



# بررسی انتشار امواج الاستیک در مواد مرکب حاوی ذرات کروی با توزیع تصادفی با استفاده از مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی

کامران دانشجو<sup>۱\*</sup>، محمد رحیم زاده<sup>۲</sup>

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

\* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴، kjoo@iust.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله به بررسی انتشار امواج الاستیک صفحه‌ای در مواد مرکب حاوی ذرات تقویت کننده نرم و سخت که بصورت تصادفی در محیط ماتریس توزیع گشته، پرداخته شده است. مدل تعمیم یافته خود سازگار دینامیکی که دقت مناسبی در مدل سازی درصد حجمی زیاد ذرات و نیز محدوده فرکانس بالا دارد، بدین منظور استفاده شد. پس از تشریح مدل، دو ماده مرکب حاوی ذرات نرم و سخت جهت بررسی انتخاب شد. خواص انتشاری موج از قبیل سرعت فازی، میرایی و خواص دینامیکی مؤثر برای هر دو ماده مرکب مطالعه گردید. بررسی‌ها در محدوده فرکانسی طول موج کوتاه تا متوسط و نیز برحسب درصد حجمی ذرات برای موج طولی و برشی صورت پذیرفت. نتایج حکایت از تأثیرپذیری قابل توجه این خواص از تغییر در پارامترهای ذکر شده دارد.

**کلیدواژگان:** ماده مرکب ذره‌ای، انتشار موج، مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی، توزیع تصادفی.

## Elastic wave propagation in composites with random distribution of spherical inclusions using dynamic generalized self-consistent model

K. Daneshjoo<sup>1\*</sup>, M. Rahimzadeh<sup>2</sup>

1- Prof., School of Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran

2- PhD Student, School of Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran

\* P.O.B. 1684613114 Tehran, Iran. kjoo@iust.ac.ir

**Abstract-** The work is dedicated to the elastic wave propagation in particulate composite with random distribution of soft and stiff inclusions. The multiple scattering theory of Waterman-Truell in combination of static generalized self-consistent model is used to formulate the Dynamic Generalized Self-Consistent Model which is used because of its precision in modeling of high volume fraction and high frequency waves. The model has been described and two different cases containing of soft and stiff inclusions are considered. The propagation behavior such as normalized wave propagation, normalized attenuation and the dynamic effective properties are studied. Investigation is carried on long and intermediate wave-length regime and different values of volume fraction for longitudinal (P) and shear (S) elastic waves. The results indicate that the propagation properties are strongly affected by aforementioned parameters.

**Keywords:** Particulate Composite, Wave Propagation, DGSCM, Random Distribution.

## ۱- مقدمه

مقالات زیادی در زمینه انتشار امواج الاستیک در کامپوزیت‌های حاوی ذرات کروی با توزیع تصادفی مبتنی بر تئوری‌های پراکنش چندگانه منتشر شده است. اولین کار مهم در این خصوص متعلق به فولدی است که پراکنش چندگانه امواج را با فرض پراکنده سازهای نقطه‌ای و بکارگیری فرایند میانگیری شکلی<sup>۱</sup> بررسی نمود [۱]. لاکس تئوری فولدی را با لحاظ کردن پراکنده سازهای غیر ایزوتروپیک<sup>۲</sup> توسعه داد [۲]. دامنه پراکنش رو به جلو و دور از پراکنده‌ساز در مسأله پراکنش موج از یک ذره و نیز پارامتر درصد حجمی ذرات، در هر دو کار جهت تخمین عدد موج مختلط استفاده شده است. واترمن و تروئل پراکنش چندگانه حاصل از یک توزیع تصادفی از ذرات را بررسی نمودند [۳]. آنها از دامنه پراکنش رو به عقب<sup>۳</sup> همانند دامنه پراکنش رو به جلو در روابط خود سود جستند. مدل آنها نتایج خوبی در نسبت‌های حجمی پایین ذرات حاصل می‌کرد. هیل روشی را برای تخمین مدول الاستیک ماکروسکوپیک مواد مرکب دو فازی ارائه نمود که مبنای روشهای خودسازگار<sup>۴</sup> در پراکنش چندگانه امواج الاستیک قرار گرفت [۴]. موون و ماو در یک مدل یک بعدی به مطالعه انتشار امواج الاستیک در محیط ماتریس حاوی ذرات کروی صلب پرداختند [۵]. آنها در مدل خود فرض نمودند که تعداد ذرات کروی در واحد حجم ماتریس کم بوده و توزیع آن نیز تصادفی است. در این تحقیق معادلات کوپل شده حرکت ماتریس و ذرات با استفاده از حساب تغییرات استخراج شد.

کینرا و همکاران بصورت آزمایشگاهی به بررسی انتشار امواج الاستیک آلتراسونیک در کامپوزیت‌هایی که ذرات کروی شیشه بصورت تصادفی در محیط ماتریس اپوکسی توزیع شده‌اند، پرداختند [۶]. سایرز و اسمیس مقایسه‌ای را بین تئوری پراکنش منفرد یینگ و تروئل [۷] و نتایج آزمایشگاهی کینرا [۸] انجام دادند [۹]. نتایج حاصل حکایت از تطابق خوب در درصدهای حجمی پایین دارد. فو و شیو مدول مؤثر و چگالی جرمی یک محیط دو فازی را با استفاده از تئوری میانگیری که از برابری انرژی کرنشی و انرژی جنبشی محیط مؤثر با محیط

ماتریس اولیه حاوی ذرات سود می‌جوید، استخراج نمودند [۱۰]. واردان و همکارانش یک فرمول‌بندی خودسازگار برای پراکنش چندگانه با استفاده از تخمین شبه کریستالی<sup>۵</sup> ارائه نمودند [۱۱].

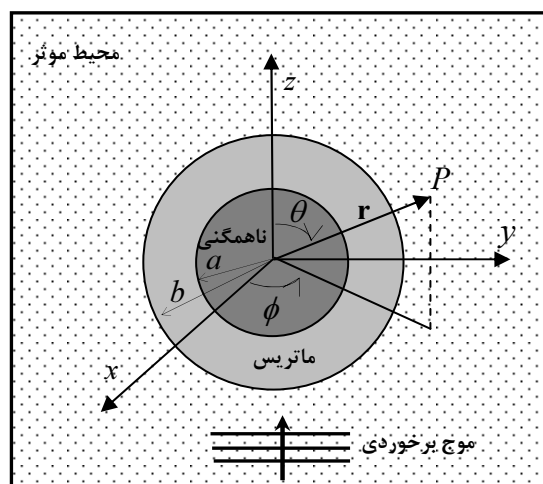
دانا و همکارانش به بررسی انتشار امواج طولی و برشی صفحه‌ای از میان کامپوزیت حاوی ذرات کروی با توزیع تصادفی و با استفاده از تئوری فولدی پرداختند [۱۲]. آنها فصل مشترک ماتریس و ذرات را همانند لایه‌ای نازک فرض نمودند که دارای خواص الاستیکی متفاوت نسبت به اجزاء سازنده ماده مرکب است. کیم و همکاران بر اساس یک روش خودسازگار، تخمینی از خواص دینامیکی و چگالی مؤثر که مشابه تخمین پتانسیل همدوس<sup>۶</sup> در فیزیک آلیاژی است، ارائه نمودند [۱۳]. نتایج تئوری حاصل تطابق بهتری با نتایج آزمایشگاهی کینرا در مقایسه با نتایج تئوریک یینگ و تروئل دارد.

ساتو و شیندو با استفاده از تخمین شبه کریستالی لاکس به بررسی پراکنش چندگانه امواج الاستیک طولی و برشی، در یک ماده مرکب زمینه فلزی حاوی ذرات تقویت کننده با توزیع تصادفی و دارای فصل مشترکی با خواص الاستیک تدریجی<sup>۷</sup> که در آن خواص مواد در مرز ماتریس و ذرات بصورت پیوسته در نظر گرفته شده است، پرداختند [۱۴]. جهت مطالعه پراکنش چندگانه امواج فشاری و برشی صفحه‌ای در ماده مرکب حاوی ذرات کروی با توزیع تصادفی، یانگ به ارائه روشی بهبود یافته از مدل خودسازگار پرداخت [۱۵].

اثرات فصل مشترک ویسکو الاستیک روی خواص دینامیکی مؤثر این نوع از مواد مرکب توسط وی و هانگ مورد مطالعه قرار گرفت [۱۶]. نتایج عددی این حقیقت را آشکار نمود که ویسکوزیته فصل مشترک اثر محسوسی بر مدول الاستیک مؤثر و عدد موج مؤثر دارد. همچنین آنها نشان دادند که در دامنه فرکانسی پایین، اثرات میرایی غالب است در حالی که در دامنه فرکانسی بالا اثر پراکنش چندگانه غالب است. بر مبنای روش تعمیم یافته خودسازگار، رویکرد دیگری بمنظور تحلیل انتشار امواج الاستیک در مواد مرکب توسط کیم ارائه گردید [۱۷]. رویکرد کیم در این تحقیق مشابه مدل استاتیکی تعمیم یافته خودسازگار با لحاظ کردن ترم انرژی موج الاستیک است.

1. Configurational Averaging
2. Anisotropic scatterers
3. Backward scattering
4. Self-Consistent

5. Quasi-crystalline approximation
6. Coherent potential approximation
7. FGM



شکل ۱ هندسه شماتیک مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی

در این مدل، ذره پراکنده ساز کروی به شعاع  $a$  در پوسته‌ای کروی از جنس محیط ماتریس و به شعاع بیرونی  $b$  قرار گرفته و یک محیط مادی بی‌نهایت با ثوابت لامه و چگالی جرمی مؤثر  $\langle \lambda \rangle$ ،  $\langle \mu \rangle$  و  $\langle \rho \rangle$ ، این سیستم را در بر گرفته است. رابطه شعاع مفروض  $b$  با درصد حجمی ذرات  $c$  بصورت رابطه (۲) لحاظ شده است.

$$c = \frac{a^3}{b^3} \quad (2)$$

در مواد مرکبی که مقادیر چگالی اجزاء سازنده آن بسیار متفاوت است، چگالی مؤثر، وابسته به فرکانس موج برخوردی است، اما در مواد مرکبی که این اختلاف در چگالی‌های جرمی اندک است، می‌توان از چگالی میانگین به جای چگالی مؤثر مطابق رابطه (۳) استفاده کرد.

$$\langle \rho \rangle = c\rho_1 + (1-c)\rho_2 \quad (3)$$

فرض می‌شود یک موج طولی صفحه‌ای هارمونیک به همراه یک موج برشی صفحه‌ای در جهت مثبت محور  $z$  در محیط منتشر می‌شود. بنابراین رابطه (۴) بدست می‌آید.

$$u^i = w_0 e^{i(k)z - i\omega t} e_z + u_0 e^{i(K)r - i\omega t} e_x \quad (4)$$

که در معادله فوق،  $\omega$  فرکانس دایره‌ای موج برخوردی،  $w_0$  و  $u_0$  به ترتیب دامنه امواج طولی و برشی و  $\langle k \rangle$  و  $\langle K \rangle$ ، ثابت موج میانگین برای امواج طولی و برشی در محیط مؤثر می‌باشد. با حذف ترم زمانی  $e^{-i\omega t}$  و نیز حذف براکت از ثوابت موج، میدان جابجایی در محیط مؤثر، ماتریس و ذره کروی به شکل روابط (۵-۷) قابل توصیف است.

کانون و همکارانش با استفاده از روش‌های میدان مؤثر و محیط مؤثر، معادلات پراکنش موج الاستیک در مواد مرکب حاوی ذرات کروی را استخراج نمود [۱۸]. آنها نشان دادند که روش میدان مؤثر<sup>۱</sup> امتیازاتی نسبت به روش محیط مؤثر<sup>۲</sup> دارند. لایمن و همکارانش بصورت آزمایشگاهی سرعت فازی و میرایی موج طولی و برشی را در مواد مرکب یاد شده اندازه‌گیری نمودند [۱۹]. با مقایسه نتایج حاصل با دو مدل تئوری واترمن-تروئل و مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی، نشان داده شد که در نسبت‌های حجمی پایین هر دو مدل تطابق خوبی دارند، اما در نسبت‌های حجمی بالاتر مدل دینامیکی تعمیم یافته خود سازگار دقیق‌تر است.

برای مطالعه انتشار موج صفحه‌ای فشاری در مواد مرکب با نسبت حجمی بالای ذرات تقویت کننده، رویکردی جدید توسط هو و همکارانش پیشنهاد شد [۲۰]. آنها برای مواجهه با مسأله پراکنش چندگانه، از تخمین شبه کریستالی استفاده نمودند. هدف اصلی در این کار، بررسی انتشار امواج الاستیک در مواد مرکب حاوی ذرات کروی سخت و نرم با استفاده از مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی می‌باشد. بدین جهت پارامترهایی نظیر سرعت فازی، میرایی و نیز خواص دینامیکی محیط مؤثر مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت.

## ۲- مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی<sup>۳</sup>

هندسه‌ای که این مدل بر آن بنا شده، در شکل ۱ نشان داده شده است. جهت توصیف این مدل، توزیعی تصادفی از پراکنده سازهای کروی با شعاع  $a$  در محیط ماتریس ایزوتروپیک بینهایت در نظر گرفته شد. فرض گردید  $\mu_1, \lambda_1$  و  $\rho_1$  ثوابت لامه و چگالی جرمی پراکنده‌سازها و  $\mu_2, \lambda_2$  و  $\rho_2$ ، ثوابت لامه و چگالی جرمی محیط ماتریس باشد.

در شکل شماتیک نشان داده شده،  $(x, y, z)$  سیستم مختصات کارتزین و  $(r, \theta, \phi)$  سیستم مختصات کروی است و مؤلفه‌های بردار جابجایی در جهات  $r, \theta$  و  $\phi$ ، با  $u_r, u_\theta$  و  $u_\phi$  بیان شده است. رابطه (۱) مبین معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله است.

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u - \mu \nabla \times \nabla \times u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

1. Effective Field
2. Effective Medium
3. Dynamic Generalized Self-Consistent Method

روابط بین میدان تنش و جابجایی، به شکل روابط (۱۱-۱۳) قابل ارائه است.

$$\frac{\sigma_{rr}}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r u_\varphi) \right] + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \quad (13)$$

همان‌طور که ذکر شده با اعمال شرایط مرزی پیوستگی بردار جابجایی و تنش در فصول مشترک  $r = a$  و  $r = b$  دسته معادلات زیر جهت تعیین ضرایب مجهول حاصل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} P & -P^{(2)} & -\tilde{P}^{(2)} & 0 \\ \alpha Q & -Q^{(2)} & -\tilde{Q}^{(2)} & 0 \\ 0 & P^{(1)} & \tilde{P}^{(1)} & -P^0 \\ 0 & Q^{(1)} & \tilde{Q}^{(1)} & \beta Q^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ C_{mn} \\ A'_{mn} \\ C'_{mn} \\ D_{mn} \\ F_{mn} \\ A^0_{mn} \\ C^0_{mn} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \alpha \tilde{Q} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & -\xi_{12} & -\xi_{13} & 0 \\ \alpha \xi_{12} & -\xi_{22} & -\xi_{23} & 0 \\ 0 & \xi_{32} & \xi_{33} & -\xi_{34} \\ 0 & \xi_{42} & \xi_{43} & -\beta \xi_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{mn} \\ B'_{mn} \\ E_{mn} \\ B^0_{mn} \end{Bmatrix} = - Y_{mn} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \alpha \zeta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

با حل دسته معادلات (۱۴) و (۱۵) ضرایب مجهول قابل حصول است. پارامترهای بکار رفته در معادلات فوق در پیوست به تفصیل بیان شده‌اند. معادلات پایه برای تعیین ثوابت انتشار موج در محیط مؤثر در این مدل به شکل روابط (۱۶، ۱۷) است.

$$\left[ \frac{k^{(j+1)}}{k^{(j)}} \right]^2 = \left[ 1 + \frac{2\pi n f^{(j)}(0)}{[k^{(j)}]^2} \right]^2 - \left[ \frac{2\pi n f^{(j)}(\pi)}{[k^{(j)}]^2} \right]^2 \quad (16)$$

$$\left[ \frac{K^{(j+1)}}{K^{(j)}} \right]^2 = \left[ 1 + \frac{2\pi n_0 g^{(j)}(0)}{[K^{(j)}]^2} \right]^2 - \left[ \frac{2\pi n_0 g^{(j)}(\pi)}{[K^{(j)}]^2} \right]^2$$

$$u = u^i + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ A_{mn} L_{mn}^{(3)}(kr) + B_{mn} M_{mn}^{(3)}(Kr) + C_{mn} N_{mn}^{(3)}(Kr) \right], \quad r > b \quad (5)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ A'_{mn} L_{mn}^{(3)}(k_2 r) + B'_{mn} M_{mn}^{(3)}(K_2 r) + C'_{mn} N_{mn}^{(3)}(K_2 r) + D_{mn} L_{mn}^{(1)}(k_2 r) + E_{mn} M_{mn}^{(1)}(K_2 r) + F_{mn} N_{mn}^{(1)}(K_2 r) \right] \quad (6)$$

$$a < r < b \quad (6)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ A^0_{mn} L_{mn}^{(1)}(k_1 r) + B^0_{mn} M_{mn}^{(1)}(K_1 r) + C^0_{mn} N_{mn}^{(1)}(K_1 r) \right], \quad r < a \quad (7)$$

در معادلات (۵)، (۶) و (۷) ضرایب مجهول بر اساس شرایط مرزی پیوستگی بردار جابجایی و تنش در فصل مشترک ذره کروی و ماتریس و همچنین ماتریس و محیط مؤثر، قابل دستیابی است. همچنین توابع موج کروی برداری  $L_{mn}^{(3)}$ ،  $M_{mn}^{(3)}$  و  $N_{mn}^{(3)}$  بکار رفته در این معادلات، بصورت روابط (۸)، (۹) و (۱۰) بیان می‌شود.

$$L_{mn}^{(3)}(kr) = \left[ e_r \frac{\partial}{\partial r} h_n(kr) P_n^m(\cos\theta) + e_\theta h_n(kr) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) + e_\varphi \frac{im}{r \sin\theta} h_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \right] e^{im\varphi} \quad (8)$$

$$M_{mn}^{(3)}(Kr) = \left[ e_\theta \frac{im}{\sin\theta} h_n(Kr) P_n^m(\cos\theta) + e_\varphi h_n(Kr) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) \right] e^{im\varphi} \quad (9)$$

$$N_{mn}^{(3)}(Kr) = \left[ e_r \frac{n(n+1)}{r} h_n(Kr) P_n^m(\cos\theta) + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n(Kr)] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) + e_\varphi \frac{im}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n(Kr)] P_n^m(\cos\theta) \right] e^{im\varphi} \quad (10)$$

در روابط فوق  $h_n$  تابع هنکل کروی نوع اول مرتبه  $n$  و  $P_n^m$  تابع لژاندر نوع اول می باشد. برای بدست آوردن  $L_{mn}^{(1)}$ ،  $M_{mn}^{(1)}$  و  $N_{mn}^{(1)}$  در این معادلات به جای تابع  $h_n$ ، تابع بسل کروی نوع اول جایگزین می‌شود. مؤلفه‌های میدان تنش با استفاده از

(۱۷)

شده را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل پیداست، در ماده مرکب اول خواص الاستیک ذرات نصف خواص الاستیک ماتریس، و در ماده مرکب دوم ذرات دارای خواص الاستیکی معادل دو برابر خواص ماتریس هستند.

که در آن روابط زیر برقرارند:

$$f^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_{0n}^{(j)} \quad (18)$$

$$f^{(j)}(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n A_{0n}^{(j)} \quad (19)$$

برای حل مسأله کلیه معادلات بر اساس مقیاس طول  $a$  که همان شعاع ذرات کروی تشکیل دهنده مواد مرکب می‌باشد، بی بعد گردید. با توجه به این امر که چگالی جرمی ذرات تشکیل دهنده یکسان فرض شده است، چگالی محیط مؤثر از چگالی میانگین تبعیت می‌کند. به عبارت دیگر چگالی ماده مرکب نهایی برابر چگالی اجزای سازنده است. البته لازم بذکر است که در زمانی که تفاوت چگالی جرمی اجزای تشکیل دهنده ماده مرکب قابل توجه باشد، دیگر این فرض صادق نیست و چگالی جرمی مؤثر، وابسته به فرکانس موج برخوردی خواهد بود. از نکات دیگری که قبل از آغاز بررسی عددی باید بدان پرداخته شود، فرکانس موج برخوردی در نظر گرفته شده است. اگر پارامتر بی‌بعد  $\delta = \lambda/a$  را که مبین نسبت طول موج برخوردی به شعاع ناهمگنی کروی است، در نظر گرفته شود، عدد موج بی-بعد بصورت  $k_2 a = 2\pi/\delta$  قابل باز نویسی است.

$$g^{(j)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2} \left[ n(n+1)C_{1n}^{(j)} - C_{-1n}^{(j)} + \frac{n(n+1)}{K^{(j)}} B_{1n}^{(j)} + \frac{1}{K^{(j)}} B_{-1n}^{(j)} \right] \quad (20)$$

$$g^{(j)}(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{2} \left[ n(n+1)C_{1n}^{(j)} - C_{-1n}^{(j)} + \frac{n(n+1)}{K^{(j)}} B_{1n}^{(j)} + \frac{1}{K^{(j)}} B_{-1n}^{(j)} \right] \quad (21)$$

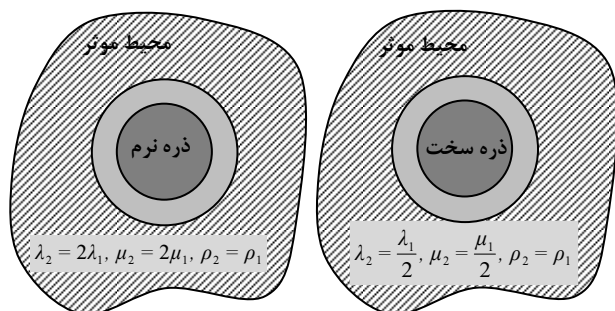
معادلات فوق در یک فرایند تکراری حل می‌شوند. همچنین مقدار اولیه برای ثوابت انتشار موج طولی و برشی محیط مؤثر جهت آغاز فرایند، برابر خواص ماده ماتریس انتخاب می‌شود.

### ۳- بررسی عددی

جدول ۱ مشخصات مکانیکی ماده ماتریس و ذرات تقویت کننده

چگالی (gr/cm <sup>3</sup> )	مدول برشی (GPa)	مدول حجمی (GPa)	
۲/۷	۳۴/۷	۷۵/۲	محیط ماتریس
۲/۷	۱۷/۳	۳۷/۶	ذرات نرم
۲/۷	۶۹/۴	۱۵۰/۴	ذرات سخت

برای بررسی عددی مدل تعمیم یافته خود سازگار دینامیکی، دو نوع ماده مرکب مختلف در نظر گرفته شد. همان‌طور که از معادلات پراکنش موج از روی ناهمگنی کروی درون محیط بی‌نهایت پیداست، پدیده پراکنش در اثر دو عامل تفاوت در چگالی جرمی و یا تفاوت در خواص الاستیک دو محیط، می‌تواند ایجاد شود. در این بخش برای بررسی دقیق‌تر، فرض گردید که چگالی جرمی دو محیط یکسان اما خواص الاستیک آنها متفاوت است. بدین منظور محیط ماتریس در هر دو حالت یکسان اما مواد تشکیل دهنده ذره کروی در حالت اول نرم‌تر<sup>۱</sup> و در حالت دوم سخت‌تر<sup>۲</sup> نسبت به خواص الاستیک محیط ماتریس لحاظ گردید. همچنین فرض شد که دو محیط کاملاً الاستیک و ایزوتروپیک باشند. خواص مواد تشکیل دهنده دو نوع ماده مرکب در نظر گرفته شده، در جدول ۱ آورده شده است [۲۱].



شکل ۲ شماتیک مدل دو نوع ماده مرکب در نظر گرفته شده حاوی ذرات نرم و سخت

شکل ۲ بصورت شماتیک مدل مواد مرکب در نظر گرفته

سه محدوده فرکانسی برای موج منتشره در محیط قابل

1. Soft Inclusion
2. Stiff Inclusion

پایین و درصدهای حجمی کم، منحنی سرعت فازی تمایل به عدم تغییر دارد. همچنین در مواد مرکب حاوی ذرات سخت، با افزایش درصد حجمی، سرعت فازی نهایی افزایش و در حالت وجود ذرات نرم، این روند بالعکس است.

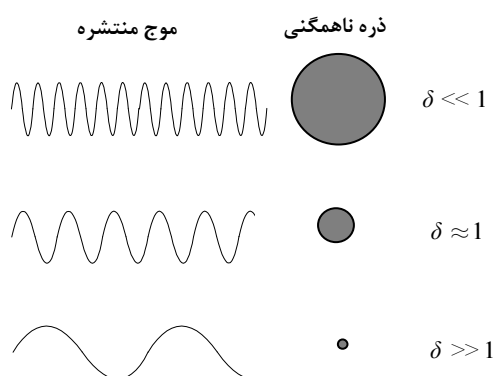
از دیگر مشاهدات قابل توجه در این شکل تغییرات میرایی نرمال بر حسب عدد موج است. به عنوان نمونه منحنی تغییرات میرایی موج طولی در ماده مرکب حاوی ذرات نرم جهت بررسی در نظر گرفته می‌شود. منحنی از نقطه صفر آغاز شده و با افزایش فرکانس روندی صعودی بخود می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، منحنی دارای نقاط ماکزیمم و مینیمم متعددی است که می‌توان آنرا به فرکانس‌های رزونانس ذره کروی درون ماتریس نسبت داد. چرا که کینرا نشان داده است، رفتار انتشار موج در مواد مرکب ذره‌ای، بصورت چشم‌گیری بوسیله رزونانس‌های ذرات تحت تأثیر قرار می‌گیرد. لازم به یادآوری است که در نمونه در نظر گرفته شده، مود رزونانسی فرکانس پایین که همان مود رزونانسی جسم صلب<sup>۲</sup> است قابل مشاهده نیست. این مود زمانی خود را نمایان می‌کند که تفاوت مقداری چگالی جرمی ذرات و ماتریس قابل توجه باشد. به عبارت دیگر در مواد مرکب مورد بررسی، نیروی اینرسی وارد بر ذره، کوچک و بنابراین توان تحریک مود رزونانسی جسم صلب را ندارد. بنابراین نقاط ماکزیمم و مینیمم مشاهده شده در نمودار مربوط به رزونانس‌های مرتبه بالاتر که همان مودهای رزونانسی الاستیک است، می‌باشند. این پدیده بر اساس اختلاف سختی دو فاز تشکیل دهنده ماده مرکب قابل تشریح هست. فرکانس‌های رزونانس منجر به نقطه ماکزیمم در منحنی میرایی و شروع خیز در منحنی سرعت فازی می‌شود. این تغییرات همزمان در هر دو منحنی میرایی و سرعت فازی با رابطه کرامر-کرونیک<sup>۳</sup> قابل توضیح است.

بررسی این منحنی‌ها همچنین نشان می‌دهد که با افزایش درصد حجمی، فرکانس‌های رزونانس جابجا می‌شوند. در مواد مرکب، فرکانس رزونانس جسم صلب با افزایش درصد حجمی ذرات نرم یا سخت به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. این پدیده به این علت است که با افزایش درصد حجمی ذرات نرم، سختی مؤثر محیط پیرامونی هر ذره کروی کاهش و در نتیجه فرکانس رزونانس پایین می‌آید.

بررسی است. اگر طول موج منتشره نسبت به شعاع ناهمگنی کروی بسیار بزرگتر باشد  $1 \gg \delta$ ، موج برخوردی در محدوده طول موج بلند و یا فرکانس پایین قرار دارد (شکل ۳).

همچنین در صورتی که طول موج برخوردی نزدیک به اندازه ناهمگنی‌ها باشد  $1 \approx \delta$ ، آنگاه مسأله در محدوده طول موج یا فرکانس متوسط قرار دارد. در حالت آخر نیز اگر این نسبت خیلی کوچک باشد  $1 \ll \delta$ ، موج برخوردی در محدوده طول موج کوتاه و یا فرکانس بالا قرار دارد. محدوده مورد نظر در این بررسی طول موج بلند تا متوسط است که در این بخش به بررسی آن پرداخته می‌شود.

شکل ۴ بیانگر تغییرات سرعت فازی و میرایی نرمال<sup>۱</sup> موج طولی و برشی محیط مؤثر، بر حسب عدد موج بی‌بعد و برای سه درصد حجمی  $c = 0.05$ ،  $c = 0.15$  و  $c = 0.3$  است. سرعت فازی نرمال موج طولی و برشی در ماده مرکب حاوی ناهمگنی‌های نرم در ابتدا با افزایش عدد موج بی‌بعد کاهش یافته، سپس اندکی افزایش می‌یابد و در انتها تمایل دارد که با تغییر فرکانس ثابت بماند. همچنین همان‌طور که از شکل پیداست، تغییرات سرعت فازی نرمال در مواد مرکبی که درصد حجمی ذرات تقویت کننده در آن کم است، بسیار اندک می‌باشد. نظیر همین رفتار برای ماده مرکب حاوی ناهمگنی‌های سخت نیز قابل مشاهده است. با این تفاوت که تمایل بیشتری به عدم تغییر نسبت به تغییر فرکانس موج مشاهده می‌شود.



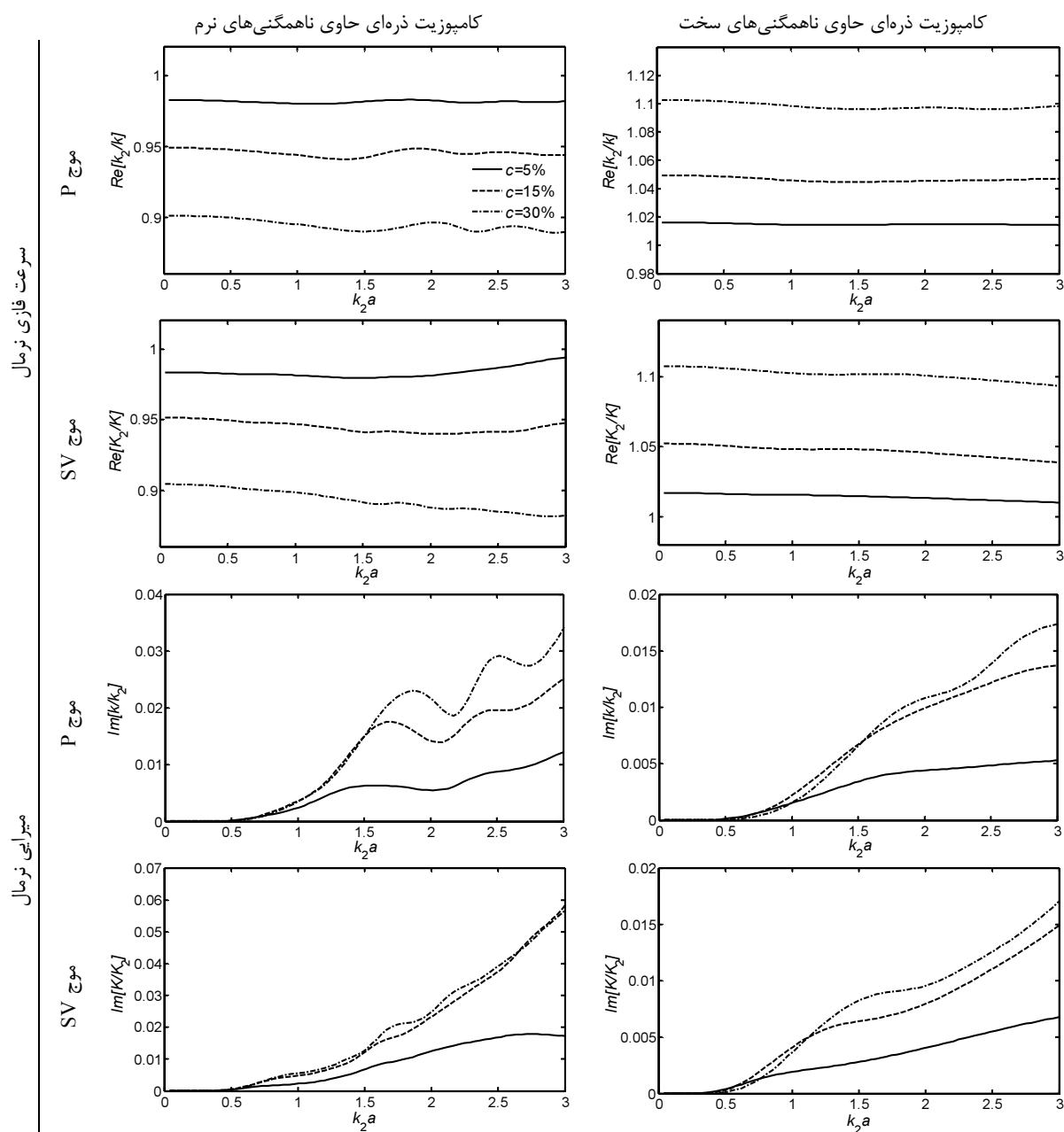
شکل ۳ سه محدوده فرکانسی طول موج بلند، طول موج متوسط و طول موج کوتاه در انتشار موج در مواد مرکب ذره‌ای

همان‌طور که پیداست در هر دو حالت در فرکانس‌های

### 1. Normalized Attenuation

2. Rigid-Body Resonance

3. Keramer-Kronig



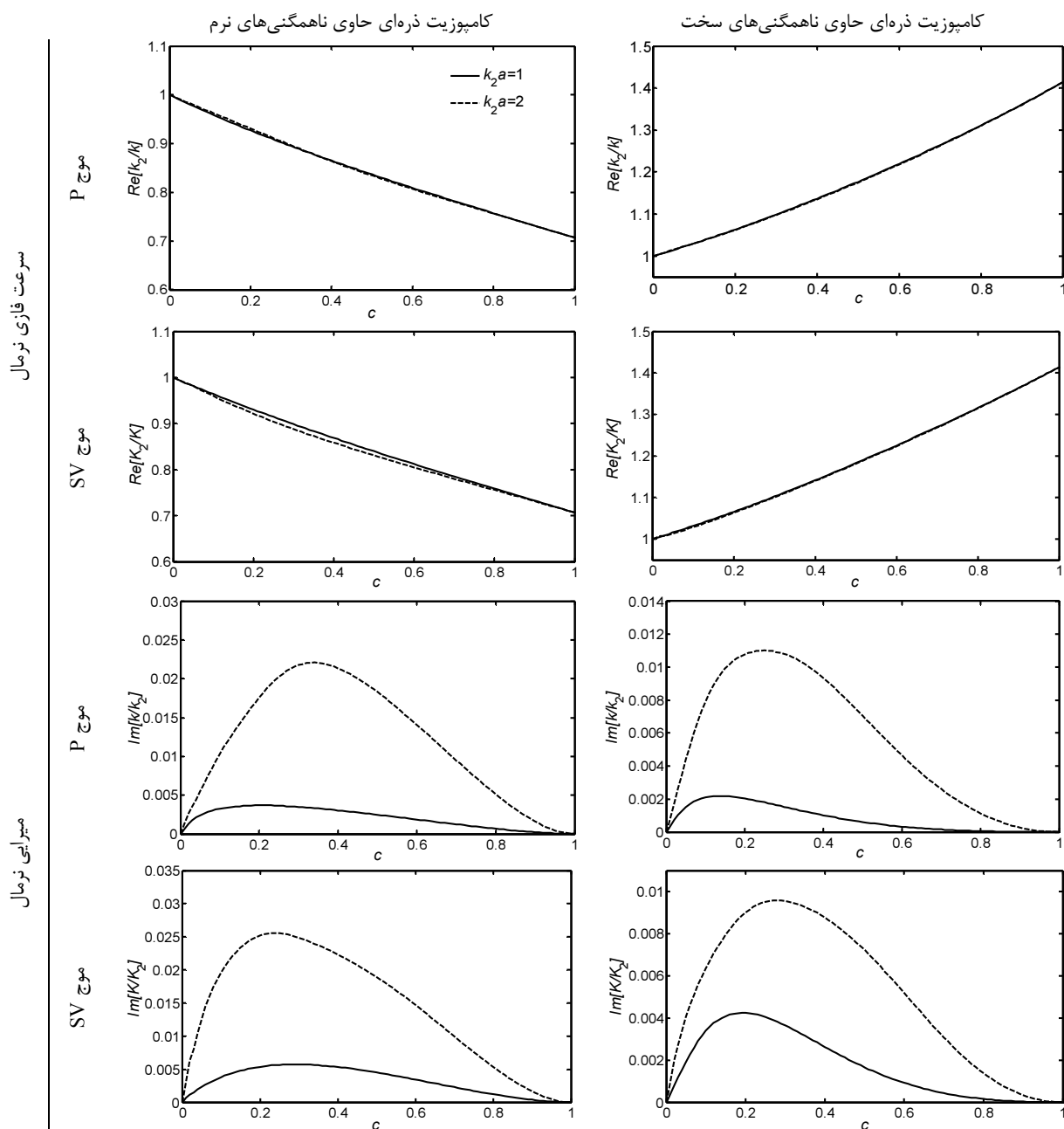
شکل ۴ تغییرات سرعت فازی و میرایی نرمال بر حسب عدد موج بی بعد برای موج P و SV در درصد‌های حجمی مختلف

از مقایسه بیشینه دامنه میرایی موج طولی و برشی می‌توان دریافت که موج برشی پتانسیل میراشوندگی بیشتری دارد. همچنین در کلیه منحنی‌های میرایی بر حسب عدد موج، می‌توان مشاهده کرد که در فرکانس‌های کم یا همان محدوده طول موج بلند، دامنه میراشوندگی بسیار کم و قابل صرف‌نظر می‌باشد. همچنین میرایی موج طولی و برشی بصورت قابل توجهی در ماده مرکب حاوی ذرات نرم در مقایسه با ذرات سخت بیشتر است. علت این امر آن است که سرعت موج

در مورد سایر مودهای رزونانسی براحتی نمی‌توان به پیش‌بینی افزایش و یا کاهش فرکانس‌های رزونانسی با تغییرات درصد حجمی پرداخت. چرا که علاوه بر تغییر سختی محیط اطراف ذره، سختی خود ذره کروی نیز تغییر می‌کند. در منحنی میرایی، نتایج از جابجایی فرکانس‌های رزونانس، به سمت فرکانس‌های بیشتر با افزایش درصد حجمی ذرات نرم حکایت می‌کند. هرچند در مودهای مرتبه بالاتر، جابجایی کمتری در فرکانس‌های رزونانس مشاهده می‌شود.

بلند و متوسط و دومی در محدوده طول موج متوسط است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، میرایی موج در هر دو فرکانس تحت بررسی، با افزایش درصد حجمی، ابتدا افزایش و پس از رسیدن به نقطه ماکزیمم مجدد به سمت صفر میل می‌کند. در زمانی که درصد حجمی ذرات صفر و یا یک باشد، دامنه میرایی صفر است چرا که در این حالت‌ها محیط همگن می‌شود، و بنابراین اتلاف انرژی در اثر پدیده پراکنش وجود نخواهد داشت.

الاستیک در این مواد کمتر است. بنابراین بخش بیشتری از موج برخوردی به بیرون پراکنده شده و اتلاف انرژی موج بیشتر خواهد بود. شکل ۵ تغییرات سرعت فازی و میرایی را بر حسب درصد حجمی ذرات تشکیل دهنده، نشان می‌دهد. بررسی برای دو حالت  $k_2a = 1$  و  $k_2a = 2$  صورت پذیرفت. نسبت طول موج برخوردی به شعاع ذرات کروی در این حالات به ترتیب  $\delta = \pi$  و  $\delta = 2\pi$  است که اولی در مرز محدوده طول موج



شکل ۵ تغییرات سرعت فازی و میرایی نرمال بر حسب درصد حجمی ذرات برای موج P و SV در فرکانس‌های نرمال مختلف موج منتشره



سخت، خواص الاستیک محیط مؤثر نسبت به محیط ماتریس بترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش درصد حجمی در مواد مرکب حاوی ذرات نرم، خواص الاستیک دینامیکی محیط مؤثر کاهش و در مواد مرکب حاوی ذرات سخت، افزایش می‌یابد. همچنین روند تغییرات مدول برشی و مدول حجمی محیط مؤثر مشابه روندی است که در منحنی تغییرات سرعت فازی بر حسب عدد موج بی‌بعد تشریح شد.

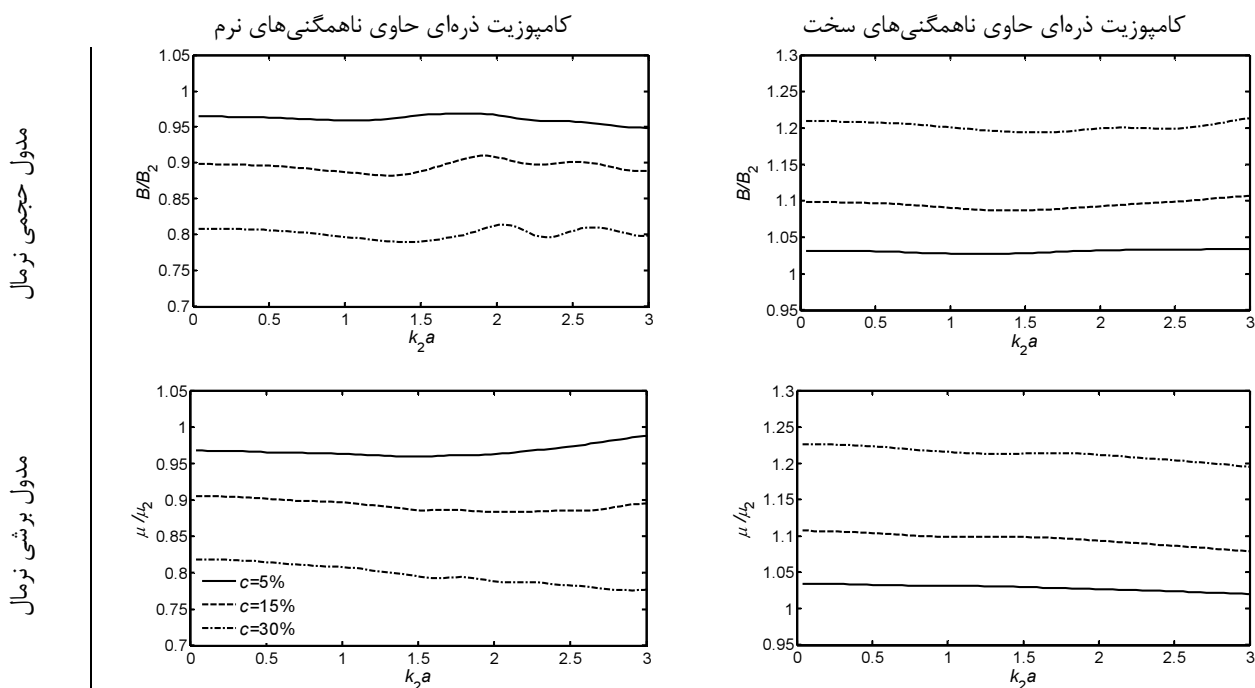
#### ۴- نتیجه‌گیری

در این کار، ضمن بیان مدل تعمیم یافته خودسازگار دینامیکی به بررسی رفتار انتشار موج الاستیک در مواد مرکب حاوی ذرات کروی نرم و سخت با توزیع تصادفی پرداخته شد. تغییرات سرعت فازی و میرایی، به همراه خواص دینامیکی مؤثر ماده مرکب با استفاده از این مدل بررسی گردید. نتایج حکایت از این واقعیت دارند که خواص انتشاری موج بشدت تحت تأثیر پارامترهایی نظیر درصد حجمی، اندازه و خواص الاستیک ذرات تقویت کننده و نیز فرکانس موج برخوردی است. این مدل مطابقت خوبی با رفتار انتشاری مورد انتظار موج الاستیک، در این نوع از مواد مرکب و نیز در درصدهای حجمی بالای ذرات دارد.

از طرف دیگر با توجه به این مسأله که بیشینه تغییرات در خواص الاستیک محلی ماده مرکب در درصد حجمی  $c = 0.5$  بوجود می‌آید، احتمال وجود نقطه ماکزیمم در منحنی میرایی پیرامون این عدد مورد انتظار است. در ماده مرکب حاوی ذرات نرم، ماکزیمم دامنه میرایی موج طولی برای  $k_2 a = 2$  در  $c = 0.33$  و برای موج برشی در  $c = 0.23$  اتفاق می‌افتد.

منحنی سرعت فازی بر حسب درصد حجمی ذرات نشان می‌دهد در حالت وجود ذرات نرم، سرعت فازی نرمال با افزایش درصد حجمی، کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است که با افزایش درصد حجمی ذرات، چگالی تغییر نکرده اما سختی نهایی ماده مرکب کاهش می‌یابد. بنابراین سرعت انتشار موج در محیط نهایی نسبت به ماتریس کاهش می‌یابد. با همین توضیح در صورت وجود ذرات سخت یک روند صعودی در منحنی سرعت فازی مشاهده می‌شود. همچنین کلیه منحنی‌های سرعت فازی از نقطه یک در  $c = 0$  آغاز می‌شوند که به علت نرمال شدن سرعت فازی موج میانگین نسبت به سرعت فازی محیط ماتریس است.

شکل ۶ تغییرات خواص الاستیک محیط مؤثر را بر حسب عدد موج بی‌بعد نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در کلیه این منحنی‌ها آن است که با افزایش درصد حجمی ذرات نرم یا



شکل ۶ تغییرات مدول برشی و مدول حجمی نرمال بر حسب عدد موج بی‌بعد و درصدهای حجمی مختلف

$$\xi_{23} = (n-1)j_n(K_2b) - K_2bj_{n+1}(K_2b) \quad (\text{پ- } 15)$$

$$\xi_{32} = h_n(K_2a), \quad \xi_{33} = j_n(K_2a), \quad \xi_{34} = j_n(K_1a) \quad (\text{پ- } 16)$$

$$\xi_{42} = (n-1)h_n(K_2a) - K_2ah_{n+1}(K_2a) \quad (\text{پ- } 17)$$

$$\xi_{43} = (n-1)j_n(K_2a) - K_2aj_{n+1}(K_2a) \quad (\text{پ- } 18)$$

$$\xi_{44} = (n-1)j_n(K_1a) - K_1aj_{n+1}(K_1a) \quad (\text{پ- } 19)$$

$$\zeta_1 = j_n(Kb), \quad \zeta_2 = (n-1)j_n(Kb) - Kbj_{n+1}(Kb) \quad (\text{پ- } 20)$$

ماتریس‌های  $\tilde{P}$  و  $\tilde{Q}$  از ماتریس‌های  $P$  و  $Q$  با جایگزین نمودن  $h_n$  به جای  $j_n$  بدست می‌آیند. سایر ماتریس‌ها در معادلات (۱۴) و (۱۵) به همین شکل با جایگزینی مطابق جدول ۲ حاصل می‌شوند.

جدول ۲ سایر پارامترها در معادلات (۱۴) و (۱۵)

	جایگزین	به جای
$P^{(2)}, Q^{(2)}$	$k, K$	$k_2, K_2$
$\tilde{P}^{(2)}, \tilde{Q}^{(2)}$	$h_n$	$j_n$
$P^{(1)}, Q^{(1)}$	$kb, Kb$	$k_1a, K_1a$
$\tilde{P}^{(1)}, \tilde{Q}^{(1)}$	$h_n$	$j_n$
	$kb, Kb$	$k_1a, K_1a$
$P^0, Q^0$	$kb, Kb$	$k_2a, K_2a$

## ۶- مراجع

- [1] Foldy L. L., "The Multiple Scattering of Waves", *Phys. Rev.*, Vol. 67, 1945, pp. 107-119.
- [2] Lax M., "Multiple Scattering of Waves", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 23, 1951, pp. 287-310.
- [3] Waterman P. C., Truell R., "Multiple Scattering of Elastic Waves", *J. Math. Phys.*, Vol. 2, 1961, pp. 512-537.
- [4] Hill, R., "A Self Consistent Mechanics of Composite Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 1965, pp. 213-222.
- [5] Moon F.C., Mow C.C., "Wave propagation in a composite material containing spherical inclusions", *Rand Corp. Report*, RM-6139-PR, Santa Monica, CA 1970.
- [6] Kinra V.K., Petraitis M.S., "Datta S.K., Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 16, 1980, pp. 301-312.

همچنین مقایسه ذرات تقویت کننده سخت و نرم معیارهای مناسبی جهت انتخاب نوع مواد مرکب ذره‌ای جهت طراحی سازه‌های تحت بارگذاری دینامیکی، ارائه می‌کند. نتایج نشان داد که ذرات سخت نسبت به ذرات نرم، میرایی کمتر و سرعت فازی بیشتری را منجر می‌شوند. و منحنی تغییرات میرایی نسبت به درصد حجمی در هر دو ماده مرکب، دارای یک نقطه بیشینه می‌باشد. خواص دینامیکی مؤثر مواد مرکب حاوی ذرات سخت نیز با افزایش درصد حجمی، افزایش و در ذرات نرم کاهش می‌یابد.

## ۵- پیوست

$$P_{11} = nh_n(kb) - kbh_{n+1}(kb) \quad (\text{پ- } 1)$$

$$P_{12} = n(n+1)h_n(Kb), P_{21} = h_n(Kb) \quad (\text{پ- } 2)$$

$$P_{22} = (n+1)h_n(Kb) - Kbh_{n+1}(Kb) \quad (\text{پ- } 3)$$

$$Q_{11} = \left( n^2 - n - \frac{1}{2}K^2b^2 \right) h_n(kb) + 2kbh_{n+1}(kb) \quad (\text{پ- } 4)$$

$$Q_{12} = n(n+1)[(n-1)h_n(Kb) - Kbh_{n+1}(Kb)] \quad (\text{پ- } 5)$$

$$Q_{21} = (n-1)h_n(kb) - kbh_{n+1}(kb) \quad (\text{پ- } 6)$$

$$Q_{22} = \left( n^2 - 1 - \frac{1}{2}K^2b^2 \right) h_n(Kb) + Kbh_{n+1}(Kb) \quad (\text{پ- } 7)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{پ- } 8)$$

$$\Phi_{mn} = \frac{i^{n-1}}{k} (2n+1) \delta_{m0} \quad (\text{پ- } 9)$$

$$X_{mn} = \frac{i^{n-1}}{2K} \frac{2n+1}{n(n+1)} [\delta_{m1} - n(n+1)\delta_{m,-1}] \quad (\text{پ- } 10)$$

$$Y_{mn} = \frac{i^{n-1}}{2} \frac{2n+1}{n(n+1)} [\delta_{m1} + n(n+1)\delta_{m,-1}] \quad (\text{پ- } 11)$$

$$\xi_{11} = h_n(Kb), \quad \xi_{12} = h_n(K_2b), \quad \xi_{13} = j_n(K_2b) \quad (\text{پ- } 12)$$

$$\xi_{21} = (n-1)h_n(Kb) - Kbh_{n+1}(Kb) \quad (\text{پ- } 13)$$

$$\xi_{22} = (n-1)h_n(K_2b) - K_2bh_{n+1}(K_2b) \quad (\text{پ- } 14)$$

- [15] Yang R.B., "A Dynamic Generalized Self-Consistent Model for Wave Propagation in Particulate Composites", *J. Appl. Mech.*, Vol. 70, 2003, pp. 575-582.
- [16] Wei P.J., Huang Z.P., "Dynamic effective properties of the particle-reinforced composites with the viscoelastic interphase", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 41, 2004, pp. 6993-7007.
- [17] Kim J.-Y., "On the generalized self-consistent model for elastic wave propagation in composite materials", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 41, 2004, pp. 4349-4360.
- [18] Kanaun S.K., Levin V.M., Sabina F.J., "Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach)", *Wave Motion*, Vol. 40, 2004, pp. 69-88.
- [19] Layman C., Murthy N.S., Yang R.B., Wu J., "The interaction of ultrasound with particulate composites", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 119, 2006, pp. 1449-1456.
- [20] Hu C., Fang X., Huang W., "Dynamic effective properties of matrix composite materials with high volume concentrations of particles", *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 78, 2008, pp. 177-190.
- [21] Rahimzadeh M., "Elastic wave propagation in nano composites with random distribution of spherical inclusions", *Latin American Journal of Solids and structures*, Vol. 10, No. 4, 2013, pp. 813-831.
- [7] Ying C.F., Truell R., "Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid", *J. Appl. Phys.*, Vol. 27, 1956, pp. 1086-1097.
- [8] Kinra V.K., Ker E., Datta S.K., "Influence of particle resonance on wave propagation in a random particulate composite", *Mech. Res. Commun.*, Vol. 9, 1982, pp. 109-114.
- [9] Sayers C.M., Smith R.L., "Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusions", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 16, 1983, pp. 1189-1194.
- [10] Fu L.S., Sheu Y.C., "Ultrasonic wave propagation in two-phase media: Spherical inclusions", *composite Structures*, Vol. 2, 1984, pp. 289-303.
- [11] Varadan V.K., Ma Y., Varadan V.V., "A multiple scattering theory for elastic wave propagation in discrete random media", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 77, 1985, pp. 375-385.
- [12] Datta S.K., Ledbetter H.M., Shindo Y., Shah A.H., "Phase velocity and attenuation of plane elastic waves in a particle-reinforced composite medium", *Wave Motion*, Vol. 10, 1988, pp. 171-182.
- [13] Kim J.Y., Ih J.G., Lee B.H., "Dispersion of elastic waves in random particulate composites", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 97, 1995, pp. 1380-1388.
- [14] Sato H., Shindo Y., "Multiple scattering of plane elastic waves in a particle-reinforced-composite medium with graded interfacial layers", *Mech. Mater.*, Vol. 35, 2003, pp. 83-106.