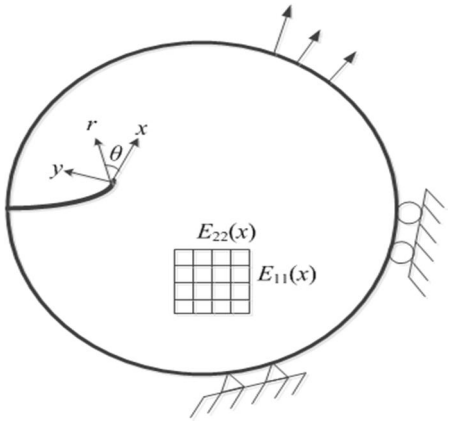

Fig. 1 Coordinate systems at the crack tip in orthotropic FGMs

شکل 1 سیستم مختصات در نوک ترک مواد تابعی ارتوتروپیک

درونیاب بدست می‌آید. مشخصات مواد نیز با درونیابی از مشخصات گره‌ای، با استفاده از تابع شکل ایزوپارامتریک به صورت رابطه (13) استخراج می‌شوند [21].

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i$$
$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i \quad (13)$$

که در آن N تابع شکل می‌باشد.

با درنظر گرفتن شکل 2 و تعمیم مفهوم ایزوپارامتریک، می‌توان ضریب الاستیسیته (E) و ضریب پؤاسون (υ) را به صورت رابطه (14) درونیابی کرد.

$$E = \sum_{i=1}^{n} N_i E_i, \quad \upsilon = \sum_{i=1}^{n} N_i \upsilon_i \quad (14)$$

چهار ثابت مستقل مواد ارتوتروپیک، از تعمیم رابطه‌های ایزوپارامتریک بدست می‌آیند [21]:

$$E_{11} = \sum_{i=1}^{n} N_i (E_{11})_i, \quad E_{22} = \sum_{i=1}^{n} N_i (E_{22})_i$$
$$G_{12} = \sum_{i=1}^{n} N_i (G_{12})_i, \quad \upsilon_{12} = \sum_{i=1}^{n} N_i (\upsilon_{12})_i \quad (15)$$

برای در نظر گرفتن تغییرات خواص مواد می‌توان از اجزای همگن یا از اجزای تابعی استفاده نمود.

اجزای تابعی تغییر خواص مواد را در نظر می‌گیرند، ولی اجزای همگن از یک فرایند پله‌ای استفاده می‌کنند. به عبارت دیگر، خواص اجزای همگن با خواص مرکز اجزای تابعی انطباق داده می‌شوند. بدیهی است که اجزای تابعی، خواص گرادیانی مواد را بهتر از اجزای همگن تقریب می‌زنند. لذا بهتر است که در تحلیل عددی از آن‌ها استفاده شود. نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس این قابلیت را دارد که با اضافه کردن زیر روال‌هایی بتوان خواص گرادیانی مواد تابعی را اعمال نمود. در این پژوهش زیر روال مزبور به گونه‌ای نوشته شده است، که خواص ماده برای نقاط گوس، با توجه به تغییرات خواص مواد تابعی به دست می‌آیند.

4- اعتبار سنجی

برای نشان دادن درستی روش ارائه شده، در این بخش مسئله‌های همگن و تابعی دارای ترک مرکزی تحت اثر بارهای استاتیکی و دینامیکی، تحلیل می‌شوند.

4-1- ماده تابعی ارتوتروپیک با ترک مرکزی

شکل 3 یک ترک مرکزی به طول $2a$ واقع در یک صفحه مربعی شکل را نشان می‌دهد. بر لبه بالایی این صفحه مربعی شکل بار استاتیکی $\sigma_{22}(x,y) = E^0 e^{\beta x}$ اعمال شده که در آن β پارامتر ناهمگنی می‌باشد.

شرایط مرزی تکیه‌گاهی، برای لبه پایینی $u_2 = 0$ و برای گره سمت چپ لبه پایینی $u_1 = u_2 = 0$ می‌باشند. برای شبیه سازی عددی، از المان‌های تکینی هشت گرهی استفاده می‌گردد. با توجه به تکینگی، اندازه المان‌ها در اطراف ترک به حد کافی کوچک در نظر گرفته می‌شود تا دقت پاسخ‌های بدست آمده قابل قبول باشد. خواص ماده تابعی ارتوتروپیک E_{11}، E_{22} و G_{12} نسبت به مختصه x تغییر می‌کنند. تعداد المان‌ها و گره‌ها به ترتیب 2192 و 6281 و حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد. داده‌های رابطه (16) برای تحلیل اجزای محدود استفاده می‌شوند:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

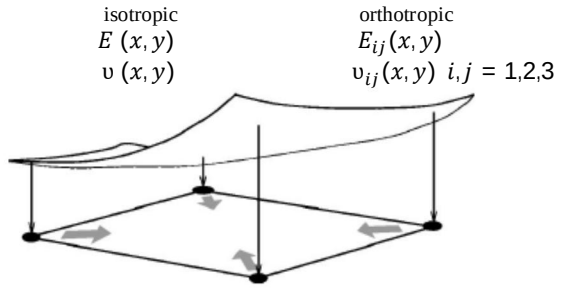

Fig. 2 Generalized isoparametric formulation for isotropic and orthotropic materials [21]

شکل 2 تعمیم روابط ایزوپارامتریک برای مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک [21]

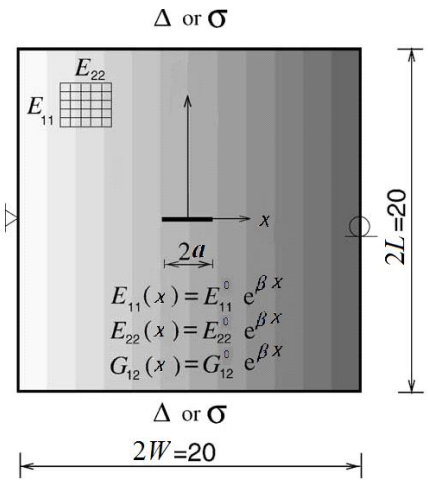

Fig. 3 A plate with a center crack parallel to material gradient under constant strain loading [19]

شکل 3 یک صفحه با یک ترک مرکزی موازی با جهت تغییرات مواد تحت بارگذاری کرنش ثابت [19]

$$\frac{a}{W} = 0.1, \qquad \beta a = (0\ to\ 0.5)$$
$$E_{11}(x) = E_{11}^0 e^{\beta x},\ \ E_{22}(x) = E_{22}^0 e^{\beta x},\ \ G_{12}(x) = G_{12}^0 e^{\beta x}$$
$$E_{11}^0 = 0.75,\ E_{22}^0 = 1,\ G_{12}^0 = 0.5,\ \upsilon = 0.3 \qquad (16)$$

در شکل‌های 4 و 5 ضرایب شدت تنش استاتیکی بی‌بعد K_I/K_0 بدست آمده از روش جابجایی با نتایج بدست آمده به روش انتگرال تعامل توسط کیم و پائولینو [19] مقایسه شده‌اند که تطابق خیلی خوبی را نشان می‌دهند، که در آن $K_0 = \sqrt{\pi a}$ می‌باشد.

4-2- ترک مرکزی مورب در مواد تابعی ایزوتروپیک برای حالت دینامیکی

یک صفحه مستطیلی با عرض $2W = 30$ mm و طول $2H = 60$ mm با ترک مرکزی مورب به طول $2a = 14.14$ mm در نظر گرفته می‌شود. حالت همگن این مسئله اولین بار توسط چن و ویلکینز (1976) [22] با استفاده از روش تفاضل محدود بررسی شد. شکل 6 هندسه و شرایط مرزی این مسئله را نشان می‌دهد. بارگذاری به صورت $P(t) = \sigma_0 H(t)$ که در آن $H(t)$ تابع پله‌ای هویساید (شکل 7) می‌باشد، بر لبه‌های بالا و پایین صفحه اعمال می‌گردد. حل عددی با استفاده از روش تحلیل دینامیکی ضمنی انجام شده است. فرآیند مش‌بندی همانند مسئله پیشین می‌باشد و حالت کرنش صفحه‌ای برقرار است.

برای بررسی نمودار تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش دینامیکی

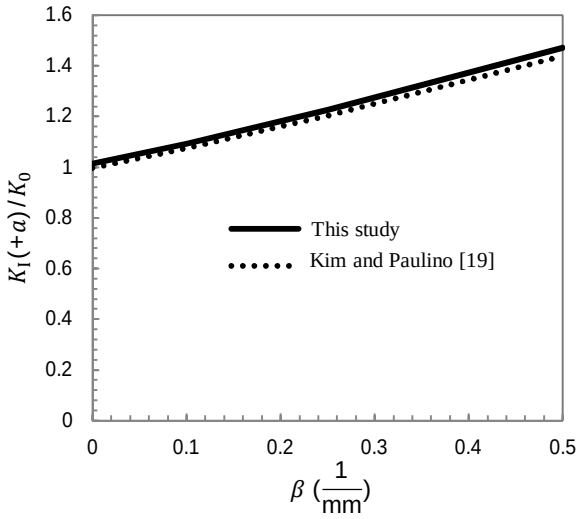

Fig. 4 Effect of nonhomogeneity parameter β on normalized stress intensity factor of right crack tip under constant strain loading

شکل 4 تأثیر پارامتر ناهمگنی β بر ضریب شدت تنش بی‌بعد نوک سمت راست ترک تحت بارگذاری کرنش ثابت

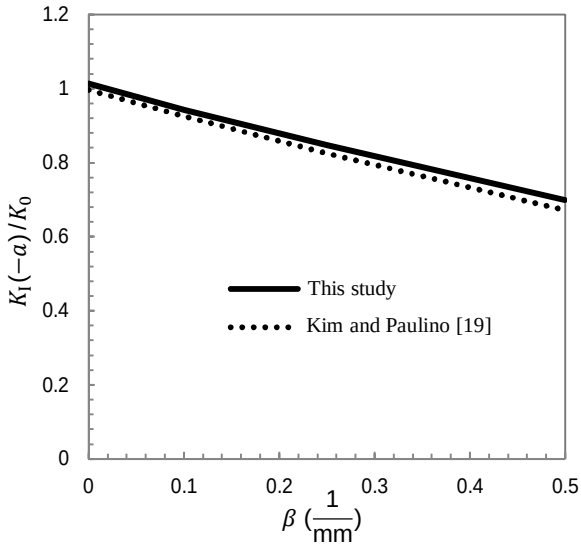

Fig. 5 Effect of nonhomogeneity parameter β on normalized stress intensity factor of left crack tip under constant strain loading

شکل 5 تأثیر پارامتر ناهمگنی β بر ضریب شدت تنش بی‌بعد نوک سمت چپ ترک تحت بارگذاری کرنش ثابت

K_I^d/K_0 مواد تابعی ایزوتروپیک، تغییرات خواص این مواد به صورت نمایی نسبت به مختصه x در نظر گرفته می‌شود. ضریب الاستیسیته و دانسیته جرم مطابق رابطه (17) و $\beta = 0.1$ می‌باشند.

$$E(x) = E_0 e^{\beta x},\ \ \rho(x) = \rho_0 e^{\beta x}$$
$$E_0 = 199.992\ \text{GPa},\ \ \rho_0 = 5000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ \ \upsilon = 0.3 \qquad (17)$$

نمودار تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد مود I و مود II در نوک سمت راست ترک در شکل‌های 8 و 9 رسم شده‌اند. نتایج عددی حاضر با نتایج ارائه شده به روش انتگرال تعامل توسط سانگ و پائولینو [7] مقایسه شده است که تطابق خوبی را ارائه می‌دهند.

4-3- ترک مرکزی در مواد همگن ارتوتروپیک برای حالت دینامیکی

در این بخش، یک صفحه مستطیلی شکل با ابعاد $2H = 40$ mm و

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

$2W$ = 20 mm با ترک مرکزی به طول $2a$ = 4.8 mm در نظر گرفته می‌شود. صفحه تحت بارگذاری دینامیکی $P(t) = \sigma_0 H(t)$ قرار دارد. هندسه و شرایط مرزی در شکل 10 نشان داده شده است. برای حل مسئله حالت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

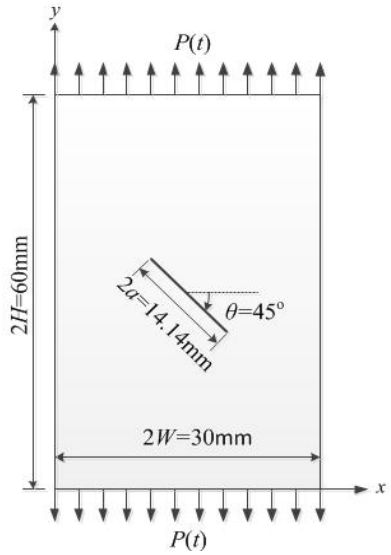

Fig. 6 A rectangular plate containing a inclined crack [7]

شکل 6 یک صفحه مستطیلی شکل با ترک مرکزی مورب [7]

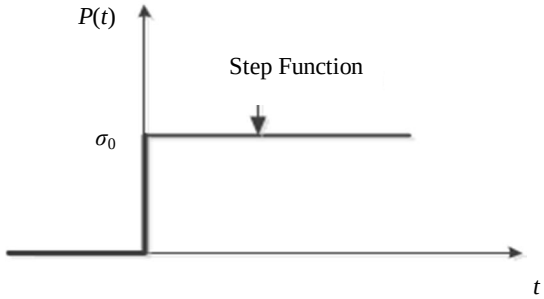

Fig. 7 Applied dynamics load

شکل 7 بار دینامیکی اعمال شده

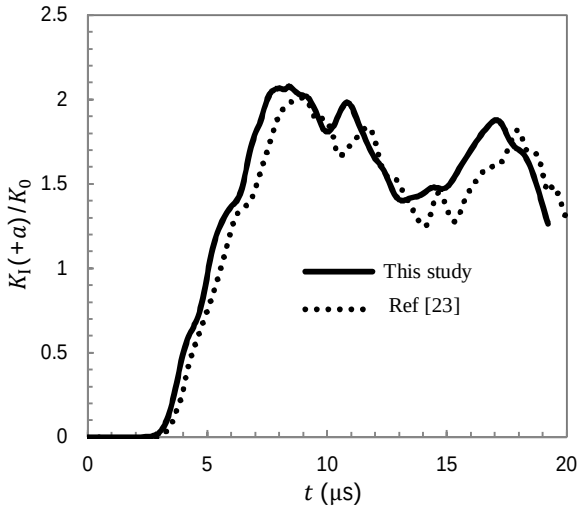

Fig. 8 Comparison of mode I dynamic stress intensity factor of right crack tip with results of Song and Paulino [7]

شکل 8 مقایسه ضرایب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد مود I نوک سمت راست ترک با نتایج سانگ و پائولینو [7]

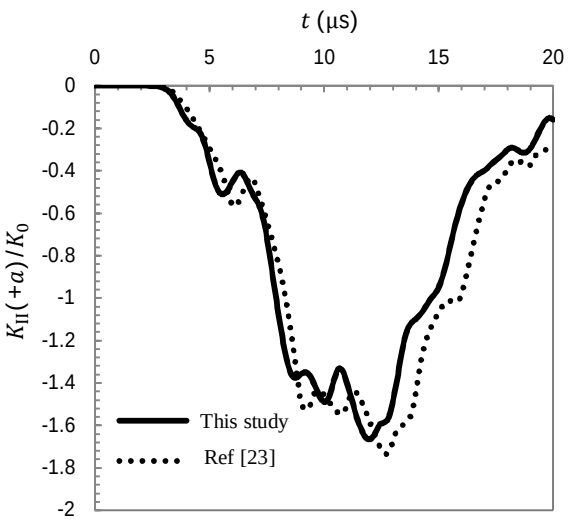

Fig. 9 Comparison of mode II dynamic stress intensity factor of right crack tip with results of Song and Paulino [7]

شکل 9 مقایسه ضرایب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد مود II نوک سمت راست ترک با نتایج سانگ و پائولینو [7]

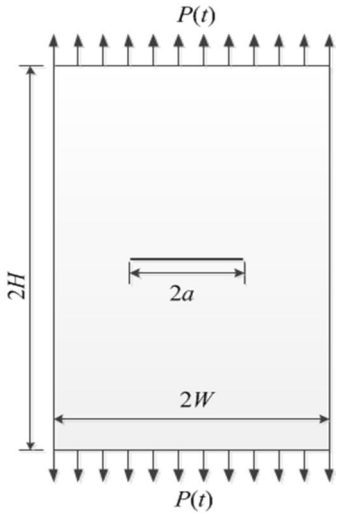

Fig. 10 A rectangular orthotropic plate containing a center crack [7]

شکل 10 یک صفحه مستطیلی ارتوتروپیک با ترک مرکزی [7]

برای بررسی رفتار شکست دینامیکی ماده همگن ارتوتروپیک، خواص ماده به صورت رابطه (18) در نظر گرفته می‌شود:

$$E_{11}^0 = 118.3\ \text{GPa},\quad E_{22}^0 = 54.8\ \text{GPa}$$

$$G_{12}^0 = 8.79\ \text{GPa},\quad \upsilon_{12} = 0.083,\quad \rho_0 = 1900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad (18)$$

نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد K_I^d/K_0 روش حاضر و همچنین نتایج سانچز و همکاران [23] در شکل 11 ارائه شده است. تطابق خیلی خوب میان نتایج کاملا مشهود است.

5- تأثیر پارامتر ناهمگنی بر ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک

در ادامه ضرایب شدت تنش دینامیکی صفحه ارتوتروپیک شکل 10 با در نظر گرفتن تغییرات خواص مواد تابعی به صورت رابطه‌ای نمایی از مختصات x و y مطابق رابطه (19) به دست می‌آیند:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

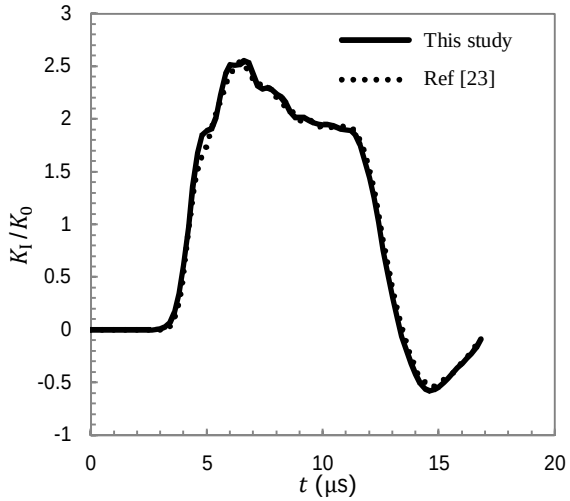

Fig. 11 Comparison of mode I dynamic stress intensity factor of orthotropic plate with results of Sanchez et al

شکل 11 مقایسه ضریب شدت تنش مود I صفحه ارتوتروپیک با نتایج سانچز و همکاران

$$E_{11} = E_{11}^0 e^{(\beta_1 x+\beta_2 y)},\ \ E_{22} = E_{22}^0 e^{(\beta_1 x+\beta_2 y)}$$
$$G_{12} = G_{12}^0 e^{(\beta_1 x+\beta_2 y)},\ \ \rho = \rho_0 e^{(\beta_1 x+\beta_2 y)} \qquad (19)$$

که در رابطه (19) ضرایب E_{11}^0، E_{22}^0، G_{12}^0 و ρ_0 ضرایب ماده همگن مسئله مورد نظر، β_1 و β_2 به ترتیب پارامترهای ناهمگنی در جهت مختصات x و y می‌باشند.

ضرایب شدت تنش دینامیکی را در دو حالت، $\beta_2 = 0$ و β_1 با مقادیر مختلف، و $\beta_1 = 0$ و β_2 با مقادیر مختلف بررسی می‌شوند.

5-1- تغییرات خواص مواد تابعی ارتوتروپیک در راستای محور x

برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک در راستای محور x و بررسی تأثیر پارامتر ناهمگنی، β_2 برابر با صفر و β_1 برابر 0، 0.05، 0.1 و 0.15 در نظر گرفته می‌شود.

در شکل‌های 12 و 13 به ترتیب نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد مود I برای نوک سمت راست و سمت چپ ترک رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ناهمگنی، ضریب شدت تنش نوک سمت راست ترک افزایش، در حالی که ضریب شدت تنش نوک سمت چپ ترک، ابتدا تا زمان 12 میکروثانیه کاهش و سپس افزایش می‌یابد. نتیجه دیگری که از شکل‌های 12 و 13 گرفته می‌شود این است که برای β_1 یکسان، ضریب شدت تنش دینامیکی نوک سمت چپ ترک کمتر از ضریب شدت تنش دینامیکی نوک سمت راست ترک می‌باشد. این اختلاف رفتار ناشی از آن است که سفتی ماده در نوک سمت راست ترک بیشتر از سفتی نوک سمت چپ می‌باشد.

5-2- تغییرات خواص مواد تابعی ارتوتروپیک در راستای محور y

برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک با گرادیان خواص در جهت محور y و همچنین بررسی تاثیر پارامتر ناهمگنی، β_1 برابر با صفر و β_2 برابر 0، 0.05، 0.1 و 0.15 انتخاب می‌شوند. از آنجا که خواص ماده در راستای محور y تغییر می‌کند، این خواص برای هر دو نوک ترک یکسان است، لذا K_I/K_0 برای هر دو نوک ترک یکسان و مقدار K_{II}/K_0 در دو نوک ترک قرینه هم می‌باشد.

در شکل‌های 14 و 15 به ترتیب نمودار تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد مود I و مود II بری نوک سمت راستی ترک رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر ناهمگنی، ضریب شدت تنش مود I ابتدا تا بازه زمانی مشخص افزایش و سپس کاهش می‌یابد، ولی ضریب شدت تنش مود II همواره افزایش می‌یابد.

6- نتیجه‌گیری

ضرایب شدت تنش دینامیکی مواد تابعی ارتوتروپیک از روش جابجایی تعیین و رفتار دینامیکی آن‌ها برای دو حالت تغییر خواص در دو راستای x و y بررسی شد.

برای تغییرات خواص در راستای محور x و ترک مرکزی، با افزایش

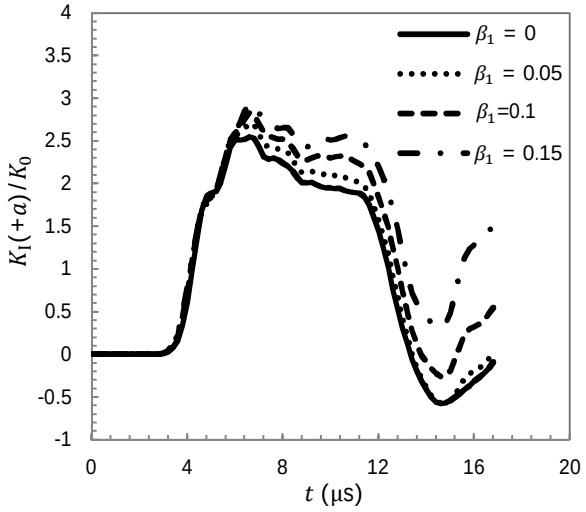

Fig. 12 Effect of nonhomogeneity parameter β_1 on normalized dynamic stress intensity factor of right crack tip

شکل 12 تأثیر پارامتر ناهمگنی β_1 بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی نوک سمت راست ترک

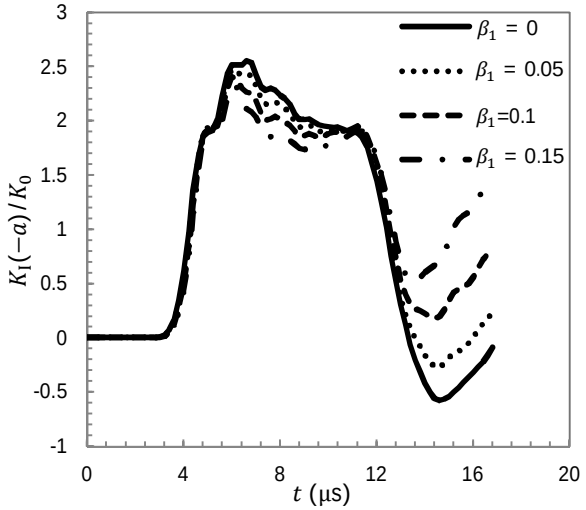

Fig. 13 Effect of nonhomogeneity parameter β_1 on normalized dynamic stress intensity factor of left crack tip

شکل 13 تأثیر پارامتر ناهمگنی β_1 بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی نوک سمت چپ ترک

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

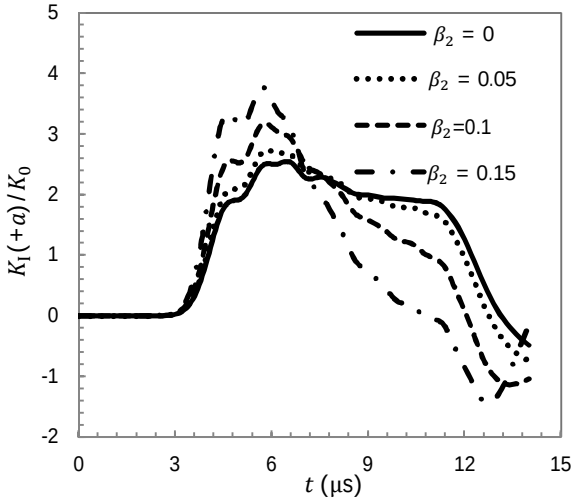

Fig. 14 Effect of nonhomogeneity parameter β_2 on normalized dynamic stress intensity factor K_I^d/K_0 of right crack tip

شکل 14 تأثیر پارامتر ناهمگنی β_2 بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی K_I^d/K_0 نوک سمت راست ترک

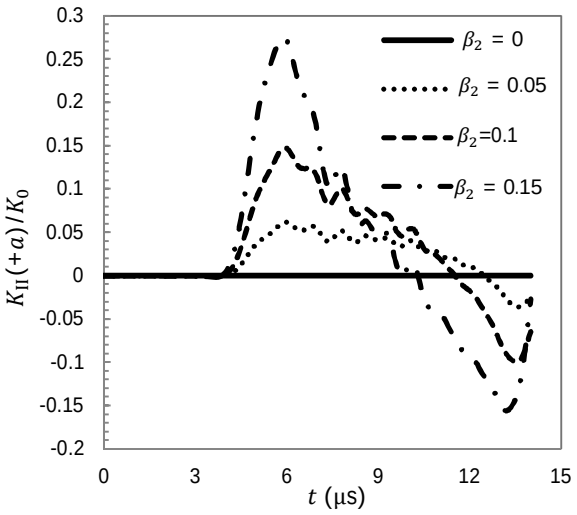

Fig. 15 Effect of nonhomogeneity parameter β_2 on normalized dynamic stress intensity factorK_{II}^d/K_0 at right crack tip

شکل 15 تأثیر پارامتر ناهمگنی β_2 بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی K_{II}^d/K_0 در نوک ترک سمت راست

پارامتر ناهمگنی، ضریب شدت تنش دینامیکی مود I نوک سمت راست ترک افزایش می‌یابد، در حالی که این ضریب در نوک سمت چپ، ابتدا تا زمان 12 میکروثانیه کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین برای β_1 یکسان، ضریب شدت تنش دینامیکی نوک سمت چپ ترک کمتر از مقدار آن در نوک سمت راست می‌باشد. در حالت گرادیان خواص در راستای محور y، ضریب شدت تنش مود I با افزایش پارامتر ناهمگنی ابتدا تا بازه زمانی مشخص افزایش و سپس کاهش می‌یابد ولی ضریب شدت تنش مود II همواره افزایش می‌یابد.

7- فهرست علائم

a	طول ترک (mm)
E	ضریب الاستیسیته (GPa)
G	مدول برشی (GPa)
H	طول صفحه (mm)
$H(t)$	تابع پله‌ای هویساید
K	ضریب شدت تنش (MPa.m$^{0.5}$)
N	تابع شکل
$P(t)$	بار دینامیکی اعمال شده
r	فاصله شعاعی تا مبدأ مختصات (mm)
S	ماتریس نرمی مرتبه 4
u	جابجایی در راستای محور x (mm)
v	جابجایی در راستای محور y (mm)
W	عرض صفحه (mm)

علائم یونانی

β_i	پارامتر ناهمگنی (m^{-1})
ε	تانسور کرنش
υ	ضریب پواسون
ρ	دانسیته (kgm^{-3})
σ	تانسور تنش (MPa)

زیرنویس‌ها

i	شمارنده
j	شمارنده
k	شمارنده
l	شمارنده
I	مود شکست اول
II	مود شکست دوم

8- مراجع

[1] G. R. Liu, X. Han, K. Y. Lam, An integration technique for evaluating conquent hypergeometric functions and it's application to functionally Graded materials, *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 10, pp. 1039-1047, 2001.

[2] M. C. Walters, *Domain integral methods for computation of fracrure mechanics parameters in three dimentional functionally graded solids*, Doctoral Thesis, Departmen to Fc iviland Environmental Engineering, University of Illinoisat Urbana-Champaign, 2005.

[3] Y. M. Chen, Numerical computation dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code), *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 653-660, 1975.

[4] M. Ozturk, F. Erdogan, The mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Fracture*, Vol. 98, No. 3, pp. 243-261, 1999.

[5] F. Tavakkoli, R. Ghajar, The effect of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor in cracked layer in functionally graded material under thermal stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 275-283, 2015. (in Persian فارسی)

[6] C. C. Wu, P. He, Z. Li, Extension of J integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis, *Computers and Structures*, Vol. 80, No. 5-6, pp. 411–416, 2002.

[7] S .H. Song, G. H. Paulino, Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 16, pp. 4830–4866, 2006.

[8] X. Gao, X. W. Kang, H. G. Wang, Dynamic crack tip fields and dynamic crack propagation characteristics of anisotropic material, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 1, pp. 73- 85, 2009.

[9] T. Menouillard, T. Belytschko, Dynamic fracture with mesh free enriched XFEM, *Acta Mechanica*, Vol. 213, No. 1, pp. 53–69, 2010.

[10] M. Shariati, M. M. Rokhi, Dynamic fracture analysis of functionally graded material, *Journal of structures and fluids mechanics*, Vol. 3, No. 3, pp. 1-16, 2011-2012. (in Persian فارسی)

[11] H. Bayesteh, S. Mohammadi, XFEM fracture analysis of orthotropic Functionally graded materials, *Journal of Composites: Part B*, Vol. 44, No. 1, pp. 8-25, 2013.

[12] J. H. Kim, G. H. Paulino, Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials, *International Journal of Numerical Meth Engineering*, Vol. 53, No. 8, pp. 1903–1935, 2002.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]

[13] S. Dag, E. E. Arman, B. Yildirim, Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk- integral, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 25-26, pp. 3480-3488, 2010.

[14] R. Ghajar, S. Peyman, A. Shaghaghimoghadam, Computation of dynamic stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using interaction integral method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 108-116, 2015. (in Persian فارسی)

[15] G. C. Sih, P. C. Paris, G. R. Irwin, On cracks in ectilinearly isotropic bodies, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol.1, No. 3, pp. 189–203, 1965.

[16]\F. Delale, F. Erdogan, The crack problem for nonhomogeneous plane, *E Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 1, pp. 609-614, 1983.

[17] J.W. Eischen, Fracture of non-homogeneou materials, *International Journal of Fracture*, Vol. 34, No. 1, pp. 3–22, 1987.

[18] M. L. Williams, On the stress distribution at the base of stationary crack, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 3, pp. 109-114, 1957.

[19] J. H. Kim, G. H. Paulino, The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3967–4001, 2003.

[20] V. Parameswaran, A. Shukla, Crack tip stress fields for dynamic fracture in functionally gradient materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, No. 9, pp. 579–596, 1999.

[21] J. H. Kim, G. H. Paulino, Isoparametric graded finite elements for non-homogeneous isotropic and orthotropic materials, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 4, pp. 502–514.2002.

[22] Y. M. Chen, M. L. Vilkins, Stress analysis of crack problems with a three - dimensional, time - dependent computer program, *International Journal of Fracture*, Vol. 12, No. 4, 1976.

[23] F. Sanchez, C. Zhang, A. Saez, A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 6, pp. 1412-1430, 2008.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.3.40.7]