ماهنامه علمى پژوهشى

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حلّ تحلیلی محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درونصفحهای

محمّد جعفرى^{1*}، الهه اردلانى²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، کد پستی m_jafari821@shahroodut.ac.ir ،**3619995161**

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در این مقاله، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد محدود، تحت بارگذاری درون صفحهای مطالعه شده است. روش بکار گرفته شده برپایهی حل تحلیلی متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت همنوا با فرض تنش صفحهای میباشد. ورق، محدود (نسبت طول بزرگترین ضلع گشودگی به ورق، بزرگتر از 2/0)، همسانگرد و الاستیک خطّی درنظر گرفته شده است. روش	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 11 دی 1393 پذیرش: 28 بهمن 1393 ارائه در سایت: 15 فروردین 1394
- حل به گونهای است که با استفاده از تابع نگاشت همنوا ناحیهی محدود حارج گشودگی مثلثی در صفحهی Z به ناحیه محدود خارج گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحهی ζ نگاشت میشود. برای محاسبهی تابع تنش مربوط به صفحهی محدود حاوی گشودگی مثلثی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی گشودگی مثلثی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مربعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب بهدست میآید. تأثیر پارامترهایی از قبیل انحنای گوشههای گشودگی، زاویهی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازهی گشودگی به	<i>کلید واژگان:</i> ورق محدود گشودگی مثلثی حل تحلیلی روش متغیر مختلط
ورق و نوع بارگذاری، به عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش بررسی شده است. نتایج بهدست آمده از حلّ تحلیلی با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود به کمک نرمافزار آباکوس، مطابقت خوبی را نشان میدهد. نتایج نشان میدهد که در بررسی توزیع تنش ورقهایی که نسبت طول ضلع گشودگی به کوچکترین طول ورق در آنها بزرگتر از 0/2 است؛ استفاده از حل مربوط به ورق نامحدود با خطای زیادی همراه خواهد بود.	

Analytical solution to calculate the stress distribution around **a** triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading

Mohammad Jafari*, Elahe Ardalani

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran. * P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari821@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

ABSTRACT

In this paper, stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plate under in-plane Original Research Paper Received 22 December 2014 loading is studied. With the assumption of plane stress conditions, the method employed is based Accepted 17 February 2015 on the analytical solution of Muskhelishvili's complex variable method and conformal mapping. Available Online 04 April 2015 The finite plate (the ratio of the length of the biggest side of the hole to side of the plate is greater than 0.2) can be considered as isotropic and linearly elastic. For solving the problem, the finite Keywords: area with a triangular hole in z plan is mapped onto finite area outside a unit circle in ζ plan using Finite plate the conformal mapping function. The stress function in finite plate with triangular hole is triangular hole analytical solution presented by superposition of the stress function for an infinite plate with a triangular hole and complex variable method ones for a finite plate without a hole. The unknown coefficients in stress function are obtained by using the least square boundary collocation method and applying the appropriate boundary conditions. The effect of hole curvature, hole orientation, plate's aspect ratio, hole size, type of loading as the effective parameters on the stress distribution have been investigated. The results based on analytical solution are in good agreement with those obtained from the finite element method using Abaqus software. The results show that, by using infinite plate theory the analysis of the stress distribution in perforated plates where the ratio of the length of the biggest side of the hole to the smallest side of the plate is greater than 0.2, results in great error.

صنعتی و غیرصنعتی، صنعت ساختمانسازی و غیره بکار میروند. انواع مختلفی از گشودگیها و بریدگیها با ابعاد و شکلهای گوناگون در ساختارهای عملی مهندسی به دلایل مختلفی همچون کاهش وزن سازه، 1– مقدمه

ورقها بهدلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیّت بسیاری برخوردار هستند. ورقهای نازک اغلب در سازه های فضایی، دریایی، ماشینآلات

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Jafari, E. Ardalani, Analytical solution to calculate the stress distribution around a triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 165-175, 2015 (In Persian)



ایجاد قابلیت اتّصال تجهیزات به آنها یا ایجاد راههای خروجی و ورودی ایجاد می گردند. این گشودگیها سبب ایجاد تنش موضعی شدیدی میشوند که در اصطلاح تمرکز تنش نامیده میشود. به دلیل وابستگی شدید قابلیت تحمل بار سازه به مقدار تمرکز تنش، در طراحی سازهها، توجه به مسألهی تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی امری اجتناب ناپذیر است که سالها زمینهی تحقیق بسیاری از محققان را ایجاد نموده است.

در زمینهی تمرکز تنش ورق نامحدود دارای گشودگی، تحقیقات بسیاری انجام شده است. اوّلین بار راه حل توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی توسط کرش با استفاده از متغیّرهای حقیقی ارائه شد [1]. اینگلیس توانست با بسط راه حل کرش توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی را بدست آورد. راه حل او دقیق و مناسب بود اما بکارگیری آن به ویژه برای شکلهای نوک تیز دشوار بود [2]. وسترگارد تابع تنشی با جملههایی از توابع همساز برای تحلیل تنش اطراف گشودگیهای تیز بهدست آورد. تنشهای بهدست آمده از تابع تنش او معادلات تعادل، معادلات سازگاری و قانون هوک تعمیم يافته را ارضا مىكرد [3]. موشخيلشويلى برپايه تئورى الاستيك دوبعدى، روش متغیر مختلط را معرفی کرد. با استفاده از این روش مسألهی تعیین توزيع تنش ورق حاوى گشودگى، به محاسبه دو تابع تحليلى هولومورفيک محدود می شد. او این روش را با نگاشت همنوا ترکیب کرد تا بتواند بصورت تحلیلی مسألهی توزیع تنش اطراف گشودگیهای غیر دایروی را در جسم الاستیک دو بعدی حل کند [4]. استیونسون بطور مستقل و بدون استفاده از نتایج موشخلیشویلی، با استفاده از روش متغیر مختلط، رهیافتی را از نظریه الاستیک دو بعدی برای مواد همسانگرد توسعه داد. او همچنین اساس استفاده از پتانسیلهای مختلط، در حل مسائلی با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف را مورد بررسی قرار داد [5]. گرین با استفاده از روش متغیر مختلط در دستگاه مختصات منحنی الخط به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگیهای مختلف در ورق نامحدود همسانگرد و غیر همسانگرد پرداخت [6]. لخنیتسکی روش متغیر مختلط موشخیلشویلی را برای مواد الاستیک غیرهمسانگرد بسط داد و حلی عمومی برای محاسبهی مؤلفههای تنش و جابهجایی در حالت تنش صفحهای بهدست آورد. او از روش سریها برای بهدست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف گشودگیها با شکلهای مختلف را در ورق نامحدود غیرهمسانگرد ارائه نمود [7]. ساوین با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، توزیع تنش اطراف انواع مختلفی از گشودگیها را در ورق نامحدود همسانگرد بهدست آورد، او ناحیه نامحدود اطراف گشودگی در صفحهی Z را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز- کرستفل به ناحیهی داخل دایرهی واحد نگاشت داد و با استفاده از انتگرال کوشی تابع تنش را بدست آورد. او همچنین تمرکز تنش گشودگی مثلثی با گوشههای گرد را نیز در ورق نامحدود بررسی نمود [8]. گائو به منظور اجتناب از به کارگیری دو نگاشت همنوا، از دستگاه مختصات بيضوى - هذلولى براى بهدست آوردن صريح مؤلفههاى تنش و جابهجايي ورق نامحدود همسانگرد تحت بار دو محوری دلخواه استفاده کرد [9]. تئوکاریس و پترو از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت همنوا، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی را در ورق همسانگرد نامحدود بررسی و نتایج را با نتايج تجربي مقايسه كردند [10]. دائوست و هووا با بسط روش ساوين، گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد و غیرهمسانگرد نامحدود را تحت بار کششی تک محوری، تحلیل کردند. آنها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، توانستند علاوه بر مثلث متساوى الاضلاع ساير مثلثها با نسبت

اضلاع مختلف را بررسی کنند. همچنین آنها به بررسی پارامتر شعاع انحنای گشودگی نیز پرداختند [11]. یوکادگائونکر و رائو توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق غیر همسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحهای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار بدست آوردند. آنها همچنین به بررسی تأثیر زاویهی الیاف بر توزیع تنش پرداختند و این روش را برای چندلایه های کامپوزیتی متقارن بسط دادند [12]. سیمها و موهایاترا از یک تابع نگاشت کلّی برای یافتن توزیع تنش در اطراف انواع گشودگیها در یک صفحهی همسانگرد نامحدود استفاده کردند [13]. ابوالفتوح رابطهی واحدی را برای مؤلفه تنش مماس بر مرز گشودگی برای هندسه های دایروی، بیضوی، مثلثی و مربعی در صفحه نامحدود از مادهی ناهمسانگرد خاص تحت بار کششی بیان نمود [14]. موتوک به بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشههای گشودگیهای مختلف در ورق نامحدود تحت کشش پرداخت [15]. لى و همكارانش با اعمال ضرايب تصحيح در تابع نگاشت همنوا، توانستند توزیع تنش و جابهجایی حول گشودگی مستطیلی شکل با ابعاد دلخواه در ورق نامحدود همسانگرد و تحت بار تک محوری را به دست آورند [16]. باتیستا با اصلاح روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، توزیع تنش حول گشودگیهای چندضلعی با هندسههای پیچیده در ورق نامحدود تحت بارگذاری کششی را محاسبه کرد [17]. شارما راه حلی عمومی برای توزیع تنش اطراف گشودگیهای چندضلعی در ورق نامحدود تحت بارگذاری دو محوری را بهدست آورد. او همچنین تأثیر هندسهی گشودگی و الگوی بارگذاری بر توزیع تنش ورق را بررسی نمود. او و همکارانش در ورق ناهمسانگرد نیز به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی تحت بارگذاری درون صفحهای پرداختند و پارامترهای زاویهی بار، زاویهی الیاف، جنس و انحنای گوشه گشودگی را نیز در نظر گرفتند [18،19]. رضایی پژند و جعفری از روش ساوین برای مطالعهی تمرکز تنش حول گشودگیها مختلف در ورق نامحدود فلزی استفاده کردند و تأثیر پارامترهایی مانند نوع شکل گشودگی، انحنای گوشه و زاویهی چرخش گشودگی را بر روی ضریب تمرکز تنش مطالعه كردند [20].

بوئی مسألهی الاستیسیته صفحهای در بریدگیهای لبهای در صفحات نیمه بینهایت (نیمه نامحدود) را بررسی نمود [21]. از آنجایی که راه حل میدان تنش در نواحی ناپیوسته دارای نقاط تکین خواهد بود؛ انگلند به بررسی این نقاط در حوزهی الاستیک خطی پرداخت. این نقاط تکینی به شکل هندسی بریدگی و شرایط مرزی وابسته میباشند. شرایط مرزی تعیین کننده درجه تکینی بوده و شکل هندسی بریدگی و بار اعمال شده، شدت تنش تکینی را کنترل مینماید [22].

غالب روشهای تحلیلی بکارگرفته شده در مطالعات فوق، برای بررسی توزیع تنش ورقهای نامحدود حاوی گشودگی مناسب میباشند اما در موارد زیادی از کاربردهای عملی مهندسی، ورقها را نمیتوان نامحدود در نظر گرفت. از راه حل ارائه شده برای ورقهای نامحدود حاوی گشودگی، نمیتوان برای ورقهای محدود استفاده نمود. زیرا در این حالت تأثیر شرایط مرزی خارجی بر توزیع تنش درنظر گرفته نمیشود. بنابراین مطالعه بر روی توزیع تنش ورق محدود دارای گشودگی مرکزی، نیارمند به کارگیری روابط جداگانهای است.

لین وکو با استفاده از تئوری مواد غیرهمسانگرد لخنیتسکی به تحلیل چندلایههای کامپوزیتی محدود با گشودگی بیضوی پرداختند. برای این منظور آنها از تابع تنش ایری و روش حداقل مربعات مرزی استفاده کردند

[23]. وو و چن به منظور حلّ مسألهی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیت دلخواه از گشودگیهای دایروی، تابع تنشی را بر اساس روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و روش حداقل مربّعات مرزی پیشنهاد کردند [24]. زو و همکارانش با استفاده از بسط سری فابر و روش حدّاقل مربّعات مرزی، توزيع تنش اطراف گشودگی بيضوی در چندلايه كامپوزيتی محدود را بهدست آوردند [25]. بیشتر مطالعاتی که تاکنون بر روی صفحات محدود حاوی گشودگی انجام شده است؛ محدود به گشودگی دایروی و بیضی شکل می شود. در سال 2013 زوكسينگ پن و همكارانش با استفاده از روش متغيّر مختلط و حدّاقل مربّعات مرزى و با اصلاح تابع تنش ارائه شده توسط موشخيلشويلى، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت بار کششی تک محوری پرداختند. آنها از تابع نگاشتی که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز- کرستفل به دست آمده بود، استفاده کردند و یک گشودگی مربعی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی 3 به 2 و 5 به 1را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنا، تحت بار کششی تک محوری بررسی نمودند. آنها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مربعی در زوایای بسیار خاصى بررسى كردند [26].

در این مقاله سعی می شود تا با استفاده از روش متغیر مختلط و با بسط تحقیق انجام شده توسط پن و همکارانش، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی واقع در ورق محدود فلزی بررسی شود. علاوه بر هندسهی گشودگی دیگر تفاوت کار انجام شده در این تحقیق با مطالعهی پن در این است که: روش ارائه شده در این مقاله با معرفی تابع نگاشتی مناسب، توانایی تحلیل ورق های محدود با گشودگی های مختلف را دارد. همچنین این تابع امکان بررسی پارامترهای مختلف مانند زاویهی چرخش و انحنای گوشههای گشودگی را به راحتی فراهم میآورد. پارامترهای مورد بررسی در این مقاله شامل انحنای گوشههای گشودگی، نسبت ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحهای و زاویهی چرخش گشودگی است. با تحقیقی که مؤلفین این مقاله داشتهاند؛ تاکنون تحلیلی برای گشودگی مثلثی و پارامترهای مذکور در ورقهای محدود انجام نشده است.

2- تعريف مسأله

مسألهی مورد بررسی در این مقاله ورق همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی میباشد که نسبت طول ضلع مثلث به طول کوچکترین ضلع ورق، بزرگتر از 0/2 است. بنابراین با اطمینان میتوان ورق را محدود در نظر گرفت.

مسأله با فرض تنش صفحهای و در غیاب نیروهای حجمی مورد بررسی قرار میگیرد. همچنین رفتار ورق در ناحیهی الاستیک خطّی بررسی میشود. فرض میشود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است یعنی در مرز گشودگی0= ح_م میباشد.

در شکل 1 زاویهی چرخش گشودگی که نحوهی قرارگیری آن نسبت به محور افق میباشد؛ با β نمایش داده شده است. ورق تحت بار کششی تک محوری، دو محوری و برش خالص قرار میگیرد.

لازم به ذکر است که در این مقاله، در بارگذاری دو محوری 2= ۸ و در بارگذاری تک محوری**0=** ۸ در نظر گرفته شده است.

3- **روش حلّ تحلیلی** 3-1- تا<mark>بع نگاشت</mark> روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله برگرفته از روش متغیّر مختلط

1- Faber series



شکل 1 ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دو محوری

موشخیلشویلی [4] و نگاشت همنوا میباشد. به منظور تحلیل تنش گشودگیهای غیر دایروی، ابتدا میبایست مطابق شکل 2 صفحهی حاوی گشودگی مختلف در صفحهی موهومی z به صفحهی حاوی گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحهی نگاشت ζ تبدیل شود. این عمل با استفاده از معادلهی (1) صورت میپذیرد،که در آن، R اندازه گشودگی، n نوع گشودگی و m مقدار انحنای گوشهی گشودگی را مشخص میکند. در صورتی که در رابطهی(1) مقدار n برابر 2 انتخاب شود؛ تابع نگاشت حاصل، مربوط به نگاشت صفحهی حاوی گشودگی مثلثی خواهد بود.

با جایگذاری معادلات (2)، (3) و (4) در معادلهی (1) و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی تابع نگاشت، x و y نقاط را در صفحه Z، بر حسب $q \in \theta$ نقاط در صفحه ζ به صورت معادلات (5) و (6) خواهد بود.

همانطور که در شکل 3 مشاهده می شود با تغییر m می توان انحناهای مختلفی در گوشهی گشودگی مثلثی ایجاد نمود. لازم به ذکر است که m=0 معادل گشودگی دایروی است. همچنین در این مقاله، R=1 در نظر گرفته شده است.

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R(\zeta + \frac{m}{\zeta^n})$$
(1)

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
(2)

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{3}$$

$$e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$
 (4)

$$x = \operatorname{Re}[w(\zeta)] = R\left(\rho\cos(\theta) + \frac{m\cos(n\theta)}{\rho^n}\right)$$
(5)

$$y = \operatorname{Im}[w(\zeta)] = R\left(\rho\sin(\theta) + \frac{m\sin(n\theta)}{\rho^n}\right)$$
(6)



شکل 2 نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلثی به ورق حاوی گشودگی دایروی



3-2-حل تحليلي

در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحهای معادلات تعادل بصورت معادلات (7) بیان میشوند:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad . \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

همچنین معادلهی سازگاری (8) بر حسب مؤلفههای تنش برابر است با: (22 - 22)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) (\sigma_x + \sigma_y) = \mathbf{0}$$
(8)

با معرفی تابع تنش ،U(x, y)، رابطهی مؤلفههای تنش با تابع تنش به صورت رابطهی(9) خواهد بود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \mathbf{0}$$
(10)

موشخیلیشویلی رابطهی (11) را برای حل معادلهی (10) پیشنهاد کرد

$$U(x,y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \Theta(z)]$$
(11)

 $\psi(z) = \varphi(z)$ با مشخص شدن تابع تنش U(x, y) برحسب توابع $\varphi(z) = \varphi(z)$ و $\Theta'(z)$ مؤلفههای تنش در حالت دو بعدی و برای ناحیهی همبند ساده با استفاده از معادلات (12) و (13) محاسبه می شوند [4]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi'(z)] \tag{12}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z))$$
(13)

که در آن $\psi(z)$ و (z) توابع مختلط میباشند. با استفاده از نگاشت همنوا، مؤلفههای تنش بر حسب متغیر ζ به کمک معادلات (14) و (15) بهدست میآیند [4]:

$$\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta} = \sigma_{x} + \sigma_{y} = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{0} + 2i\tau_{o\theta} = (\sigma_{y} - \sigma_{x} + 2i\tau_{yy})e^{2i\alpha}$$
(14)

$$= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left(\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \right)$$
(15)

بنابراین حل مسألهی تنش صفحهای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک (ک) و ل (۲) که شرایط مرزی مسأله را ارضا میکنند؛ محدود می شود. با مشخص شدن (ک) و ل (۲) و با جایگذاری آنها در معادلات (14) و (15) مؤلفههای تنش محاسبه می گردد. ساوین [8] برای تحلیل تنش صفحات همسانگرد حاوی گشودگی توابع تنش (17) و (18) را معرفی کرد:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n = -\infty}^{+\infty} a_n z^n$$
(17)

$$\psi(z) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n = -\infty}^{+\infty} b_n z^n$$
(18)

که در آن X و Y نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی در جهت X و Y میباشند. در غیاب این نیروها، جمله لگاریتمی معادلات فوق حذف می گردد. χ برای حالت تنش صفحهای بهصورت $4v - \mathbf{E} = \chi$ و برای حالت کرنش صفحهای بهصورت $\frac{3-v}{1+v} = \chi$ میباشد. ne و n^d در معادلات فوق ثابتهای مجهول و vنسبت پؤاسون میباشد. معادلات (17) و (18) برای ورقهای نامحدود حاوی گشودگی دایروی و یا بیضوی مناسب میباشند. ساوین [8] به منظور حل مسألهی توزیع تنش اطراف گشودگیهای مختلف در ورق نامحدود تحت بارگذاری درون صفحهای، از تابع نگاشت همنوا استفاده کرد. با توجه به اینکه مقادیر تنش در ورق نامحدود باید دارای مقادیر متناهی باشد؛ توابع تنش بر حسب متغیر χ بهصورت معادلات (19) و (20) معرفی شد:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{\chi + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + a_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta)$$
(19)
$$\chi(\chi - iY)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\chi(\chi - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + b_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta)$$
(20)

که در آن (۵) 🕫 و 🖓 🖗 به صورت رابطهی (21) تعریف می شوند:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^{-n} \quad \cdot \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n}$$
(21)

و b'_n و b'_n ثوابت مجه-ول میباشند. X و Y مؤلف های تنش در مرز a'_n گشودگی هستند که به دلیل آزاد بودن مرز گشودگی از تنش صفر می باشند. از معادلات (19) و (20) میتوان در تحلیل تنش ورق های نامحدود حاوی گشودگیهای مختلف استفاده کرد. امّا در ورقهای محدود علاوه بر هندسهی گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد. بنابراین از معادلات (19) و (20) به شکلی کـه در بـالا ارائـه شـده اسـت؛ نمـیتـوان استفاده کرد. همانطور که در شکل 4 مشاهده می شود؛ تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه ۲٬ از جمع تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی در صفحهی ζ با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحهی ζ بهدست می آید [26]. لذا با استفاده از سری لورنت در یک ناحیه غیرسادہ، تابع تنش شامل جملاتی با توان های منفی ζ که بر روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه خارج آن تحلیلی میباشد، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل میدهند. همچنین سری لورنت شامل جملاتی با توانهای مثبت ۲ ، بر روی مرز خارجی ورق تحلیلی میباشند و تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل میدهند. بنابراین با جمع جملههایی با توان مثبت و منفی ζ سری لورنت، توابع تنش $(\zeta) \varphi \in \psi(\zeta)$ مطابق معادلات (22) و (23) خواهند بود [26]:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\substack{n=1\\ m \in \mathcal{I}}}^{\infty} A_n \,\zeta^{-n} + \sum_{\substack{n=0\\ m \in \mathcal{I}}}^{\infty} B_n \zeta^n \tag{22}$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \zeta^n$$
(23)

که در آن ضرایب ۵*۸ ، ۵*۹ و *D*n اعدادی مختلط هستند کـه بصـورت رابطهی (24) درنظر گرفته میشوند:

$$A_n = a_{n1} + ia_{n2} \quad \cdot \quad B_n = b_{n1} + ib_{n2}$$

$$C_n = c_{n1} + ic_{n2} \quad \cdot \quad D_n = d_{n1} + id_{n2} \quad (24)$$

$$a_{n2} = d_{n1} \cdot c_{n2} \cdot c_{n1} \cdot b_{n2} \cdot b_{n1} \cdot a_{n2} \cdot a_{n1}$$

می باشند. با توجه به روابط ذکر شده اکنون برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه ضرایب مجهول معادلات (22) و (23) است. برای این منظور از روش حداقل مرتعات مرزی [24] بصورتی که در ادامه تشریح



شکل 5 موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه *5* و مرز خارجی در صفحهی z

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{in}+N_{ot}} r^2(\rho_j, \theta_j)$$
(29)

N_{in} تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایرهی واحد، N_{ot} تعداد نقاط منتخب بر روی مرز خارجی ورق در محل اعمال بار، اندیس *j* نشاندهندهی تعداد نقاط منتخب و r² به صورت رابطهی (30) تعریف می شود:

$$r_2^2(\rho_j, \theta_j) = r_1^2(\rho_j, \theta_j) + r_2^2(\rho_j, \theta_j)$$
(30)

از شرایط $r_2(\rho_j, \theta_j) = r_1(\rho_j, \theta_j)$ اختلاف دو تنش، یکی تنش حاصل از شرایط $r_2(\rho_j, \theta_j)$ مرزی و دیگری تنش حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب بر روی مرزها هستند. پس از بهدست آوردن²۵، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف بهدست آمده در بالا، از معادلات (**11**) استفاده می شود:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n1}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n2}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n1}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n2}} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n1}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n2}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n1}} = \mathbf{0}, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n2}} = \mathbf{0}$$
(31)

در نتیجه از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطی تشکیل میشود که از حل آن ثوابت مجهول بهدست میآیند. با جایگذاری این ثوابت در معادلات (17) و (18) دو تابع تنش (۲) φ و(۲) ψ محاسبه میگردند و در نهایت با استفاده از معادلات (9) و (10) مؤلفههای تنش بهدست میآیند.

4- نتايج

در این مقاله سعی میشود تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، انحنای گوشههای گشودگی، چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت ضلع گوشههای گشودگی به ضلع ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی مورد بررسی قرار گیرد. در شکل 6 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی برای حالت $=\beta^{\circ}$ آورده شده است. تفاوت نحوه توزیع تنش بیبعد حول گشودگی برای مقاله آورده شده است. تفاوت نحوه توزیع تنش بیبعد اطراف گشودگی برای مآورده شده است. تفاوت نحوه توزیع تنش بیبعد حول گشودگی برای حالت $=\beta^{\circ}$ آورده شده است. تفاوت نحوه توزیع تنش بیبعد اطراف گشودگی برای مقاله آورده شده است. تفاوت نحوه توزیع تنش بیبعد اطراف گشودگی برای حالتهای مختلف بارگذاری در این شکلها مشاهده میگردد. در بارگذاری دو تک محوری و برشی در 240 یا 102 و آیجاد میگردد. برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث، در هر بخش با تغییر یکی از پارامترهای فوق و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش بیبعد حول گشودگی برای هر سه نوع بارگذاری دو بارگذاری مورد بحث، در هر بخش با تغییر یکی از پارامترهای فوق و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در محول گشودگی برای همچون و برشی در محول گشودگی برای هر سه نوع بار گذاری مورد بحث، در هر بار گذاری دو بار گذاری هر بوری و برشی در محول گشودگی در محول گردد. برای می می گردد. برای هر به بخش با تغییر بی از پارامترهای فوق و ثابت نگه برسی می گردد.



شکل 4 نمایی از روش حل [26]

مى شود؛ استفاده شده است.

3-3-روش حل

گام اول: تعیین نقاط منتخب و شرایط مرزی

همانطور که در شکل 5 مشاهده می شود نقاطی با فاصله یبرابر بر روی مرز داخلی (مرز گشودگی) در صفحه ی 5 و بر روی مرز خارجی (مرز ورق) در صفحه ی z انتخاب می شوند. با انتخاب این نقاط و با استفاده از معادله ی (1) می توان نقاط متناظر بر روی مرز داخلی گشودگی مثلثی در صفحه ی z و نقاط متناظر بر روی مرز خارجی ورق در صفحه ی 5 را به دست آورد. برای استفاده از روش حداقل مرتعات مرزی، به نقاط منتخب بر روی مرز داخلی و خارجی در صفحه 5 نیاز می باشد. نقاط منتخب بر روی مرز داخلی و واحد در صفحه ی 5 بصورت معادله ی (25) تعریف می شوند:

$$\rho = 1$$
, $\theta = \frac{2\pi}{N_{in}}(j-1)$ $(j = 1, ..., N_{in})$ (25)
در معادلهی (25)، N_{in} تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایر وی
واحد میباشد. با جایگذاری مؤلفههای X و Y نقاط منتخب در صفحهی Z در
سمت چپ معادلات (5) و (6)، با استفاده از حلّ عددی، مؤلفههای $\rho \in \theta$
نقاط متناظر در صفحهی ζ محاسبه می شوند. باید توجه داشت که در استفاده
از روش حداقل مربعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی

دایره واحد در صفحهی ζ و در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی بر روی مرز گشودگی، بصورت معادلهی (26) است: $\sigma_{\rho} = \tau_{\rho\theta} = \mathbf{0}$ ، $|\zeta| = \mathbf{1}$ (26)

این در حالیاست که برای شرایط مرزی خارجی ورق از شرایط مرزی ورق در صفحهی z و مختصات کارتزین استفاده می شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود به صورت معادلات (27) و(28) است [26]:

$$\sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma + 2\tau_{xy} \sin \gamma \cos \gamma = \sigma_n$$
(27)

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin \gamma \cos \gamma + \tau_{xy} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \tau_n$$
(28)

در معادلات فوق γ زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور x می باشد. همچنین $\tau_n \circ \sigma_n$ نیش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می باشد. همچنین σ_n به تر تیب تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی ورق می باشند. لازم بهذکر است که σ_0 تنش کششی وارد شده بر مرز خارجی ورق می باشد و در این مقاله 1MPa درنظر گرفته شده است. همچنین در بار گذاری برشی تنش τ_0 رابر τ_0 می باشد.

گام دوم: محاسبهی مجذور باقیماندهی مرزی وحل معادلات

بر اساس روش حداقل مربعات مرزی، مجذور باقیماندهی مرزی در فـرم گسسته بصورت معادلهی (29) بیان میشود.



شکل 6 نحوهی توزیع تنش بیبعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک محوری، (ب) دو محوری 2=۸، (ج) برشی

4-1- بررسی درستی حل

برای اطمینان از صحت روش حل حاضر، مقایسهای بین حل تحلیلی و نتایج حاصل از حل عددی المان محدود (نرم افزار آباکوس) صورت گرفته است. بدین منظور ابتدا کد متلبی بر اساس معادلهی (1) برای تشکیل هندسهی گشودگی نوشته شد، سپس مختصات بهدست آمده عیناً وارد نرم افزار اباکوس گردید تا هندسهی گشودگی کاملاً مطابق با مسألهی حاضر باشد. ورق حاوی گشودگی مثلثی در حالت $\beta = \cdot, m = 0/2$ ، $\beta = -1$ و $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ ، تحت بارگذاری کششی تک محوری مدل شده است. برای مشبندی از المان S8R که منطبق با هندسه و فیزیک مسأله است استفاده شده است. بهمنظور اطمینان از صحت حل نرم افزار و تعیین تعداد مش بهینه ناحیه ای کوچکی اطراف گشودگی در نظر گرفته شد. در این ناحیه تعداد المان ها از 960 عدد تا 17542 عدد افزایش داده شد و مشاهده گردید از این عدد به بعد با افزایش تعداد المان نتايج ثابت باقى مىماند. بنابراين اين تعداد المان به عنوان تعداد المان مش بهینه در نظر گرفته شد و نتایج در این حالت بهدست آمده است. شکل 7 مقایسهی نتایج توزیع تنش بیبعد حول گشودگی مثلثی حاصل از روش تحلیلی و عددی را نشان میدهد. در این تحقیق منظور از تنش بیبعد در بارگذاری کششی تک محوری، مقدار تنش محیطی ایجاد شده در اطراف گشودگی، به تنش اعمالی σ_0 و در بارگذاری دو محوری و برشی مقدار تنش محیطی ایجاد شده در اطراف گشودگی، به تنش معادل فون میسز است. همچنین به علّت تقارن موجود در توزیع تنش حول گشودگی، در همهی بارگذاریهای مورد بحث، نتایج تا heta اوائه شده است. لازم به ذکر است در مورد مادهی همسانگرد، جنس ماده بر روی توزیع تنش تأثیری ندارد. با توجه به شکل 6، تطابق خوبی بین دو روش حل وجود دارد که نشان دهنده صحت حلّ تحليلي حاضرميباشد.

در شکل 8 مقایسهی حل تحلیلی حاضر با حل هووا و دائوست [11] برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری تک محوری در جهت محور x، m=0/33، x زاویهی چرخش صفر درجه و $m=0/01 = \frac{1}{a}$. که معادل صفحهی نامحدود است؛ آورده شده است که نتایج کاملاً همدیگر را تأیید میکنند.

2-4- تأثير انحناى گشودگى(m)

همانطور که در معادلهی (1) به آن اشاره شد؛ پارامتر m مستقیماً بر هندسه گشودگی تأثیر میگذارد به گونهای که با تغییر در مقدار m میزان تیزی و یا نرمی گوشههای گشودگی قابل کنترل خواهد بود. انحنای گوشهی گشودگی

یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار در توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی میباشد که در این قسمت به نتایج مربوط به آن پرداخته شده است.







شکل 8 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی تحت بار کششی تک محوری در جهت محور *X*

در شکلهای 9 تا 11 توزیع تنش اطراف گشودگی در سه حالت بارگذاری تک محوری، دو محوری و برشی، برای انحناهای مختلف آورده شده است. همانطور که مشاهده می گردد با افزایش انحنای گوشههای گشودگی مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می یابد در تیز ترین انحنا، 0/3مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می یابد در تیز ترین انحنا، 0/3محوری، برای تمامی انحناها، ماکزیمم تنش بی بعد در 0=0 اتفاق می افتد، [محوری، برای تمامی انحناها، ماکزیمم تنش بی بعد در 0=0 اتفاق می افتد، [نوایه θ در شکل 6 نشان داده شده است.] در بارگذاری دو محوری محل ماکزیمم تنش بی بعد (مقدار زاویه ی θ) برای انحناهای گوناگون به جز m 0 زاویه افزایش می یابد. برای حالت دایروی 0 = m ماکزیمم تنش در زاویه ی زاویه افزایش می می در ای 131 درجه متغیر است و با افزایش انحنا، این زاویه افزایش می یابد. برای حالت دایروی 0 = m ماکزیمم تنش در زاویه ی بارگذاری برشی بین 120 تا 135 درجه متغیر می باشد.

شکل 12 ماکزیمم تنش بی بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحناهای مختلف مقایسه میکند. کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی مربوط به m = 0 میباشد که در این حالت گشودگی مثلثی به گشودگی دایروی تبدیل میشود. نتایج نشان میدهدکه علاوه بر اینکه افزایش میزان انحنا مقدار تنش را در سه حالت بارگذاری افزایش میدهد، این تأثیر در بارگذاری تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر بوده است و با شیب بیشتری این افزایش در مقدار تنش اتفاق میافتد.

لازم به توضیح است که در تابع نگاشت استفاده شده در این مقاله محدودهی مجاز برای پارامتر *m* که تعیین کنندهی انحنای گوشههای گشودگی میباشد، 0 تا 5/0 میباشد. از آنجایی که با افزایش *m*، گوشههای گشودگی تیزتر میشود و در کاربردهای عملی مهندسی، گشودگیهای بسیار نوک تیز معقول نمیباشد؛ تأثیر این پارامتر تا مقدار 3/0 بررسی شده است. تمام نتایج این قسمت در حالت - β، 4/4 <u>ی</u> و1= <u>م</u> میباشند.

4-3-تأثیر زاویهی چرخش گشودگی(β)

در این قسمت به بررسی تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی پرداخته می شود. شکلهای 13 تا 15، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای زوایای چرخش 0، 15، 30 و 45 درجه را در سه حالت بارگذاری نشان می دهند. به علت رفتار تناوبی تابع با دوره تناوب 60 درجه زوایای فوق بررسی شده اند. همچنین با چرخش گشودگی تقارن توزیع تنش



شکل 9 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار تک محوری



شکل 10 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار دو محوری(2=۸)



شکل 12 ماکزیمم تنش بیبعد بر حسب انحناهای مختلف در سه بارگذاری

حول گشودگی از بین میرود بنابراین نمودارهای چرخش برای 360 درجه حول گشودگی گرفته شدهاند. همانطور که مشاهده می گردد چرخش تأثیر

بسزایی در نحوه توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی مثلثی در هر سه نوع بارگذاری دارد. در بارگذاری تک محوری برای زوایای چرخش صفر و 15 درجه، نقطهی بحرانی که بیشترین تنش حول گشودگی در آن اتفاق میافتد؛



شکل 13 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک محوری



شکل 14 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دو محوری (٤=٤)



شکل 15 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی

در 0=*θ* واقع است. برای زاویهی چرخش 30 درجه، بیشترین تنش در اطراف گشودگی در حوالی 0=*θ* و 120=*θ* ایجاد می شود. و در نهایت در زاویه چرخش 45 درجه، نقطهی بحرانی در 120=*θ* قرار دارد. در بارگذاری دو محوری و برشی نیز بسته به مقدار زاویه چرخش، محلّی که بیشترین تنش در اطراف گشودگی رخ می دهد؛ متفاوت خواهد بود.

در شکل 16 ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی بر حسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری مقایسه شده است. بنابراین این شکل نشاندهنده مقدار تنش ماکزیمم ایجاد شده در اطراف گشودگی به ازای هر زاویهی چرخش است. از بین این تنشهای ماکزیمم کمترین و بیشترین مقدار به ترتیب تنش بیبعد مطلوب و تنش بیبعد نامطلوب و یا به اختصار تنش مطلوب و تنش نامطلوب نامیده می شود. در طراحی ها باید از تنش نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. باتوجه به این شکل، در بارگذاری تک محوری، تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر و 60 درجه رخ میدهد. در بارگذاری دو محوری تنش نامطلوب در زاویهی چرخش 30 درجه اتفاق میافتد و در نهایت در بارگذاری برشی بیشترین تنش نامطلوب در زاویهی چرخش 15 درجه ایجاد می شود. بنابراین بسته به نوع بارگذاری زاویهی چرخشی که در آن تنش نامطلوب ایجاد می گردد؛ متفاوت خواهد بود. برای نمونه با وجود آنکه بیشترین تنش بیبعد حول گشودگی در بارگذاری دو محوری در زاویهی چرخش30 درجه اتفاق میافتد، همین زاویهی چرخش در بارگذاری تک محوری کمترین مقدار تنش را داراست. بنابراین توجه به تفاوت روند تأثیر زاویهی چرخش در بارگذاریهای مختلف امری بسیار مهم میباشد. نتایج تأثیر زاویهی چرخش گشودگی در بار گذاری های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول 1 و2 آورده شده است.

تمام نتایج این قسمت در حالت $1 = \frac{b}{a}$ ، $\frac{b}{a} = 0/2$ و برای m = 0/2 و $\frac{L}{a}$ و m = 0/2 و برای بار گذاری دو محوری $\lambda = 2$ میباشند.



شکل 16 ماکزیمم تنش بیبعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری

جدول 1 مقادیر و زوایای تنش مطلوب در سه حالت بارگذاری			
نوع بارگذاری	زاويه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش بیبعد مطلوب	
تک محوری	30	6/3590	
دو محوری	صفر يا60	6/5205	
برشى	45	4/4827	

حلٌ تحلیلی محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درونصفحهای

شرایط 4/• = $\frac{L}{a}$ (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از (سبت طول میابد. برای) برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش مییابد. برای $\frac{b}{a}$ بزرگتر از یک، b ضلع بزرگتر ورق میشود و در صورتی که،



شکل 17 توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در $rac{L}{a}$ های مختلف تحت بار تک محوری



شکل 18 توزیع تنش بیبعد حول گشودگی در $rac{L}{a}$ های مختلف تحت بار دو محوری



جدول 2 مقادیر و زوایای تنش نامطلوب در سه حالت بارگذاری				
مقدار تنش بىبعد	زاويه چرخش تنش	نوع بارگذاری		
نامطلوب	نامطلوب (درجه)	لوح بار عماری		
7/7752	صفر يا60	تک محوری		
7/5467	30	دو محوری		
5/5450	15	برشى		

 $(\frac{L}{2})$ -4-تأثیر نسبت اندازهی گشودگی به بزرگترین طول ورق $(\frac{L}{2})$ در این قسمت به بررسی تأثیر نسبت $\frac{L}{d}$ (اندازه گشودگی به ورق)پرداخته شده است. شکلهای 17 تا 19 توزیع تنش حول گشودگی در سه حالت بار گذاری مورد بحث در مقاله را برای نسبتهای مختلف $\frac{L}{a}$ نشان میدهند. همانطور که مشاهده می شود با افزایش نسبت $\frac{L}{a}$ تنش در هر سه حالت بار گذاری افزایش مییابد. در محدودهی $\frac{L}{a}$ بزرگتر از 0/2، تنش به میزان زیادی افزایش مییابد و هرچقدر این نسبت بزرگتر شود، مقدار افزایش تنش بیشتر می گردد. این در حالی است که در محدودهی $rac{L}{a}$ کوچکتر از 0/2 اختلاف مقدار تنش ناچیز میباشد و این نشان دهندهی تأثیر بسیار زیاد سایز گشودگی به ورق در ورق-های محدود میباشد. نتایج مربوط به مقایسهی ماکزیمم تنش بیبعد حول گشودگی در نسبتهای مختلف $\frac{L}{a}$ با ماکزیمم تنش بیبعد حول گشودگی درحالت نامحدود در جدول 3 آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده و مقایسهی آن با حلّ ورق نامحدود(01**)= (** مشاهده میشود که در نسبتهای $\frac{L}{2}$ کوچکتر از 0/2، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش کمتر از 10% میباشد بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورقهای محدود با نسبت $rac{L}{a}$ کوچکتر 0/2را می توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت های بزرگتر از0/2اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا 122% هم میرسد و این نشاندهندهی این امر میباشد که در این نسبتها نمی توان از حل نامحدود ورق استفاده كرد. شكل 20 ماكزيمم تنش بي بعد حول گشودگی بر حسب نسبتهای مختلف ^ل را در سه حالت بارگذاری نشان می-دهد. همانطور که مشاهده می شود با افزایش نسبت $\frac{L}{a}$ ، در محدودهی $\frac{L}{a}$ کمتر از 0/2 مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده $\frac{L}{a}$ بزرگتر از 0/2، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش مییابد. این افزایش مقدار تنش برای بارگذاری تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دو محوری و برشی میباشد.

تمام نتایج این قسمت در حالت $\beta = \cdot \cdot \frac{b}{a} = 1$ می باشند.

$(\frac{b}{a})$ -5-أثير نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$

به منظور مطالعهی تأثیر نسبت ابعاد ورق، توزیع تنش بی بعد اطراف $\frac{1}{2}$ به منظور مطالعهی تأثیر نسبت ابعاد ورق، توزیع تنش بی بعد اطراف $\frac{2}{n}$ می مرای نسبتهای مختلف $\frac{a}{a}$ و سه حالت بار گذاری در شکلهای 21 تا 23 آورده شده است. از آن جایی که اندازه گشودگی به ورق مقداری ثابت و $\frac{1}{a}$ در نظر گرفته شده، کمترین نسبت $\frac{a}{a}$ می تواند برابر با عدد 4/0 باشد که در این صورت دو ضلع ورق مماس بر گشودگی می شوند که این امر در کاربردهای عملی معقول به نظر نمی رسد بنابراین در این قسمت نسبت $\frac{b}{a}$ های برز گتر از $\frac{1}{6}$ (10 برسی می گردند.

همانطور که مشاهده می گردد با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار تنش بیبعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش مییابد و اختلاف توزیع تنش، با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می کند. علّت این امر این است که، ورق در صورتی محدود میباشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از 0/2 باشد. بنابراین برای نسبت $\frac{b}{a}$ های کوچکتر از 1

)			a = 0 = .	<u>ل بی رل ر ی</u>		
ی برشی	بارگذاری	شی دو محوری	بارگذاری کشن	ن تک محوری	بارگذاری کششی	
درصد اختلاف با ورق نامحدود 10/0= [ماكزيمم تنش بيبعد	درصد اختلاف با ورق نامحدود 10/0= [ماکزیمم تنش بیبعد	درصد اختلاف با ورق نامحدود 01/01=	ماکزیمم تنش بیبعد	$\frac{L}{a}$
0 %	3/6507	0 %	5/2027	0 %	5/6678	0/01
2/38 %	3/7376	1/2 %	5/2657	1/94 %	5/7779	0/1
9/84 %	4/0102	5/1 %	5/4726	8/08 %	6/1258	0/2
23/18 %	4/4971	12/71 %	5/8642	19/23 %	6/7578	0/3
43/98 %	5/2563	29/70 %	6/5205	37/18 %	7/7752	0/4
84/10 %	6/7212	52/42 %	7/9300	73/79 %	9/8502	0/5
122/38 %	8/1187	82/04 %	9/4713	111/39 %	11/9816	0/6

جدول 3 مقایسهی ماکزیمم تنش بیبعد حول گشودگی در نسبتهای مختلف ¹/_a با ماکزیمم تنش بیبعد حول گشودگی درحالت نامحدود

شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند تغییر چندانی در مقدار تنش، همانند ورق های نامحدود به وجود نمی آید. به همین خاطر مشاهده می شود که در نسبت $\frac{b}{a}$ برابر با 1/5و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی شود.

شکل 24 ماکزیمم تنش بیبعد را بر حسب نسبت ^مدر سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان میدهد. همانطور که اشاره شد؛ این شکل نشان



شکل 21 توزیع تنش حول گشودگی در ^م ماهای مختلف تحت بارکششی تک محوری

میدهد که با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار ماکزیمم تنش بیبعد در سه حالت بارگذاری کاهش مییابد و در نسبتهای بزرگتر از $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ مقدار تنش به حالت پایدار رسیده و با افزایش این نسبت تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بیبعد ایجاد نمی شود. علّت این امر همان طور که بیان شد افزایش طول d و کاهش نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق و در نتیجه تبدیل ورق به شرایط برابر با ورق نامحدود می اشد. همچنین تأثیر



شکل 22 توزیع تنش حول گشودگی در م های مختلف تحت بارکششی دو محوری



نامحدود نمیتوان برای حل ورقهایی با نسبت $\frac{L}{a}$ بزرگتر از 20/ (ورق محدود) استفاده نمود. همچنین با تغییر نسبت ابعاد ورق، ابتدا کاهش مقدار تنش و سپس ثابت ماندن این مقدار برای نسبتهای بزرگتر از 1/5 $=\frac{b}{a}$ در سه حالت بارگذاری مشاهده شد. نتایج نشان داد که با انتخاب صحیح پارامتر های یاد شده میتوان از مقدار تنش در اطراف گشودگی کاست. این روش قابلیت حل سایر گشودگیهای مختلف را نیز داراست. که با تغییر n در تابع نقابت مایت که با تغییر می در اطراف گشودگی کاست. این روش قابلیت حل سایر گشودگی های مختلف را نیز داراست. که با تغییر n در تابع قابلیت حل سایر گشودگی های مختلف را نیز داراست. که با تغییر n در تابع قابلیت حل سایر گشودگی دست یا در تابع نگاشت تعریف شده میتوان به این توانایی دست یافت.

6- مراجع

- G. Kirsch, Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre, Veit Ver Deut Ing, Vol. 42, pp. 797-807, 1898.
- [2] C. E. Inglis, Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans Inst Nav Archit*, Vol. 55, pp. 219-30, 1913.
- [3] H. M. Westergaard, Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, pp. 49–53, 1939.
- [4] N. I. Muskhelishvili, Some basic problems of mathematical theory of elasticity, Second Edittion, Netherlands: Noordhooff, 1962.
- [5] A. C. Stevenson, Complex potentials in two-dimensional elasticity, *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 184, pp. 532-54, 1945.
- [6] A. E. Green, Stress systems in isotropic and aelotropic plates V, In: Proceedings of the Royal Society of London, 1945.
- [7] S. G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Second Edittion, NewYork: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [8] G. N. Savin, Stress concentration around holes, NewYork: Pergamon Press, 1961.
- [9] X. L. Gao, A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 67, pp. 95- 104, 1996.
- [10] P. S. Theocaris, L. Petrou, Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes, *International Journal of Fracture*, Vol. 31, pp. 271-289, 1986.
- [11] J. Daoust, S. V. Hoa, An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes, *Composite Structure*, vol. 19, No. 2, pp. 107– 130, 1991.
- [12] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates, *Composite Structure*, Vol. 45, 171-83, 1999.
- [13] K. R. Y. Simha, S. S. Mohapatra, Stress concentration around irregular holes using complex variable method. *Sadhna (India)*, Vol. 23, pp. 394-412, 1998.
- [14] N. M. Abuelfoutouh, Preliminary design of unstiffend composite shells, Symposium Of 7th technical Conference of ASC, pp. 693-786, 1993.
- [15] M. D. Motok, Stress concentration on the contour of a plate opening of an arbitrary cornerradius of curvature, *Marin Structures*, Vol. 10, pp. 1-12, 1997.
- [16] G. H. Lei, C. W. W. Ng, D. B. Rigby, Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 127, pp. 880-890, 2001.
- [17] M. Batista, On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 53, pp. 254-261, 2011.
- [18] D. S. Sharma, Stress distribution around polygonal holes, International Journal of Mechanical Science, Vol. 65, pp. 115-124, 2012.
- [19] D. S. Sharma, Nirav P. Patel, Khushbu C. Panchal, Stress distribution around triangular holes in orthrotropic plate, *Nirma Uuniversity Journal* of engineering and technology, Vol. 1, pp. 59-63, 2010.
- [20] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 52, pp. 96-102, 2010.
- [21] O. L. Bowie, Analysis of edge notches in semi-infinite region, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 45, pp. 356-66, 1966.
- [22] A. H. England, On stress singularities in linear elasticity. International Journal of Engineering Science, Vol. 9, pp. 571-85, 1971.
- [23] C. C. Lin, C. C. Ko, Stress and strength analysis of finite composite laminates with elliptical holes, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, No. 4, pp. 373-385, 1988.
- [24] C. W. Woo, L. W. Chan, Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 43, No. 5, pp. 757-68, 1992.
- [25] X. Xu, L. Sun, X. Fan, Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole, *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 1, pp. 29-34, 1995.
- [26] Z. Pan, Y. Cheng, J. Liu, Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjcted to uniaxial tension using modified stress functions, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 75, pp. 265-277, 2013.



نسبت اضلاع ورق برای دو بارگذاری برشی و تک محوری بیشتر از بارگذاری دو محوری میباشد و این کاهش مقدار تنش در این دو بارگذاری با شیب بیشتری اتفاق میافتد.

تمام نتایج این قسمت در حالت $\mu = \frac{L}{a} \cdot \frac{L}{a} = \beta = 0$ و m = 0/2 می باشند.

5- نتيجەگىرى

در این تحقیق با به کارگیری روش متغیر مختلط، حل تحلیلی ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی ممکن گردید. تأثیر انحنای گوشهی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نسبت اندازه گشودگی به بزرگترین طول ورق و نوع بارگذاری بعنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف این گشودگی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که در گشودگی مثلثی با افزایش انحنای گوشههای گشودگی، مقدار تنش افزایش می یابد و این افزایش در بارگذاری کششی تک محوری با شیب بیشتری اتفاق میافتد. محلی که بیشترین تنش بیبعد در اطراف گشودگی اتفاق میافتد در بارگذاریهای مختلف، متفاوت است. در بارگذاری کششی تک محوری برای تمامی انحناها، این تنش در $heta^\circ = heta$ ، برای بارگذاری دو محوری این تنش در زاویه بین 111 تا 118 و در بارگذای برشی برای تمامی انحناها این تنش در زاویه بین 120 تا 135 درجه رخ میدهد. تأثیر زاویهی چرخش گشودگی مثلثی در بارگذاری های مختلف، متفاوت است. برای $\frac{b}{a} = 1, \frac{L}{a} = 0/4$ و m=0/2 مشاهده گردید که در بارگذاری کششی تک محوری کمترین مقدار تنش در زاویهی چرخش 30 درجه و بیشترین مقدار تنش در زاویهی چرخش صفر و 60 درجه اتفاق میافتد. در بارگذاری کششی دو محوری کمترین مقدار تنش، در زاویهی چرخش صفر درجه و بیشترین مقدار تنش، در زاویهی چرخش 30 درجه و برای بارگذاری برشی کمترین مقدار تنش، در زاویهی چرخش 45 درجه و بیشترین مقدار تنش، در زاویهی چرخش 15 درجه رخ می دهد. با افزایش اندازه گشودگی در هر سه حالت بار گذاری، مقدار تنش افزایش یافت که مقدار این افزایش در بارگذاری کششی تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر صورت گرفت. همچنین تأثیر نسبت ابعاد گشودگی به ابعاد ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. با مقایسهی مقدار ماکزیمم تنش بیبعد در نسبتهای مختلف با مقدار ماکزیمم تنش بیبعد در ورق نامحدود، نشان داده شد که از حل ورق

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01