



## سینماتیک مستقیم دو ربات موازی 4-RRUR با دو ساختار هندسی متفاوت و یک ربات 4-RUU

پیام ورشوی جاغرق<sup>۱</sup>, داود نادری<sup>۲\*</sup>, مهدی طالع ماسوله<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* همدان، صندوق پستی ۴۱۶۱-۶۵۱۷۵، d\_naderi@basu.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله، سینماتیک مستقیم حالت خاصی از مکانیزم‌های موازی "4-R"R'R'R'R'، "4-R"R'R'R'R'R" و "4-R"R'R'R'R'R'R" درجه آزادی ۴ که به ترتیب منجر به دو ربات موازی فضایی ۴ درجه آزادی با دو ساختار هندسی متفاوت به نام 4-RRUR و یک ربات موازی فضایی ۴ درجه آزادی به نام 4-RUU گردیده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفته است. این ربات‌ها حاصل سنتز انجامشده بر روی مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی می‌باشند. هر یک از این ربات‌ها از چهار زنجیره سینماتیکی یکسان و هر زنجیره از پنج مفصل لولایی تشکیل شده است. راستای مفاصل لولایی در این سه ربات با یکدیگر متفاوت بوده و باعث ایجاد سه ساختار هندسی متفاوت گردیده است. تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم این ربات‌های موازی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی انجام گرفته و در نهایت نشان داده شده است که یک عبارت جبری تک‌متغیره از درجه ۳۴۴، ۲۳۰ و ۸ به ترتیب مبین سینماتیک مستقیم هر یک از ربات‌ها می‌باشد. همچنین، این نتایج با حل سینماتیک معکوس و شبیه‌سازی مقایسه شده و صحت آن به اثبات رسیده است.

**کلیدواژگان:** ربات موازی فضایی، الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی، سینماتیک مستقیم، فضای اقلیدسی سه‌بعدی

## Forward kinematic problem of two 4-RRUR with different geometric structures and one 4-RUU parallel robots

P. Varshovi Jaghargh<sup>1</sup>, D. Naderi<sup>2\*</sup>, M. Tale Masouleh<sup>3</sup>

1- PhD Student, Mech. Eng., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

3- Assis. Prof., Mech. Eng., Tehran Univ., Tehran, Iran

\* P. O. B. 65175-4161 Hamedan, d\_naderi@basu.ac.ir

**Abstract-** In this paper, the forward kinematic of the special cases of 4-R"R'R'R'R" , 4-R"R'R'R'R' and 4-R"R'R'R'R" parallel mechanisms that respectively lead to two 4-RRUR with different geometric structures and one 4-RUU spatial 4-DOF parallel robots has been studied. They are originated from the type synthesis of 4-DOF parallel mechanisms with motion patterns of 3T1R. Each of them is composed of four kinematic chains and each chain consists of five revolute joints. The directions of revolute joints have been different with each others that create three different geometrical structures. The forward kinematic problem is done in three dimensional Euclidean space and finally, a univariate mathematical expression of degree 344, 230 and 8 is indicated the forward kinematic problem of each parallel robot. Also, the results are compared with inverse kinematic problem and simulations and their validity have been confirmed.

**Keywords:** Parallel Robot, 3T1R Motion Pattern, Forward Kinematic Problem, Three-Dimensional Euclidean Space

## ۱ - مقدمه

سینماتیکی از قبیل تئوری پیچش<sup>۴</sup> [۸]، تئوری گروهی تغییر مکان<sup>۵</sup> [۹] و روش زنجیره مجازی<sup>۶</sup> [۱۰] ارائه شده است که می‌تواند انواع ربات‌های موازی را با الگوهای حرکتی خاص ایجاد کند. الگوی حرکتی<sup>۷</sup>، مجموعه‌ای از موقعیت‌ها و جهت‌گیری‌های پیوسته‌ای است که انواع حرکت‌های دلخواه عملگر نهایی را تشریح می‌کند. اکثر مطالعات انجام‌شده تا به امروز بر روی سنتز این مکانیزم‌ها انجام شده و توجه کمتری به تحلیل سینماتیکی آن‌ها شده است. کنگ و همکارش [۱۱]، بر اساس تئوری پیچش و روش زنجیره مجازی، سنتز مکانیزم‌های موازی با الگوهای حرکتی خاص را انجام دادند. آن‌ها مکانیزم‌های چهار درجه آزادی با زنجیره‌های سینماتیکی یکسان را، با توجه به الگوی حرکتی سکوی متحرک، به سه دسته سه درجه انتقالی و یک درجه دورانی  $^3T1R$ <sup>۸</sup>، دو درجه انتقالی و دو درجه دورانی  $^2T2R$ <sup>۹</sup> و همچنین سه درجه دورانی و یک درجه انتقالی  $^3R1T$ <sup>۱۰</sup> تقسیم کردند. در سنتز انجام‌شده، تنها تعداد، نوع و روابط هندسی بین اتصالات در هر زنجیره مشخص شده است. حرکت  $3T1R$  را اصطلاحاً حرکت شونفليز<sup>۱۱</sup> یا حرکت اسکارا<sup>۱۲</sup> [۱۲] می‌نامند. این حرکت شامل سه درجه انتقالی به علاوه ۱ درجه دورانی حول محوری با راستای ثابت می‌باشد.

یکی از راههای کنترل ربات موازی، کنترل ربات بر اساس حل مسئله سینماتیک مستقیم است. مسئله سینماتیک مستقیم<sup>۱۳</sup> یک ربات موازی شامل پیداکردن تمامی حالت‌های ممکن عملگر نهایی، به ازای ورودی‌های معلوم، برای مفاصل فعال می‌باشد. علاوه بر این، عبارت سینماتیک مستقیم<sup>۱۴</sup> نیز عبارتی است که به صورت ریاضی وضعیت یک زنجیره سینماتیکی از ربات موازی را متناسب با موقعیت مفصل فعال آن مشخص می‌کند [۱۳]. تحلیل سینماتیک مستقیم این دسته از ربات‌ها، نیازمند چهارچوب ریاضی مناسبی می‌باشد که بتواند

ربات موازی مکانیزم حلقه بسته‌ای است که در آن سکوی متحرک به وسیله حداقل دو زنجیره سینماتیکی سری به سکوی ثابت متصل شده است. این مکانیزم‌ها دارای برتری‌هایی از قبیل صلبیت، دقت و نسبت تحمل نیرو به وزن بالا در مقایسه با ربات‌های سری هستند [۱]. ربات‌های موازی در چند دهه اخیر، به دلیل کاربرد بسیار زیاد، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. شبیه‌ساز پرواز [۳، ۲، ۱]، ابزار و ماشین‌آلات [۳]، میکروروبات‌ها و نانوربات‌ها [۴] از جمله کاربردهای آن‌ها محسوب می‌شوند. همچنین فضای کاری کوچک‌تر نسبت به ربات‌های سری، کنترل پیچیده مجری نهایی و تعدد نقاط تکین در داخل فضای کاری از معایب این نوع ربات‌ها به حساب می‌آیند [۱].

تا به امروز، بیشتر کارهای تئوری و عملی انجام‌شده بر روی ربات‌های موازی ۳ درجه آزادی صفحه‌ای و یا ۶ درجه آزادی انجام گرفته است. اما، در سال‌های اخیر، ربات‌های موازی با درجه آزادی کمتر از ۶ (ربات‌های موازی با درجه آزادی محدود<sup>۱</sup>) مورد توجه قرار گرفته است [۵]. این نوع ربات‌ها در مقایسه با ربات‌های موازی ۶ درجه آزادی دارای برتری‌هایی از قبیل ساختار مکانیکی و الگوریتم کنترل ساده‌تر، هزینه ساخت پایین‌تر و سرعت حرکت بالاتر می‌باشند [۶]. بنابراین، در آن دسته از کاربردهای صنعتی که نیاز به ربات‌هایی با ۶ درجه آزادی نمی‌باشد، از ربات‌های ۴ و ۵ درجه آزادی استفاده می‌شود. این نوع ربات‌ها می‌توانند به ترتیب در ماشین‌های ابزار سیانسی<sup>۲</sup> و مونتاژ قطعات مورد استفاده قرار گیرند. اولین ربات موازی ۴ درجه آزادی، با زنجیره‌های سینماتیکی یکسان، توسط زلاتانوف [۵] ارائه شد و پس از آن ربات‌های موازی ۴ درجه آزادی دیگری ارائه گردید. یکی از معروف‌ترین ربات‌های موازی ۴ درجه آزادی، ربات دلتا<sup>۳</sup> می‌باشد که طرح اولیه آن توسعه کلاؤل [۷] ارائه گردید. مهم‌ترین مزیت این ربات سرعت حرکت آن می‌باشد که می‌تواند در کاربردهایی با نیاز به حرکات سریع مورد استفاده قرار گیرد.

سنتز اکثر ربات‌های موازی بر اساس سعی و خطأ و مهارت‌های مهندسی انجام شده است، اما اخیراً روش‌های

- 4. Screw theory
- 5. Displacement group theory
- 6. Virtual chain approach
- 7. Motion pattern
- 8. 3 Translation and 1 Rotation ( $3T1R$ )
- 9. 2 Translation and 2 Rotation ( $2T2R$ )
- 10. 3 Rotation and 1 Translation ( $3R1T$ )
- 11. Schönflies motion
- 12. SCARA motion
- 13. Forward Kinematic Problem (FKP)
- 14. Forward Kinematic Expression (FKE)

- 1. Limited-DOF
- 2. Computer Numerical Control (CNC)
- 3. DELTA parallel robot

بررسی و دو طرح ساده‌سازی شده برای این مکانیزم ارائه کردند که تحلیل سینماتیک مستقیم آن‌ها ساده‌تر از مکانیزم موازی اصلی انجام می‌گرفت. همچنین، او و همکارانش [۱۳] دو روش برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی بر پایه استفاده از پارامترهای استودی ارائه کردند. در روش اول، بر اساس آزمایش و خطأ، متغیرهای غیرفعال حذف می‌شدند و در روش دوم، بر پایه تولید چندجمله‌ای‌های خطی (استفاده از الگوریتم LIA<sup>۱</sup>) و حذف متغیرهای مربوط به مفاصل غیرفعال، عبارت سینماتیک مستقیم حاصل می‌شد. در این روش، تنها با ارائه پارامترهای دناویت-هارتبرگ یک زنجیره، می‌توان عبارت سینماتیکی را به دست آورد. همچنین، سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ۵ درجه آزادی با الگوی حرکتی 3R2T نیز توسط الگوریتم ارائه شده در روش دوم مورد بررسی قرار گرفت.

با توجه به تحقیقات انجام‌شده در زمینه سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی و به دلیل تاریخچه کوتاه ربات‌های موازی فضایی ۴ درجه آزادی با ساختار زنجیره‌های یکسان، مشخصات سینماتیکی این دسته از ربات‌ها بسیار محدود بررسی شده است. همچنین، سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی فضایی (به دلیل سیستم معادلات غیرخطی حاصله)، پیچیده است و نمی‌تواند به راحتی تحلیل گردد. در این تحقیق، ابتدا ساختار هندسی سه ربات موازی ۴ درجه آزادی 3T1R<sub>1</sub>-4-RRUR<sub>2</sub>-4-RRU<sub>3</sub>-4 با الگوی حرکتی 3T1R<sub>1</sub>-4-RRUR<sub>2</sub>-4-RRU<sub>3</sub>-4-RRUR<sub>4</sub> تشریح شده است. سپس مسئله سینماتیک مستقیم حالت عمومی این ربات‌ها که تا به حال مورد بررسی قرار نگرفته است، ارائه شده است و یک عبارت سینماتیکی تکمتغیره، که بیانگر مسئله سینماتیک مستقیم می‌باشد، برای هر یک از ربات‌ها بدست آمده و با نتایج حل سینماتیک معکوس و شبیه‌سازی مقایسه شده است. شایان ذکر است که در این مطالعه، تداخل مکانیکی درنظر گرفته نشده است.

## ۲- ساختار هندسی ربات‌های موازی چهار درجه آزادی (3T1R) مورد نظر

در مرجع [۱۱]، ۱۱ مکانیزم ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی معرفی شده است که ۶ مکانیزم

### 4. Linear Implicitization Algorithm

انتقال و دوران را به طور کامل تشریح کند. این کار می‌تواند با استفاده از جبر هندسی انجام گیرد. جبر هندسی مطالعه اهداف تعریف‌شده به وسیله چندجمله‌ای‌ها با استفاده از ابزارهای جبری می‌باشد. منشاء جبر هندسی به دکارت<sup>۲</sup> برمی‌گردد که دو ایده کاملاً درخشنان در این زمینه ارائه کرده است [۱۴، ۱۳]:

(۱) استفاده از مختصات برای تشریح نقاط در فضای اقلیدسی

(۲) توصیف منحنی‌ها و سطوح توسط معادلات جبری با پیشرفت سیستم‌های کامپیوتری، امکان استفاده از

تئوری‌ها و الگوریتم‌های جبری افزایش یافته است.

در دو دهه اخیر، الگوریتم‌ها و روش‌های زیادی برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ارائه شده است.

گسلاین و همکارش [۱۵]، یک چندجمله‌ای درجه ۶ برای بیان سینماتیک مستقیم ربات موازی صفحه‌ای 3-RPR آورند. همچنین دو مکانیزم ساده‌سازی شده نیز برای مکانیزم مذبور ارائه گردید. هوستی [۱۴]، با استفاده از نگاشت سینماتیکی که اولین بار به وسیله استودی معرفی شد، الگوریتمی برای حل سینماتیک مستقیم ربات موازی ۶ درجه آزادی استوارت ارائه کرد. این الگوریتم، با استفاده از پارامترهای استودی، حرکت سه‌بعدی را به یک فضای هفت‌بعدی شبه‌بیضی<sup>۳</sup> نگاشت می‌کرد. الگوریتم به یک چندجمله‌ای تکمتغیره از درجه ۴۰ می‌انجامد که نشان‌دهنده آن است که سینماتیک مستقیم ربات گوس-استوارت حداقل دارای ۴۰ جواب می‌باشد.

بی و همکارش [۱۶] یک شبکه عصبی آموزش دادند که حل سینماتیک مستقیم ربات موازی ۶ درجه آزادی استوارت را با خطای ۲/۸۶ میلی‌متر و ۲/۸ درجه انجام می‌داد. بروونینکیس [۱۷] حل بسته سینماتیک مستقیم ربات موازی هانت-پریمروز را بر پایه پیداکردن نقطه بالایی چهاروجهی‌هایی که اضلاع آن را زنجیره‌های ربات موازی تشکیل می‌داد، ارائه کرد. لی و همکارش [۱۸] نیز، سینماتیک مستقیم ربات استوارت را با استفاده از حذف جبری<sup>۴</sup> به دست آورند و نشان دادند که یک چندجمله‌ای تکمتغیره از درجه ۴۰ بیانگر سینماتیک مستقیم این ربات می‌باشد. طالع ماسوله و همکارانش [۱۹]، سینماتیک مستقیم ربات موازی 5-RPUR را

1. Descartes

2. Seven-dimensional quasi-elliptic space

3. Algebraic elimination

مفصل لولایی در هر زنجیره سینماتیکی) در چهارچوب ثابت تعريف می شود. به طور مشابه، بردار  $\mathbf{d}'_i$  نیز بردار موقعیت نقطه  $E_i$  در چهارچوب متحرک (مکان آخرین مفصل لولایی در زنجیره شماره  $i$ ) است. همچنین، در زنجیره های سینماتیکی  $\underline{\underline{RRUR}}_1$  و  $\underline{\underline{RRUR}}_2$ ، اندازه بردارهای  $B_i C_i$  و  $C_i D_i$  و  $D_i E_i$  به ترتیب با مقادیر  $a_i$  و  $L_1$  و  $L_2$  و در زنجیره سینماتیکی  $\underline{\underline{RUU}}$ ، اندازه بردارهای  $C_i E_i$  و  $B_i C_i$  به ترتیب با مقادیر  $a_i$  و  $L_1$  نشان داده می شوند. در نهایت، موقعیت عملگرنهایی (بردار اتصال نقطه  $O$  به نقطه  $O'$ ) به وسیله بردار  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$  و جهت گیری چهارچوب متحرک (عملگرنهایی) نسبت به چهارچوب ثابت نیز به وسیله ماتریس دوران  $\mathbf{Q}$  (رابطه ۱) بیان می گردد.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در روابط فوق،  $s_\theta = \sin \theta$  و  $c_\theta = \cos \theta$  می باشد. همچنین، از آنجا که نقاط  $E_i$  (مفصل انتهایی در هر زنجیره) به عملگرنهایی متصل است، می توان موقعیت آن را، برای سه ربات موازی تحت مطالعه، به صورت مستقیم بر اساس موقعیت عملگرنهایی (پارامترهای  $x, y, z$  و  $\theta$ ) نوشت:

$$\begin{aligned} [x_{Ei} \quad y_{Ei} \quad z_{Ei}]^T &= \mathbf{p} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}'_i \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{ix} \\ d'_{iy} \\ d'_{iz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + d'_{ix} c_\theta - d'_{iy} s_\theta \\ y + d'_{ix} s_\theta + d'_{iy} c_\theta \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

که در سه ربات موازی فوق،  $\mathbf{d}'_2 = (b, -b, 0)$ ،  $\mathbf{d}'_1 = (0, 0, 0)$  و  $\mathbf{d}'_4 = (-b, -b, 0)$  و  $\mathbf{d}'_3 = (0, -2b, 0)$  نصف طول عملگرنهایی می باشد. همچنین، موقعیت نقاط  $C_i$  (اولین مفصل لولایی پس از مفصل فعلی در هر زنجیره) نسبت به چهارچوب ثابت را می توان به صورت زیر بیان کرد:

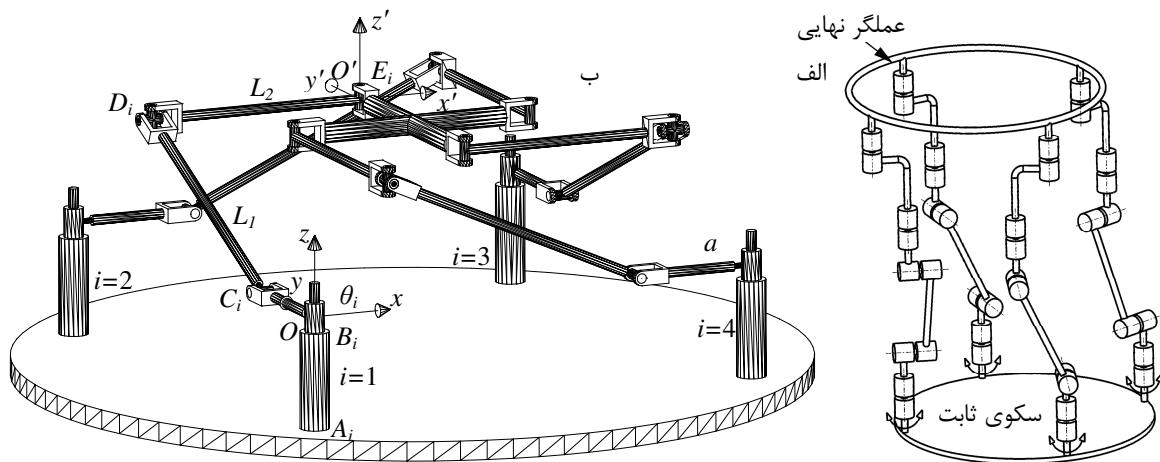
$$\begin{aligned} [x_{Ci} \quad y_{Ci} \quad z_{Ci}]^T &= \\ &[x_{Bi} + a \cdot \cos \theta_i \quad y_{Bi} + a \cdot \sin \theta_i \quad z_{Bi}]^T \end{aligned} \quad (3)$$

در ادامه به تشریح ساختار هندسی هر یک از این رباتها پرداخته می شود.

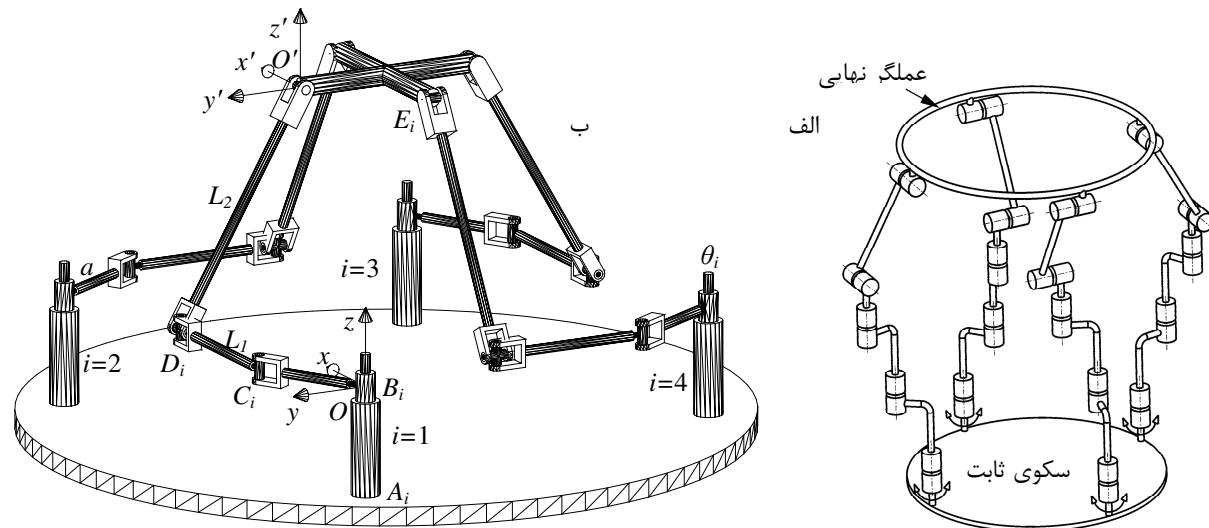
از آنها در گروه  $5R$  (متشكل از ۵ مفصل لولایی در هر زنجیره) طبقه بندی شده اند. مکانیزم های موازی فضایی  $4-R''R'R'R'R$ ،  $4-R''R'R'R'R$  و  $4-R''R'R'R'R$  (مفاصل با بالانویس یکسان دارای محورهای موازی می باشند)، که طرح کلی آنها به ترتیب در شکل های ۱-الف، ۲-الف و ۳-الف آورده شده است، از گروه  $5R$  هستند و ربات های موازی  $\underline{\underline{RUU}}$ ،  $\underline{\underline{RRUR}}_1$  و  $\underline{\underline{RRUR}}_2$  نیز، به ترتیب، حالت خاصی از این سه مکانیزم می باشند. شایان ذکر است که در سرتاسر این مقاله مفاصل لولایی با  $R$  و مفاصل یونیورسال با  $U$  نشان داده شده است. همچنین، در زیر مفاصل فعلی خطی کشیده شده است که آنها را از مفاصل غیرفعال مجزا می نماید.

همان گونه که در شکل های ۱-ب، ۲-ب و ۳-ب مشاهده می شود، هر یک از این سه ربات از یک عملگرنهایی تشکیل شده اند که این سکو به وسیله چهار زنجیره سینماتیکی یکسان به سکوی ثابت متصل شده است. همچنین، چهارچوب ثابت  $O_{xyz}$ ، بر روی مفصل  $i$  (طوری که محور  $z$  در راستای اولین مفصل لولایی یا همان مفصل فعلی قرار گیرد) و چهارچوب متحرک  $O'_{x'y'z'}$  بر روی مفصل  $E_i$  (طوری که راستای محور  $z'$  در راستای محور  $z$  از چهارچوب ثابت قرار گیرد) قرار داده شده است. با توجه به شرایط و قیود حاکم بر این ربات ها، جهت گیری محور  $z'$  از چهارچوب متحرک، همواره ثابت و در جهت محور  $z$  از چهارچوب ثابت می باشد، اما جهت گیری محورهای  $x'$  و  $y'$ ، با تغییر ورودی های مکانیزم، تغییر می کند. مجرینهایی هر یک از این ربات ها توانایی ایجاد سه درجه انتقالی ( $x, y, z$ ) به علاوه یک درجه دورانی حول محور  $z$  ( $\theta$ ) را دارا می باشند. در حقیقت، این سه ربات جزء ربات های با درجه آزادی محدود می باشند که مجرینهایی آنها نمی تواند حول محورهایی موازی محورهای  $x$  و  $y$  دوران کند. همچنین، یک کارانداز لولایی با محور دورانی موازی محور  $z$  نیز (متصل به سکوی ثابت) ورودی هر زنجیره را تشکیل می دهد. علاوه بر این، اندازه زاویه کارانداز لولایی در هر زنجیره ( $\theta_i$ ) همواره نسبت به جهت مثبت محور  $x$  سنجیده می شود.

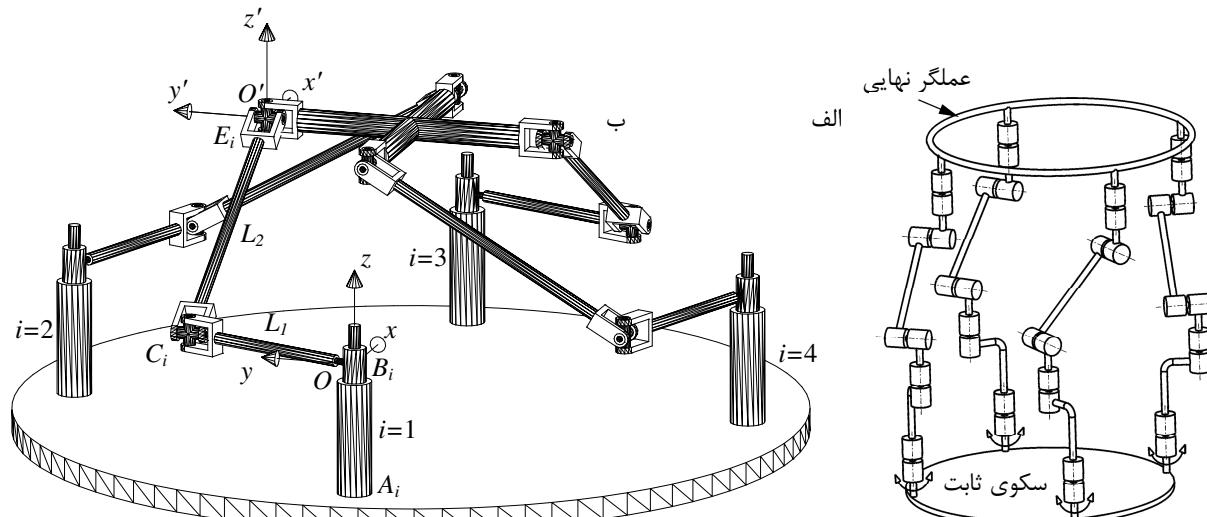
در شکل های ۴، ۵ و ۶ نیز، به ترتیب، طرح کلی زنجیره های سینماتیکی  $\underline{\underline{RRUR}}_1$ ،  $\underline{\underline{RRUR}}_2$  و  $\underline{\underline{RUU}}$  نشان داده شده است. بردار  $\mathbf{r}_i$  به عنوان بردار موقعیت نقطه  $B_i$  (مکان اولین



شکل ۱ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی RRUR<sub>1</sub> [۱۱]، ب- طرح شبیه سازی نرم افزاری ربات موازی RRUR<sub>1</sub>



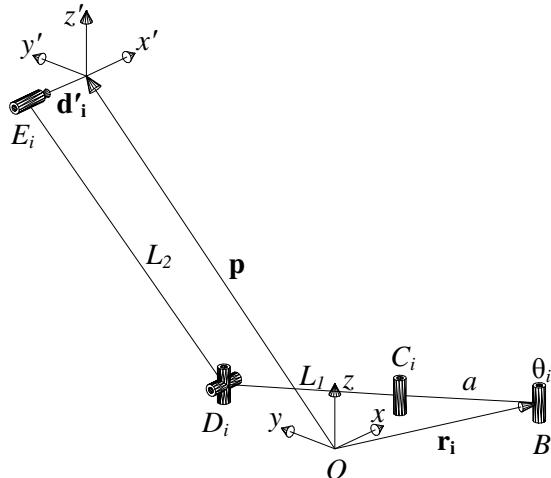
شکل ۲ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی RRUR<sub>2</sub> [۱۱]، ب- طرح شبیه سازی نرم افزاری ربات موازی RRUR<sub>2</sub>



شکل ۳ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی R'R''R''R'-RRUR<sub>4</sub> [۱۱]، ب- طرح شبیه سازی نرم افزاری ربات موازی R'R''R''R'-RRUR<sub>4</sub>

## ۴-۲- ساختار هندسی ربات موازی RRUR<sub>2</sub>

طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی RRUR<sub>2</sub> در شکل ۵ آورده شده است. این ربات حالت خاصی از ربات موازی R'R'R'R'R'R'-۴ میباشد که سنتر آن در مرجع [۱۱] آورده شده است. همان‌گونه که در شکل ۵ ملاحظه می‌گردد، یک کارانداز لولایی با محور دورانی موازی محور  $z$  (متصل به سکوی ثابت) ورودی هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. پس از آن دو مفصل لولایی قرار دارند که محور دورانی آن‌ها همواره در راستای محور  $z$  می‌باشد. دو مفصل انتهایی در هر زنجیره سینماتیکی نیز همواره در صفحه موازی صفحه  $x-y$  قرار دارند. در این ربات نیز، محورهای دوران دو مفصل لولایی سوم و چهارم متقطع و عمود بر هم می‌باشند و یک مفصل یونیورسال را ایجاد می‌کنند. شایان ذکر است که ۴ مفصل لولایی متصل به سکوی ثابت در ربات موازی RRUR<sub>2</sub> همواره دارای محورهای موازی (موازی محور  $z$ ) و چهار مفصل لولایی متصل به عملگرنهایی در این ربات همواره دارای محورهای موازی صفحه  $x-y$  می‌باشند.



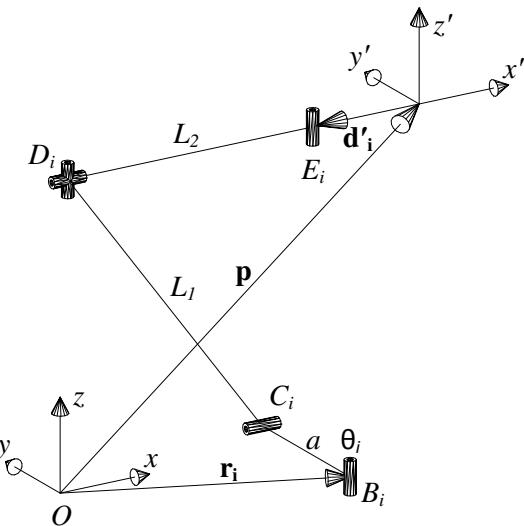
شکل ۵ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی RRUR<sub>2</sub>

ملاحظه می‌گردد که حالت‌های خاص مکانیزم‌های موازی RRUR-۴ و R'R'R'R'R'R'-۴ معرفی گردیده‌اند. اما همان‌گونه که در شکل‌های ۱ و ۲ نیز مشاهده می‌شود، راستای مفاضل لولایی و قیود حاکم بر زنجیره‌های سینماتیکی این دو ربات موازی با یکدیگر کاملاً متفاوت بوده و مشابه‌بودن نام این دو ربات دلیل بر یکسان

## ۴-۱- ساختار هندسی ربات موازی RRUR<sub>1</sub>

هنگامی که طول و انحراف رابط بین دو مفصل لولایی برابر صفر و زاویه پیچش رابط آن‌ها برابر  $90^\circ$  درجه باشد، یک مفصل یونیورسال<sup>۱</sup> تشکیل می‌شود [۲۰]. ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-۴ نیز، حالت خاصی از مکانیزم موازی "R'R'R'R'" می‌باشد که در آن، محورهای دوران مفاضل لولایی سوم و چهارم از هر زنجیره یک مفصل یونیورسال را تشکیل می‌دهند.

شکل ۶ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-۴ را نشان می‌دهد که با توجه به سنتر انجام‌شده در مرجع [۱۱] ایجاد شده است. یک مفصل لولایی  $T$ ، با محور دوران موازی محور  $z$  ورودی و مفصل فعال هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. محورهای دوران مفاضل لولایی دوم و سوم در هر زنجیره سینماتیکی همواره موازی و در صفحه‌ای موازی صفحه  $x-y$  قرار دارند. دو مفصل لولایی انتهایی نیز دارای محورهای موازی (موازی محور  $z$ ) می‌باشند. همچنین، محورهای دوران مفاضل سوم و چهارم در هر زنجیره سینماتیکی متقطع و بر هم عمود بوده و یک مفصل یونیورسال را تشکیل می‌دهند. شایان ذکر است که در ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-۴ چهار مفصل لولایی متصل به سکوی ثابت و چهار مفصل لولایی متصل به عملگرنهایی همواره دارای محورهای موازی (موازی محور  $z$ ) می‌باشند.



شکل ۶ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-۴

1. Universal joint

پیام ورشوی جاغرق و همکاران

RUU-4 در فضای اقلیدسی سه بعدی<sup>۱</sup> می باشد. در حل مسئله سینماتیک مستقیم این ربات ها، از روش برآیند<sup>۲</sup> استفاده شده است. روش برآیند یک روش برای حذف یک یا چند متغیر از یک دستگاه معادلات می باشد، به طوری که معادله نهایی حاصله اثر تمامی معادلات را دربر خواهد داشت. به طور خلاصه، روش برآیند برای حذف متغیر  $x$  از دو چند جمله ای  $f$  و  $g$ ، که به ترتیب از درجه  $m$  و  $n$  می باشند (روابط ۴ و ۵)، به صورت رابطه (۶) (دترمینان ماتریس  $(m+n) \times (m+n)$ ) تعریف می شود [۲۱]:

$$f = a_0 x^m + \dots + a_m, \quad a_0 \neq 0, \quad m > 0 \quad (\text{F})$$

$$g = b_0 x^n + \dots + b_n, \quad b_0 \neq 0, \quad n > 0 \quad (\textcircled{5})$$

Resultant( $f$  , $g$  , $x$  )=

$$\det \left( \begin{array}{cccccc} a_0 & & b_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & b_1 & b_0 & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & b_2 & b_1 & \ddots & \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_m & \vdots & \ddots & a_1 & b_n & \vdots & \ddots & b_1 \\ a_m & \vdots & a_2 & & b_n & \vdots & b_2 \\ & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n & & & b_n \end{array} \right) \quad (8)$$

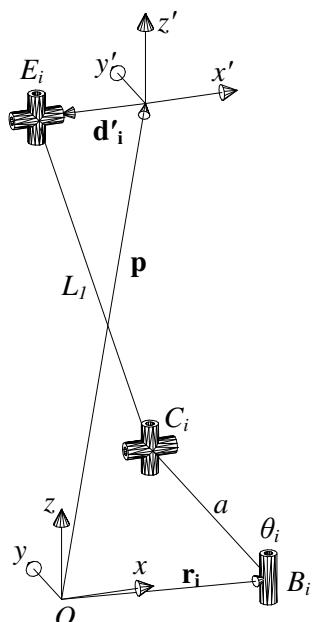
های  $a_i$  و  $b_i$  ها ضرایب ثابت و یا چندجمله‌ای‌هایی بر حسب پارامترهایی غیر از  $x$  می‌باشند. درایه‌های دیگر دترمینان فوق مقدار صفر دارند. در ادامه، به تشریح الگوریتم استفاده شده با استفاده از روش برآیند، برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم ریات‌های مورد نظر، پرداخته می‌شود:

با استفاده از مختصات مفاصل، قیود سینماتیکی حاکم بر زنجیرهای هر ربات موازی و استفاده از روش برآیند، عبارت سینماتیک مستقیم برای هر زنجیره از ربات موازی به دست آورده می‌شود. این عبارت، باید قادر مختصات مفاصل غیرفعالی باشد که موقعیت آن‌ها مشخص نیستند. سپس با استفاده از عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده برای هر زنجیره و استفاده مجدد از روش برآیند، یک عبارت ریاضی تک‌متغیره به دست آورده که سینماتیک مستقیم ربات موازی را تشییح

بدون ساختار هندسی آن‌ها نمی‌باشد. از این رو، برای تفکیک این دو ربات موازی نسبت به هم، حالت خاص مکانیزم موازی 4-RUR<sub>1</sub>-R'R'R'R' به نام 4-RUR<sub>2</sub>-R'R'R'R' م موازی 4-RUR<sub>2</sub>-R'R'R'R' به نام 4-RUR<sub>1</sub>-R'R'R'R' بیان می‌شوند.

#### **۴-۳-۲- ساختار هندسی ربات موازی RUU**

در شکل ۶، طرح کلی یک زنجیره سینماتیکی از ربات موازی ۴-R<sub>UU</sub>R'R'R' می‌باشد، اورده شده است. هر زنجیره سینماتیکی از این ربات از پنج مفصل لولایی تشکیل شده است. محورهای دوران مفاصل اول، دوم و پنجم از هر زنجیره همواره عمود بر صفحه  $x-y$  (در راستای محور  $z$ ) و راستای مفاصل سوم و چهارم نیز در هر پیکربندی عمود بر راستای محور  $z$  می‌باشند. همچنین، مفاصل لولایی دوم و سوم و مفاصل چهارم و پنجم در هر زنجیره، دارای محورهای متقطع و عمود بر هم می‌باشند که با تلفیق آن‌ها مفاصل یونیورسال  $C_i$  و  $E_i$  شکل می‌گیرند.



#### شکل ۶ طرح کله زنجره سینماتیک، نام از بات موازی 4-RUU

### ۳- حل مسئله سینماتیک مستقیم در فضای اقلیدسی سه بعدی

بخش دوم این تحقیق، شامل حل مسئله سینماتیک مستقیم  
حالت عمومی ربات‌های موازی  $4\text{-RRUR}_1$  و  $4\text{-RRUR}_2$  است.

---

1. Three-dimensional Euclidean space
2. Resultant method

(موقعیت چهارچوب متحرک که بر روی عملگرنهای نصب می‌گردد) نوشته شود. بنابراین تنها موقعیت نقاط  $D_i$  در هر زنجیره سینماتیکی از هر ربات موازی نامشخص می‌باشد که با توجه به قیود هندسی هر زنجیره باید از معادلات حذف گرددند.

### ۱-۳ حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی RRUR<sub>1</sub>

با ارجاع به شکل ۴، معادلات (۷) و (۸) بر اساس قیود سینماتیکی حاکم بر نامین زنجیره از ربات موازی RRUR<sub>1</sub> به دست می‌آید:

$$C_i D_i = (x_{Di} - x_{Ci})^2 + (y_{Di} - y_{Ci})^2 + (z_{Di} - z_{Ci})^2 - L_1^2 \quad (7)$$

$$D_i E_i = (x_{Ei} - x_{Di})^2 + (y_{Ei} - y_{Di})^2 - L_2^2 \quad (8)$$

با توجه به روابط (۱) تا (۳)، موقعیت تمامی مفاصل به غیر از نقاط  $D_i$  معلوم است که بر اساس قیود هندسی هر زنجیره باید از معادلات حذف گردد. بر این اساس، موقعیت نقاط  $D_i$  برای نامین زنجیره، به صورت روابط (۹) تا (۱۱) به دست می‌آید:

$$x_{Di} = x_{Ci} + \zeta_i c_i = x_{Bi} + a c_i + \zeta_i c_i \quad (9)$$

$$y_{Di} = y_{Ci} + \zeta_i s_i = y_{Bi} + a s_i + \zeta_i s_i \quad (10)$$

$$z_{Di} = z_{Ei} = z \quad (11)$$

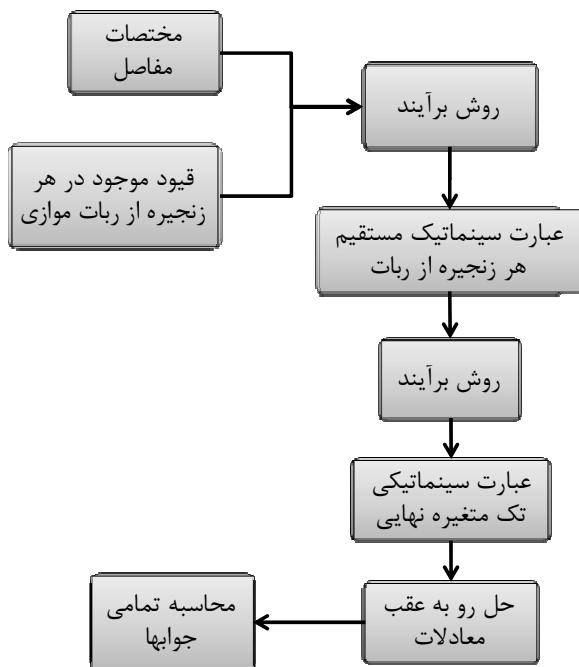
که در روابط فوق،  $\zeta_i$  تصویر  $C_i D_i$  بر روی صفحه  $x-y$  می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱) تا (۳) و (۹) تا (۱۱) در معادلات (۷) و (۸)، روابط زیر برای زنجیره سینماتیکی شماره ۱ از ربات موازی RRUR<sub>1</sub> حاصل می‌شود:

$$C_1 D_1 = z^2 + \zeta_1^2 - L_1^2 \quad (12)$$

$$D_1 E_1 = x^2 + y^2 - 2 a c_1 x - 2 c_1 \zeta_1 x + \zeta_1^2 - 2 a s_1 y - 2 s_1 \zeta_1 y + a^2 + 2 a \zeta_1 - L_2^2 \quad (13)$$

با استفاده از روش برآیند، از دو رابطه (۱۲) و (۱۳)، پارامتر  $\zeta_1$  حذف گردیده و عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره اول بر حسب مختصات عملگرنهای  $(x, y, z)$  و  $(\theta)$ ، پارامترهای طراحی  $(a, b, L_1, L_2)$ ، مقادیر ورودی  $(\theta_1)$  و مختصات نقطه  $B_1$  به صورت رابطه (۱۴) به دست می‌آید. چون چهارچوب ثابت بر روی نقطه  $B_1$  قرار گرفته است، مختصات نقطه  $B_1$  برابر  $(0, 0, 0)$  می‌باشد.

می‌کند. این عبارت تک متغیره شامل تمامی جوابهای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی می‌باشد. در ادامه و پس از به دست آوردن این عبارت ریاضی، با حل آن و حل رو به عقب معادلات، تمامی جوابهای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی فضایی به دست خواهد آمد (شکل ۷).



شکل ۷ تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی

برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم حالت عمومی هر یک از این ربات‌ها و به دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم هر زنجیره (عبارتی بر حسب  $x, y, z$  و  $\theta$ ) و نهایتاً به دست آوردن عبارت تک متغیره نهایی، ابتدا چهارچوب ثابت  $O_{xyz}$  بر روی مفصل  $B_1$  و چهارچوب متحرک  $O'_x'y'z'$  بر روی مفصل لولایی انداخته شده (همان‌گونه که در بخش قبل توضیح داده شد) جایگذاری می‌شود (شکل‌های ۱، ۲ و ۳). با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم، مقادیر  $\theta_i$  و موقعیت مفاصل  $B_i$  (مفصل لولایی فعل) مشخص می‌باشد. بنابراین موقعیت مفاصل  $C_i$  (اولین مفصل لولایی پس از مفصل فعل در هر زنجیره) نسبت به چهارچوب ثابت نیز از رابطه (۳) می‌تواند محاسبه شود. همچنین موقعیت مفصل انها ای در هر زنجیره نیز می‌تواند از رابطه (۲) بر حسب پارامترهای  $x, y, z$  و

می‌گردد (رابطه ۱۷). مزیت استفاده از تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه  $\theta$  در آنالیز سینماتیک مستقیم عمدتاً به دلیل حذف عبارت‌های مثلثاتی و تولید معادلات همگن می‌باشد.

$$F_2 = \text{Resultant}(C_2 D_2, D_2 E_2, \zeta_2) \quad (17)$$

عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره‌های سوم و چهارم نیز، به صورتی که شرح داده شد، از روابط (۱۸) و (۱۹) به دست آورده می‌شوند.

$$F_3 = \text{Resultant}(C_3 D_3, D_3 E_3, \zeta_3) \quad (18)$$

$$F_4 = \text{Resultant}(C_4 D_4, D_4 E_4, \zeta_4) \quad (19)$$

تا این مرحله، یک عبارت سینماتیک مستقیم به ازای هر زنجیره سینماتیکی از ربات RRUR-4 به دست آورده شده است (عبارت‌های  $F_1, F_2, F_3$  و  $F_4$ ). این عبارتها بر حسب مختصات عملگرنهایی ( $x, y, z$  و  $t$ )، پارامترهای طراحی ( $a, b, L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$ ،  $L_4$ ، مقادیر ورودی ( $\theta_i$ ) و مختصات نقاط  $B_i$  می‌باشند. در مسئله سینماتیک مستقیم، مقادیر ( $\theta_i$ ) به عنوان ورودی به مسئله داده می‌شود. همچنین، پارامترهای طراحی ( $a, b, L_1$  و  $L_2$ ) و مختصات نقاط  $B_i$  نیز بر اساس هندسه ربات مشخص می‌باشند. بنابراین، چهار عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده برای چهار زنجیره ربات موازی تنها بر حسب مختصات عملگرنهایی ( $x, y, z$  و  $t$ ) می‌باشند. با استفاده از روش برآیند، مختصات  $x$  و  $z$  از  $y$  بر حسب  $x$  و  $t$  عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده حذف گردیده و یک عبارت تک‌متغیره بر حسب  $t$  که بیان‌کننده سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق است، به دست می‌آید. برای این کار، به ترتیب زیر عمل می‌شود:

$$F_{12}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_2, x) \quad (20)$$

$$F_{13}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_3, x) \quad (21)$$

$$F_{14}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_4, x) \quad (22)$$

$$F_{1213}(z, t) = \text{Resultant}(F_{12}, F_{13}, y) \quad (23)$$

$$F_{1214}(z, t) = \text{Resultant}(F_{12}, F_{14}, y) \quad (24)$$

$$F_{t_1}(t) = \text{Resultant}(F_{1213}, F_{1214}, z) \quad (25)$$

روابط (۲۰) تا (۲۵) پارامتر  $x$  را از  $4$  عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده حذف کرده و سه عبارت بر حسب پارامترهای  $y, z$  و  $t$  ایجاد می‌کنند. روابط (۲۳) و (۲۴) نیز، پارامتر  $y$  را از سه رابطه (۲۰) تا (۲۲) حذف کرده و دو عبارت

$$F_1 = \text{Resultant}(C_1 D_1, D_1 E_1, \zeta_1)$$

$$\begin{aligned} F_1 = & x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 4c_1^2x^2z^2 \\ & + 8c_1s_1xyz^2 + y^4 - 2y^2z^2 + 4s_1^2y^2z^2 \\ & + z^4 - 4ac_1x^3 - 4as_1x^2y - 4ac_1xy^2 \\ & - 4ac_1xz^2 - 4as_1y^3 - 4as_1yz^2 \\ & + 2a^2x^2 + 2L_1^2x^2 - 2L_2^2x^2 + 4a^2c_1^2x^2 \\ & - 4c_1^2L_1^2x^2 + 8a^2c_1s_1xy - 8c_1s_1L_1^2xy \\ & - 2L_2^2y^2 + 4a^2s_1^2y^2 + 2a^2y^2 - 4s_1^2L_1^2y \\ & + 2L_1^2y^2 + 2a^2z^2 - 2L_1^2z^2 + 2L_2^2z^2 \\ & + 4ac_1L_2^2x + 4L_1^2ac_1x - 4a^3c_1x \\ & - 4a^3s_1y + 4L_1^2as_1y + 4as_1L_2^2y \\ & - 2a^2L_2^2 - 2L_1^2a^2 - 2L_1^2L_2^2 + a^4 + L_2^4 + L_1^4 \end{aligned} \quad (14)$$

در صورتی که مراحل فوق برای دومین زنجیره نیز اعمال شود، روابط (۷) و (۸) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C_2 D_2 = z^2 + \zeta_2^2 - L_1^2 \quad (15)$$

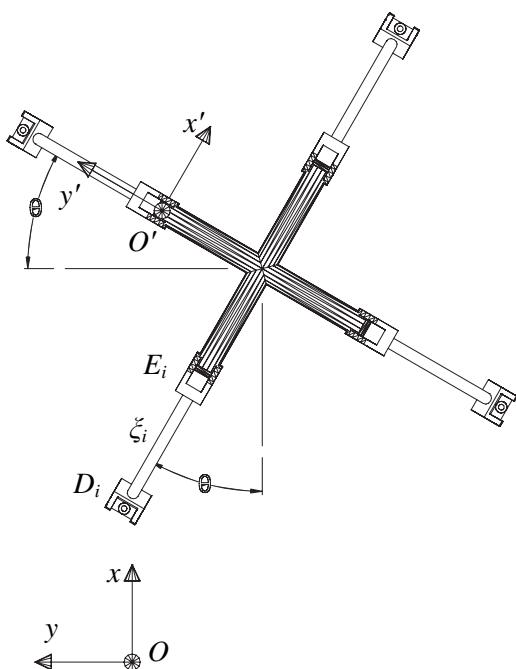
$$\begin{aligned} D_2 E_2 = & x^2 + y^2 - 2x_{B2}x + 2bc_\theta x + 2bs_\theta x \\ & - 2\zeta_2 c_2 x - 2ac_2 x - 2as_2 y - 2\zeta_2 s_2 y \\ & + 2bs_\theta y - 2y_{B2}y - 2bc_\theta y + 2y_{B2}as_2 \\ & - 2bs_\theta ac_2 + 2x_{B2}\zeta_2 c_2 + 2bc_\theta y_{B2} + 2b^2 \\ & - 2bc_\theta \zeta_2 c_2 + 2y_{B2}\zeta_2 s_2 - 2bs_\theta \zeta_2 s_2 \\ & + 2bc_\theta \zeta_2 s_2 + 2a\zeta_2 - 2bs_\theta as_2 + a^2 \\ & - L_2^2 - 2bs_\theta x_{B2} + 2bc_\theta as_2 + 2bc_\theta ac_2 \\ & - 2bs_\theta \zeta_2 c_2 + x_{B2}^2 + \zeta_2^2 + y_{B2}^2 \\ & - 2bc_\theta x_{B2} - 2bs_\theta y_{B2} + 2x_{B2}ac_2 \end{aligned} \quad (16)$$

عبارت به دست آمده برای  $D_2 E_2$  شامل عبارت‌های مثلثاتی می‌باشد. برای حذف عبارت‌های مثلثاتی از معادلات فوق و  $t = \tan(\theta/2)$  ساده‌تر شدن روابط، ابتدا از تغییر متغیر  $(\cos \theta = (1-t^2)/(1+t^2)$  و  $\sin \theta = 2t/(1+t^2)$ ) استفاده کرده و سپس با استفاده از متغیر تانژانت نصف زاویه  $\theta$  حذف گردیده و سپس با استفاده از روش حذفی برآیند، پارامتر  $\zeta_2$  از روابط (۱۵) و (۱۶) حذف گردیده و عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره دوم حاصل

$$(x_{Di} - x_{Ci})^2 + (y_{Di} - y_{Ci})^2 - L_1^2 = 0 \quad (27)$$

$$(x_{Ei} - x_{Di})^2 + (y_{Ei} - y_{Di})^2 + (z_{Ei} - z_{Di})^2 - L_2^2 = 0 \quad (28)$$

روابط (۲۷) و (۲۸) برای تمامی زنجیره‌های ربات موازی RRUR<sub>2</sub>-4 برقرار می‌باشند. اما با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم و مشخص بودن مقادیر مفاصل لولایی فعال، پارامترهای طراحی و موقعیت نقاط  $B_i$ ،  $B_i$ ، موقعیت نقاط  $C_i$  و  $E_i$ ، نیز می‌تواند از رابطه‌های (۲) و (۳) و بر حسب پارامترهای  $a$ ،  $b$ ،  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $\theta_i$  و  $\zeta_i$  نوشته شود. اما موقعیت نقاط  $D_i$  در هر زنجیره شناخته شده نیست و باید، با توجه به قیود حاکم بر هندسه ربات، از معادلات حذف گردد. اولین قید حاکم بر زنجیره‌های ربات موازی RRUR<sub>2</sub>-4 را می‌توان به صورت  $z_{Di} = z_{Ci}$  نوشت. این رابطه همواره برای تمامی زنجیره‌ها از ربات موازی فوق برقرار است. همچنین، با توجه به شکل ۸، مختصات  $x$  و  $y$  از نقاط  $D_i$  نیز به صورت روابط (۳۲) تا (۳۴) نوشته می‌شوند.



شکل ۸ تصویر  $D_iE_i$  بر روی صفحه  $y$ - $y'$

$$x_{D1} = x_{E1} - \zeta_1 s_\theta, \quad y_{D1} = y_{E1} + \zeta_1 c_\theta \quad (29)$$

$$x_{D2} = x_{E2} + \zeta_2 c_\theta, \quad y_{D2} = y_{E2} + \zeta_2 s_\theta \quad (30)$$

$$x_{D3} = x_{E3} + \zeta_3 s_\theta, \quad y_{D3} = y_{E3} - \zeta_3 c_\theta \quad (31)$$

$$x_{D4} = x_{E4} - \zeta_4 c_\theta, \quad y_{D4} = y_{E4} - \zeta_4 s_\theta \quad (32)$$

بر حسب  $z$  و  $t$  تولید می‌کنند. نهایتاً، با استفاده از رابطه ۲۵، پارامتر  $z$  نیز از دو رابطه (۲۳) و (۲۴) حذف گردیده و عبارت تک متغیره نهایی ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-4 بر حسب متغیر  $t$  حاصل می‌شود.

مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تغییر در مقادیر پارامترهای طراحی ( $a$ ،  $b$ ،  $L_1$ ،  $L_2$ )، مقادیر ورودی ( $\theta_i$ ) و مختصات نقاط  $B_i$  برای ربات موازی فوق انجام شده است و در تمامی موارد، عبارت تک متغیره نهایی همواره به صورت رابطه (۲۶) به دست آمده است:

$$F_k(t) = \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (\lambda_j t^j)^k \right) \right) \quad (26)$$

که در رابطه فوق،  $\lambda_j$  ها ضرایب ثابتی بر حسب پارامترهای طراحی ( $a$ ،  $b$ ،  $L_1$ ،  $L_2$ ) ورودی‌های هر زنجیره سینماتیکی ( $\theta_i$ ) همچنین مختصات نقاط  $B_i$  می‌باشند. عبارت تک متغیره نهایی به دست آمده (رابطه ۲۶) همواره شامل چندجمله‌ای‌های تک متغیره‌ای می‌باشد که مجموع درجات آن‌ها برابر ۳۳۴ می‌باشد. این چندجمله‌ای‌ها شامل تمامی مقادیر  $t$  از جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی RRUR<sub>1</sub>-4 می‌باشند. به ازای هر جواب به دست آمده از عبارت تک متغیره نهایی، یک جواب برای مسئله سینماتیک مستقیم وجود دارد. نتیجه‌گیری، سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق حداقل دارای ۳۴۴ جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد. تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی به دست آمده از این روش (در تمامی مثال‌های تصادفی انجام شده) در معادلات سینماتیک معکوس ربات موازی قرار داده شده و درستی تعداد جواب‌ها به اثبات رسیده است.

### ۲-۳ حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-RRUR<sub>2</sub>

فرایند به دست آوردن عبارت تک متغیره نهایی ربات موازی 4-RRUR<sub>2</sub> مشابه بخش قبل می‌باشد، با این تفاوت که قیود حاکم بر زنجیره‌های این ربات متفاوت از ربات قبلی بوده و باید بر اساس هندسه آن تعیین گردد. بر این اساس، زنجیره اصلی ربات موازی RRUR<sub>2</sub>-4 در نظر گرفته شده (شکل ۵) و روابط حاکم بر آن نوشته می‌شود:

زنجیره‌های دوم تا چهارم نیز به دست آورده می‌شود. نهایتاً، با اعمال روابط (۲۰) تا (۲۵)، عبارت تک متغیرهنهایی بر حسب  $t$  حاصل می‌شود. مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تعییر در مقادیر پارامترهای طراحی ( $a, b, L_1, L_2$ )، مقادیر ورودی ( $\theta_i$ ) و مختصات نقاط  $B_i$  برای این ربات انجام شده است که در تمامی موارد، عبارت تک متغیرهنهایی همواره به صورت رابطه (۳۶) حاصل شده است.

$$F_k(t) = \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (v_j t^j)^k \right) \right) \quad (36)$$

در رابطه فوق،  $v_j$ ها نیز ضرایب ثابتی بر حسب مقادیر پارامترهای طراحی، ورودی‌ها و مختصات نقاط  $B_i$  می‌باشند. این عبارت به صورت حاصل ضرب چندین عبارت تک متغیره بر حسب  $t$  است که مجموع درجات آن‌ها همواره برابر  $230$  است. این نتیجه نشان می‌دهد که سینماتیک مستقیم ربات فوق حداقل دارای  $230$  جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد. تمامی جواب‌های به دست آمده در هر مرحله، در معادلات سینماتیک معکوس ربات قرار داده شده و درستی نتایج تایید شده است.

### -۳-۳ حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی

#### **4-RUU**

شکل ۶ زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی **RUU-4** را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، رابطه (۳۷) بر روی هر زنجیره از این ربات حاکم می‌باشد:

$$(x_{Ei} - x_{Ci})^2 + (y_{Ei} - y_{Ci})^2 + (z_{Ei} - z_{Ci})^2 - L_1^2 = 0 \quad (37)$$

با اعمال روابط (۱) تا (۳) و استفاده از روش برآیند، عبارت‌های سینماتیک مستقیم زنجیره‌های (۱) تا (۴) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2a c_1 x - 2a s_1 y + a^2 - L_1^2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2a c_2 x - 2x_{B2} \\ &\quad + 2b c_\theta x + 2b s_\theta x - 2y_{B2} y - 2a s_2 y \\ &\quad - 2b c_\theta y + 2b s_\theta y + 2b^2 + 2b c_\theta a s_2 \\ &\quad - L_1^2 + a^2 - 2b s_\theta a c_2 - 2b s_\theta a s_2 \\ &\quad + x_{B2}^2 + y_{B2}^2 - 2b s_\theta y_{B2} - 2b s_\theta x_{B2} \\ &\quad + 2y_{B2} a s_2 + 2b c_\theta y_{B2} + 2x_{B2} a c_2 \\ &\quad - 2b c_\theta x_{B2} - 2b c_\theta a c_2 \end{aligned} \quad (39)$$

که در روابط فوق،  $i$  تصویر بردار  $D_i E_i$  بر روی صفحه  $x-y$  می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱) تا (۳) و (۲۹) تا (۳۲) در معادلات (۲۷) و (۲۸)، روابط زیر برای اولین زنجیره سینماتیکی به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} C_1 D_1 &= x^2 + y^2 - 2a c_1 x - 2\xi_1 s_\theta x \\ &\quad - 2a s_1 y - 2\xi_1 c_\theta y + 2\xi_1 s_\theta a c_1 \\ &\quad + \xi_1^2 + 2\xi_1 c_\theta a s_1 + a^2 - L_1^2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$D_2 E_2 = z^2 + \xi_1^2 - L_2^2 \quad (34)$$

با اعمال روش برآیند بر روی روابط (۳۳) و (۳۴) و حذف پارامتر  $\xi_1$ ، عبارت سینماتیک مستقیم این زنجیره به صورت رابطه (۳۵) حاصل می‌شود.

$$F_1 = \text{Resultant}(C_1 D_1, D_2 E_2, \xi_1)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= x^4 + 2x^2 y^2 + 4s_\theta^2 x^2 z^2 - 2x^2 z^2 \\ &\quad + 8s_\theta c_\theta x y z^2 + y^4 + 4c_\theta^2 y^2 z^2 - 2y^2 z^2 \\ &\quad + z^4 - 4a c_1 x^3 - 4a s_1 x^2 y - 4a c_1 x y^2 \\ &\quad - 8s_\theta^2 a c_1 x z^2 + 4a c_1 x z^2 - 8s_\theta c_\theta a s_1 x z^2 \\ &\quad - 4a s_1 y^3 - 8c_\theta^2 a s_1 y z^2 - 8s_\theta a c_1 c_\theta y z^2 \\ &\quad + 4a s_1 y z^2 - 4L_2^2 s_\theta^2 x^2 + 2L_2^2 x^2 - 2L_1^2 x^2 \\ &\quad + 4a^2 c_1^2 x^2 + 2a^2 x^2 + 8a^2 c_1 s_1 x y \\ &\quad - 8L_2^2 s_\theta c_\theta x y + 2a^2 y^2 - 2L_1^2 y^2 \\ &\quad + 2L_2^2 y^2 - 4L_2^2 c_\theta^2 y^2 + 4a^2 s_1^2 y^2 - 2L_2^2 \\ &\quad + 4c_\theta^2 a^2 s_1^2 z^2 + 4s_\theta^2 a^2 c_1^2 z^2 + 2L_1^2 z^2 \\ &\quad - 2a^2 z^2 + 8s_\theta a^2 c_1 c_\theta s_1 z^2 - 4a c_1 L_2^2 x \\ &\quad + 8L_2^2 s_\theta c_\theta a s_1 x + 8L_2^2 s_\theta^2 a c_1 x \\ &\quad + 4L_1^2 a c_1 x - 4a^3 c_1 x - 4L_2^2 a s_1 y \\ &\quad + 4L_1^2 a s_1 y + 8L_2^2 s_\theta a c_1 c_\theta y + 8L_2^2 c_\theta^2 a s_1 y \\ &\quad - 4a^3 s_1 y - 4L_2^2 s_\theta^2 a^2 c_1^2 + a^4 \\ &\quad - 4L_2^2 c_\theta^2 a^2 s_1^2 + L_1^4 + 2L_2^2 a^2 \\ &\quad - 2L_1^2 L_2^2 + L_2^4 - 2L_1^2 a^2 - 8L_2^2 s_\theta a^2 c_1 c_\theta s_1 \end{aligned} \quad (35)$$

با اعمال تعییر متغیر تائزانت نصف زاویه  $\theta$ ، عبارت‌های مثلثاتی  $s_\theta$  و  $c_\theta$  از عبارت  $F_1$  حذف می‌گردد. در ادامه، به صورتی که تشریح گردید، عبارت‌های سینماتیک مستقیم

معادلات سینماتیک معکوس هر ربات قرار داده شده است. نهایتاً ۱۳۰ جواب حقیقی و ۲۱۴ جواب موهومی برای ربات موازی  $\underline{\text{RRUR}}_1$ ، ۱۱۰ جواب حقیقی و ۱۲۰ جواب موهومی برای ربات موازی  $\underline{\text{RRUR}}_2$  و ۴ جواب حقیقی و ۴ جواب موهومی برای ربات موازی  $\underline{\text{RUU}}_4$  حاصل شده است.

جدول ۱ مقادیر پارامترهای طراحی، ورودی‌ها و مختصات نقاط  $B_i$  برای انجام شبیه‌سازی

۴- $\underline{\text{RUU}}$	۴- $\underline{\text{RRUR}}_2$	۴- $\underline{\text{RRUR}}_1$	
(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)	$B_1$
(-۱,۵,۰)	(-۱,۵,۰)	(-۱,۵,۰)	$B_2$
(۴,۶,۰)	(۴,۶,۰)	(۴,۶,۰)	$B_3$
(۵,۱,۰)	(۵,۱,۰)	(۵,۱,۰)	$B_4$
۲	۲	۲	$A$
۲	۲	۲	$B$
۵	۲	۵	$L_1$
-	۵	۲	$L_2$
۶۰°	۶۰°	۶۰°	$\theta_1$
۰°	۰°	۰°	$\theta_2$
-۹۰°	-۹۰°	-۹۰°	$\theta_3$
۱۸۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	$\theta_4$

$$\begin{aligned}
 F_k(t) = & \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (\lambda_j t^j)^k \right) \right) = \\
 & (t^{20} - 28.28t^{19} + \dots - 2.38 \cdot 10^7 t + 3.91 \cdot 10^6)^2 \\
 & (t^{20} - 45.41t^{19} + \dots - 25795.2t + 7133.62)^2 \\
 & (t^{18} - 8.87t^{17} + \dots - 2648.02t + 288.63)^2 \\
 & (t^{18} - 16.06t^{17} + \dots - 8767.30t + 1768.40)^2 \\
 & (t^{18} - 27.9t^{17} + \dots - 85643.3t + 13866.9)^2 \\
 & (t^{18} - 29.7t^{17} + \dots - 10507.4t + 2037.8)^2 \\
 & (t^{18} - 10.32t^{17} + \dots - 1.04 \cdot 10^5 t + 8096.35)^2 \\
 & (t^{18} - 40.60t^{17} + \dots - 71321.17t + 5439.1)^2 \\
 & (t^6 - 8.65t^5 + \dots - 12.06t + 4.21)^2 \\
 & (t^6 - 2.08t^5 + \dots - 0.00908t + 0.0000026)^2 \\
 & (t^6 - 77.58t^5 + \dots - 1997.36t + 939.32)^2 \\
 & (t^2 - 2.309401077t + 0.381197845)^4 \\
 & (t^2 - 16t + 25)^2
 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & x^2 + y^2 + z^2 - 2x_{B_3}x - 2a c_3 x \\
 & + 4b s_\theta x - 2a s_3 y - 4b c_\theta y - 2y_{B_3} y \\
 & + 4b^2 - 4b s_\theta a c_3 + x_{B_3}^2 + 2x_{B_3} a c_3 \\
 & + 4b c_\theta y_{B_3} + 4b c_\theta a s_3 + y_{B_3}^2 \\
 & + 2y_{B_3} a s_3 + a^2 - 4b s_\theta x_{B_3} - L_1^2
 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 F_4 = & x^2 + y^2 + z^2 + 2b s_\theta x - 2x_{B_4} x \\
 & - 2a c_4 x - 2b c_\theta x - 2b s_\theta y - 2y_{B_4} y \\
 & - 2a s_4 y - 2b c_\theta y + 2y_{B_4} a s_4 + 2b c_\theta y_{B_4} \\
 & + 2b s_\theta a s_4 - 2b s_\theta x_{B_4} - 2b s_\theta a c_4 \\
 & + 2x_{B_4} a c_4 + 2b^2 + 2b c_\theta a s_4 \\
 & + 2b s_\theta y_{B_4} + 2b c_\theta a c_4 - L_1^2 + x_{B_4}^2 \\
 & + y_{B_4}^2 + 2b c_\theta x_{B_4} + a^2
 \end{aligned} \quad (41)$$

سپس با اعمال تغییر متغیر تابع نصف زاویه  $\theta$  و استفاده از روابط (۲۰) تا (۲۵)، عبارت تکمتغیره سینماتیک مستقیم بر حسب  $t$  حاصل می‌شود. مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تغییر در مقادیر پارامترهای طراحی، مقادیر ورودی و مختصات نقاط  $B_i$  انجام گردید و جواب‌های حاصل در معادلات سینماتیک معکوس ربات قرار داده شدند. نهایتاً این نتیجه حاصل شد که یک عبارت تکمتغیره بر حسب  $t$  از درجه ۸ همواره بیانگر سینماتیک مستقیم ربات موازی  $\underline{\text{RUU}}_4$  می‌باشد. این نتیجه نشان می‌دهد که سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق حداقل دارای ۸ جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد.

#### ۴- شبیه‌سازی و مقایسه نتایج

مثال‌های تصادفی متعددی برای سه ربات موازی فوق انجام شده و پس از بهدست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم تکمتغیره نهایی برای هر ربات و حل آن، با قراردادن مقادیر بهدست آمده در معادلات قبلی (حل رو به عقب معادلات)، تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی بهدست آمده است. سپس، برای تایید نهایی، این جواب‌ها در معادلات سینماتیک معکوس ربات‌ها قرار داده شده است. به عنوان نمونه، به ازای مقادیر داده شده در جدول ۱، عبارت‌های سینماتیک مستقیم سه ربات موازی  $\underline{\text{RRUR}}_1$ ،  $\underline{\text{RRUR}}_2$  و  $\underline{\text{RUU}}_4$  محاسبه شده است. سپس تمامی جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم هر ربات بهدست آورده شده و تمامی جواب‌ها (حقیقی و موهومی) در

جدول ۳ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی RRUR<sub>1</sub>-RUR<sub>4</sub>

دومین پیکربندی	اولین پیکربندی	
۰/۴۶۱۴	۱/۳۰۶۵	$x$
۱/۷۲۲۱	۴/۷۸۵۹	$y$
۴/۴۷۸۲	۲/۳۹۲۹	$z$
۱۲۹/۷۰	۲۰/۳۰	$\theta$
(۰/۱۱۲, -۰/۱۹۴, ۴/۴۷۸)	(۳/۱۹۵, ۵/۵۳۴, ۲/۳۹۳)	$D_1$
(-۱/۲۲۴, ۵/۰۰۰, ۴/۴۷۸)	(۵/۳۹۰, ۵/۰۰۰, ۲/۳۹۳)	$D_2$
(۴/۰۰۰, ۶/۲۲۴, ۴/۴۷۸)	(۴/۰۰۰, -۰/۳۹۰, ۲/۳۹۳)	$D_3$
(۵/۲۲۴, ۱/۰۰۰, ۴/۴۷۸)	(-۱/۳۹۰, ۱/۰۰۰, ۲/۳۹۳)	$D_4$
(۰/۴۶۱, ۱/۷۲۲, ۴/۴۷۸)	(۱/۳۰۶, ۴/۸۷۶, ۲/۳۹۳)	$E_1$
(۰/۷۲۲, ۴/۵۳۸, ۴/۴۷۸)	(۳/۸۷۶, ۳/۶۹۳, ۲/۳۹۳)	$E_2$
(۳/۵۳۸, ۴/۲۷۸, ۴/۴۷۸)	(۲/۶۹۳, ۱/۱۲۴, ۲/۳۹۳)	$E_3$
(۳/۲۷۸, ۱/۴۶۱, ۴/۴۷۸)	(۰/۱۲۴, ۲/۳۰۶, ۲/۳۹۳)	$E_4$

جدول ۴ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی RRUR<sub>2</sub>-RUU<sub>4</sub>

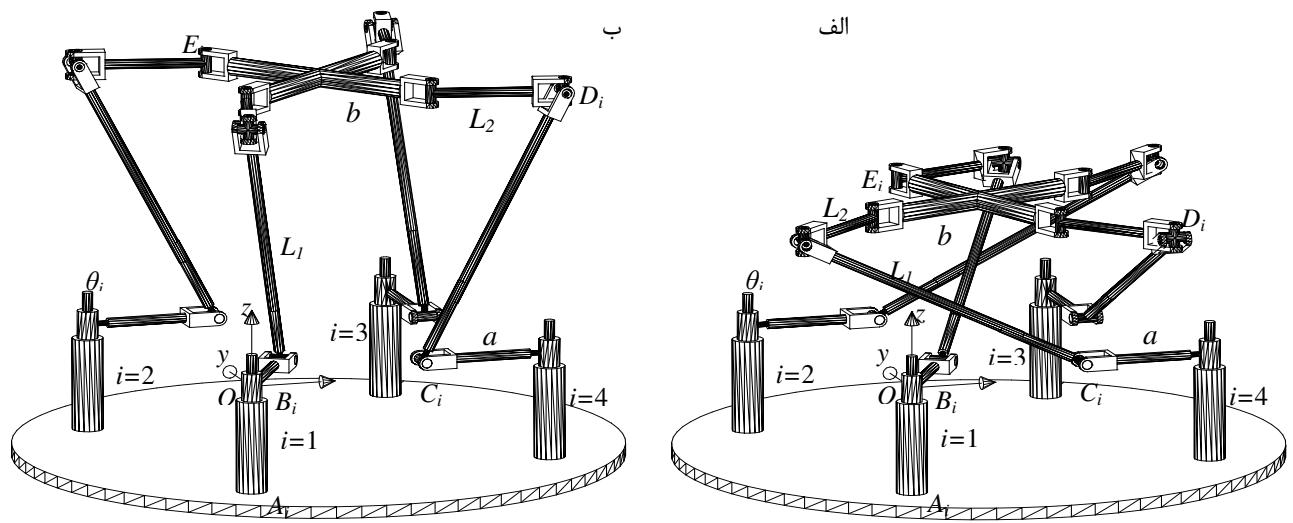
دومین پیکربندی	اولین پیکربندی	
۰/۳۷۰۰	۱/۲۲۴۷	$x$
۳/۷۳۸۶	۲/۵۲۷۷	$y$
۴/۹۹۷۴	۴/۸۵۹۴	$z$
۶۵/۴۰	۱۵۶/۷۰	$\theta$
(۰/۵۱۴۸, ۳/۶۷۲۳, ۰)	(۱/۶۹۱, ۳/۶۰۹, ۰)	$D_1$
(۲/۹۵۵۱, ۴/۵۷۸۷, ۰)	(-۰/۹۰۱, ۵/۶۲۳, ۰)	$D_2$
(۴/۱۵۱۱, ۲/۰۰۵۷, ۰)	(۲/۳۴۳, ۵/۱۱۹, ۰)	$D_3$
(۱/۴۲۱۲, ۱/۲۳۲۰, ۰)	(۴/۹۳۴, ۳/۱۰۶, ۰)	$D_4$
(۰/۳۷۰, ۳/۷۳۸, ۴/۹۹۷)	(۱/۲۲۵, ۲/۵۲۸, ۴/۸۵۹)	$E_1$
(۳/۰۲۱, ۴/۷۲۳, ۴/۹۹۷)	(۰/۱۸۰, ۵/۱۵۶, ۴/۸۵۹)	$E_2$
(۴/۰۰۶, ۲/۰۷۲, ۴/۹۹۷)	(۲/۸۰۹, ۶/۲۰۱, ۴/۸۵۹)	$E_3$
(۱/۳۵۵, ۱/۰۸۷, ۴/۹۹۷)	(۳/۸۵۳, ۳/۵۷۲, ۴/۸۵۹)	$E_4$

$$\begin{aligned}
 F_k(t) = & \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (v_j t^j)^k \right) \right) = \\
 & (t^{20} - 16.64 t^{19} + \dots + 1.7 \cdot 10^7 t - 1.68 \cdot 10^6)^2 \\
 & (t^{16} + 1.37 t^{15} + \dots + 2947.31 t - 427.15)^2 \\
 & (t^{16} + 5.81 t^{15} + \dots + 9272.52 t - 4289.71)^2 \\
 & (t^{16} + 2.98 t^{15} + \dots + 27126.8 t - 3841.5)^2 \\
 & (t^{16} + 22.8 t^{15} + \dots - 8.0 \cdot 10^5 t + 1.0 \cdot 10^5)^2 \\
 & (t^6 + 6.92 t^5 + \dots + 382.99 t - 114.19)^2 \\
 & (t^6 + 14.92 t^5 + \dots - 14.45 t - 14.11)^2 \\
 & (t^6 + 9.66 t^5 + \dots - 14.08 t - 8.36)^2 \\
 & (t^5 - 8.74 t^4 + \dots + 45.97 t - 13.71)^2 \\
 & (t^2 - 1.51 t - 1)^2 (t^2 - 0.37 t - 1)^2 \\
 & (t^2 + 8.92 t - 1)^2 (t^2 + 1.46 t - 1)^2 \quad (43) \\
 F_k(t) = & \left( \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (\mu_j t^j)^k \right) \right) = \\
 & (t^2 - 2.309401077 t + 0.381197845)^2 \\
 & (t^2 - 3.20 t + 2.60)^2 (t^2 + 1)^{10} \quad (44)
 \end{aligned}$$

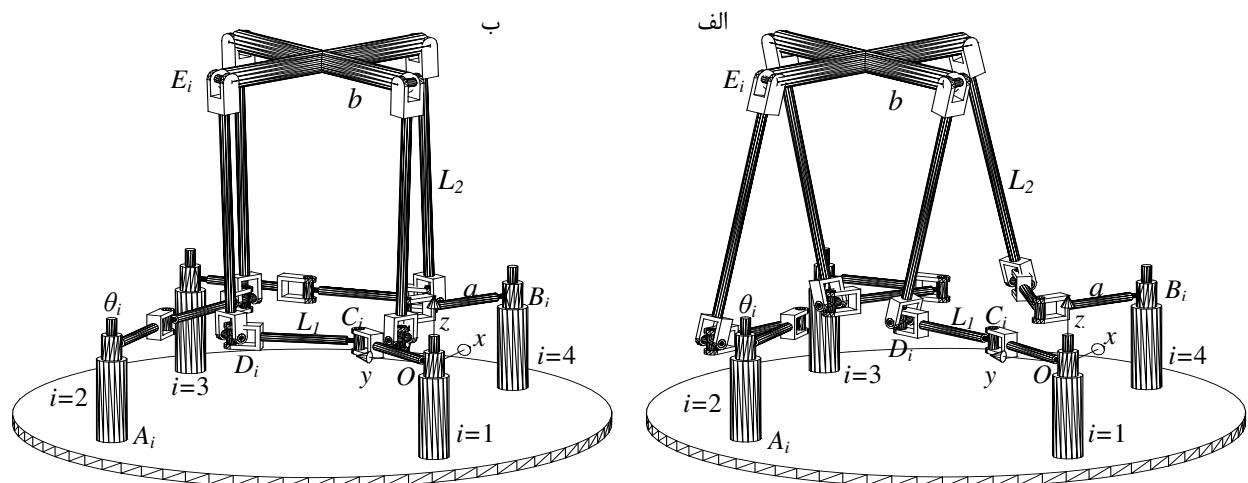
همچنین، در جداول ۲ تا ۴ نیز، مقادیر به دست آمده از معادلات سینماتیک مستقیم برای دو پیکربندی از هر ربات آورده شده و در شکل های ۹ تا ۱۱ ترسیم شده است.

جدول ۲ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی RUU<sub>4</sub>-RUU<sub>4</sub>

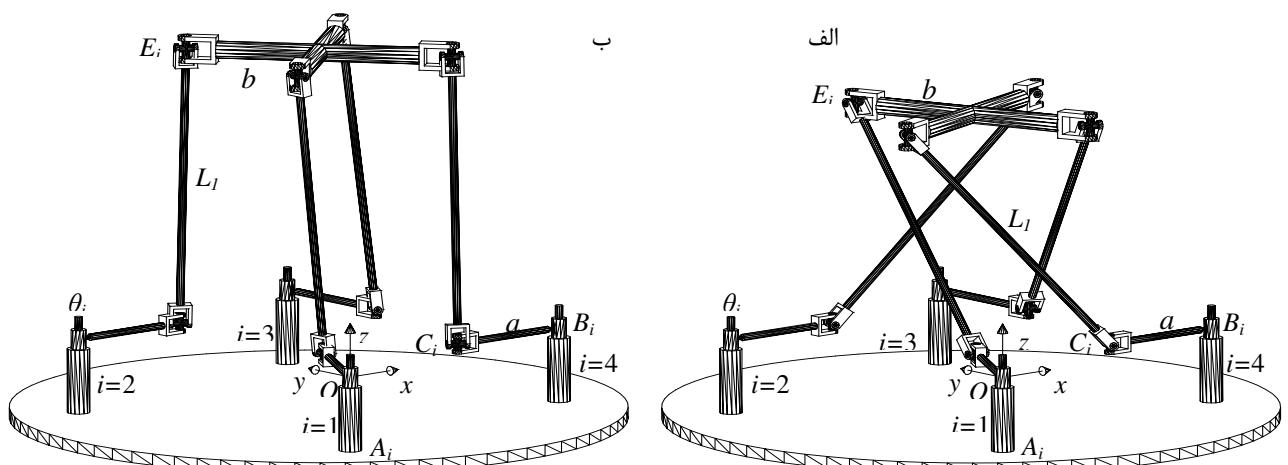
اولین پیکربندی	دومین پیکربندی	
۰/۴۶۱۴	۱/۳۰۶۵	$x$
۱/۷۲۲۱	۴/۸۷۵۹	$y$
۴/۹۷۰۹	۳/۸۷۴۸	$z$
۱۲۹/۷۰	۲۰/۳۰	$\theta$
(۱/۳۰۶, ۴/۸۷۶, ۳/۸۷۶)	(۰/۴۶۱, ۱/۷۲۲, ۴/۹۷۱)	$E_1$
(۳/۸۷۶, ۳/۶۹۳, ۳/۸۷۶)	(۰/۷۲۲, ۴/۵۳۸, ۴/۹۷۱)	$E_2$
(۲/۶۹۳, ۱/۱۲۴, ۳/۸۷۶)	(۳/۵۳۸, ۴/۲۷۸, ۴/۹۷۱)	$E_3$
(۰/۱۲۴, ۲/۳۰۶, ۳/۸۷۶)	(۳/۲۷۸, ۱/۴۶۱, ۴/۹۷۱)	$E_4$



شکل ۹ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات  $1\text{-RRUR}_4$ . ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات  $1\text{-RRUR}_4$



شکل ۱۰ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات  $2\text{-RRUR}_4$ . ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات  $2\text{-RRUR}_4$



شکل ۱۱ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات  $4\text{-RUU}$ . ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات  $4\text{-RUU}$

- Machines and Mechatronics*, Montreal, Canada, 2001, pp. M3-01-012.
- [9] Herve J. M., "The Lie Group of Rigid Body Displacements, A Fundamental Tool for Mechanisms Design", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, No. 5, 1999, pp. 719-730.
- [10] Kong X., Gosselin C. M., "Type Synthesis of 4-DOF SP-Equivalent Parallel Manipulators: A Virtual-Chain Approach", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, No. 11, 2006, pp. 1306-1319.
- [11] Kong X., Gosselin C. M., *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*, Berlin, Springer 2007, pp. 141-157.
- [12] Angeles J., "The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators", *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Canada, Quebec, October 3-4, 2002, pp. 160-169.
- [13] Tale-Masouleh M., Gosselin C. M., Husty M. L., Walter D. R., "Forward Kinematic Problem of 5-RPUR Parallel Mechanisms (3T2R) with Identical Limb Structures", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, No. 7, 2011, pp. 945-959.
- [14] Husty M. L., "An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, 1996, pp. 365-379.
- [15] Gosselin C. M., Merlet J. P., "The Direct Kinematics of Planer Parallel Manipulators: Special Architectures and Number of Solution", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 8, 1994, pp. 1083-1097.
- [16] Yee C. S., Lim K. B., "Forward Kinematics Solution of Stewart Platform using Neural Networks", *Neurocomputing*, Vol. 16, 1997, pp. 333-349.
- [17] Bruyninckx H., "Forward Kinematics of Hunt-Primrose Parallel Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, 1999, pp. 657-664.
- [18] Lee T. Y., Shim J. K., "Forward Kinematic of General 6-6 Stewart Platform using Algebraic Elimination", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, 2001, pp. 1073-1085.
- [19] Tale-Masouleh M., Gosselin C. M., Saadatzi M. H., Kong H., Taghirad H. D., "Kinematic Analysis of 5-RPUR (3T2R) Parallel Mechanisms", *Meccanica*, Vol. 46, 2011, pp. 131-146.
- [20] Craig J. J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Pearson Education Inc; Third Ed., 2005, pp. 62-92.
- [21] Cox D. A., Little J. B., O'Shea D., *Using Algebraic Geometry*, Berlin Heidelberg, Springer Verlag 2005, pp. 77-136.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله سینماتیک مستقیم سه ربات موازی ۴ درجه آزادی با زنجیره‌های یکسان و الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و یک درجه‌ی دورانی موسوم به شونفلیز در فضای اقلیدسی سهبعدی بررسی گردیده و عبارت تکمتغیرهای برای بیان سینماتیک مستقیم هر یک از این ربات‌ها با استفاده از روش برآیند به دست آورده شده است و با حل سینماتیک معکوس آن مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که عبارت‌های تکمتغیرهای از درجات ۳۴۴، ۲۳۰ و ۸، به ترتیب، بیان‌کننده سینماتیک مستقیم سه ربات موازی 1-RRUR، 2-RRUR و 4-RRUR می‌باشند. بنابراین، مسئله سینماتیک مستقیم سه ربات موازی فوق به ترتیب دارای حداقل ۳۴۴ و ۸ جواب حقیقی می‌باشد. همچنین، نتایج به دست آمده از روش برآیند نشان می‌دهد که چند عبارت تکمتغیره کاملاً مجزا بیان‌گر مسئله سینماتیک مستقیم ۳ ربات موازی فوق می‌باشند.

## ۶- مراجع

- [1] Siciliano B., Khatib O., *Springer Handbook of Robotics*, Germany, Berlin Heidelberg, Springer, 2008, pp. 269-281.
- [2] Stewart D., "A Platform with 6 Degrees of Freedom", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, 1965, pp. 371-386.
- [3] Wang J., Liu X. J., "Analysis of a Novel Cylindrical 3-DoF Parallel Robot", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 42, 2003, pp. 31-46.
- [4] Jensen K. A., Lusk C. P., Howell L. L., "An XYZ Micromanipulator with Three Translational Degrees of Freedom", *Robotica*, Vol. 24, No. 3, 2006, pp. 305-314.
- [5] Zlatanov D., Gosselin C. M., "A Family of New Parallel Architectures with Four Degrees of Freedom", *Electronic Journal of Computational Kinematics*, Vol. 1, No. 1, 2001, pp. 1-10.
- [6] Joshi S. A., Tsai L. W., "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators", *ASME J Mech. Des.*, No. 124, 2002, pp. 254-258.
- [7] Clavel R., "DELTA, A Fast Robot with Parallel Geometry", *18th International Symposium on Industrial Robots*, Lausanne Switzerland, 1988, pp. 91-100.
- [8] Kong X., Gosselin C. M., "Generation of Parallel Manipulators with Three Translational Degrees of Freedom using Screw Theory", *Proceedings of the CCToMM Symposium on Mechanisms*,