



مطالعه منتجه‌های نیرو و گشتاور پیرامون گشودگی چهارضلعی در چندلایه‌های نامتقارن

محمد جعفری^{1*}، حصان السادات آشوری سوادکوهی²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، کد پستی 3619995161، m_jafari821@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 03 دی 1393

پذیرش: 21 بهمن 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلیدواژگان:

منتجه نیرو و گشتاور

حل تحلیلی

چندلایه نامتقارن

گشودگی چهارضلعی

چکیده

در این مقاله با بسط روش متغیر مختلط لخنیتسکی، تحلیل تنش چندلایه‌های نامتقارن دارای گشودگی چهارضلعی مورد مطالعه قرار گرفته است. لخنیتسکی از روش متغیر مختلط، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی و بیضی شکل را در صفحات ناهمسانگرد به دست آورد. با بسط این روش برای چندلایه‌های کامپوزیتی نامتقارن و استفاده از تابع نگاشت همنا، سعی شده است تا توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های غیر دایروی مورد بررسی قرار گیرد. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مختلف نظیر نسبت ابعاد گشودگی، زاویه چرخش و شعاع انحنای گوشه گشودگی بر توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور در اطراف آن مطالعه می‌شود. نتایج مطالعه تأثیر این پارامترها بر روی منتجه‌های نیرو و گشتاور، برای دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ ارائه شده است. برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، از حل عددی اجزای محدود استفاده شده است. نتایج حاصل از حل عددی تطابق خوبی با حل تحلیلی دارد. با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که بر خلاف انتظار همواره گشودگی دایروی بهترین هندسه برای کاهش تمرکز تنش در صفحات دارای گشودگی نیست و در مواردی با انتخاب انحنای مناسب برای گشودگی چهار ضلعی می‌توان تمرکز تنش کمتری در مقایسه با گشودگی دایروی داشت. همچنین با انتخاب زاویه چرخش مناسب برای گشودگی و انتخاب چیدمان و زاویه الیاف مناسب برای لایه‌ها می‌توان منتجه‌های نیرو و گشتاور ایجاد شده در اطراف گشودگی را به میزان قابل توجهی کاهش داد.

A study of the force and moment resultants around quadrilateral hole in unsymmetric laminates

Mohammad Jafari, Hasaan Sadat Ashoori Savadkoohi

Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran.

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari821@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 24 December 2014
Accepted 10 February 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:

Force and Moment Resultants
Analytical Solution
Unsymmetric Laminate
Quadrilateral Hole

ABSTRACT

In this paper, with the development of the classical Lekhnitskii's complex variable methods, stress analysis of unsymmetric laminated with a quadrilateral hole has been studied. By using the complex variable method, Lekhnitskii obtained the stress distribution around a circular and elliptical hole in anisotropic plates. With the extension of this method to unsymmetric composite laminates and by using the conformal mapping, an attempt has been made to investigate the stress distribution around non-circular holes. In this article, the effect of various parameters such as aspect ratio of hole shape, hole orientation and bluntness on force and moment resultants around the hole are considered. The results of the effect of these parameters have been presented for $[0/90]_T$ and $[-45/45]_T$ layout. The finite element method is used to verify the results of the analytical solution. Analytical results are in good agreement with the finite element solution, based on the analytical results. Unexpectedly, the circular hole is not the best geometry to reduce the stress concentration in perforated plates and in some cases by selecting the appropriate bluntness for quadrilateral hole, stress concentration less than circular hole can be achieved. Also, by choosing an appropriate rotation angle and selecting the proper fiber angle for each layer, the force and moment resultants around the hole can be significantly reduced.

1- مقدمه

خاصی برخوردار است. در برخی از کاربردهای عملی، طراح ناچار به ایجاد گشودگی در سازه است. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، ایجاد راه ورود و خروج، سرویس دهی و یا کاهش وزن سازه اشاره کرد. این امر باعث ایجاد تمرکز تنش و در نهایت شکست سازه در این نواحی می‌شود. بنابراین برای طراحی دقیق صفحات حاوی گشودگی

مواد مرکب در صنایع مختلف مانند صنایع دریایی، خودرو سازی، صنایع نفت و گاز، هوافضا کاربردهای قابل توجهی دارند. علت استفاده گسترده از این مواد، مزیت آن‌ها از قبیل استحکام، وزن کم و عمر بالای آن‌ها نسبت به مواد دیگر است. به دلیل کاربرد گسترده این مواد و خواص مکانیکی متفاوتی که نسبت به مواد فلزی دارند، مطالعه استحکام شکست آن‌ها از پیچیدگی‌های

Please cite this article using:

M. Jafari, H. S. Ashoori Savadkoohi, A study of the force and moment resultants around quadrilateral hole in unsymmetric laminates, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 193-204, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل‌ها و توزیع تنش‌ها لازم است. تمرکز تنش اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های مهندسی دارد. با توجه به تحقیقات موجود مشخص شده است که سازه‌های دارای گشودگی، استحکام شکست پایین‌تری نسبت به قطعات بدون گشودگی دارند و 80 درصد شکست‌های انجام شده در سازه‌های هوایی از محل بست‌ها و اتصالات روی داده است [1]. لذا طراحی باید به گونه‌ای باشد تا مقدار تمرکز تنش در نواحی که دارای ناپوستگی هندسی هستند؛ کاهش یابد. به این منظور محققان زیادی از روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی به بررسی توزیع تنش صفحات دارای گشودگی پرداخته‌اند.

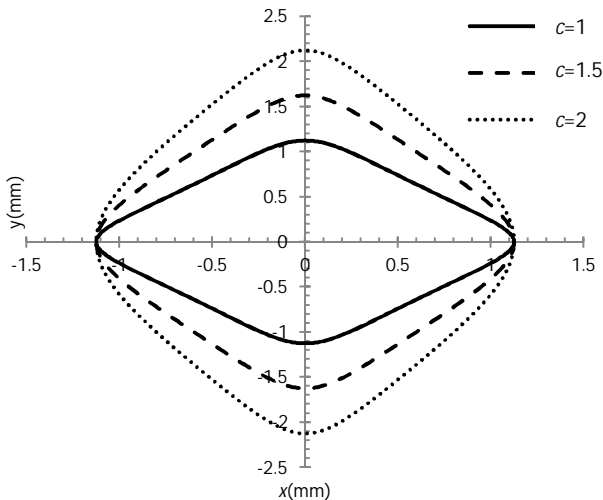
استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی [2] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. سپس ساوین [3] با استفاده از این روش، در مورد صفحات همسانگرد نامحدود برای گشودگی‌های مختلف و در مورد صفحات ناهمسانگرد، فقط برای گشودگی دایروی و بیضی شکل مطالعاتی را انجام داد. لخنیتسکی [4] تئوری خود را برای حل عمومی صفحات ناهمسانگرد نامحدود با گشودگی دایروی و بیضی‌شکل در اندازه‌های مختلف ارائه داد. راجیه [5] با استفاده از روش لخنیتسکی و استفاده از یک نگاهت هم‌نوا، ضریب تمرکز تنش را برای چندین گشودگی مستطیلی در صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد بررسی کرد و به این نتیجه رسید که بهینه‌سازی گشودگی‌ها، ضریب تمرکز تنش را به میزان چشم‌گیری کاهش می‌دهد. رضایی‌پژند و جعفری [6] با ارائه تابع نگاهتی مناسب به تحلیل تنش صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی شبه‌مربعی پرداختند. آن‌ها با مطالعه زاویه چرخش گشودگی و انحنای گوشه گشودگی، توانستند به تمرکز تنشی کمتر از تمرکز تنش دایره دست یابند. بکر [7] برای صفحاتی که در آن‌ها کوپلینگ بین کشش و خمش وجود دارد؛ با استفاده از روش متغیر مختلط روابط و نتایجی را ارائه کرد. کاربرد این روابط در تحلیل استاتیکی صفحه میانی چندلایه‌های نامتقارن که در اثر نیروی درون‌صفحه‌ای دچار کوپلینگ بین کشش و خمش می‌شوند، دیده می‌شود. اسمر و جتور [8] با تعریف تابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضا می‌کند، توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه ناهمسانگرد و تحت کشش به دست آوردند. آن‌ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه‌ی بار را بر تمرکز تنش مورد بررسی قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام شده است. این تحقیقات در دو دسته متقارن و نامتقارن جای می‌گیرند. ریپیکی و همکارانش [9] با استفاده از روش اجزای محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی را در چندلایه‌ها به دست آوردند. آن‌ها از روش تجربی برای تأیید روش اجزای محدود خود استفاده کرد. در زمینه چندلایه‌های متقارن، کنیش و ویتنی [10] حلی تقریبی برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی ارائه دادند. آن‌ها برای پیش‌بینی ضریب تمرکز تنش در چندلایه‌هایی با جنس‌های مختلف؛ رابطه واحدی را ارائه کردند. بونورا [11] و همکارانش با ارائه عبارتی تحلیلی برای تابع تنش توانستند توزیع تنش اطراف گشودگی‌هایی با هندسه ساده نظیر دایره و بیضی را برای چندلایه‌های متقارن به دست آورند. آن‌ها به کمک روش اجزای محدود دقت حل خود را بررسی کردند. پراساد و شوارتز [12] توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی‌شکل و دایروی را در چندلایه‌های متقارن تحت خمش خالص برای چندین چیدمان مختلف مورد بررسی قرار دادند. یوکادگائونکر [13] و همکارانش با استفاده از روش متغیر مختلط، صفحات چندلایه متقارن حاوی

گشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف را تحلیل کردند. راثو [14] و همکارانش توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی و مربعی را در چندلایه‌های متقارن به دست آوردند. آن‌ها شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه بارگذاری و نوع چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند. اما در تابع نگاهت استفاده شده توسط آن‌ها بررسی شعاع انحنای گوشه گشودگی تنها با تغییر این تابع برای هر گشودگی امکان‌پذیر بود. جعفری و مشیری اول [15] به بررسی تنش در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه‌مستطیلی پرداختند. آن‌ها تأثیر پارامترهایی از قبیل انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، زاویه اعمال بار و چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در زمینه چندلایه‌های نامتقارن کو [16] با استفاده تئوری ورق‌های ناهمسانگرد لخنیتسکی، تمرکز تنش اطراف گشودگی دایروی را برای چیدمان‌ها و زوایای الیاف مختلف چندلایه‌هایی از جنس گرافیت اپوکسی مورد بررسی قرار داد. بکر [17] با استفاده از روابطی که برای صفحات دارای کوپلینگ کشش و خمش ارائه کرده بود؛ چندلایه‌هایی با ترک‌های گریفیث¹ (ترک‌هایی محدود، ساده و مستقیم) را مورد بررسی قرار داد. او از بارگذاری خمشی و درون‌صفحه‌ای در تحلیل خود استفاده کرد. سپس روش پتانسیل مختلط را برای تحلیل تنش چندلایه نامتقارن شامل گشودگی مرکزی بیضی‌شکل [18] بسط داد. او با همین روش تحقیقی در زمینه چندلایه‌های نامتقارن تحت تأثیر نیرو و گشتاور متمرکز [19] انجام داد. چن و شن [20] با گسترش روش متغیر مختلط برای چندلایه‌های نامتقارن، تنش و جابه‌جایی را با چهار تابع هولومورفیک بیان کردند. روش آن‌ها برای چندلایه‌های نامتقارن شامل گشودگی و ترک تحت بارگذاری‌های درون‌صفحه‌ای قابل استفاده است. آن‌ها تحقیق خود را برای چندین چیدمان حاوی گشودگی دایروی و بیضی‌شکل انجام دادند و تأثیر چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند [21]. آن‌ها همچنین با استفاده از تابع گرین، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی‌شکل در چندلایه نامتقارن را مطالعه کردند. آن‌ها برای بارگذاری‌های مختلف مانند نیرو و خمش متمرکز روابطی تحلیلی بیان کردند [22]. یوکادگائونکر و راثو [23] به تحلیل تنش صفحات چندلایه نامتقارن حاوی گشودگی‌های مختلف از قبیل دایره، مربع و بعضی شکل‌های غیرمنتظم دیگر پرداختند. آن‌ها از بارگذاری کششی و برشی در کار خود استفاده کردند. مدنسی و همکارانش [24] با استفاده از روش متغیر مختلط، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی-شکل در یک چندلایه نامتقارن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از بسط و سری لوران آنرژ پتانسیل را به‌دست آوردند و با استفاده از آن میدان تنش جابه‌جایی را محاسبه کردند. به نظر مؤلفان این مقاله، در مطالعاتی که تاکنون در زمینه توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیردایروی در چندلایه‌های نامتقارن صورت گرفته است، تأثیر پارامترهای نسبت ابعاد گشودگی، زاویه چرخش و شعاع انحنای گوشه گشودگی مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا در این مقاله سعی می‌شود تا تأثیر این پارامترها بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی واقع در چندلایه نامتقارن مورد بررسی قرار گیرد و پارامترهای بهینه برای دستیابی به کمترین متجه نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی معرفی شود.

2- تعریف مسأله

مسأله مورد بررسی در این مقاله، یک چندلایه کامپوزیتی نامتقارن است که در مرکز دارای گشودگی چهارضلعی است. ابعاد چندلایه در مقایسه با ابعاد گشودگی طوری در نظر گرفته شده است که بتوان آن را بی‌نهایت فرض کرد.

1- Griffith crack



شکل 3 تأثیر پارامتر c بر هندسه گشودگی

با فرض $\rho = 1$ و $\zeta = \rho e^{i\theta}$ و $\rho = 1$ برای دایره واحد، متغیر ζ به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$\zeta = \cos\theta + i\sin\theta \quad (3)$$

بنابراین تابع نگاشت برحسب ζ به صورت رابطه (4) قابل ارائه است:

$$z_j = \frac{\lambda}{2} \left[a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta} + \omega c_j' \zeta^n + \frac{\omega d_j'}{\zeta^n} \right] \quad (4)$$

که در آن ثوابت a_j, b_j, c_j' و d_j' مطابق رابطه (5) برابرند:

$$\begin{aligned} a_j &= 1 + i s_j c, & b_j &= 1 - i s_j c \\ c_j' &= 1 - i s_j, & d_j' &= 1 + i s_j \end{aligned} \quad (5)$$

4- حل تحلیلی

در تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، رفتار ساختاری چندلایه به وسیله ماتریس سفتی که شامل ماتریس‌های A_{ij}, B_{ij} و D_{ij} است، به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ماتریس A_{ij} ، سفتی کششی، ماتریس B_{ij} کوپل بین کشش و خمش و ماتریس D_{ij} سفتی خمشی بوده و از روابط (7)، (8) و (9) به دست می‌آیند:

$$A = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k - z_{k-1}) \quad (7)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

$[\bar{Q}]$ ماتریس سفتی کاهش یافته برای هر لایه است. k تعداد لایه‌ها و z_k مطابق شکل 1، فاصله لایه k ام تا صفحه میانی است. در معادله (6) $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ و γ_{xy} کرنش‌های صفحه میانی و $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ انحنا ناشی از جابه‌جایی

توزیع تنش اطراف گشودگی مورد نظر برحسب پارامترهای مختلفی از قبیل انحنا گوشه گشودگی، زاویه چرخش و نسبت ابعاد گشودگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بارگذاری صفحه به صورت کششی در جهت x صورت می‌گیرد. صفحه دارای رفتار الاستیک خطی است و جنس لایه‌های مختلف در این تحقیق گرافیت BMI بوده که خواص آن در جدول 1 ارائه شده است. در این تحقیق از چیدمان‌های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ استفاده شده است. نمایشی از هندسه مسأله و بارگذاری آن در شکل 1 نشان داده شده است. در شکل 1، زاویه چرخش گشودگی با β نشان داده شده است.

3- نگاشت

در این تحقیق از تابع نگاشتی مناسب که قبلاً در مرجع [6] برای مطالعه تک‌لایه‌ها استفاده شده است؛ برای بررسی چندلایه‌های نامتقارن حاوی گشودگی چهارضلعی استفاده می‌شود. به وسیله نگاشت هم‌نوا می‌توان ناحیه خارج گشودگی چهارضلعی در مختصات فیزیکی z ، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای در صفحه ζ انتقال می‌یابد. این تابع نگاشت به صورت رابطه (1) است:

$$z_j = x + s_j y, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

که در آن x و y مطابق رابطه (2) تعریف می‌شوند:

$$x = \lambda(\cos\theta + \omega \cos(n\theta)) \quad (2)$$

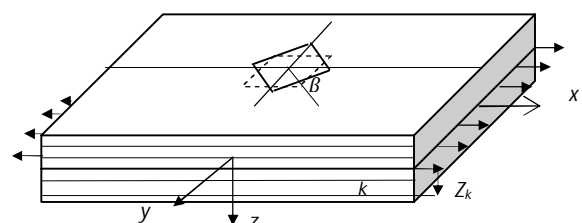
$$y = \lambda(\sin\theta - \omega \sin(n\theta)) \quad (2)$$

s_j ریشه‌های معادله مشخصه درجه هشت مربوط به چندلایه نامتقارن است [18].

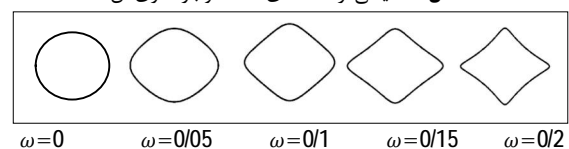
در روابط فوق، پارامتر ω برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر ω نشان دهنده انحنا گوشه گشودگی است. به گونه‌ای که با افزایش مقدار ω تیزی گوشه گشودگی نیز افزایش می‌یابد. پارامتر c تعیین کننده نسبت طول به عرض گشودگی است و اندازه کشیدگی گشودگی را کنترل می‌کند. پارامتر λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد که در این مقاله یک در نظر گرفته شده است و پارامتر n تعیین کننده هندسه گشودگی است که برای گشودگی چهارضلعی سه در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های 2 و 3 تأثیر پارامترهای ω و c را به ترتیب بر روی کشیدگی و انحنا گوشه گشودگی نشان می‌دهند.

جدول 1 خواص مکانیکی ماده [21]

نوع ماده	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
گرافیت BMI	124	8/46	4/59	0/28



شکل 1 نمایشی از هندسه مسأله و بارگذاری آن



شکل 2 تأثیر پارامتر ω بر هندسه گشودگی

عمودی w هستند و با روابط (10) به هم مرتبط می‌شوند:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

$$\chi_x = -w_{,xx} \quad \chi_y = -w_{,yy} \quad \chi_{xy} = -2w_{,xy} \quad (10)$$

اندیس کاما نشان‌دهنده مشتق جزئی نسبت به x و y است. مؤلفه‌های جابه‌جایی u, v و w برحسب تابع پتانسیل تحلیلی و هولومورفیک $\varphi(z_j)$ ($j=1, \dots, 4$) و مشتق مرتبه اول آن (که به تفصیل در بخش تابع پتانسیل معرفی می‌شود) به صورت روابط (11) تعریف می‌شوند [23]:

$$w = 2 \operatorname{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_3(z_3) + \varphi_4(z_4)]$$

$$u = 2 \operatorname{Re}[p_j \varphi'_j(z_j)], \quad v = 2 \operatorname{Re}[q_j \varphi'_j(z_j)] \quad (11)$$

در روابط (11) منظور از Re قسمت حقیقی تابع درون کروسه است و اندیس‌های این معادلات از قاعده جمع اندیسی پیروی می‌کنند. مقادیر مختلط s_j, p_j و q_j با به کارگیری روابط (10) و (11) به منظور ارائه مؤلفه‌های کرنش و انحنا در رابطه (6) بر حسب تابع پتانسیل $\varphi(z_j)$ جایگذاری نتایج حاصل شده در معادلات تعادل (12) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات مربوط به محاسبه s_j, p_j و q_j در مرجع [7] آورده شده اند. منتجه‌های نیرو و گشتاور بر حسب مشتق دوم تابع پتانسیل به صورت رابطه (13) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_x &= 2 \operatorname{Re}[c_j \varphi''_j(z_j)], \quad N_y = 2 \operatorname{Re}[d_j \varphi''_j(z_j)], \\ N_{xy} &= 2 \operatorname{Re}[e_j \varphi''_j(z_j)], \quad M_x = 2 \operatorname{Re}[f_j \varphi''_j(z_j)], \\ M_y &= 2 \operatorname{Re}[g_j \varphi''_j(z_j)], \quad M_{xy} = 2 \operatorname{Re}[h_j \varphi''_j(z_j)] \end{aligned} \quad (13)$$

4-1- محاسبه تابع پتانسیل

تابع پتانسیل مسأله با استفاده از روش جمع آثار¹، از جمع توابع پتانسیل در دو مرحله، قابل محاسبه است. در مرحله اول، صفحه بدون گشودگی با بارگذاری در لبه‌های خارجی آن در نظر گرفته شده است. در اثر این بارگذاری در نقاطی که مرز گشودگی را مشخص می‌کنند، بار داخلی ایجاد می‌شود. چون مرز گشودگی در مسأله‌ی اصلی عاری از بار است؛ بنابراین فرض می‌شود که در حالت دوم نیرویی مخالف بار داخلی ایجاد شده بر مرز گشودگی اعمال می‌شود تا در نهایت مرز گشودگی بدون بار باشد. با جمع توابع پتانسیل هر یک از حالت‌های اشاره شده، تابع پتانسیل کل به دست می‌آید (شکل 4).

در حالت اول در صورت نبود گشودگی، تابع پتانسیل به صورت یک ثابت مختلط Az خواهد بود. این ثابت مختلط با اعمال شرایط مرزی در روابط (13) به دست می‌آید [23]. در تحقیق حاضر، چندلایه تحت بارگذاری در جهت x قرار دارد. در نتیجه تنها نیروی عملی در مرز $1 = N_x^\infty$ در نظر گرفته می‌شود. در مرحله دوم با استفاده از تابع پتانسیل حالت اول، نیروهای داخلی f_x و f_y و نیروی عرضی $p(s)$ و گشتاور خمشی $m(s)$ محاسبه می‌شوند. رابطه بین این مقادیر و منتجه‌های نیرو به صورت رابطه (14) است [23]:

$$\begin{aligned} N_x dy - N_{xy} dx &= -f_x ds \\ N_{xy} dy - N_y dx &= -f_y ds \end{aligned} \quad (14)$$

انتگرال نیروهای عرضی مطابق رابطه (15) برابرند با [23]:

$$\int_0^s p(s) ds = f(s) \quad (15)$$

$p(s)$ مطابق رابطه (16) برابر است با [23]:

$$\int_0^s \left(Q_n + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} \right) ds = - \int_0^s p(s) ds \quad (16)$$

به عبارت دیگر مطابق رابطه (17):

$$P + M_{nt} = -f(s) \quad (17)$$

$$\int_0^s Q_n ds = P, \quad \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} ds = M_{nt}$$

گشتاور خمشی قائم m_n در حالت دوم با رابطه (18) بیان می‌شود:

$$M_n = -m(s) \quad (18)$$

مؤلفه‌های قائم و مماسی گشتاور توسط ماتریس انتقال به $f(s)$ و $m(s)$ مرتبط می‌شوند. با قرار دادن منتجه‌ها بر حسب تابع پتانسیل مرتبه اول، شرایط مرزی مرحله دوم به صورت روابط (19) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \int_0^s f_x ds &= 2 \operatorname{Re}[e_j A_j z_j] \\ \int_0^s f_y ds &= 2 \operatorname{Re}[d_j A_j z_j] \\ - \int_0^s (mdx - f dy) &= 2 \operatorname{Re}[g_j A_j z_j] + cy \\ - \int_0^s (mdy + f dx) &= 2 \operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) A_j z_j] + cx \end{aligned} \quad (19)$$

با در نظر گرفتن منتجه‌ها بر حسب $\varphi''_{j2}(z_j)$ مطابق رابطه (13) و جایگذاری در (19) روابط (20) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[e_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2 \operatorname{Re}[e_j A_j z_j] \\ 2 \operatorname{Re}[d_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2 \operatorname{Re}[d_j A_j z_j] \\ 2 \operatorname{Re}[g_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2 \operatorname{Re}[g_j A_j z_j] \\ 2 \operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2 \operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) A_j z_j] \end{aligned} \quad (20)$$

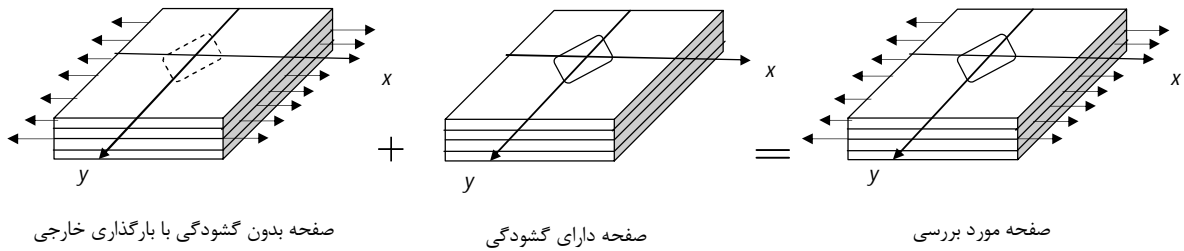
با تعریف تابع نگاشت در این معادلات، تابع پتانسیل حالت دوم در صفحه ζ به دست می‌آید. فرمول شوارتز برای تابع هولومورفیک $\varphi(\zeta)$ و $|\zeta| = 1$ در داخل ناحیه دایره‌ای به شعاع واحد به صورت رابطه (21) تعریف می‌شود [23]:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \operatorname{Re}[\varphi(t)] \frac{t + \zeta dt}{t - \bar{\zeta} t} + ia_0 \quad (21)$$

با قرار دادن شرایط مرزی در این انتگرال، می‌توان مشتق دوم تابع نگاشت مرحله دوم را به صورت روابط (22) محاسبه کرد:

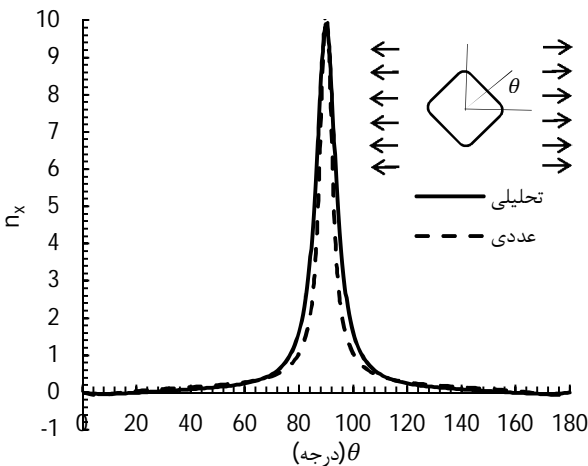
$$\begin{aligned} e_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[(k_1 + k_2) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n (k_3 + k_4) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ d_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[(k_5 + k_6) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n (k_7 + k_8) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ e_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[(k_1 + k_2) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n (k_3 + k_4) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ (2h_j + s_j g_j) \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[(k_{13} + k_{14}) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n (k_{15} + k_{16}) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

1- Superposition Principle

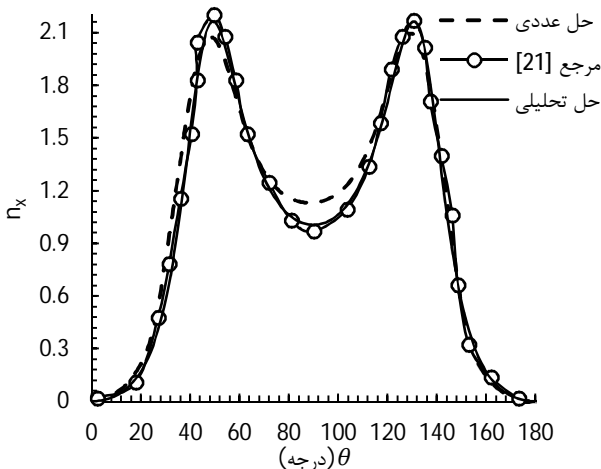


شکل 4 نمایشی از روش حل

گشتاور را در چندلایه‌های نامتقارن حاوی گشودگی دایروی و بیضی شکل در چیدمان‌های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ مورد بررسی قرار دادند. شکل 6 نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، حل ارائه شده در مرجع [21] و حل عددی را برای منتجه نیرو در جهت x در اطراف گشودگی دایروی نشان می‌دهد. زاویه θ زاویه پیرامون گشودگی است و منتجه نیرو بی بعد نسبت منتجه نیرو در اطراف گشودگی به بارگذاری اعمالی (N_i/N_x^∞) (که در آن i می‌تواند x و y و باشد) است. بارگذاری در لبه‌های صفحه مورد بررسی $N_x^\infty = 1$ در نظر گرفته xy



شکل 5 مقایسه منتجه نیروی بی بعد در جهت x در اطراف گشودگی در چیدمان $[0/90]_T$ با دو روش حل تحلیلی و اجزای محدود



شکل 6 مقایسه منتجه نیروی بی بعد در جهت x در اطراف گشودگی دایروی در چیدمان $[-45/45]_T$ با روش‌های مختلف

که در آن k_1 تا k_{16} مطابق رابطه (23) عبارتند از:

$$\begin{aligned} k_1 &= e_j A_j a_j, & k_2 &= e_j A_j b_j, \\ k_3 &= e_j A_j c_j', & k_4 &= e_j A_j d_j', \\ k_5 &= d_j A_j a_j, & k_6 &= d_j A_j b_j, \\ k_7 &= d_j A_j c_j', & k_8 &= d_j A_j d_j', \\ k_9 &= g_j A_j a_j, & k_{10} &= g_j A_j b_j, \\ k_{11} &= g_j A_j c_j', & k_{12} &= g_j A_j d_j', \\ k_{13} &= (2h_j + s_j g_j) A_j a_j, & k_{14} &= (2h_j + s_j g_j) A_j b_j, \\ k_{15} &= (2h_j + s_j g_j) A_j c_j', & k_{16} &= (2h_j + s_j g_j) A_j d_j' \end{aligned} \quad (23)$$

لازم به ذکر است که اندیس‌های موجود در معادله (23) از قاعده جمع اندیسی پیروی می‌کنند.

به این ترتیب تابع پتانسیل مرحله دوم در صفحه Z از رابطه (24) به دست می‌آید:

$$\varphi_{j2}''(z_j) = \frac{\varphi_{j2}''(\zeta)}{z_j'} \quad (24)$$

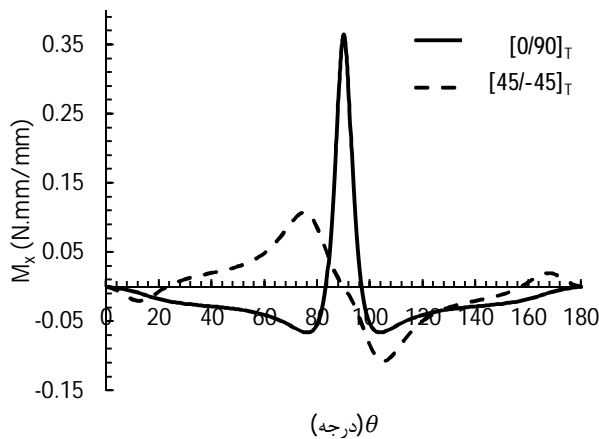
که در آن z' مشتق مرتبه اول تابع نگاشت نسبت به ζ است. اکنون با داشتن تابع پتانسیل هر مرحله، تابع پتانسیل کل با استفاده از اصل جمع آثار قابل مطابق رابطه (25) محاسبه است:

$$\varphi_j''(z_j) = \varphi_{j1}''(z_j) + \varphi_{j2}''(z_j) \quad (25)$$

در نهایت با اعمال رابطه (25) در رابطه (13) منتجه‌های نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی به دست می‌آیند.

5- بررسی درستی جواب‌ها

به منظور صحت‌سنجی حل تحلیلی حاضر، با کمک نرم‌افزار آباکوس از حل عددی اجزای محدود استفاده شده است. بدین منظور صفحه‌ای با گشودگی مربعی با انحنای $c=1$ ، $\omega=0/125$ ، زاویه چرخش صفر و تحت بارگذاری کششی مدل شده است. برای مش‌بندی از المان S8R که منطبق با هندسه و فیزیک مسئله است، استفاده شده است. به منظور دستیابی به مش بهینه، در اطراف گشودگی، مش‌بندی بسیار ریزتر از مرزهای خارجی صفحه صورت گرفت و برای یافتن تعداد المان مناسب در اطراف گشودگی، صفحه با تعداد المان‌های متفاوتی مش‌بندی شد و بررسی شد و در نهایت تعداد المان بهینه برای حل عددی به دست آمد. شکل 5 نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی را برای منتجه نیرو بی بعد در اطراف گشودگی چهارضلعی در چیدمان $[0/90]_T$ نشان می‌دهند. علاوه بر روش اجزای محدود از نتایج ارائه شده در مرجع [21] برای بررسی درستی نتایج استفاده شده است. چن و شن با گسترش روش متغیر مختلط برای چندلایه‌های نامتقارن، توزیع منتجه نیرو و



شکل 8 بررسی تغییرات منته گشتاور در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان‌های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$

جدول 2 مقادیر بیشینه منته‌های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$

$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$	منته‌های نیرو (بی بعد) و منته‌های گشتاور (N.mm/mm)
9/8776	3/4059	n_x
0/4864	1/7066	n_y
1/2659	2/1924	n_{xy}
0/365	0/1076	M_x
0/0222	0/0568	M_y
0/019	0/078	M_{xy}

6-2- تأثیر انحنای گوشه گشودگی

همان‌طور که در بخش تابع نگاشت اشاره شد، پارامتر ω بر میزان نرمی یا تیزی لبه گشودگی تأثیر می‌گذارد و افزایش یا کاهش آن به ترتیب باعث تیز شدن و نرم شدن گوشه‌های گشودگی می‌شود. نتایج ارائه شده در این بخش برای گشودگی چهارضلعی با زاویه چرخش صفر درجه و $c=1$ در دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ است. همان‌طور که در شکل 9 دیده می‌شود، برای چیدمان $[-45/45]_T$ ، منته n_x با افزایش انحنا افزایش می‌یابد. برای هر دو چیدمان برای مقادیر ω بزرگتر از 0.2، این افزایش با شیب زیادی اتفاق می‌افتد. تفاوت رفتار دو چیدمان در فاصله $\omega=0$ تا $\omega=0.08$ قابل توجه است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای چیدمان $[0/90]_T$ مینیمم بیشینه n_x در $\omega=0.08$ اتفاق می‌افتد و این به این معناست که بر خلاف انتظار در این حالت گشودگی دایروی ($\omega=0$)، گشودگی بهینه از لحاظ دستیابی به کمترین مقدار منته نیروی بیشینه نیست. همچنین از این نمودار مشخص است که در انحنای مختلف چیدمان $[-45/45]_T$ بیشینه n_x کمتری نسبت به چیدمان $[0/90]_T$ دارد. در شکل 10 تغییرات بیشینه M_x بر حسب شعاع انحنا مشاهده می‌شود. رفتاری مشابه آنچه در مورد n_x بیان شد در این مورد نیز مشهود است. اما در بررسی بیشینه n_y و M_y چیدمان‌ها رفتار متفاوتی نشان می‌دهند به گونه‌ای که در جهت عمود بر بارگذاری، چیدمان $[0/90]_T$ بیشینه n_y و M_y کمتری نسبت به چیدمان $[-45/45]_T$ دارد. برای چیدمان $[-45/45]_T$ کمترین مقدار بیشینه n_y و M_y در $\omega=0.04$ اتفاق می‌افتد. حال آنکه برای چیدمان $[0/90]_T$ این مقدار در $\omega=0$ رخ می‌دهد. این رفتار برای منته n_y در شکل 11 در دو چیدمان قابل مشاهده است. در مورد

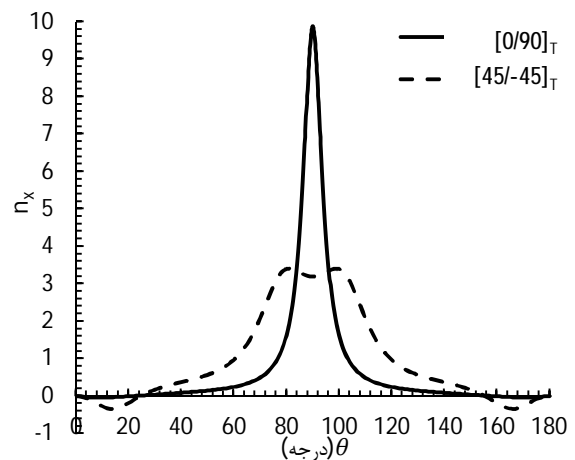
شده است، لذا مقدار منته‌های نیروی بی‌بعد با مقدار منته‌های نیرو برابر است و با n_x ، n_y و n_{xy} نشان داده می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین حل تحلیلی انجام شده و روش‌های دیگر وجود دارد.

6- نتایج

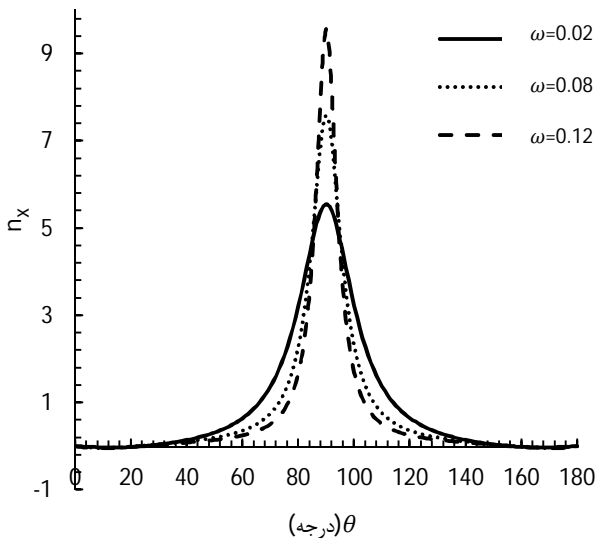
در این مقاله به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی، انحنای گوشه گشودگی و کشیدگی آن بر توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی پرداخته می‌شود. برای این منظور از ماده گرافیت BMI که خواص مکانیکی آن در جدول 1 آمده است، استفاده شده است.

6-1- تأثیر چیدمان لایه‌ها

چیدمان لایه‌ها یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر مقدار بیشینه منته‌های نیرو و گشتاور است. همان‌طور که در شکل 7 مشاهده می‌شود، در شرایط یکسان برای گشودگی چهارضلعی با $c=1$ و $\omega=0.125$ ، بیشینه منته بی‌بعد n_x برای چیدمان $[0/90]_T$ در زاویه $\theta=90^\circ$ و برای چیدمان $[-45/45]_T$ در زوایای $\theta=81^\circ$ و $\theta=99^\circ$ اتفاق می‌افتد. برای منته‌های گشتاور نیز نتایج به همین صورت است. در شکل 8 بیشینه M_x برای چیدمان $[0/90]_T$ برابر 0.365 در زاویه $\theta=90^\circ$ و برای چیدمان $[-45/45]_T$ برابر 0.1076 است که در زوایای $\theta=70^\circ$ و $\theta=155^\circ$ رخ می‌دهد. این نتایج نشان می‌دهد که مقدار بیشینه n_x ، برای چیدمان $[-45/45]_T$ حدوداً 3 برابر کمتر از چیدمان $[0/90]_T$ است. تفاوت در مقادیر بیشینه M_x در دو چیدمان مورد بررسی نیز از همین روند پیروی می‌کند. این رفتار در جهت عمود بر بارگذاری کاملاً متفاوت می‌شود؛ به گونه‌ای که میزان بیشینه n_y برای چیدمان $[0/90]_T$ برابر 0.4864 و برای چیدمان $[-45/45]_T$ برابر 1.7066 است و این بدین معنی است که در جهت عمود بر بارگذاری چیدمان $[0/90]_T$ بیشینه n_y به مراتب کمتری از $[-45/45]_T$ دارد. به همین ترتیب M_y نیز همین رفتار را نشان می‌دهد. منته‌های n_{xy} و M_{xy} نیز برای چیدمان $[-45/45]_T$ مقادیر بیشینه بیشتری دارند. بیشینه منته‌های نیرو و گشتاور برای هر دو چیدمان در جدول 2 آورده شده است. لازم به ذکر است که برای چندلایه نامتقارن تحت کشش در جهت X، توزیع منته‌های نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی نسبت به محور بارگذاری متقارن است.



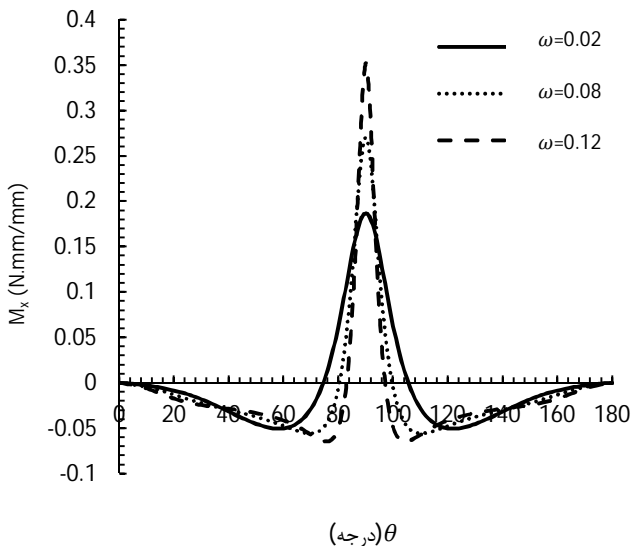
شکل 7 بررسی تغییرات منته نیروی بی‌بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان‌های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$



شکل 12 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ در انحنای مختلف

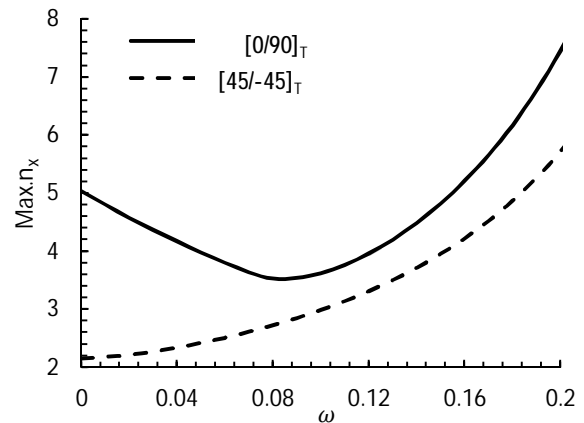
جدول 3 مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ در $\omega=0/2$

منتجه‌های نیرو (بی بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)		
$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$	
7/4575	5/7215	n_x
1/1541	3/4709	n_y
1/3909	4/0989	n_{xy}
0/2602	0/1998	M_x
0/0351	0/1133	M_y
0/0512	1/5098	M_{xy}

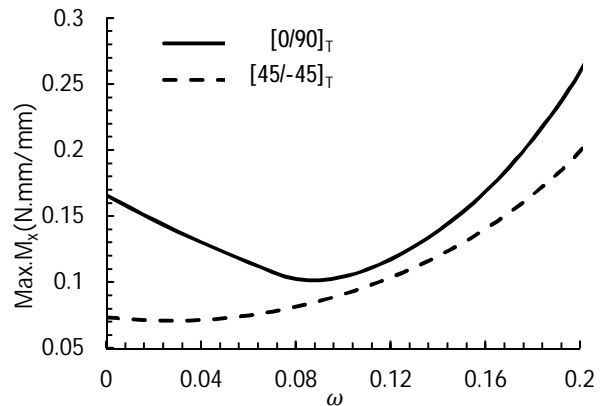


شکل 13 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ در انحنای مختلف

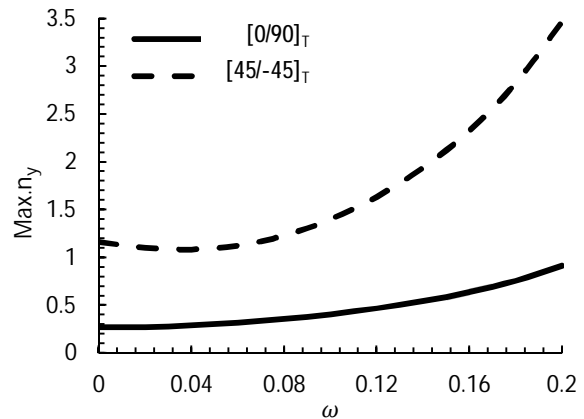
منتجه n_{xy} نتایج نشان می دهد که کمترین بیشینه این منتجه برای چیدمان $[0/90]_T$ در $\omega=0/04$ و برای چیدمان $[-45/45]_T$ در $\omega=0/02$ است. در نهایت کمترین بیشینه منتجه M_{xy} برای چیدمان $[0/90]_T$ در گشودگی دایروی ($\omega=0$) و برای چیدمان $[-45/45]_T$ در $\omega=0/02$ رخ می دهد. جدول 3 مقدار بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور را برای $\omega=0/2$ در دو چیدمان مورد بحث نشان می دهد. شکل های 12 و 13 توزیع منتجه‌های n_x و M_x در اطراف گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ و شکل های 14 و 15 توزیع همین مقادیر را برای چیدمان $[-45/45]_T$ در سه انحنای مختلف نشان می دهد.



شکل 9 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی بعد در جهت X برای چیدمان- های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ بر حسب شعاع انحنای گشودگی

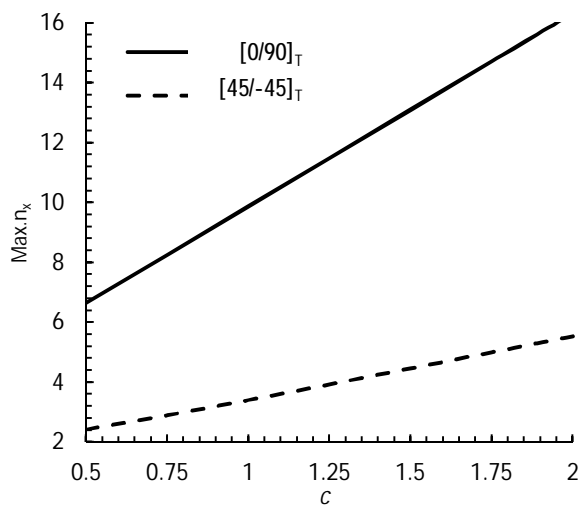


شکل 10 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ بر حسب شعاع انحنای گشودگی

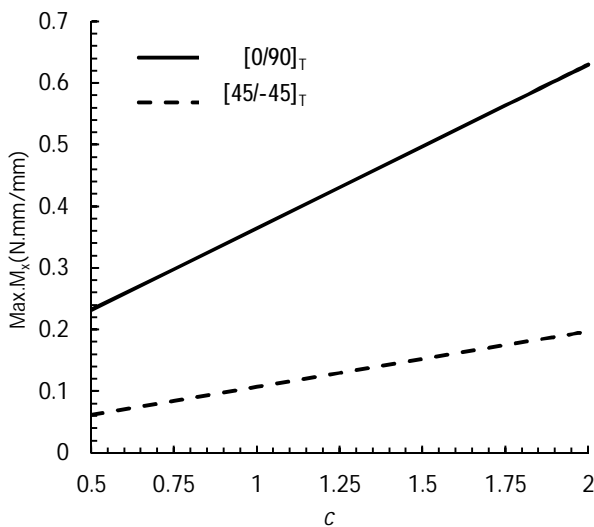


شکل 11 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیرو در جهت Y برای چیدمان های $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ بر حسب شعاع انحنای گشودگی

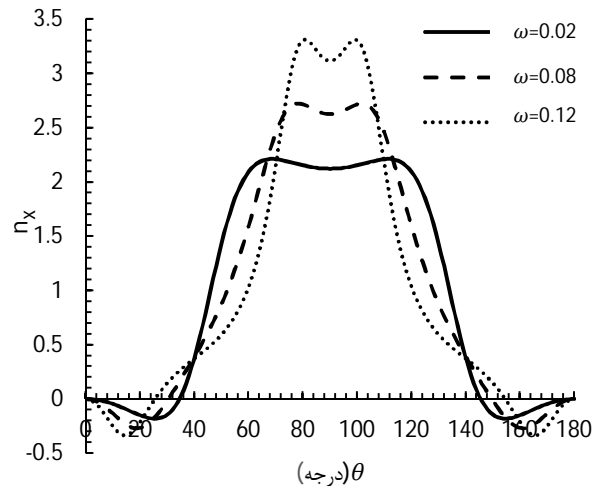
بیشینه n_y برابر 0/887 و بیشینه M_y برابر 0/0222 است. در حالی که در چیدمان $T[-45/45]$ این مقادیر به ترتیب برابر 3/4412 و 0/111 هستند. بنابراین در جهت y چیدمان $T[-45/45]$ بیشینه نیرو و گشتاور بیشتری دارد. این نتایج درباره منتجه‌های n_{xy} و M_{xy} نیز قابل مشاهده است. در جدول 4 مقدار بیشینه منتجه‌ها برای هر دو چیدمان ارائه شده است. در شکل‌های 18 و 19 تغییرات n_x در اطراف گشودگی برای سه کشیدگی مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش مقدار کشیدگی گشودگی، بیشینه منتجه n_x به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای چیدمان $T[0/90]$ با افزایش مقدار c از 0/5 به 2 مقدار بیشینه منتجه n_x تا 59 درصد افزایش می‌یابد. برای چیدمان $T[-45/45]$ نیز با افزایش c در همین بازه مقدار بیشینه منتجه n_x تا 56 درصد بیشتر می‌شود. این رفتار برای سایر منتجه‌های نیرو و گشتاور نیز دیده شد.



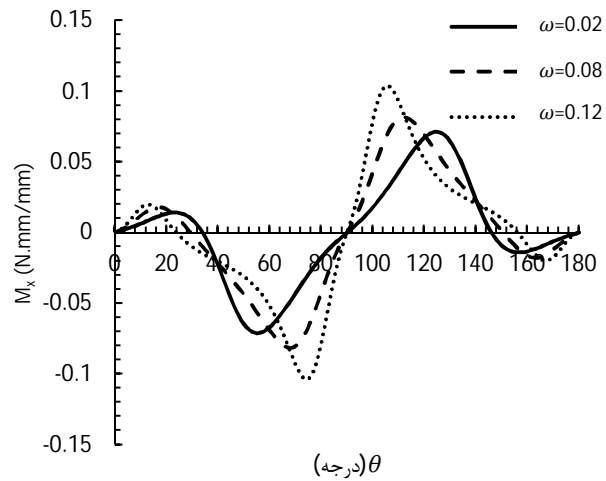
شکل 14 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی بعد در جهت x برای چیدمان‌های $T[0/90]$ و $T[-45/45]$ بر حسب کشیدگی گشودگی



شکل 16 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور برای چیدمان‌های $T[0/90]$ و $T[-45/45]$ بر حسب کشیدگی گشودگی



شکل 14 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت x در اطراف گشودگی برای چیدمان $T[-45/45]$ در انحنای مختلف

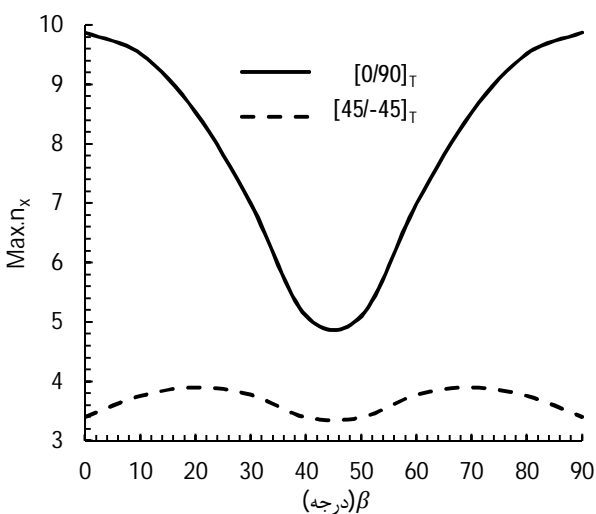


شکل 15 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت x در اطراف گشودگی برای چیدمان $T[-45/45]$ در انحنای مختلف

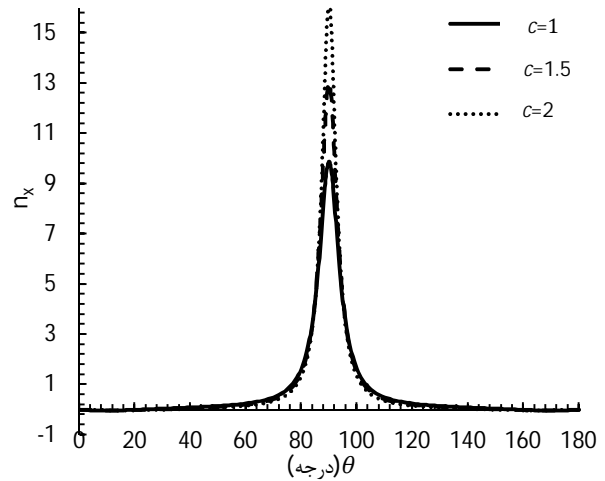
3-6- تأثیر کشیدگی گشودگی

یکی از پارامترهایی که بر هندسه گشودگی تأثیرگذار است، پارامتر c است. با توجه به رابطه (2) پارامتر c فقط در جهت y تابع نگاشت اعمال شده است. لذا مطابق شکل 3 با افزایش مقدار c شکل گشودگی در جهت y کشیده می‌شود. برای دستیابی به یک نگاشت هم‌نوا مقدار c در تابع نگاشت باید در محدوده مشخصی قرار بگیرد؛ به همین منظور سعی شده است نتایج ارائه شده برای c در همین محدوده قرار گیرد. مطابق شکل‌های 16 و 17 تغییر مقدار منتجه نیرو بی بعد و گشتاور با تغییرات c رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش آن باعث افزایش و کاهش منتجه نیرو بی بعد و گشتاور می‌شود. همان‌طور که در شکل 16 دیده می‌شود، مقدار بیشینه منتجه n_x برای چیدمان $T[0/90]$ در $c=2$ برابر 16/334 و برای چیدمان $T[-45/45]$ برابر 5/5407 است. به عبارتی مقدار بیشینه n_x برای چیدمان $T[0/90]$ بیشتر از چیدمان $T[-45/45]$ است و با افزایش کشیدگی گشودگی با شیب تندتری نسبت به چیدمان $T[-45/45]$ تغییر می‌کند. اما در جهت عمود بر بارگذاری رفتار چیدمان‌ها متفاوت است؛ به گونه‌ای که در چیدمان $T[0/90]$

گشودگی است. نحوه چرخش گشودگی در شکل 1 نشان داده شده است. در این بخش با چرخش گشودگی در جهت ساعتگرد، تأثیر این پارامتر بر بیشینه منتجه نیرو و گشتاور و نحوه توزیع آن در اطراف گشودگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل 20 تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه ρ_x در دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ دیده می‌شود. همان‌طور که مشخص است، برای تمامی زوایای چرخش، چیدمان $[0/90]_T$ بیشینه ρ_x بیشتری نسبت به چیدمان $[-45/45]_T$ دارد. برای هر دو چیدمان رفتار نمودارها نسبت به زاویه چرخش $\beta = 45^\circ$ متقارن است. به عبارت دیگر بیشینه ρ_x برای زوایای چرخش متمم یکدیگر با تقریب خوبی برابر است. همچنین مشاهده می‌شود که مینیمم بیشینه ρ_x برای هر دو چیدمان در زاویه $\beta = 45^\circ$ اتفاق می‌افتد. در شکل 21 نیز مشاهده می‌شود، چیدمان $[0/90]_T$ بیشینه M_x بیشتری دارد و تقارن خود را نسبت به زاویه $\beta = 45^\circ$ حفظ می‌کند؛ اما در چیدمان $[-45/45]_T$ رفتار منحنی از این روند پیروی نمی‌کند. مینیمم بیشینه M_x برای چیدمان $[0/90]_T$ در $\beta = 45^\circ$ و برای $[-45/45]_T$ در $\beta = 20^\circ$ اتفاق می‌افتد. در جهت عمود بر محور بارگذاری بر خلاف جهت بارگذاری، چیدمان $[-45/45]_T$ بیشینه ρ_y و M_y بیشتری دارد اما مانند منتجه نیرو در جهت x ، منتجه ρ_y نیز رفتاری متقارن نسبت به زاویه $\beta = 45^\circ$ ، برای هر دو چیدمان دارد، با این تفاوت که مینیمم بیشینه در زوایای $\beta = 0^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ (که هر دو نشان‌دهنده‌ی یک هندسه برای گشودگی هستند) رخ می‌دهد. M_y در چیدمان $[0/90]_T$ نسبت به زاویه $\beta = 45^\circ$ متقارن است و مینیمم آن در همین زاویه اتفاق می‌افتد، اما در چیدمان $[-45/45]_T$ کمترین مقدار بیشینه آن در زاویه $\beta = 10^\circ$ اتفاق می‌افتد و نمودار رفتار متقارن ندارد. رفتار منتجه ρ_{xy} برای هیچ‌کدام از چیدمان‌ها متقارن نیست و مینیمم بیشینه برای چیدمان $[0/90]_T$ در زاویه $\beta = 30^\circ$ و برای چیدمان $[-45/45]_T$ در زاویه $\beta = 20^\circ$ اتفاق می‌افتد. رفتار منتجه M_{xy} برای چیدمان $[-45/45]_T$ نسبت به زاویه $\beta = 45^\circ$ متقارن است و کمترین مقدار بیشینه آن در زوایای $\beta = 0^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ است. برای چیدمان $[0/90]_T$ رفتار متقارنی وجود ندارد و کمترین مقدار بیشینه منتجه M_{xy} در زاویه چرخش $\beta = 80^\circ$ رخ می‌دهد.



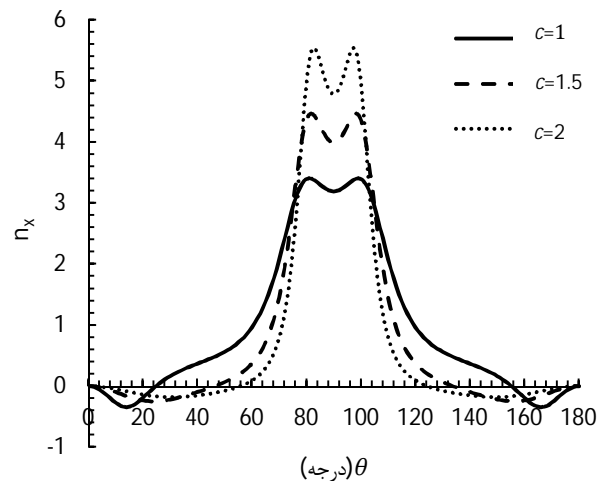
شکل 20 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی‌بعد در جهت x برحسب زاویه چرخش گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$



شکل 18 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی‌بعد در جهت x در اطراف گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ در کشیدگی‌های مختلف

جدول 4 مقادیر منتجه‌های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$ در $c=2$

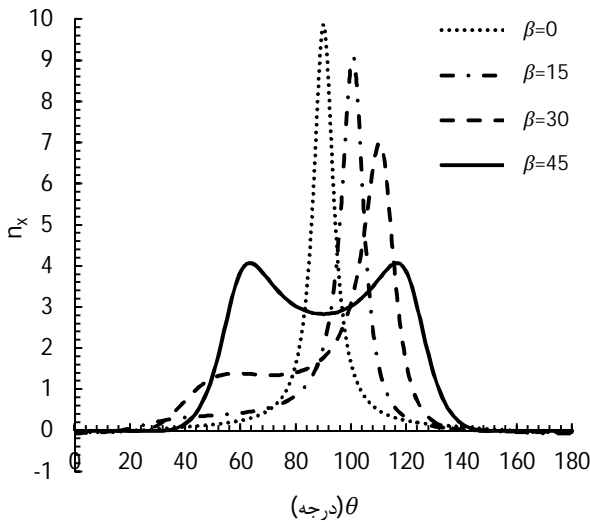
منتجه‌های نیرو (بی‌بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)		
$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$	
16/334	5/5407	ρ_x
0/887	3/4412	ρ_y
2/1258	4/0217	ρ_{xy}
0/6304	0/1975	M_x
0/0222	0/111	M_y
0/0336	0/1484	M_{xy}



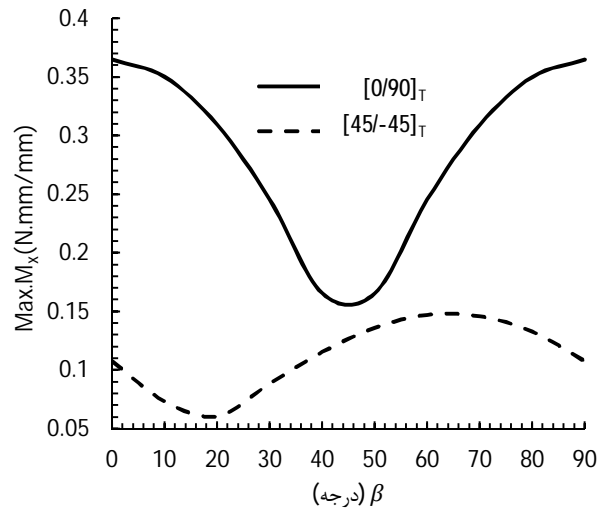
شکل 19 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی‌بعد در جهت x در اطراف گشودگی برای چیدمان $[-45/45]_T$ در کشیدگی‌های مختلف

4-6- تأثیر زاویه چرخش گشودگی

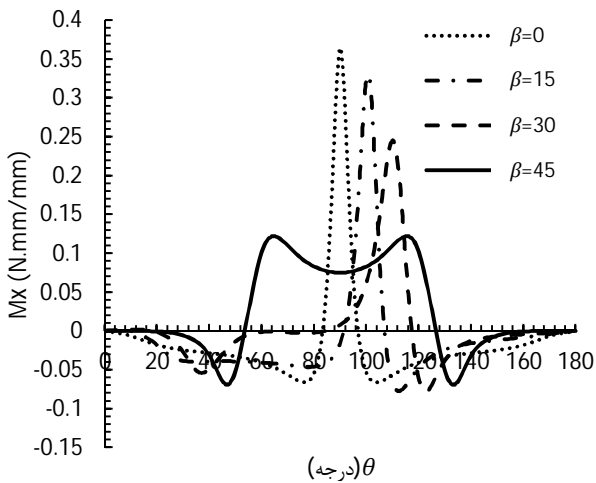
یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر منتجه‌های نیرو و گشتاور، زاویه چرخش



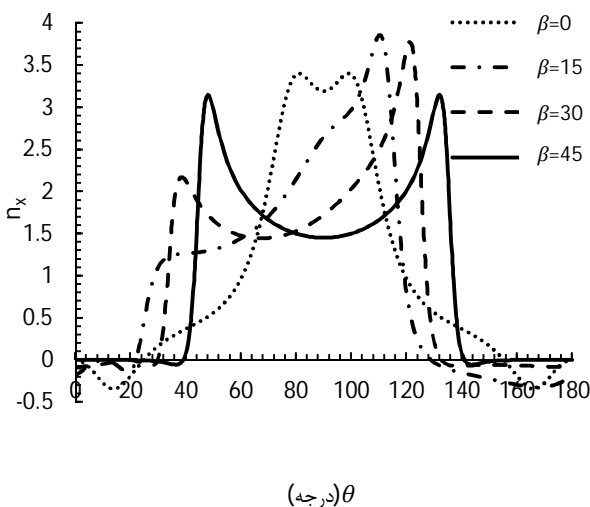
شکل 22 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی‌بعد در جهت X برای چیدمان $[0/90]_T$ در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف



شکل 21 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور در جهت X برحسب زاویه چرخش گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$ و $[-45/45]_T$



شکل 23 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان $[0/90]_T$ در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف



شکل 24 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی‌بعد در جهت X برای چیدمان $[-45/45]_T$ در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف

در شکل‌های 22 تا 25 تغییرات منتجه‌های نیرو و گشتاور n_x و M_x برای هر دو چیدمان مورد بررسی بر حسب زاویه چرخش گشودگی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های 22 و 23 مشخص است، در زاویه چرخش $\beta=45^\circ$ که در آن ضلع گشودگی عمود بر راستای بارگذاری واقع می‌شود، بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور n_x و M_x به مقدار قابل توجهی افت می‌کند و محل توزیع این مقادیر بیشینه در چهار گوشه گشودگی اتفاق می‌افتد. در باره توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور n_y و M_y چنین نتیجه‌ای گرفته نشد. بیشینه منتجه نیروی n_{xy} نیز در $\beta=45^\circ$ کمترین مقدار خود را دارد و منتجه گشتاور M_{xy} نیز توزیع موزون‌تری در این زاویه چرخش از خود نشان می‌دهد. در شکل‌های 24 و 25 توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور n_x و M_x برای چیدمان $[-45/45]_T$ در چند زاویه چرخش مختلف نشان داده شده است. در نمودار 22 مشهود است که در زاویه چرخش $\beta=45^\circ$ ، توزیع منتجه موزون‌تر همراه با بیشینه کمتری اتفاق می‌افتد. اما در شکل 25 مشاهده می‌شود که در زاویه چرخش $\beta=15^\circ$ منتجه گشتاور M_x مقادیر بیشینه کمتری دارد. مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور و زاویه چرخش اتفاق افتادن آن‌ها در جدول‌های 5 و 6 برای دو چیدمان مورد بررسی آورده شده است.

جدول 5 مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای چیدمان $[0/90]_T$

مقدار بیشینه	زاویه چرخش (درجه)	منتجه‌های نیرو (بی‌بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)
9/8776	0 و 90	n_x
0/6397	60	n_y
0/2988	80	n_{xy}
0/385	0 و 90	M_x
0/027	30	M_y
0/0325	40	M_{xy}

جدول 7 پارامترهای بهینه‌ی گشودگی برای چیدمان $[0/90]_T$

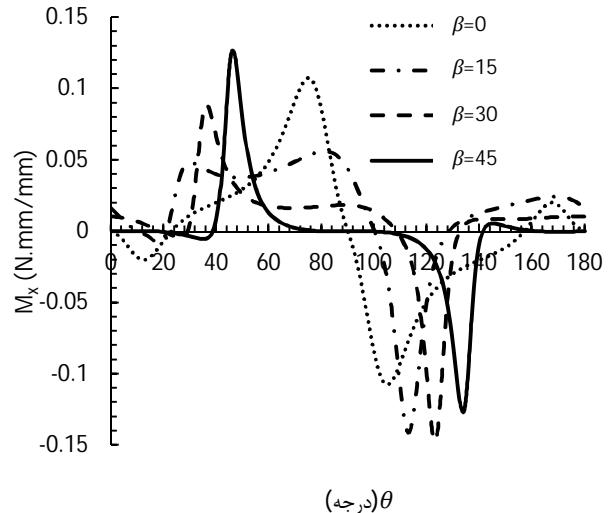
کشیدگی	زاویه چرخش (درجه)	انحنا	منتجه‌های نیرو (بی بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)
0/5	45	0/08	n_x
0/5	0,90	0	n_y
0/5	30	0/04	n_{xy}
0/5	45	0/08	M_x
0/5	0,90	0	M_y
0/5	80	0	M_{xy}

جدول 8 پارامترهای بهینه‌ی گشودگی برای چیدمان $[-45/45]_T$

کشیدگی	زاویه چرخش (درجه)	انحنا	منتجه‌های نیرو (بی بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)
0/5	45	0	n_x
0/5	0,90	0/04	n_y
0/5	20	0/02	n_{xy}
0/5	20	0	M_x
0/5	10	0/04	M_y
0/5	0,90	0/02	M_{xy}

8- فهرست علائم

a_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
A_j	ثابت مختلط برای تابع پتانسیل مرحله‌ی اول
A_{ij}	ماتریس سفتی کشش (N/mm)
b_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
B_{ij}	ماتریس سفتی کوپلینگ (N)
c	پارامتر تعیین‌کننده‌ی نسبت ابعاد گشودگی
c_j	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
c'_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
d_j	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
d'_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
D_{ij}	ماتریس سفتی خمش (N.mm)
e_j	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
f_j	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
f_x, f_y	مؤلفه‌های نیروی داخلی (N)
g_j	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
h_j	ثوابت مختلط در محاسبه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور
$k_1 - k_{16}$	ثوابت مختلط
M_n	منتجه گشتاور عمود بر مرز گشودگی (N.mm/mm)
M_x, M_y, M_{xy}	منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)
n_x, n_y, n_{xy}	منتجه‌های نیروی بی‌بعد
N_x, N_y, N_{xy}	منتجه‌های نیرو (N/mm)
p_j	ثابت مختلط برای چندلایه
P	انگزال نیرو در مرز گشودگی (N.mm)
q_j	ثابت مختلط برای چندلایه
\bar{Q}_{ij}	ماتریس سفتی سفتی یافته (N/mm ²)
Q_n	نیروی برشی در جهت عمود بر مرز گشودگی (N)



شکل 25 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان $[-45/45]_T$ در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف

جدول 6 مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای چیدمان $[-45/45]_T$

منتجه‌های نیرو (بی بعد) و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)	زاویه چرخش (درجه)	مقدار بیشینه
n_x	20	3/9035
n_y	30	2/6097
n_{xy}	70	2/9917
M_x	60	0/1473
M_y	60	0/0809
M_{xy}	60	0/11

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله با ارائه حلی تحلیلی، تأثیر پارامترهای شعاع انحنا، زاویه چرخش و کشیدگی گشودگی در چندلایه‌های نامتقارن بررسی شد. نتایج نشان داد که با انتخاب پارامترهای مناسب برای گشودگی چهارضلعی، منتجه‌های نیرو و گشتاور به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابند. از نتایج مهم این مطالعه این است که برای هر یک از چیدمان‌ها لزوماً گشودگی دایره‌ای بهترین هندسه برای کاهش منتجه‌ها نیست و متناسب با نوع چیدمان در جهات مختلف گشودگی چهار ضلعی با انحنا خاصی می‌تواند منتجه‌های کمتری داشته باشد. به عنوان مثال در چیدمان $[0/90]_T$ مقادیر بیشینه منتجه n_x ، در $\omega=0/125$ تقریباً 29 درصد و بیشینه منتجه M_x ، 38 درصد کمتر از مقدار آن برای دایره است. چیدمان لایه‌ها نیز تأثیر بسزایی در کاهش منتجه‌ها در جهات مختلف دارد. به عنوان مثال برای بارگذاری کششی در جهت X، بیشینه منتجه n_x برای چیدمان $[-45/45]_T$ ، 65 درصد کمتر از چیدمان $[0/90]_T$ است. به همین ترتیب منتجه M_x 70 درصد کمتر است. مقدار منتجه n_y برای چیدمان $[0/90]_T$ ، 70 درصد کمتر از چیدمان $[-45/45]_T$ است. علاوه بر کاهش تیزی گوشه‌های گشودگی و تغییر چیدمان لایه‌ها، انتخاب زاویه چرخش مناسب می‌تواند در کاهش منتجه‌ها بسیار مؤثر باشد. به عنوان مثال برای چیدمان $[0/90]_T$ بیشینه منتجه n_x در زاویه چرخش 45 درجه، 58 درصد کمتر از مقدار آن در حالت بدون چرخش است. به همین ترتیب بیشینه منتجه گشتاور M_x نیز در این زاویه 66 درصد کمتر است. پارامترهای بهینه برای گشودگی چهارضلعی برای دستیابی به کمترین منتجه در جدول‌های 7 و 8 معرفی شده است.

- [8] G. H. Asmar, T.G. Jabbour, Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes, *International Journal of Mechanics and Solids*, Vol. 2, No.1, pp. 59-84, 2007.
- [9] E. F. Rybicki, D. Schmueser, Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension, *Journal of Composite Materials*, Vol. 12, No. 3, pp. 300-313, 1978.
- [10] H. J. Konish, J. M. Whitney, Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole, *Journal of Composite Materials*, April 1975.
- [11] N. Bonora, M. Costanzi, M. Marchetti, On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions, *Composite Structures*, Vol. 25, pp. 139-156, 1993.
- [12] C. B. Prasad, M. J. Shuart, Moment distributions around holes in symmetric composite laminates subjected to bending moments. 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, *Structural Dynamics and Materials Conference*, 1989.
- [13] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under in-plane loading, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 339-354, 2000.
- [14] D. K. N. Rao, M. R. Babu, K.R. N. Reddy, D. Sunil, Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 12, pp. 2845-2859, 2010.
- [15] M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015. (In Persian)
- [16] W. Ko, Stress concentration around a small circular hole in the HiMat composite plates, *NASA TM 86038*, 1985.
- [17] W. Becker, Closed form analytical solutions for a griffith crack in a nonsymmetric laminate plate, *Comp Struct*, 1992.
- [18] W. Becker, Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate, *Archive Appl Mech*, 1993.
- [19] W. Becker, Concentrated forces and moments on laminates with bending extension coupling. *Comp Struct*, 1995.
- [20] P. Chen, Z. Shen, Extension of Lekhnitskii's complex potential approach to unsymmetrical composite laminates, *Mech. Res. Commun*, 28(4), 423, 2001.
- [21] P. Chen, Z. Shen, Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading, *Mechanics Research Communications*, Vol. 30, No. 1, pp. 79-86, 2003.
- [22] P. Chen, Z. Shen, Green's functions for an unsymmetrical laminated plate with an elliptical hole, *Mech. Res. Commun*, 28(5), 519.
- [23] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 27-39, 2000.
- [24] E. Madenci, A. Barut, M. P. Nemeth, A complex potential-variational method for stress analysis of unsymmetric laminates with an elliptical cutout, *Journal of Applied Mechanics*, 68, 731, 2001.

s_j ریشه‌های معادله‌ی مشخصه

u جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای (mm)

v جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای (mm)

w جابه‌جایی عمودی (mm)

z_j تابع نگاشت

علایم یونانی

β زاویه چرخش (درجه)

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ کرنش‌های برشی

ϵ_x, ϵ_y کرنش‌های طولی

θ زاویه پیرامون گشودگی (درجه)

ζ متغیر مختلط

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ انحنای درون‌صفحه‌ای

λ پارامتر تعیین‌کننده‌ی اندازه‌ی گشودگی

$\phi_j(z_j)$ تابع پتانسیل

ω پارامتر تعیین‌کننده‌ی انحنای گوشه گشودگی

9- مراجع

- [1] C. Y. Gao, J. Z. Xiao, Y. L. Ke, FE analysis of stress concentrations in composite plates with multiple holes for zigzag multi-fastened joints, *Materials Science Forum*, Vol. 770, pp. 17-20, 2014.
- [2] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Second edition, 1962.
- [3] G. N. Savin, *Stress concentration around holes*, New York: Pergamon Press, 1961.
- [4] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Second edition, New York: Gordon and Breach Science, 1968.
- [5] K. Rajaiah, N. K. Naik, Optimum quasi-rectangular holes in infinite orthotropic plates under in-plane loadings, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4a, pp. 891-892, 1983.
- [6] Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with a quasi-square cutout subjected to uniaxial tension, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, July 2010.
- [7] W. Becker, A complex potential method for plate problems with bending extension coupling. *Archive Appl Mech*, 1991.