



# حل تحلیلی محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

محمد جعفری<sup>1\*</sup>، الهه اردلانی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

\* شاهرود، کد پستی 3619995161، m\_jafari821@shahroodut.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 دی 1393

پذیرش: 28 بهمن 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلیدواژگان:

ورق محدود

گشودگی مثلثی

حل تحلیلی

روش متغیر مختلط

## چکیده

در این مقاله، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد محدود، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای مطالعه شده است. روش بکار گرفته شده برپایه حل تحلیلی متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت همونا با فرض تنش صفحه‌ای می‌باشد. ورق، محدود (نسبت طول بزرگترین ضلع گشودگی به ورق، بزرگتر از  $0/2$ )، همسانگرد و الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. روش حل به گونه‌ای است که با استفاده از تابع نگاشت همونا ناحیه محدود خارج گشودگی مثلثی در صفحه‌ی  $Z$  به ناحیه محدود خارج گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه‌ی  $\zeta$  نگاشت می‌شود. برای محاسبه تابع تنش مربوط به صفحه‌ی محدود حاوی گشودگی مثلثی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی گشودگی مثلثی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مربعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به دست می‌آید. تأثیر پارامترهایی از قبیل انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق و نوع بارگذاری، به عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش بررسی شده است. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس، مطابقت خوبی را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که در بررسی توزیع تنش ورق‌هایی که نسبت طول ضلع گشودگی به کوچکترین طول ورق در آن‌ها بزرگتر از  $0/2$  است؛ استفاده از حل مربوط به ورق نامحدود با خطای زیادی همراه خواهد بود.

## Analytical solution to calculate the stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading

Mohammad Jafari\*, Elahe Ardalani

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.

\* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m\_jafari821@shahroodut.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 22 December 2014  
Accepted 17 February 2015  
Available Online 04 April 2015

**Keywords:**  
Finite plate  
triangular hole  
analytical solution  
complex variable method

## ABSTRACT

In this paper, stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plate under in-plane loading is studied. With the assumption of plane stress conditions, the method employed is based on the analytical solution of Muskhelishvili's complex variable method and conformal mapping. The finite plate (the ratio of the length of the biggest side of the hole to side of the plate is greater than 0.2) can be considered as isotropic and linearly elastic. For solving the problem, the finite area with a triangular hole in  $z$  plan is mapped onto finite area outside a unit circle in  $\zeta$  plan using the conformal mapping function. The stress function in finite plate with triangular hole is presented by superposition of the stress function for an infinite plate with a triangular hole and ones for a finite plate without a hole. The unknown coefficients in stress function are obtained by using the least square boundary collocation method and applying the appropriate boundary conditions. The effect of hole curvature, hole orientation, plate's aspect ratio, hole size, type of loading as the effective parameters on the stress distribution have been investigated. The results based on analytical solution are in good agreement with those obtained from the finite element method using Abaqus software. The results show that, by using infinite plate theory the analysis of the stress distribution in perforated plates where the ratio of the length of the biggest side of the hole to the smallest side of the plate is greater than 0.2, results in great error.

## 1- مقدمه

صنعتی و غیرصنعتی، صنعت ساختمان‌سازی و غیره بکار می‌روند. انواع مختلفی از گشودگی‌ها و بریدگی‌ها با ابعاد و شکل‌های گوناگون در ساختارهای عملی مهندسی به دلایل مختلفی همچون کاهش وزن سازه،

ورق‌ها به دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. ورق‌های نازک اغلب در سازه‌های فضایی، دریایی، ماشین‌آلات

Please cite this article using:

M. Jafari, E. Ardalani, Analytical solution to calculate the stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 165-175, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ایجاد قابلیت اتصال تجهیزات به آن‌ها یا ایجاد راه‌های خروجی و ورودی ایجاد می‌گردند. این گشودگی‌ها سبب ایجاد تنش موضعی شدیدی می‌شوند که در اصطلاح تمرکز تنش نامیده می‌شود. به دلیل وابستگی شدید قابلیت تحمل بار سازه به مقدار تمرکز تنش، در طراحی سازه‌ها، توجه به مسأله‌ی تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی امری اجتناب ناپذیر است که سال‌ها زمینه‌ی تحقیق بسیاری از محققان را ایجاد نموده است.

در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق نامحدود دارای گشودگی، تحقیقات بسیاری انجام شده است. اولین بار راه حل توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی توسط کرش با استفاده از متغیرهای حقیقی ارائه شد [1]. اینگلیس توانست با بسط راه حل کرش توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی را بدست آورد. راه حل او دقیق و مناسب بود اما بکارگیری آن به ویژه برای شکل‌های نوک تیز دشوار بود [2]. وسترگارد تابع تنشی با جمله‌هایی از توابع همساز برای تحلیل تنش اطراف گشودگی‌های تیز به دست آورد. تنش‌های به دست آمده از تابع تنش او معادلات تعادل، معادلات سازگاری و قانون هوک تعمیم یافته را ارضا می‌کرد [3]. موشخیشویلی برپایه تئوری الاستیک دوبعدی، روش متغیر مختلط را معرفی کرد. با استفاده از این روش مسأله‌ی تعیین توزیع تنش ورق حاوی گشودگی، به محاسبه دو تابع تحلیلی هولومورفیک محدود می‌شد. او این روش را با نگاشت هم‌نوا ترکیب کرد تا بتواند بصورت تحلیلی مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیر دایروی را در جسم الاستیک دو بعدی حل کند [4]. استیونسون بطور مستقل و بدون استفاده از نتایج موشخیشویلی، با استفاده از روش متغیر مختلط، رهیافتی را از نظریه الاستیک دو بعدی برای مواد همسانگرد توسعه داد. او همچنین اساس استفاده از پتانسیل‌های مختلط، در حل مسائلی با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف را مورد بررسی قرار داد [5]. گرین با استفاده از روش متغیر مختلط در دستگاه مختصات منحنی الخط به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود همسانگرد و غیر همسانگرد پرداخت [6]. لخنیتسکی روش متغیر مختلط موشخیشویلی را برای مواد الاستیک غیرهمسانگرد بسط داد و حلی عمومی برای محاسبه مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در حالت تنش صفحه‌ای به دست آورد. او از روش سری‌ها برای به دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها با شکل‌های مختلف را در ورق نامحدود غیرهمسانگرد ارائه نمود [7]. ساوین با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیشویلی، توزیع تنش اطراف انواع مختلفی از گشودگی‌ها را در ورق نامحدود همسانگرد به دست آورد، او ناحیه نامحدود اطراف گشودگی در صفحه‌ی  $Z$  را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز- کرسٹفل به ناحیه‌ی داخل دایره‌ی واحد نگاشت داد و با استفاده از انتگرال کوشی تابع تنش را بدست آورد. او همچنین تمرکز تنش گشودگی مثلثی با گوشه‌های گرد را نیز در ورق نامحدود بررسی نمود [8]. گائو به منظور اجتناب از به‌کارگیری دو نگاشت هم‌نوا، از دستگاه مختصات بیضوی- هذلولی برای به دست آوردن صریح مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی ورق نامحدود همسانگرد تحت بار دو محوری دلخواه استفاده کرد [9]. تئوکاریس و پترو از روش متغیر مختلط موشخیشویلی و نگاشت هم‌نوا، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی را در ورق همسانگرد نامحدود بررسی و نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کردند [10]. دانوست و هووا با بسط روش ساوین، گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد و غیرهمسانگرد نامحدود را تحت بار کششی تک محوری، تحلیل کردند. آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، توانستند علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع سایر مثلث‌ها با نسبت

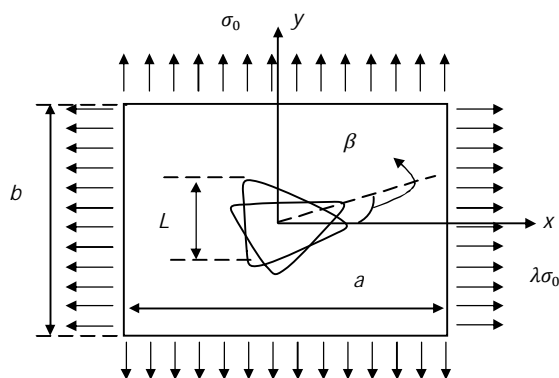
بوهی مسأله‌ی الاستیسیته صفحه‌ای در بریدگی‌های لبه‌ای در صفحات نیمه بی‌نهایت (نیمه نامحدود) را بررسی نمود [21]. از آنجایی که راه حل میدان تنش در نواحی ناپیوسته دارای نقاط تکین خواهد بود؛ انگلند به بررسی این نقاط در حوزه‌ی الاستیک خطی پرداخت. این نقاط تکینی به شکل هندسی بریدگی و شرایط مرزی وابسته می‌باشند. شرایط مرزی تعیین کننده درجه تکینی بوده و شکل هندسی بریدگی و بار اعمال شده، شدت تنش تکینی را کنترل می‌نماید [22].

غالب روش‌های تحلیلی بکارگرفته شده در مطالعات فوق، برای بررسی توزیع تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی مناسب می‌باشند اما در موارد زیادی از کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌ها را نمی‌توان نامحدود در نظر گرفت. از راه حل ارائه شده برای ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی، نمی‌توان برای ورق‌های محدود استفاده نمود. زیرا در این حالت تأثیر شرایط مرزی خارجی بر توزیع تنش در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین مطالعه بر روی توزیع تنش ورق محدود دارای گشودگی مرکزی، نیازمند به‌کارگیری روابط جداگانه‌ای است.

لین وکو با استفاده از تئوری مواد غیرهمسانگرد لخنیتسکی به تحلیل چندلایه‌های کامپوزیتی محدود با گشودگی بیضوی پرداختند. برای این منظور آن‌ها از تابع تنش ایری و روش حداقل مربعات مرزی استفاده کردند

ایجاد قابلیت اتصال تجهیزات به آن‌ها یا ایجاد راه‌های خروجی و ورودی ایجاد می‌گردند. این گشودگی‌ها سبب ایجاد تنش موضعی شدیدی می‌شوند که در اصطلاح تمرکز تنش نامیده می‌شود. به دلیل وابستگی شدید قابلیت تحمل بار سازه به مقدار تمرکز تنش، در طراحی سازه‌ها، توجه به مسأله‌ی تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی امری اجتناب ناپذیر است که سال‌ها زمینه‌ی تحقیق بسیاری از محققان را ایجاد نموده است.

در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق نامحدود دارای گشودگی، تحقیقات بسیاری انجام شده است. اولین بار راه حل توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی توسط کرش با استفاده از متغیرهای حقیقی ارائه شد [1]. اینگلیس توانست با بسط راه حل کرش توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی را بدست آورد. راه حل او دقیق و مناسب بود اما بکارگیری آن به ویژه برای شکل‌های نوک تیز دشوار بود [2]. وسترگارد تابع تنشی با جمله‌هایی از توابع همساز برای تحلیل تنش اطراف گشودگی‌های تیز به دست آورد. تنش‌های به دست آمده از تابع تنش او معادلات تعادل، معادلات سازگاری و قانون هوک تعمیم یافته را ارضا می‌کرد [3]. موشخیشویلی برپایه تئوری الاستیک دوبعدی، روش متغیر مختلط را معرفی کرد. با استفاده از این روش مسأله‌ی تعیین توزیع تنش ورق حاوی گشودگی، به محاسبه دو تابع تحلیلی هولومورفیک محدود می‌شد. او این روش را با نگاشت هم‌نوا ترکیب کرد تا بتواند بصورت تحلیلی مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیر دایروی را در جسم الاستیک دو بعدی حل کند [4]. استیونسون بطور مستقل و بدون استفاده از نتایج موشخیشویلی، با استفاده از روش متغیر مختلط، رهیافتی را از نظریه الاستیک دو بعدی برای مواد همسانگرد توسعه داد. او همچنین اساس استفاده از پتانسیل‌های مختلط، در حل مسائلی با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف را مورد بررسی قرار داد [5]. گرین با استفاده از روش متغیر مختلط در دستگاه مختصات منحنی الخط به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود همسانگرد و غیر همسانگرد پرداخت [6]. لخنیتسکی روش متغیر مختلط موشخیشویلی را برای مواد الاستیک غیرهمسانگرد بسط داد و حلی عمومی برای محاسبه مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در حالت تنش صفحه‌ای به دست آورد. او از روش سری‌ها برای به دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها با شکل‌های مختلف را در ورق نامحدود غیرهمسانگرد ارائه نمود [7]. ساوین با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیشویلی، توزیع تنش اطراف انواع مختلفی از گشودگی‌ها را در ورق نامحدود همسانگرد به دست آورد، او ناحیه نامحدود اطراف گشودگی در صفحه‌ی  $Z$  را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز- کرسٹفل به ناحیه‌ی داخل دایره‌ی واحد نگاشت داد و با استفاده از انتگرال کوشی تابع تنش را بدست آورد. او همچنین تمرکز تنش گشودگی مثلثی با گوشه‌های گرد را نیز در ورق نامحدود بررسی نمود [8]. گائو به منظور اجتناب از به‌کارگیری دو نگاشت هم‌نوا، از دستگاه مختصات بیضوی- هذلولی برای به دست آوردن صریح مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی ورق نامحدود همسانگرد تحت بار دو محوری دلخواه استفاده کرد [9]. تئوکاریس و پترو از روش متغیر مختلط موشخیشویلی و نگاشت هم‌نوا، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی را در ورق همسانگرد نامحدود بررسی و نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کردند [10]. دانوست و هووا با بسط روش ساوین، گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد و غیرهمسانگرد نامحدود را تحت بار کششی تک محوری، تحلیل کردند. آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، توانستند علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع سایر مثلث‌ها با نسبت



شکل 1 ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دو محوری

موشخیلشویلی [4] و نگاشت همنا می‌باشد. به منظور تحلیل تنش گشودگی‌های غیر دایروی، ابتدا می‌بایست مطابق شکل 2 صفحه‌ی حاوی گشودگی مختلف در صفحه‌ی موهومی  $Z$  به صفحه‌ی حاوی گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه‌ی نگاشت  $\zeta$  تبدیل شود. این عمل با استفاده از معادله‌ی (1) صورت می‌پذیرد، که در آن،  $R$  اندازه گشودگی،  $n$  نوع گشودگی و  $m$  مقدار انحنای گوشه‌ی گشودگی را مشخص می‌کند. در صورتی که در رابطه‌ی (1) مقدار  $n$  برابر 2 انتخاب شود؛ تابع نگاشت حاصل، مربوط به نگاشت صفحه‌ی حاوی گشودگی مثلثی خواهد بود.

با جایگذاری معادلات (2)، (3) و (4) در معادله‌ی (1) و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی تابع نگاشت،  $x$  و  $y$  نقاط را در صفحه  $Z$ ، بر حسب  $\rho$  و  $\theta$  نقاط در صفحه  $\zeta$  به صورت معادلات (5) و (6) خواهد بود.

همانطور که در شکل 3 مشاهده می‌شود با تغییر  $m$  می‌توان انحنای مختلفی در گوشه‌ی گشودگی مثلثی ایجاد نمود. لازم به ذکر است که  $m=0$  معادل گشودگی دایروی است. همچنین در این مقاله،  $R=1$  در نظر گرفته شده است.

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}\right) \quad (1)$$

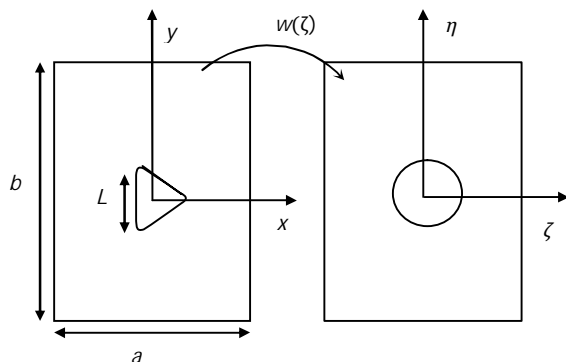
$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \quad (2)$$

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (3)$$

$$e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \quad (4)$$

$$x = \text{Re}[w(\zeta)] = R\left(\rho \cos(\theta) + \frac{m \cos(n\theta)}{\rho^n}\right) \quad (5)$$

$$y = \text{Im}[w(\zeta)] = R\left(\rho \sin(\theta) + \frac{m \sin(n\theta)}{\rho^n}\right) \quad (6)$$



شکل 2 نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلثی به ورق حاوی گشودگی دایروی

[23]. وو و چن به منظور حلّ مسأله‌ی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیت دلخواه از گشودگی‌های دایروی، تابع تنشی را بر اساس روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و روش حداقل مربعات مرزی پیشنهاد کردند [24]. زو و همکارانش با استفاده از بسط سری فابری<sup>1</sup> و روش حداقل مربعات مرزی، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی در چندلایه کامپوزیتی محدود را به دست آوردند [25]. بیشتر مطالعاتی که تاکنون بر روی صفحات محدود حاوی گشودگی انجام شده است؛ محدود به گشودگی دایروی و بیضی شکل می‌شود. در سال 2013 زوکسینگ پن و همکارانش با استفاده از روش متغیر مختلط و حداقل مربعات مرزی و با اصلاح تابع تنش ارائه شده توسط موشخیلشویلی، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت بار کششی تک محوری پرداختند. آن‌ها از تابع نگاشتی که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز-کرسٹفل به دست آمده بود، استفاده کردند و یک گشودگی مربعی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی 3 به 2 و 5 به 1 را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنای، تحت بار کششی تک محوری بررسی نمودند. آن‌ها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مربعی در زوایای بسیار خاصی بررسی کردند [26].

در این مقاله سعی می‌شود تا با استفاده از روش متغیر مختلط و با بسط تحقیق انجام شده توسط پن و همکارانش، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی واقع در ورق محدود فلزی بررسی شود. علاوه بر هندسه‌ی گشودگی دیگر تفاوت کار انجام شده در این تحقیق با مطالعه‌ی پن در این است که: روش ارائه شده در این مقاله با معرفی تابع نگاشتی مناسب، توانایی تحلیل ورق‌های محدود با گشودگی‌های مختلف را دارد. همچنین این تابع امکان بررسی پارامترهای مختلف مانند زاویه‌ی چرخش و انحنای گوشه‌های گشودگی را به راحتی فراهم می‌آورد. پارامترهای مورد بررسی در این مقاله شامل انحنای گوشه‌های گشودگی، نسبت ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحه‌ای و زاویه‌ی چرخش گشودگی است. با تحقیقی که مؤلفین این مقاله داشته‌اند؛ تاکنون تحلیلی برای گشودگی مثلثی و پارامترهای مذکور در ورق‌های محدود انجام نشده است.

## 2- تعریف مسأله

مسأله‌ی مورد بررسی در این مقاله ورق همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی می‌باشد که نسبت طول ضلع مثلث به طول کوچکترین ضلع ورق، بزرگتر از 0/2 است. بنابراین با اطمینان می‌توان ورق را محدود در نظر گرفت.

مسأله با فرض تنش صفحه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین رفتار ورق در ناحیه‌ی الاستیک خطی بررسی می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است یعنی در مرز گشودگی  $\sigma_p = \tau_{p\theta} = 0$  می‌باشد.

در شکل 1 زاویه‌ی چرخش گشودگی که نحوه‌ی قرارگیری آن نسبت به محور افقی می‌باشد؛ با  $\beta$  نمایش داده شده است. ورق تحت بار کششی تک محوری، دو محوری و برش خالص قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در این مقاله، در بارگذاری دو محوری  $\lambda = 2$  و در بارگذاری تک محوری  $\lambda = 0$  در نظر گرفته شده است.

## 3- روش حلّ تحلیلی

### 3-1- تابع نگاشت

روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله برگرفته از روش متغیر مختلط

1- Faber series

$$\psi(z) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n \quad (18)$$

که در آن  $X$  و  $Y$  نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی در جهت  $X$  و  $Y$  می‌باشند. در غیاب این نیروها، جمله لگاریتمی معادلات فوق حذف می‌گردد. برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت  $\chi = 3 - 4\nu$  و برای حالت کرنش صفحه‌ای به صورت  $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  می‌باشد.  $a_n$  و  $b_n$  در معادلات فوق ثابت‌های مجهول و  $\nu$  نسبت پواسون می‌باشد. معادلات (17) و (18) برای ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی دایروی و یا بیضی مناسب می‌باشند. ساوین [8] به منظور حل مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، از تابع نگاشت همونا استفاده کرد. با توجه به اینکه مقادیر تنش در ورق نامحدود باید دارای مقادیر متناهی باشد؛ توابع تنش بر حسب متغیر  $\zeta$  به صورت معادلات (19) و (20) معرفی شد:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + a_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (19)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + b_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (20)$$

که در آن  $\varphi_0(\zeta)$  و  $\varphi_0(\zeta)$  به صورت رابطه‌ی (21) تعریف می‌شوند:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^{-n}, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n} \quad (21)$$

$a'_n$  و  $b'_n$  ثابت مجهول می‌باشند.  $X$  و  $Y$  مؤلفه‌های تنش در مرز گشودگی هستند که به دلیل آزاد بودن مرز گشودگی از تنش صفر می‌باشند. از معادلات (19) و (20) می‌توان در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف استفاده کرد. اما در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه‌ی گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد. بنابراین از معادلات (19) و (20) به شکلی که در بالا ارائه شده است؛ نمی‌توان استفاده کرد. همانطور که در شکل 4 مشاهده می‌شود؛ تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه‌ی  $\zeta$  با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحه‌ی  $\zeta$  به دست می‌آید [26]. لذا با استفاده از سری لورنت در یک ناحیه غیرساده، تابع تنش شامل جملاتی با توان‌های منفی  $\zeta$  که بر روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه خارج آن تحلیلی می‌باشد، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل می‌دهند. همچنین سری لورنت شامل جملاتی با توان‌های مثبت  $\zeta$ ، بر روی مرز خارجی ورق تحلیلی می‌باشند و تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل می‌دهند. بنابراین با جمع جمله‌هایی با توان مثبت و منفی  $\zeta$  سری لورنت، توابع تنش  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  مطابق معادلات (22) و (23) خواهند بود [26]:

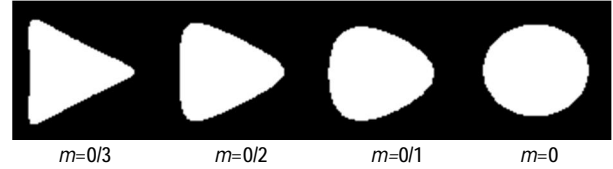
$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n \quad (22)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \zeta^n \quad (23)$$

که در آن ضرایب  $A_n, B_n, C_n, D_n$  اعدادی مختلط هستند که بصورت رابطه‌ی (24) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_n &= a_{n1} + ia_{n2}, & B_n &= b_{n1} + ib_{n2} \\ C_n &= c_{n1} + ic_{n2}, & D_n &= d_{n1} + id_{n2} \end{aligned} \quad (24)$$

می‌باشند. با توجه به روابط ذکر شده اکنون برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه ضرایب مجهول معادلات (22) و (23) است. برای این منظور از روش حداقل مربعات مرزی [24] بصورتی که در ادامه تشریح



شکل 3 تأثیر پارامتر  $m$  بر گوشه‌های گشودگی مثلثی

### 2-2- حل تحلیلی

در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحه‌ای معادلات تعادل بصورت معادلات (7) بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

همچنین معادله‌ی سازگاری (8) بر حسب مؤلفه‌های تنش برابر است با:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (8)$$

با معرفی تابع تنش  $U(x, y)$ ، رابطه‌ی مؤلفه‌های تنش با تابع تنش به صورت رابطه‌ی (9) خواهد بود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

با جایگذاری این مؤلفه‌ها در رابطه‌ی (8)، معادله سازگاری بر حسب تابع

تنش به صورت معادله (10) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (10)$$

موشخیلیشویلی رابطه‌ی (11) را برای حل معادله‌ی (10) پیشنهاد کرد

[4]:

$$U(x, y) = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \theta(z)] \quad (11)$$

با مشخص شدن تابع تنش  $U(x, y)$  بر حسب توابع  $\varphi(z)$  و  $\theta(z)$

$\theta'(z)$  مؤلفه‌های تنش در حالت دو بعدی و برای ناحیه‌ی همبند ساده با استفاده از معادلات (12) و (13) محاسبه می‌شوند [4]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi'(z)] \quad (12)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (13)$$

که در آن  $\psi(z)$  و  $\varphi(z)$  توابع مختلط می‌باشند. با استفاده از نگاشت همونا، مؤلفه‌های تنش بر حسب متغیر  $\zeta$  به کمک معادلات (14) و (15) به دست می‌آیند [4]:

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2ia} \\ &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left( \bar{\omega}(\zeta) \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

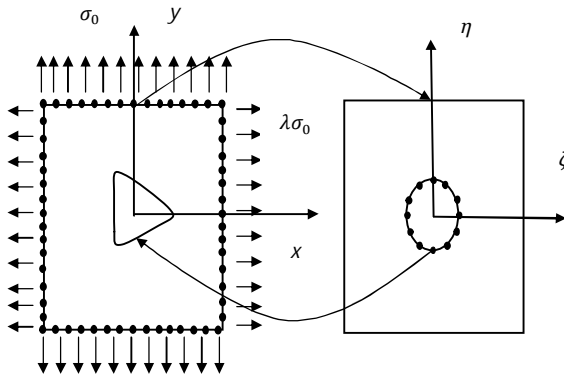
که در آن توابع  $\Phi(\zeta)$  و  $\Psi(\zeta)$  مطابق روابط (16) تعریف می‌شوند:

$$e^{2ia} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega'(\zeta)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

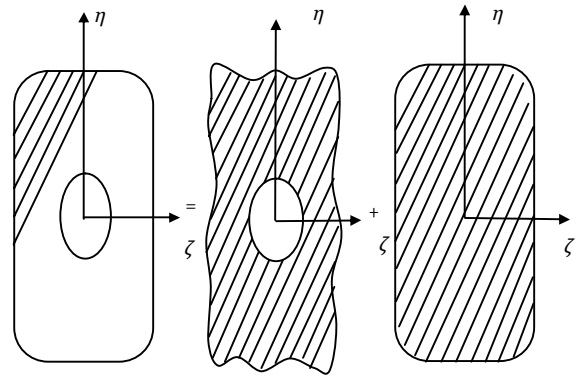
$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Phi'(\zeta) = \varphi''(\zeta) \omega'(\zeta) \quad (16)$$

بنابراین حل مسأله‌ی تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  که شرایط مرزی مسأله را ارضا می‌کنند؛ محدود می‌شود. با مشخص شدن  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  و با جایگذاری آن‌ها در معادلات (14) و (15) مؤلفه‌های تنش محاسبه می‌گردد. ساوین [8] برای تحلیل تنش صفحات همسانگرد حاوی گشودگی توابع تنش (17) و (18) را معرفی کرد:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (17)$$



شکل 5 موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه  $\zeta$  و مرز خارجی در صفحه  $Z$



شکل 4 نمایی از روش حل [26]

می‌شود؛ استفاده شده است.

### 3-3- روش حل

گام اول: تعیین نقاط منتخب و شرایط مرزی

همانطور که در شکل 5 مشاهده می‌شود نقاطی با فاصله‌ی برابر بر روی مرز داخلی (مرز گشودگی) در صفحه  $\zeta$  و بر روی مرز خارجی (مرز ورق) در صفحه  $Z$  انتخاب می‌شوند. با انتخاب این نقاط و با استفاده از معادله‌ی (1) می‌توان نقاط متناظر بر روی مرز داخلی گشودگی مثلثی در صفحه  $Z$  و نقاط متناظر بر روی مرز خارجی ورق در صفحه  $\zeta$  را به‌دست آورد. برای استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، به نقاط منتخب بر روی مرز داخلی و خارجی در صفحه  $\zeta$  نیاز می‌باشد. نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد در صفحه  $\zeta$  بصورت معادله‌ی (25) تعریف می‌شوند:

$$\rho = 1, \quad \theta = \frac{2\pi}{N_{in}}(j-1) \quad (j = 1, \dots, N_{in}) \quad (25)$$

در معادله‌ی (25)،  $N_{in}$  تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد می‌باشد. با جایگذاری مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  نقاط منتخب در صفحه  $Z$  در سمت چپ معادلات (5) و (6)، با استفاده از حل عددی، مؤلفه‌های  $m$  و  $\theta$  نقاط متناظر در صفحه  $\zeta$  محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت که در استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی دایره واحد در صفحه  $\zeta$  و در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی بر روی مرز گشودگی، بصورت معادله‌ی (26) است:

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0, \quad |\zeta| = 1 \quad (26)$$

این در حالی است که برای شرایط مرزی خارجی ورق از شرایط مرزی ورق در صفحه  $Z$  و مختصات کارتزین استفاده می‌شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود به صورت معادلات (27) و (28) است [26]:

$$\sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma + 2\tau_{xy} \sin \gamma \cos \gamma = \sigma_n \quad (27)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin \gamma \cos \gamma + \tau_{xy} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \tau_n \quad (28)$$

در معادلات فوق  $\gamma$  زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور  $x$  می‌باشد. همچنین  $\sigma_n$  و  $\tau_n$  به ترتیب تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می‌باشند. لازم به‌ذکر است که  $\sigma_0$  تنش کششی وارد شده بر مرز خارجی ورق می‌باشد و در این مقاله 1MPa در نظر گرفته شده است. همچنین در بارگذاری برشی تنش  $\tau_0$  برابر 1MPa می‌باشد.

گام دوم: محاسبه‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی و حل معادلات بر اساس روش حداقل مربعات مرزی، مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی در فرم گسسته بصورت معادله‌ی (29) بیان می‌شود.

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{in}+N_{ot}} r^2(\rho_j, \theta_j) \quad (29)$$

$N_{in}$  تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد،  $N_{ot}$  تعداد نقاط منتخب بر روی مرز خارجی ورق در محل اعمال بار، اندیس  $j$  نشان‌دهنده‌ی تعداد نقاط منتخب و  $r^2$  به‌صورت رابطه‌ی (30) تعریف می‌شود:

$$r^2(\rho_j, \theta_j) = r_1^2(\rho_j, \theta_j) + r_2^2(\rho_j, \theta_j) \quad (30)$$

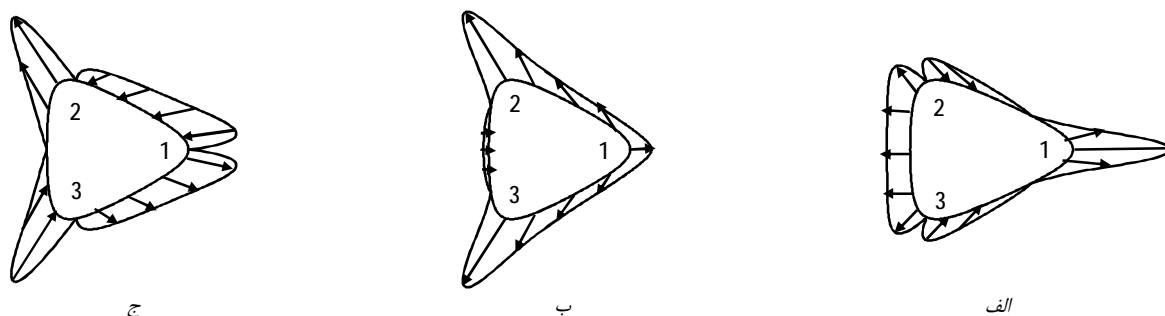
$r_1(\rho_j, \theta_j)$  و  $r_2(\rho_j, \theta_j)$  اختلاف دو تنش، یکی تنش حاصل از شرایط مرزی و دیگری تنش حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب بر روی مرزها هستند. پس از به‌دست آوردن  $\Delta^2$ ، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف به‌دست آمده در بالا، از معادلات (31) استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n1}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n2}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n1}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n2}} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n1}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n2}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n1}} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n2}} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

در نتیجه از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطی تشکیل می‌شود که از حل آن ثوابت مجهول به‌دست می‌آیند. با جایگذاری این ثوابت در معادلات (17) و (18) دو تابع تنش  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  محاسبه می‌گردند و در نهایت با استفاده از معادلات (9) و (10) مؤلفه‌های تنش به‌دست می‌آیند.

### 4- نتایج

در این مقاله سعی می‌شود تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، انحنای گوشه‌های گشودگی، چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت ضلع گشودگی به ضلع ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی مورد بررسی قرار گیرد. در شکل 6 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی برای حالت  $\beta=0$ ،  $\frac{b}{a}=1$ ،  $\frac{L}{a}=0/4$  و  $m=0/2$  برای سه نوع بارگذاری مورد بحث در این مقاله آورده شده است. تفاوت نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی برای حالت‌های مختلف بارگذاری در این شکل‌ها مشاهده می‌گردد. در بارگذاری تک محوری بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\theta=0$  و در بارگذاری دو محوری و برشی در 240 یا  $\theta=120$  ایجاد می‌گردد. برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث، در هر بخش با تغییر یکی از پارامترهای فوق و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی بررسی می‌گردد.



شکل 6 نحوه توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک محوری، (ب) دو محوری  $n=2$ ، (ج) برشی

#### 1-4- بررسی درستی حل

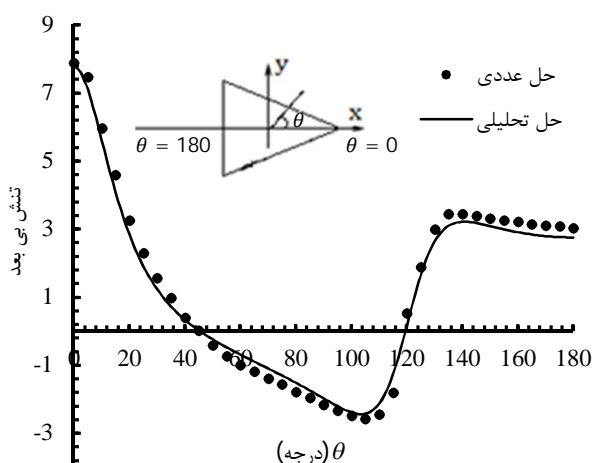
برای اطمینان از صحت روش حل حاضر، مقایسه‌ای بین حل تحلیلی و نتایج حاصل از حل عددی المان محدود (نرم افزار آباکوس) صورت گرفته است. بدین منظور ابتدا کد متلبی بر اساس معادله‌ی (1) برای تشکیل هندسه‌ی گشودگی نوشته شد، سپس مختصات به‌دست آمده عیناً وارد نرم افزار آباکوس گردید تا هندسه‌ی گشودگی کاملاً مطابق با مسأله‌ی حاضر باشد. ورق حاوی گشودگی مثلثی در حالت  $m=0/2$ ،  $\beta=0$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $\frac{t}{a}=0/4$ ، تحت بارگذاری کششی تک محوری مدل شده است. برای مش‌بندی از المان S8R که منطبق با هندسه و فیزیک مسأله است استفاده شده است. به‌منظور اطمینان از صحت حل نرم افزار و تعیین تعداد مش بهینه ناحیه‌ای کوچکی اطراف گشودگی در نظر گرفته شد. در این ناحیه تعداد المان‌ها از 960 عدد تا 17542 عدد افزایش داده شد و مشاهده گردید از این عدد به بعد با افزایش تعداد المان نتایج ثابت باقی می‌ماند. بنابراین این تعداد المان به عنوان تعداد المان مش بهینه در نظر گرفته شد و نتایج در این حالت به‌دست آمده است. شکل 7 مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی حاصل از روش تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد. در این تحقیق منظور از تنش بی‌بعد در بارگذاری کششی تک محوری، مقدار تنش محیطی ایجاد شده در اطراف گشودگی، به تنش اعمالی  $\sigma_0$  و در بارگذاری دو محوری و برشی مقدار تنش محیطی ایجاد شده در اطراف گشودگی، به تنش معادل فون میسر است. همچنین به علت تقارن موجود در توزیع تنش حول گشودگی، در همه‌ی بارگذاری‌های مورد بحث، نتایج تا  $\theta=180^\circ$  ارائه شده است. لازم به ذکر است در مورد ماده‌ی همسانگرد، جنس ماده بر روی توزیع تنش تأثیری ندارد. با توجه به شکل 6، تطابق خوبی بین دو روش حل وجود دارد که نشان‌دهنده صحت حلّ تحلیلی حاضر می‌باشد.

در شکل 8 مقایسه‌ی حل تحلیلی حاضر با حل هووا و دانوست [11] برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری تک محوری در جهت محور  $x$ ،  $m=0/33$ ، زاویه‌ی چرخش صفر درجه و  $\frac{t}{a}=0/01$  که معادل صفحه‌ی نامحدود است؛ آورده شده است که نتایج کاملاً همدیگر را تأیید می‌کنند.

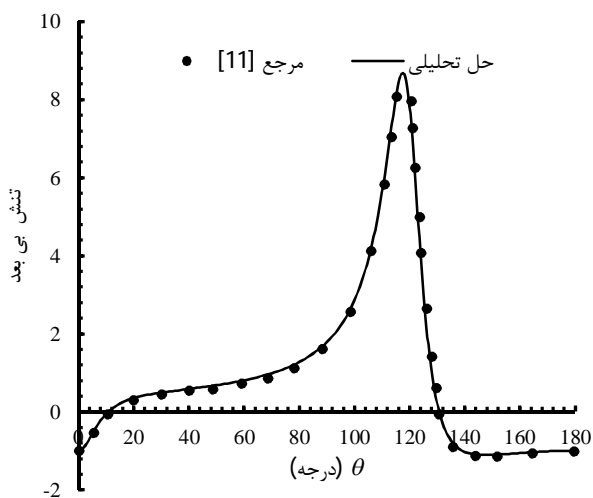
#### 2-4- تأثیر انحنای گشودگی (m)

همانطور که در معادله‌ی (1) به آن اشاره شد؛ پارامتر  $m$  مستقیماً بر هندسه‌ی گشودگی تأثیر می‌گذارد به گونه‌ای که با تغییر در مقدار  $m$  میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی قابل کنترل خواهد بود. انحنای گوشه‌ی گشودگی

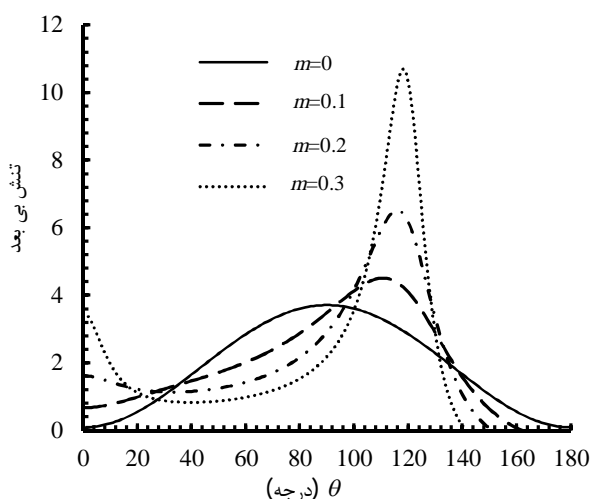
یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار در توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی می‌باشد که در این قسمت به نتایج مربوط به آن پرداخته شده است.



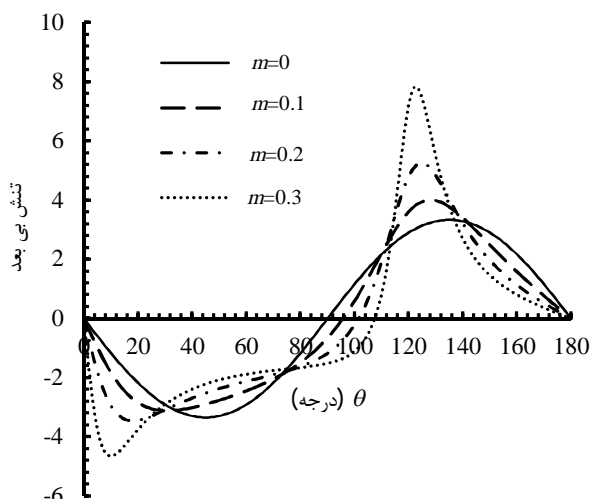
شکل 7 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار کششی تک محوری از روش تحلیلی و عددی



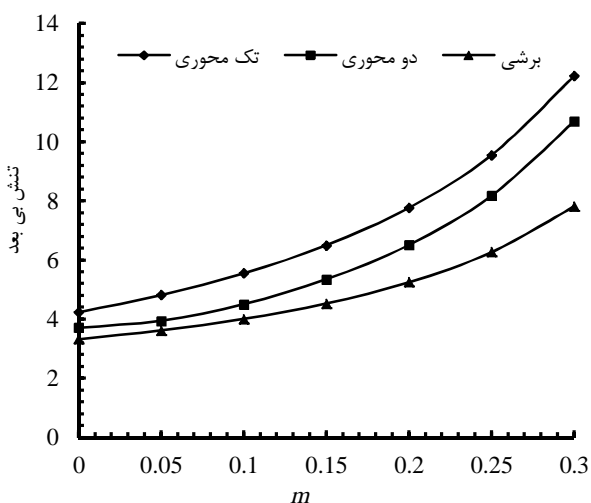
شکل 8 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار کششی تک محوری در جهت محور  $x$



شکل 10 توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دو محوری ( $\lambda=2$ )



شکل 11 توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی



شکل 12 ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب انحنای مختلف در سه بارگذاری

حول گشودگی از بین می‌رود بنابراین نمودارهای چرخش برای 360 درجه حول گشودگی گرفته شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌گردد چرخش تأثیر

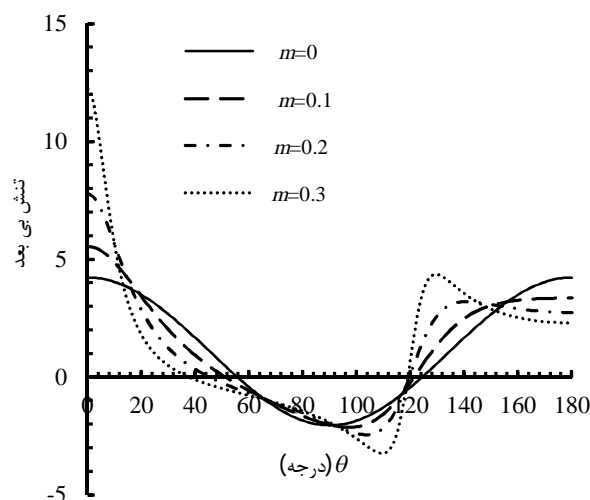
در شکل‌های 9 تا 11 توزیع تنش اطراف گشودگی در سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی، برای انحنای مختلف آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد در تیزترین انحنای  $0/3$ ،  $m =$  این افزایش تنش به مقدار بیشتری شدت می‌یابد. در بارگذاری تک محوری، برای تمامی انحنای ماکزیمم تنش بی بعد در  $\theta=0$  اتفاق می‌افتد، زاویه  $\theta$  در شکل 6 نشان داده شده است. در بارگذاری دو محوری محل ماکزیمم تنش بی بعد (مقدار زاویه  $\theta$ ) برای انحنای گوناگون به جز  $m=0$ ، بین زاویه‌ی 111 درجه تا 118 درجه متغیر است و با افزایش انحنای زاویه افزایش می‌یابد. برای حالت دایروی  $m=0$  ماکزیمم تنش در زاویه‌ی 90 درجه رخ می‌دهد. محل ماکزیمم تنش بی بعد در اطراف گشودگی برای بارگذاری برشی بین 120 تا 135 درجه متغیر می‌باشد.

شکل 12 ماکزیمم تنش بی بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحنای مختلف مقایسه می‌کند. کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی مربوط به  $m=0$  می‌باشد که در این حالت گشودگی مثلثی به گشودگی دایروی تبدیل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که علاوه بر اینکه افزایش میزان انحنای مقدار تنش را در سه حالت بارگذاری افزایش می‌دهد، این تأثیر در بارگذاری تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر بوده است و با شیب بیشتری این افزایش در مقدار تنش اتفاق می‌افتد.

لازم به توضیح است که در تابع نگاشت استفاده شده در این مقاله محدوده‌ی مجاز برای پارامتر  $m$  که تعیین کننده‌ی انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد، 0 تا 0/5 می‌باشد. از آنجایی که با افزایش  $m$ ، گوشه‌های گشودگی تیزتر می‌شود و در کاربردهای عملی مهندسی، گشودگی‌های بسیار نوک تیز معقول نمی‌باشد؛ تأثیر این پارامتر تا مقدار 0/3 بررسی شده است. تمام نتایج این قسمت در حالت  $\beta=0$ ،  $L/a=0/4$  و  $b/a=1$  می‌باشند.

#### 3-4- تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی (B)

در این قسمت به بررسی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی پرداخته می‌شود. شکل‌های 13 تا 15، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای زوایای چرخش 0، 15، 30 و 45 درجه را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهند. به علت رفتار تناوبی تابع با دوره تناوب 60 درجه زوایای فوق بررسی شده‌اند. همچنین با چرخش گشودگی تقارن توزیع تنش

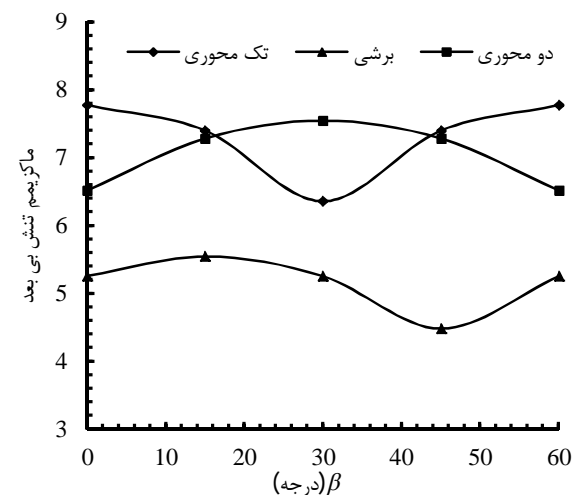


شکل 9 توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک محوری

در  $\theta=0$  واقع است. برای زاویه چرخش 30 درجه، بیشترین تنش در اطراف گشودگی در حوالی  $\theta=0$  و  $\theta=120$  ایجاد می‌شود. و در نهایت در زاویه چرخش 45 درجه، نقطه‌ی بحرانی در  $\theta=120$  قرار دارد. در بارگذاری دو محوری و برشی نیز بسته به مقدار زاویه چرخش، محلی که بیشترین تنش در اطراف گشودگی رخ می‌دهد؛ متفاوت خواهد بود.

در شکل 16 ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی بر حسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری مقایسه شده است. بنابراین این شکل نشان‌دهنده مقدار تنش ماکزیمم ایجاد شده در اطراف گشودگی به ازای هر زاویه چرخش است. از بین این تنش‌های ماکزیمم کمترین و بیشترین مقدار به ترتیب تنش بی‌بعد مطلوب و تنش بی‌بعد نامطلوب و یا به اختصار تنش مطلوب و تنش نامطلوب نامیده می‌شود. در طراحی‌ها باید از تنش نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. باتوجه به این شکل، در بارگذاری تک محوری، تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر و 60 درجه رخ می‌دهد. در بارگذاری دو محوری تنش نامطلوب در زاویه چرخش 30 درجه اتفاق می‌افتد و در نهایت در بارگذاری برشی بیشترین تنش نامطلوب در زاویه چرخش 15 درجه ایجاد می‌شود. بنابراین بسته به نوع بارگذاری زاویه چرخشی که در آن تنش نامطلوب ایجاد می‌گردد؛ متفاوت خواهد بود. برای نمونه با وجود آنکه بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری دو محوری در زاویه چرخش 30 درجه اتفاق می‌افتد، همین زاویه چرخش در بارگذاری تک محوری کمترین مقدار تنش را داراست. بنابراین توجه به تفاوت روند تأثیر زاویه چرخش در بارگذاری‌های مختلف امری بسیار مهم می‌باشد. نتایج تأثیر زاویه چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول 1 و 2 آورده شده است.

تمام نتایج این قسمت در حالت  $\frac{b}{a} = 1$ ،  $\frac{a}{a} = 0/4$  و  $m = 0/2$  برای بارگذاری دو محوری  $\lambda=2$  می‌باشند.

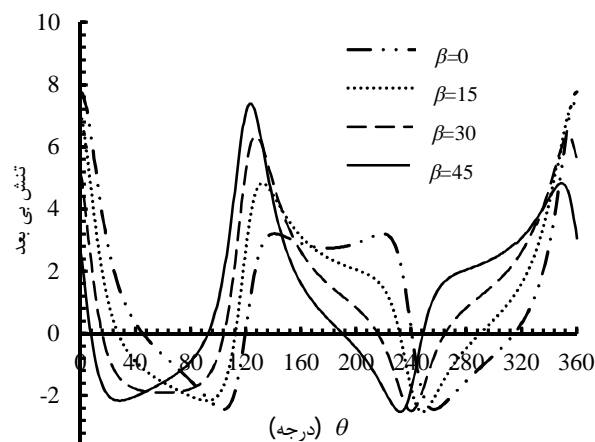


شکل 16 ماکزیمم تنش بی‌بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری

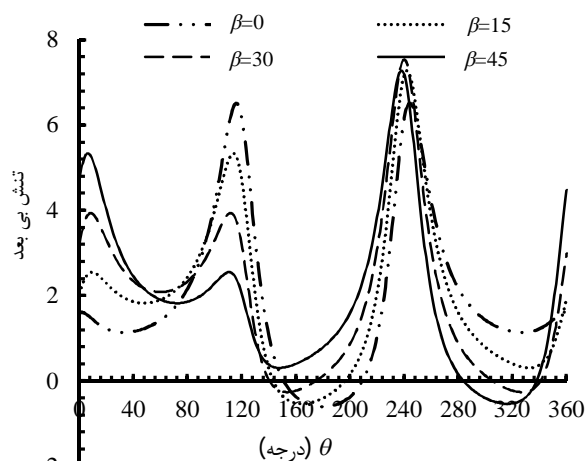
جدول 1 مقادیر و زوایای تنش مطلوب در سه حالت بارگذاری

نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش بی‌بعد مطلوب
تک محوری	30	6/3590
دو محوری	صفر یا 60	6/5205
برشی	45	4/4827

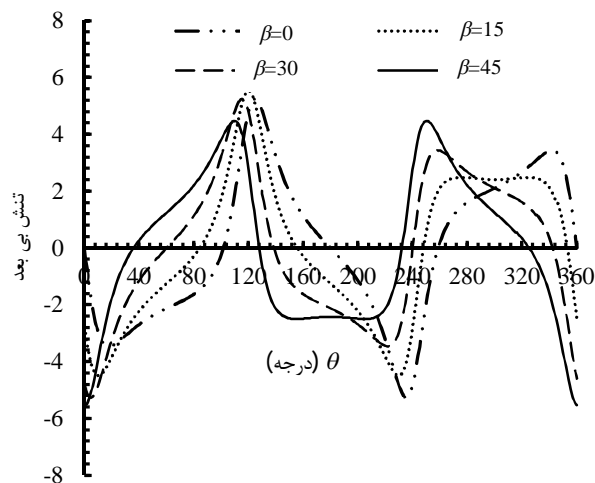
بسیاری در نحوه توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی مثلثی در هر سه نوع بارگذاری دارد. در بارگذاری تک محوری برای زوایای چرخش صفر و 15 درجه، نقطه‌ی بحرانی که بیشترین تنش حول گشودگی در آن اتفاق می‌افتد؛



شکل 13 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک محوری



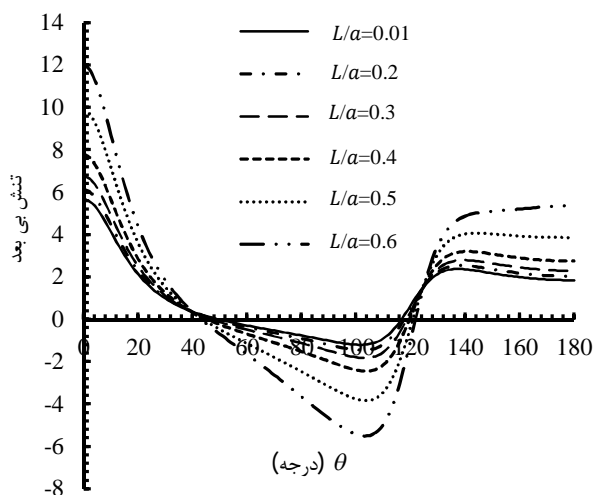
شکل 14 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دو محوری ( $\lambda=2$ )



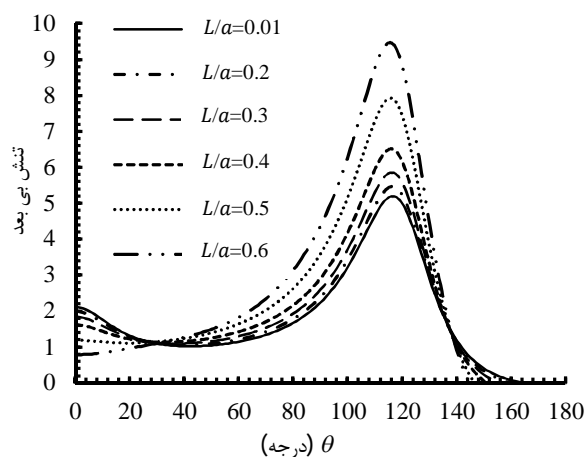
شکل 15 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی



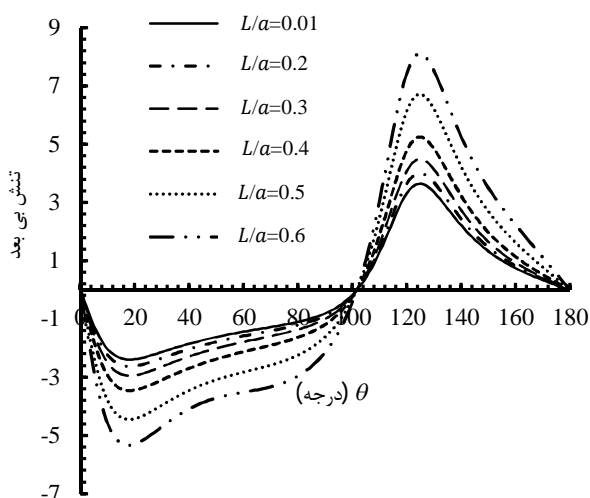
شرایط  $L/a = 0.4$  (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از  $0/2$ ) برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش می‌یابد. برای نسبت‌های  $L/a$  بزرگتر از یک،  $b$  ضلع بزرگتر ورق می‌شود و در صورتی که،



شکل 17 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $L/a$  های مختلف تحت بار تک محوری



شکل 18 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $L/a$  های مختلف تحت بار دو محوری



شکل 19 توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $L/a$  های مختلف تحت بار برشی

جدول 2 مقادیر و زوایای تنش نامطلوب در سه حالت بارگذاری

نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش بی‌بعد نامطلوب
تک محوری	صفر یا 60	7/7752
دو محوری	30	7/5467
برشی	15	5/5450

#### 4-4- تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $L/a$ )

در این قسمت به بررسی تأثیر نسبت  $L/a$  (اندازه گشودگی به ورق) پرداخته شده است. شکل‌های 17 تا 19 توزیع تنش حول گشودگی در سه حالت بارگذاری مورد بحث در مقاله را برای نسبت‌های مختلف  $L/a$  نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $L/a$  تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی  $L/a$  بزرگتر از  $0/2$ ، تنش به میزان زیادی افزایش می‌یابد و هرچه قدر این نسبت بزرگتر شود، مقدار افزایش تنش بیشتر می‌گردد. این در حالی است که در محدوده‌ی  $L/a$  کوچکتر از  $0/2$  اختلاف مقدار تنش ناچیز می‌باشد و این نشان دهنده‌ی تأثیر بسیار زیاد سایز گشودگی به ورق در ورق‌های محدود می‌باشد. نتایج مربوط به مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $L/a$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود در جدول 3 آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده و مقایسه‌ی آن با حلّ ورق نامحدود ( $L/a = 0/01$ ) مشاهده می‌شود که در نسبت‌های  $L/a$  کوچکتر از  $0/2$ ، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش کمتر از 10% می‌باشد بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌های محدود با نسبت  $L/a$  کوچکتر از  $0/2$  را می‌توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت‌های بزرگتر از  $0/2$  اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا 122% هم می‌رسد و این نشان‌دهنده‌ی این امر می‌باشد که در این نسبت‌ها نمی‌توان از حلّ نامحدود ورق استفاده کرد. شکل 20 ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی بر حسب نسبت‌های مختلف  $L/a$  را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $L/a$ ، در محدوده‌ی  $L/a$  کمتر از  $0/2$  مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده‌ی  $L/a$  بزرگتر از  $0/2$ ، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. این افزایش مقدار تنش برای بارگذاری تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دو محوری و برشی می‌باشد.

تمام نتایج این قسمت در حالت  $\beta = 0$ ،  $m = 0/2$  می‌باشند.

#### 4-5- تأثیر نسبت اضلاع ورق ( $b/a$ )

به منظور مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد ورق، توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی، برای نسبت‌های مختلف  $b/a$  و سه حالت بارگذاری در شکل‌های 21 تا 23 آورده شده است. از آنجایی که اندازه گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر  $L/a = 0/4$  در نظر گرفته شده، کمترین نسبت  $b/a$  می‌تواند برابر با عدد  $0/4$  باشد که در این صورت دو ضلع ورق مماس بر گشودگی می‌شوند که این امر در کاربردهای عملی معقول به‌نظر نمی‌رسد بنابراین در این قسمت نسبت  $b/a$  های بزرگتر از  $0/6$  بررسی می‌گردند.

همانطور که مشاهده می‌گردد با افزایش نسبت  $b/a$  مقدار تنش بی‌بعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و اختلاف توزیع تنش، با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می‌کند. علت این امر این است که، ورق در صورتی محدود می‌باشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از  $0/2$  باشد. بنابراین برای نسبت  $b/a$  های کوچکتر از 1

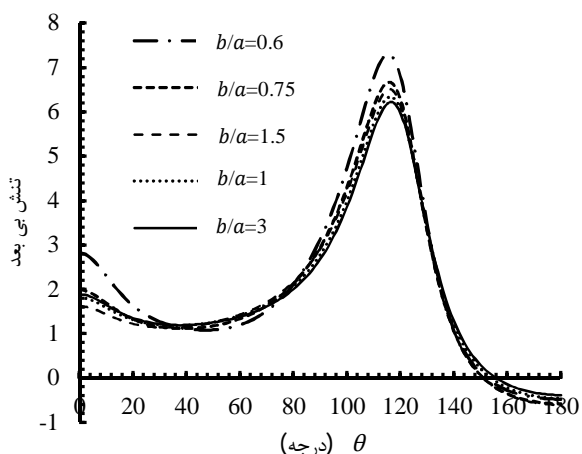
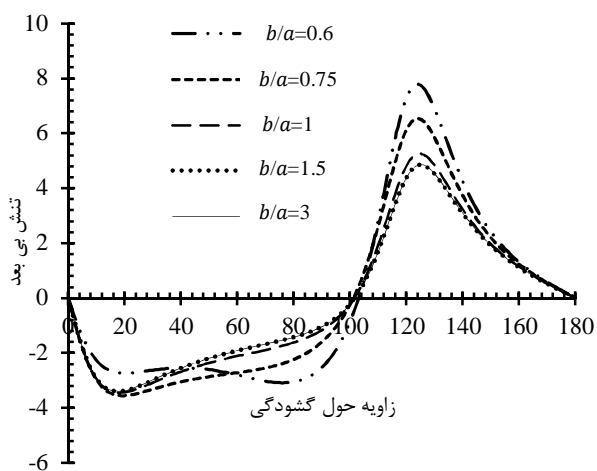
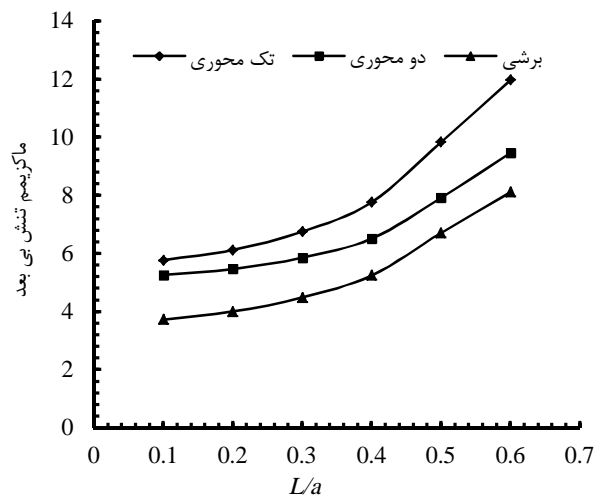
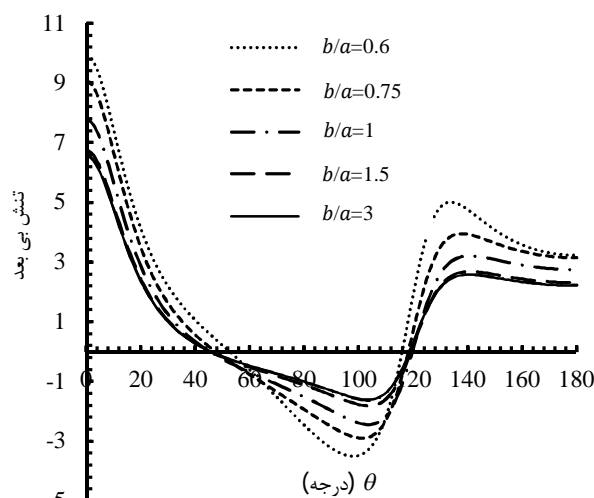
جدول 3 مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود

بارگذاری برشی		بارگذاری کششی دو محوری		بارگذاری کششی تک محوری		$\frac{L}{a}$
درصد اختلاف با ورق نامحدود $\frac{L}{a}=0/01$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	درصد اختلاف با ورق نامحدود $\frac{L}{a}=0/01$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	درصد اختلاف با ورق نامحدود $\frac{L}{a}=0/01$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	
0 %	3/6507	0 %	5/2027	0 %	5/6678	0/01
2/38 %	3/7376	1/2 %	5/2657	1/94 %	5/7779	0/1
9/84 %	4/0102	5/1 %	5/4726	8/08 %	6/1258	0/2
23/18 %	4/4971	12/71 %	5/8642	19/23 %	6/7578	0/3
43/98 %	5/2563	29/70 %	6/5205	37/18 %	7/7752	0/4
84/10 %	6/7212	52/42 %	7/9300	73/79 %	9/8502	0/5
122/38 %	8/1187	82/04 %	9/4713	111/39 %	11/9816	0/6

می‌دهد که با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و در نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a}=1/5$  مقدار تنش به حالت پایدار رسیده و با افزایش این نسبت تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بی‌بعد ایجاد نمی‌شود. علت این امر همان طور که بیان شد افزایش طول  $b$  و کاهش نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق و در نتیجه تبدیل ورق به شرایط برابر با ورق نامحدود می‌باشد. همچنین تأثیر

شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند تغییر چندانی در مقدار تنش، همانند ورق‌های نامحدود به وجود نمی‌آید. به همین خاطر مشاهده می‌شود که در نسبت  $\frac{b}{a}$  برابر با 1/5 و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی‌شود.

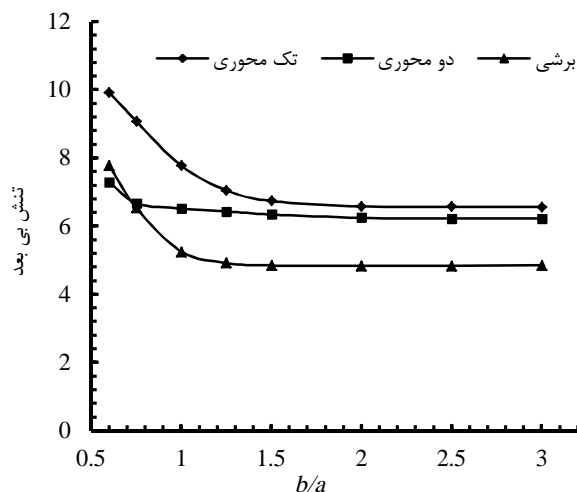
شکل 24 ماکزیمم تنش بی‌بعد را بر حسب نسبت  $\frac{b}{a}$  در سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان می‌دهد. همانطور که اشاره شد؛ این شکل نشان

شکل 22 توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار کششی دو محوریشکل 23 توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار برشیشکل 20 ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی بر حسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاریشکل 21 توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار کششی تک محوری

نامحدود نمی‌توان برای حل ورق‌هایی با نسبت  $\frac{b}{a}$  بزرگتر از  $0/2$  (ورق محدود) استفاده نمود. همچنین با تغییر نسبت ابعاد ورق، ابتدا کاهش مقدار تنش و سپس ثابت ماندن این مقدار برای نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a}=1/5$  در سه حالت بارگذاری مشاهده شد. نتایج نشان داد که با انتخاب صحیح پارامتر-های یاد شده می‌توان از مقدار تنش در اطراف گشودگی کاست. این روش قابلیت حل سایر گشودگی‌های مختلف را نیز داراست. که با تغییر  $n$  در تابع نگاشت تعریف شده می‌توان به این توانایی دست یافت.

## 6- مراجع

- [1] G. Kirsch, Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre, *Veit Ver Deut Ing*, Vol. 42, pp. 797-807, 1898.
- [2] C. E. Inglis, Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans Inst Nav Archit*, Vol. 55, pp. 219-30, 1913.
- [3] H. M. Westergaard, Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, pp. 49-53, 1939.
- [4] N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*, Second Edition, Netherlands: Noordhoff, 1962.
- [5] A. C. Stevenson, Complex potentials in two-dimensional elasticity, *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 184, pp. 532-54, 1945.
- [6] A. E. Green, *Stress systems in isotropic and anisotropic plates V*, In: *Proceedings of the Royal Society of London*, 1945.
- [7] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Second Edition, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [8] G. N. Savin, *Stress concentration around holes*, New York: Pergamon Press, 1961.
- [9] X. L. Gao, A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 67, pp. 95-104, 1996.
- [10] P. S. Theocaris, L. Petrou, Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes, *International Journal of Fracture*, Vol. 31, pp. 271-289, 1986.
- [11] J. Daoust, S. V. Hoa, An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes, *Composite Structure*, vol. 19, No. 2, pp. 107-130, 1991.
- [12] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates, *Composite Structure*, Vol. 45, 171-83, 1999.
- [13] K. R. Y. Simha, S. S. Mohapatra, Stress concentration around irregular holes using complex variable method. *Sadhna (India)*, Vol. 23, pp. 394-412, 1998.
- [14] N. M. Abuefoutouh, Preliminary design of unstiffened composite shells, *Symposium Of 7th technical Conference of ASC*, pp. 693-786, 1993.
- [15] M. D. Motok, Stress concentration on the contour of a plate opening of an arbitrary corner radius of curvature, *Marin Structures*, Vol. 10, pp. 1-12, 1997.
- [16] G. H. Lei, C. W. W. Ng, D. B. Rigby, Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 127, pp. 880-890, 2001.
- [17] M. Batista, On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 53, pp. 254-261, 2011.
- [18] D. S. Sharma, Stress distribution around polygonal holes, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 65, pp. 115-124, 2012.
- [19] D. S. Sharma, Nirav P. Patel, Khushbu C. Panchal, Stress distribution around triangular holes in orthotropic plate, *Nirma University Journal of engineering and technology*, Vol. 1, pp. 59-63, 2010.
- [20] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 52, pp. 96-102, 2010.
- [21] O. L. Bowie, Analysis of edge notches in semi-infinite region, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 45, pp. 356-66, 1966.
- [22] A. H. England, On stress singularities in linear elasticity. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 9, pp. 571-85, 1971.
- [23] C. C. Lin, C. C. Ko, Stress and strength analysis of finite composite laminates with elliptical holes, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, No. 4, pp. 373-385, 1988.
- [24] C. W. Woo, L. W. Chan, Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 43, No. 5, pp. 757-68, 1992.
- [25] X. Xu, L. Sun, X. Fan, Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole, *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 1, pp. 29-34, 1995.
- [26] Z. Pan, Y. Cheng, J. Liu, Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 75, pp. 265-277, 2013.



شکل 24 ماکزیمم تنش حول گشودگی بر حسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری

نسبت اضلاع ورق برای دو بارگذاری برشی و تک محوری بیشتر از بارگذاری دو محوری می‌باشد و این کاهش مقدار تنش در این دو بارگذاری با شیب بیشتری اتفاق می‌افتد. تمام نتایج این قسمت در حالت  $\beta = 0$ ،  $\frac{L}{a} = 0/4$  و  $m=0/2$  می‌باشند.

## 5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با به‌کارگیری روش متغیر مختلط، حل تحلیلی ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی ممکن گردید. تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نسبت اندازه گشودگی به بزرگترین طول ورق و نوع بارگذاری بعنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف این گشودگی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که در گشودگی مثلثی با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی، مقدار تنش افزایش می‌یابد و این افزایش در بارگذاری کششی تک محوری با شیب بیشتری اتفاق می‌افتد. محلی که بیشترین تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی اتفاق می‌افتد در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. در بارگذاری کششی تک محوری برای تمامی انحنایها، این تنش در  $\theta = 0^\circ$  برای بارگذاری دو محوری این تنش در زاویه بین 111 تا 118 و در بارگذاری برشی برای تمامی انحنایها این تنش در زاویه بین 120 تا 135 درجه رخ می‌دهد. تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی مثلثی در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. برای  $\frac{L}{a} = 0/4$ ،  $\frac{b}{a} = 1$  و  $m=0/2$  مشاهده گردید که در بارگذاری کششی تک محوری کمترین مقدار تنش در زاویه‌ی چرخش 30 درجه و بیشترین مقدار تنش در زاویه‌ی چرخش صفر و 60 درجه اتفاق می‌افتد. در بارگذاری کششی دو محوری کمترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش صفر درجه و بیشترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش 30 درجه و برای بارگذاری برشی کمترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش 45 درجه و بیشترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش 15 درجه رخ می‌دهد. با افزایش اندازه گشودگی در هر سه حالت بارگذاری، مقدار تنش افزایش یافت که مقدار این افزایش در بارگذاری کششی تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر صورت گرفت. همچنین تأثیر نسبت ابعاد گشودگی به ابعاد ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. با مقایسه‌ی مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در ورق نامحدود، نشان داده شد که از حل ورق