

# اعمال یک روش ضمنی و بالادست بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی برای حل میدان جریان لزج

کیومرث مظاهری<sup>1\*</sup>، مسعود دربندی<sup>2</sup>، شیدوش وکیلی پور<sup>3</sup>

1- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

2- دانشیار دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

3- کارشناس ارشد مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

\* تهران، صندوق پستی 143 - 14115

kiumars@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: فروردین 1382، پذیرش مقاله: فروردین 1384)

**چکیده** - در هر شبیه‌سازی عددی دو مرحله اساسی یعنی گسسته‌سازی میدان حل (تولید شبکه) و گسسته‌سازی معادلات حاکم وجود دارد. در این تحقیق در مرحله اول برای گسسته‌سازی میدان جریان از شبکه بی‌سازمان مثلثی استفاده می‌شود. این شبکه به دلیل قابلیت اعمال و کارایی مناسب در هندسه‌های بسیار پیچیده و همچنین سهولت عملیات تطبیق، به عنوان روشی سرآمد در گسسته‌سازی میدان جریان شناخته شده است. در قدم دوم، برای گسسته‌سازی معادلات حاکم، از روش المانهای محدود - که توانایی و مزایای ویژه‌ای در تحلیل مسائل با هندسه و مرز پیچیده داشته و مزیت‌های روش ضمنی را دارد - استفاده شده است. در این تحقیق راهکاری مناسب برای کاربرد یک روش ضمنی بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی ارائه می‌شود. علاوه بر این، برای گسسته‌سازی عبارتهای جابجایی در معادلات ناویر - استوکس (Navier-Stokes) از کلیه مزایا و امکانات روش بالادست و بقایی استفاده شده و گسسته‌سازی عبارتهای لزجی در این معادلات به روش المانهای محدود انجام می‌شود. در انتها روابط توسعه داده شده برای جریان لزج در داخل مجاری، آزمایش شده است که نتایج به دست آمده بسیار رضایت بخش است.

**کلید واژگان:** شبکه بی‌سازمان مثلثی، روش بالادست و ضمنی، جریان لزج، المان محدود.

## 1- مقدمه

می‌تواند هندسه‌های پیچیده را به مراتب آسانتر شبکه‌بندی کند. در سالهای اخیر المان مثلثی به عنوان ساده‌ترین چندضلعی در فضای دوبعدی، برای شبکه‌بندی میدان جریان به شکل بی‌سازمان بسیار به کار رفته است.

اصولاً یک مشکل مهم در حل جریان تراکم‌ناپذیر، حل کردن مشکل صفحه شطرنجی برای میدانهای سرعت و فشار<sup>1</sup> است. برای این منظور در روش تابع خط

اولین گام در هر شبیه‌سازی عددی، گسسته‌سازی میدان جریان (تولید شبکه) است. در هندسه‌هایی که به کمک شبکه‌بندی باسازمان گسسته می‌شوند، همسایگی‌ها در هر سلول با شماره شاخص آن ارتباط دارد که این از مزایای شبکه‌بندی باسازمان است. اما در هندسه‌های پیچیده، این نوع شبکه‌بندی، از نظر یافتن تبدیل مناسب و عملیات تطبیق، مشکلاتی را فراهم می‌آورد که گسسته‌سازی میدان جریان را غیرممکن می‌نماید. روش شبکه‌بندی بی‌سازمان

1. Checkerboard Problem

می‌شود. در بعضی از پژوهشها استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته در زمینه ماتریس‌های پراکنده<sup>5</sup> باعث شده تا در میدانهایی با وجود 1600 گره، حافظه مورد نیاز فقط معادل 2/4 مگابایت باشد [11]. هدف تحقیق حاضر اعمال روش ضمنی بر روی یک شبکه بی‌سازمان مثلثی است. در این کار برای کمتر شدن حافظه مورد نیاز و بالا رفتن سرعت همگرایی و حل دستگاه معادلات، الگوریتمی برای این منظور طراحی و ارائه می‌شود.

## 2- معادلات حاکم

در این تحقیق معادلات ناویر-استوکس برای شبیه‌سازی میدان جریان لزوج استفاده شده که شکل برداری آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

که در آن بردارهای  $T, R, G, F$  و  $\psi$  عبارتند از:

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v v + p \\ \rho v h \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ \rho u h \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

با فرض نیوتنی بودن سیال، عبارتهای تنش به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \left\{ \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \quad (5)$$

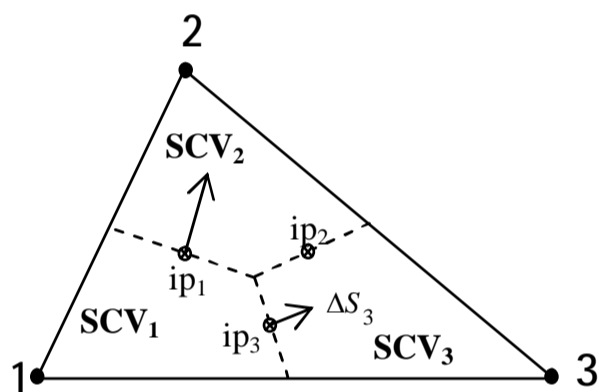
جریان-ورتیسیته<sup>1</sup> عبارت فشار از معادلات به طور مناسبی حذف می‌شود [1]. در گروه دیگری از روشها، حل میدانهای سرعت و فشار در دو شبکه مجزا<sup>2</sup> انجام می‌شود که یک نمونه آن روش سلول و مشخص کننده<sup>3</sup> است [2]. به طور کلی در این روشها از اطلاعات میدان سرعت در معادله پیوستگی برای محاسبه فشار در معادله ممتن استفاده می‌شود [3,4]. همچنین در بعضی روشها از میدان سرعت موجود در معادله ممتن برای به دست آوردن میدان سرعت در معادله پیوستگی استفاده می‌شود [5]. در روشهای بقایی، اغلب از روند تصحیح فشار برای هر سلول استفاده می‌شود [6]. الگوریتم‌های سیمپل و سیمپلر نیز از شبکه جابه‌جا شده برای حل میدان جریان تراکم ناپذیر استفاده می‌کنند [4]. در مقابل روشهایی هستند که از یک شبکه ثابت<sup>4</sup> برای حل میدان استفاده می‌کنند. در بعضی روشها برای برطرف کردن مسأله صفحه شطرنجی، از تقریب میدان فشار با تعداد نقاط کمتری نسبت به نقاط استفاده شده برای تقریب میدان سرعت استفاده می‌شود [7]. علاوه بر این، روشهایی دیگری از یک تقریب برای کمیت‌های سرعت و فشار استفاده می‌کنند [8]. تحقیقات نشان می‌دهد که روشهای مبتنی بر شبکه ثابت، مزایای بیشتری نسبت به روشهای شبکه مجزا دارند [9].

در روش حاضر از متغیر فشار به عنوان متغیر وابسته استفاده شده که قابلیت حل میدان در تمام محدوده‌های سرعت را دارد. اخیراً این روش برای حل میدان جریان بر روی شبکه مثلثی با سازمان به کار رفته است [10]. روش حل، از نوع ضمنی است. اصولاً در روشهای ضمنی، اعمال روش بر روی میدانهایی با تعداد گره بالا، بویژه بر روی شبکه‌های بی‌سازمان، محدودیت حافظه و حل دستگاه معادلات و مشکلات مربوط به آن، گاهی باعث غیرممکن شدن حل عددی در مسائل واقعی

1. Stream Function – Vorticity  
2. Staggered Grid  
3. Cell and Marker  
4. Collocated Grid

5. Sparse Matrices

شامل اجزای مورد نیاز در هر دو دیدگاه المان محدود و حجم محدود باشد. اگر گره‌های مورد نیاز در روش المان محدود بر روی سه رأس مثلث قرار گیرند، سطوح گذرنده شار باید حول هر گره، یک سطح بسته را تشکیل دهد تا قوانین بقا قابل اعمال باشند. بنابراین در هر مثلث سه زیرمجموعه سطحی<sup>4</sup> در نظر گرفته شده و گذر شار در هر یک از سطوح داخلی مثلث با معرفی کردن نقاط انتگرال‌گیری مشخص می‌شود. از طرفی بردارهای عمود بر سطوح داخلی - که برای عملیات انتگرال‌گیری بر روی سطوح به وسیله قضیه گوس به کار می‌رود - به سمت خارج برای هر زیرمجموعه سطحی تعریف خواهند شد (شکل 1).



شکل 1 تعریف زیرمجموعه‌ها و بردارهای سطحی در المان

برای هر گره در میدان، فقط شارهای عبور کننده از سطوح زیرمجموعه سطحی که درون المان قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود، زیرا فقط این سطوح هستند که با در نظر گرفتن تمام المانهایی که نقطه مفروض (p) در شکل 2 را شامل می‌شوند، یک سطح بسته را حول آن نقطه ایجاد خواهند کرد.

از آنجا که روش حاضر از نوع المان محدود است، اعمال قوانین بقا با در نظر گرفتن شارهای گذرنده از سطوح درونی هر المان، باید به نوعی به روش المان محدود بیان شود. بنابراین در شکل گسسته شده معادلات، تمامی کمیتها باید بر حسب مقادیر روی گره‌های المان بیان شوند.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \left\{ \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \quad (7)$$

با استفاده از قانون فوریه در هدایت گرمایی و با صرف نظر کردن از بخش انرژی پتانسیل در کل انرژی، روابط زیر در معادله انرژی قابل استفاده است:

$$q_x = -k \frac{\partial t}{\partial x} \quad , \quad q_y = -k \frac{\partial t}{\partial y} \quad (8)$$

$$h = c_p t + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (9)$$

### 3- کلیات روش عددی

روش عددی حاضر یک روش المان محدود بر پایه حجم محدود است. گسسته‌سازی معادلات بر اساس ماهیت عبارتهای موجود در معادلات ناویر- استوکس انجام می‌شود. این معادلات در حالت دائم و بدون جمله چشمه، شامل سه نوع جمله است. به ترتیب: 1- جمله‌های جابجایی<sup>1</sup> 2- جمله‌های نفوذی<sup>2</sup> و 3- جمله‌های فشاری<sup>3</sup>. در این روش با جمله‌های نفوذی و فشاری با توجه به ماهیت بیضوی آنها، به روش المان محدود برخورد می‌شود. اما عبارتهای جابه‌جایی از حساسیت بیشتری برخوردار بوده و در گسسته‌سازی آنها دقت بیشتری لازم است. روشهای حجم محدود از آنجا که قوانین بقا را برای هر یک از کمیتهای جرم، ممتنم و انرژی ارضا می‌کنند، مطمئن‌ترین راه برای گسسته‌سازی عبارتهای جابه‌جایی هستند.

قرار گرفتن روش حجم محدود و روش المان محدود در کنار یکدیگر برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان سیال به در نظر گرفتن نوعی خاص از جداسازی نیاز دارد. از آنجا که هدف نهایی اعمال روش حاضر بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی است، لذا المان مثلثی باید

1. Convection  
2. Diffusion Terms  
3. Pressure Terms

4. Sub-Control Volume (SCV)

دیورژانس معادلات ناویر-استوکس به صورت زیر خواهند شد:

$$\int_{S1i} (\hat{F}_i + \hat{G}_j) \cdot \vec{ds} + \int_{S2i} (\hat{F}_i + \hat{G}_j) \cdot \vec{ds} = \int_{S1i} (\hat{R}_i + \hat{T}_j) \cdot \vec{ds} + \int_{S2i} (\hat{R}_i + \hat{T}_j) \cdot \vec{ds} \quad (10)$$

در معادله (10)  $S1i$  و  $S2i$  دو سطح زیرمجموعه سطحی هستند که درون المان واقع شده اند. با جایگذاری هر یک از اجزای بردارهای  $F, G, R, T$  در این انتگرال‌ها، به معادلات بقای جرم، ممتم و انرژی می‌رسیم.

با ثابت فرض کردن هر یک از شارها بر روی سطوح انتگرال‌گیری و قرار دادن آن مقدار ثابت در نقطه‌ای به نام نقطه انتگرال‌گیری<sup>1</sup> در وسط ضلع برای اولین سطر از بردارهای شار، معادله پیوستگی به شکل ماتریسی زیر در خواهد آمد:

$$[a^{pfm}] \{f\} + [a^{pgm}] \{g\} = 0 \quad (11)$$

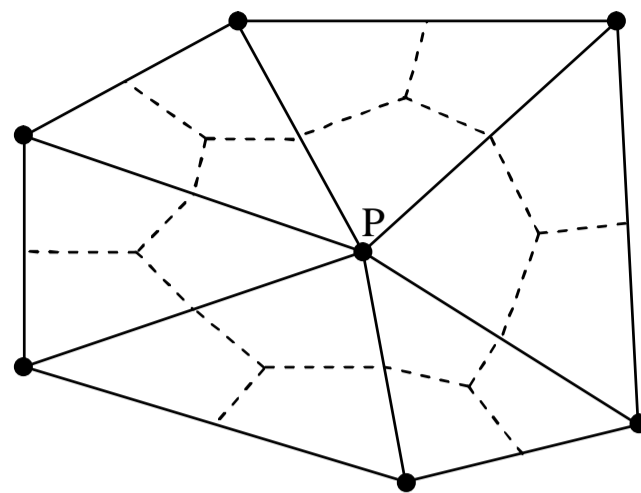
بالانویسهای حروف ضرایب ماتریسی به ترتیب از چپ به راست نام معادله ( $p$  برای معادله پیوستگی)، نام بردار ضرب شده در آن ضریب و نوع عبارت موجود ( $c$  برای جمله‌های جابه‌جایی) است.

معادله (10) در واقع شامل سه معادله است که برای هر یک از سه زیرمجموعه سطحی، بخشی از معادله بقای جرم را ارضاء می‌کند. این سه معادله از انتگرال‌گیری بر روی سطوح هر یک از سه زیرمجموعه سطحی داخل المان به دست می‌آیند. ضرایب ماتریس  $3 \times 3$  در معادله (11) عبارتند از:

$$a_{i,j}^{pfm} = \begin{cases} (\Delta S_x)_{S1i} & j = S1i \\ (\Delta S_x)_{S2i} & j = S2i \\ 0 & else \end{cases} \quad (12)$$

$$a_{i,j}^{pgm} = \begin{cases} (\Delta S_y)_{S1i} & j = S1i \\ (\Delta S_y)_{S2i} & j = S2i \\ 0 & else \end{cases} \quad (13)$$

شاخص  $i$  نشان‌دهنده شماره زیرمجموعه سطحی و



شکل 2 ایجاد یک سطح بسته حول نقطه P از طریق به هم پیوستن زیر مجموعه‌های سطحی

مطلب قابل توجه دیگر، انتخاب متغیرهای وابسته برای سیستم معادلات است. در این روش، فشار به عنوان متغیر اصلی به جای چگالی در نظر گرفته شده و چگالی در هر مرحله تکرار، از تکرار قبل به وسیله معادله حالت به دست خواهد آمد. در بسیاری از روشهای عددی از مؤلفه‌های سرعت  $(u, v)$  به عنوان مجهولات فعال در معادلات ممتم استفاده می‌شود. مؤلفه‌های ممتم  $(\rho u, \rho v)$  در واقع معرف کمیت شارهای جرمی در راستاهای  $x$  و  $y$  هستند. اما استفاده از مؤلفه‌های ممتم به جای مؤلفه‌های سرعت به عنوان متغیرهای وابسته در روش حاضر، سه مزیت را به دنبال خواهد داشت [1]. مزیت اول امکان توسعه روش عددی، از حل جریان تراکم پذیر به روشی مناسب برای تمام سرعتها است. مزیت دوم کمتر شدن فرایندهای خطی‌سازی و مزیت سوم ثابت باقی ماندن اندازه این کمیتها در گذر از ناپیوستگی‌ها خواهد بود.

با توجه به مطالب ذکر شده، الگوریتم گسسته‌سازی معادلات شامل دو مرحله اصلی خواهد بود: اول گسسته‌سازی هر یک از انواع عبارتهای موجود در معادلات و دوم ارتباط بردار مقادیر روی سطح به مقادیر روی گره‌های المان.

#### 4- گسسته‌سازی معادلات در حالت دوبعدی

با انتگرال‌گیری از معادله (1) و با استفاده از قضیه

1. Integration Point (ip)

در معادله انرژی نیز مانند معادلات ممتم عبارتهای نفوذی از روش المان محدود و عبارتهای جابه‌جایی از طریق انتگرال‌گیری بر روی سطوح، گسسته‌سازی شده و شکل بسته آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & [A^{tfd}] \{F\} + [A^{tgd}] \{G\} + [A^{ttk}] \{T\} + \\ & [a^{tfc}] \{f\} + [a^{tgc}] \{g\} + [a^{ttc}] \{t\} = \{A^{td}\} \end{aligned} \quad (17)$$

به دلیل گستردگی ابعاد روابط و ضرایب به دست آمده، خواننده در صورت نیاز می‌تواند برای مشاهده و دنبال نمودن دقیقتر روندهای گسسته‌سازی و شکل گسترده ضرایب به [12] رجوع نماید.

### 5- معادلات نقاط انتگرال‌گیری

همانطور که اشاره شد، برای تکمیل گسسته‌سازی و بستن سیستم معادلات نیاز است تا بردار مقادیر بر روی نقاط انتگرال‌گیری به بردار مقادیر روی گره‌ها ارتباط یابند. از آنجا که عبارتهای جابه‌جایی واقع در نقاط انتگرال‌گیری، هدف اصلی این ارتباط هستند، دقت در ماهیت فیزیکی آنها در سازگاری روش تخمین شارها تأثیر مستقیم خواهد داشت. برای درگیری مناسب میدانهای سرعت و فشار، مؤلفه‌های سرعت موجود در معادلات ناویر-استوکس به دو دسته جابه‌جا کننده<sup>2</sup> و جابه‌جا شونده<sup>3</sup> تقسیم می‌شوند [13]. سرعت‌های موجود در معادله پیوستگی همگی از نوع جابه‌جا شونده بوده در حالی که در معادلات ممتم و انرژی، سرعتها به هر دو صورت ظاهر می‌شوند. از آنجا که سرعتهای جابه‌جا کننده، انتقال یک خاصیت را بر عهده دارند، در این تحقیق روش بالادست برای تخمین آنها استفاده می‌شود. روشهای بالادست همواره قابلیت ایجاد خاصیت نفوذ غلط<sup>4</sup> را دارند [14]. رایتبی<sup>5</sup> نشان می‌دهد که اگر جهت واقعی جریان برای روش بالادست

شاخص  $j$  نشان‌دهنده شماره نقطه انتگرال‌گیری، و  $\Delta s_x$  و  $\Delta s_y$  اندازه‌های بردار نرمال بر سطح در دو راستای  $x$  و  $y$  می‌باشند.

بردارهای  $\{f\}$ ،  $\{g\}$  و هر برداری که با حروف کوچک نشان داده شود، بردار مقادیر روی سطوح است که باید با بیان مناسب، به بردارهای مقادیر بر روی گره‌ها ارتباط داده شوند تا سیستم معادلات بسته شود.

معادلات ممتم در راستاهای  $x$  و  $y$  نیز به همین ترتیب به دست آمده و شکل بسته آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} & [A^{ffd}] \{F\} + [A^{fgd}] \{G\} + [a^{ffc}] \{f\} + [a^{fpp}] \{p\} = \{A^{fd}\} \\ & [A^{gfd}] \{F\} + [A^{ggd}] \{G\} + [a^{ggc}] \{g\} + [a^{gpp}] \{p\} = \{A^{gd}\} \end{aligned} \quad (14)$$

بردارهای  $F$ ،  $G$  و هر برداری که با حروف بزرگ نشان داده می‌شود، بردار مقادیر روی گره‌ها است.

مسئله مهم در گسسته‌سازی عبارتهای جابه‌جایی، خطی‌سازی عبارتهای غیرخطی است. در این تحقیق از خطی‌سازی ساده برای خطی کردن عبارتهای غیرخطی استفاده می‌شود:

$$\rho_{uu} \approx \bar{u}(\rho u) = \bar{u} f \quad (15)$$

علامت " " روی هر کمیتی قرار گیرد، بدان مفهوم است که آن کمیت از تکرار قبل محاسبه می‌شود.

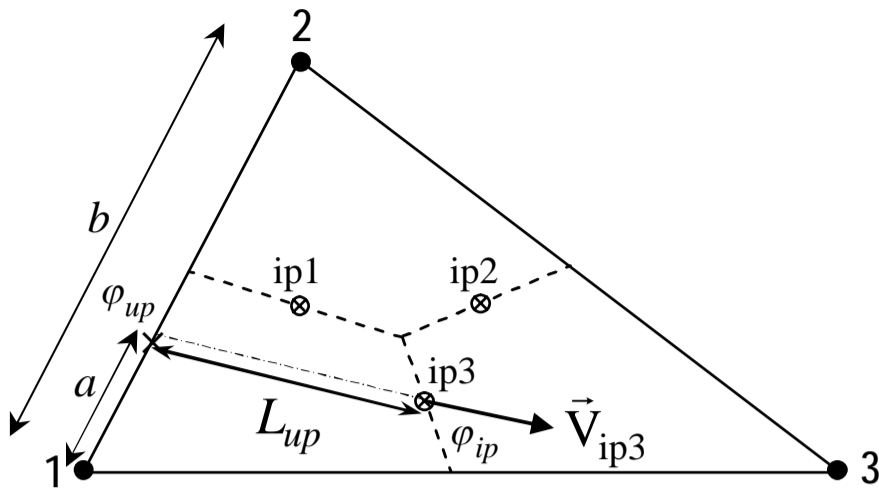
گسسته‌سازی عبارتهای تنشی با استفاده از روش المان‌های محدود انجام شده و این عبارتها، مستقیماً براساس مقادیر روی گره‌ها به دست خواهند آمد. در گسسته‌سازی به روش المان محدود هر مشتقی نسبت به متغیر  $x$  به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^3 \Phi_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (16)$$

$N_j$  تابع پایه<sup>1</sup> است که تغییرات کمیت  $\Phi$  را در داخل المان محدود نشان می‌دهد.

2. Convecting Velocity  
3. Convected Velocity  
4. False Diffusion  
5. Raithby

1. Shape Function



شکل 3 استفاده از جهت بردار کلی سرعت در مرتبط ساختن مقادیر بر روی سطوح و گره‌های المان

مشابه این روند برای معادله ممتم در راستای  $y$  تکرار می‌شود.

منظور از خطای معادله‌های پیوستگی و ممتم در روابط (21) و (22) همان خطایی است که در اثر جایگذاری حل عددی به جای حل واقعی در این معادله‌ها به وجود می‌آید. برای گسسته‌سازی این دو معادله در بخش ممتم مانند قبل و در بخش پیوستگی با توجه به بیضوی بودن ماهیت شارها، مشتقها گسسته شده و دو بیان جدید برای معادله پیوستگی به دست خواهد آمد.

$$\{\hat{f}\} = [C^{\hat{f}f}]\{F\} + [C^{\hat{f}g}]\{G\} + [C^{\hat{f}p}]\{P\} + \{C^{\hat{f}}\} \quad (23)$$

$$\{\hat{g}\} = [C^{\hat{g}f}]\{F\} + [C^{\hat{g}g}]\{G\} + [C^{\hat{g}p}]\{P\} + \{C^{\hat{g}}\} \quad (24)$$

پس از آنکه معادله‌ها همگی براساس مقادیر روی گره‌ها به دست آمد، ماتریس سختی برای هر المان گردآوری<sup>1</sup> می‌شود.

### 6- اعمال روش بر روی شبکه بی سازمان مثلثی

برای اعمال روش حاضر با در نظر گرفتن چهار معادله برای هر گره در میدان حل با 6000 گره، به تشکیل ماتریس ضرایبی با  $5/76 \times 10^8$  درایه نیاز است که در صورت استفاده از دقت مرتبه دو برای ذخیره سازی اعداد

به کار رود، از وجود آمدن نفوذ غلط تا حد زیادی کاسته می‌شود. سرعت‌های جابه‌جا شونده همانند هر کمیت جابه‌جا شده دیگر، طبیعت بیضوی دارند و می‌توان بر روی نقاط انتگرال‌گیری از مقادیر تکرار قبل برای آنها استفاده کرد.

روش بالادست برای تقریب کمیت  $\Phi$  بر روی نقطه انتگرال‌گیری از معادله زیر پیروی می‌کند:

$$\Phi_{ip} = \Phi_{up} + \Delta\Phi_{ip} \quad (18)$$

در این معادله  $\Delta\Phi_{ip}$  تغییرات  $\Phi_{ip}$  را در راستای بردار سرعت بر روی نقطه انتگرال‌گیری نشان می‌دهد. برای تقریب  $\Delta\Phi_{ip}$  به طوری که سازگار با معادلات حاکم باشد، از شکل غیربقیایی معادلات ممتم در راستای مماسی بردار سرعت استفاده شده و مقادیر  $f$  و  $g$  به صورت توابعی از مقادیر روی گره‌ها به دست می‌آیند.

برای تقریب مشتق  $f$  در راستای مماسی با توجه به شکل 3 از رابطه (19) استفاده می‌شود.

$$\left( V_{tot} \frac{\partial f}{\partial s} \right)_{ipi} \approx \left( V_{tot} \frac{f - f_{up}}{L_{up}} \right)_{ipi} \quad (19)$$

از طرفی  $f_{up}$  نیز به صورت تقریب خطی از مقادیر  $F$  بر روی دو سر ضلعی از المان که راستای سرعت کلی را قطع کرده، به دست می‌آید:

$$(f_{up})_{ipi} = \frac{a}{b}(F_{upr})_{ipi} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)(F_{upl})_{ipi} \quad (20)$$

اما در معادله پیوستگی نیز مقادیر بر روی سطوح باید به مقادیر بر روی گره‌های المان ارتباط یابند [13]. از طرفی دلیل جدایی میدانهای سرعت و فشار در همین معادله نهفته است. برای آنکه بتوان به هر دو هدف دست یافت، از معادله‌های پیشنهادی زیر برای استخراج دو معادله جدید استفاده می‌شود.

$$(x\text{-Momentum Eq. Error}) - u(\text{Continuity Eq. Error}) = 0 \quad (21)$$

$$(y\text{-Momentum Eq. Error}) - v(\text{Continuity Eq. Error}) = 0 \quad (22)$$

در آنها به ترتیب شماره سطر، شماره ستون و مقدار درایه غیرصفر ذخیره می‌شود. بنابراین در هنگام گردآوری ماتریس سختی کل پس از تبدیل شاخص درایه محلی به شاخص درایه کلی، کافی است در سه بردار اشاره شده، شماره درایه‌ای پیدا شود که حاوی شماره همان شاخص به دست آمده باشد.

اما برای پیدا کردن شماره سطر و ستون به دست آمده، لازم است دو بردار اول جستجو شوند. با توجه به اینکه عملیات مقداردهی در فرایندهای گردآوری ماتریس سختی کل، با تعداد المانها و تعداد تکرار، رابطه مستقیم دارد، بنابراین الگوریتم جستجو باید با کمترین تعداد عملیات انجام شود و گرنه در بعضی موارد، زمان گردآوری ماتریس سختی کل، بیش از زمان حل دستگاه و حتی کل زمان حل عددی خواهد شد.

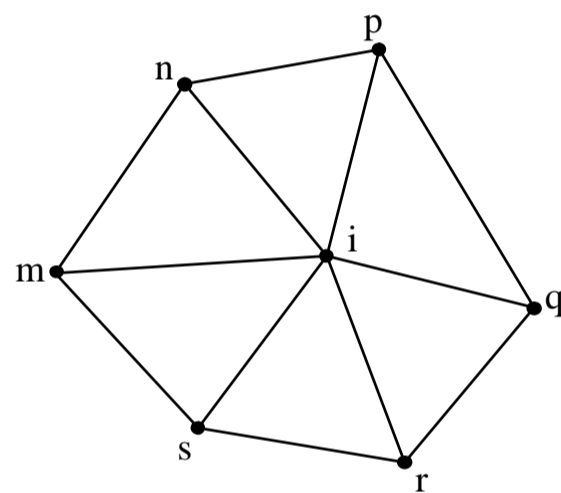
برای آنکه بتوان با روندی بهینه، جستجو در دو بردار ذخیره سازی شاخص درایه‌ها را برای یافتن شماره سطر و ستون مشخص انجام داد، باید شمارنده حلقه‌های جستجو- بجای آنکه تمام طول بردار را بشمارد- در محدوده کمترین تا بیشترین شاخص گره‌های درگیر با گره مربوط عمل جستجو را انجام دهد. برای طراحی چنین الگوریتمی، همانطور که اشاره شد، لازم است کمترین و بیشترین شاخص گره‌های درگیر با یک گره را همراه با شماره آن گره در هر آرایه ذخیره کنیم.

در شکل 5 ساختار الگوریتم طراحی شده در این پژوهش برای پیدا کردن و ذخیره سازی درایه‌های غیرصفر آورده شده است.

شمارنده  $i$  بین حدود پایینی و بالایی درایه یافت شده تغییر می‌کند. این عمل برای کمتر شدن تعداد عملیات جستجو انجام شده که ذخیره‌سازی حدود ذکر شده، لازمه این کار است. نهایتاً الگوریتم حل دستگاه معادلات خطی که در این تحقیق استفاده شده، برای حل ماتریس‌های پراکنده طراحی شده و به روش تکراری دستگاه را حل می‌کند.

به 4395 مگابایت حافظه نیاز است. این در حالی است که بالغ بر 95٪ این اعداد صفر است. برای آنکه بتوان از چنین ذخیره‌سازی عظیمی برای اعداد صفر رهایی یافت، نیاز به یافتن و ذخیره‌سازی درایه‌های غیرصفر است.

برای این منظور لازم است پیش‌بینی درستی از بیشینه تعداد کل درایه‌های غیرصفر داشته باشیم. اصولاً در روش المان‌های محدود گره‌هایی بر روی یکدیگر تأثیر می‌گذارند که بین آنها یک ضلع وجود داشته باشد. از این قاعده استفاده کرده و با جستجو در کل میدان تعداد گره‌های درگیر با هر گره را در کل میدان به دست می‌آوریم. این کار توسط یک الگوریتم جستجو با توجه به شکل 4 انجام می‌شود.



شکل 4 ارتباط گره  $i$  ام با دیگر گره‌ها

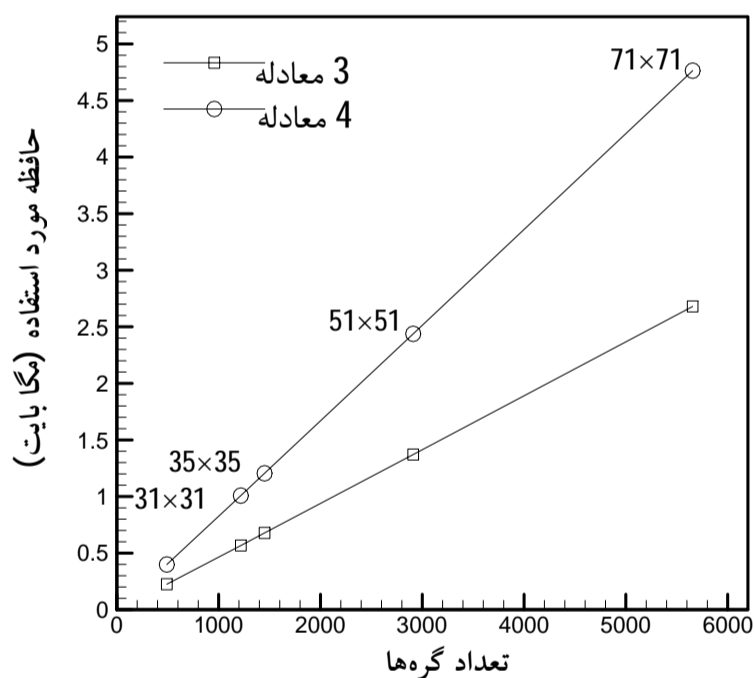
پس از آنکه تعداد و شاخص نقاط درگیر با هر گره در میدان به دست آمد  $(Nc_i)$ ، تعداد درایه‌های غیر صفر در هر سطر مربوط به معادله‌های گره موردنظر از رابطه (25) به دست خواهد آمد:

$$Non\_Zero = Nc_i \times N_{eq} + 1 \quad (25)$$

$N_{eq}$  تعداد معادله‌های حاکم بوده و عدد یک برای در نظر گرفتن خود گره مربوط اضافه شده است. از طرفی برای کمینه سازی تعداد عملیات در الگوریتم جستجو برای شماره‌گذاری، شماره کمترین شاخص و بیشترین شاخص نقاط درگیر با گره موردنظر نیز ذخیره می‌شود.

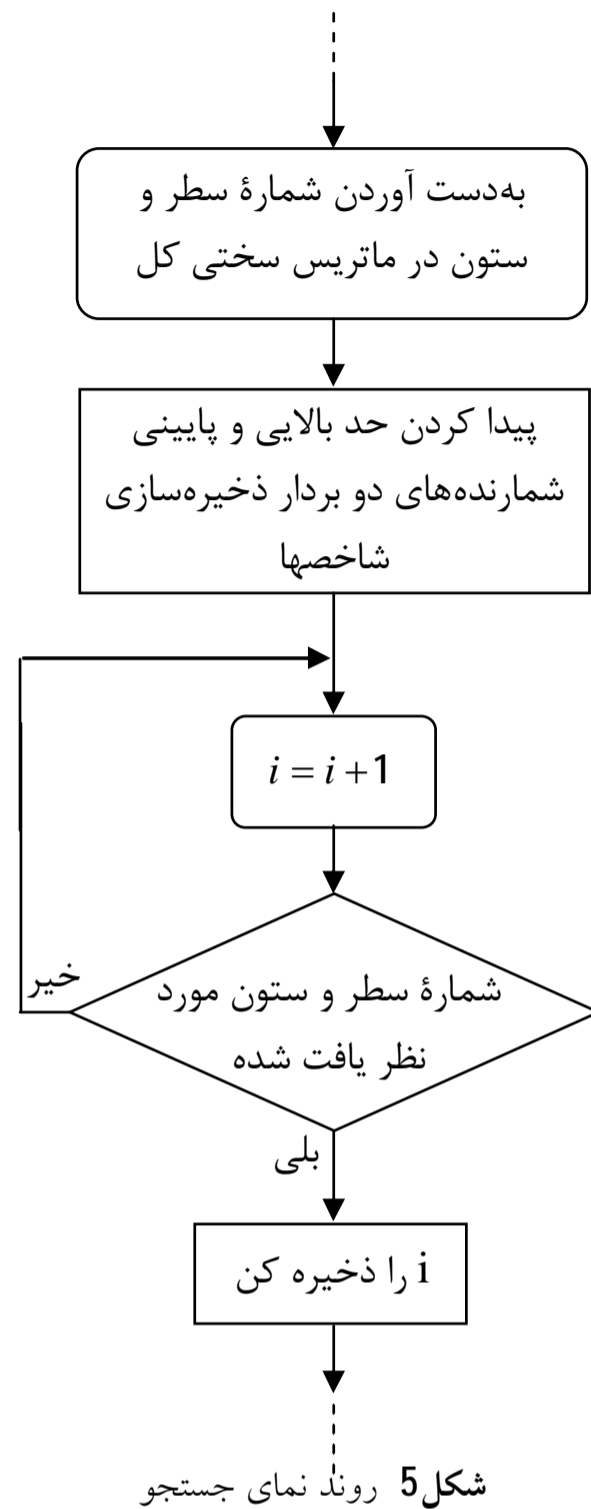
پس از به دست آمدن تعداد کل درایه‌های غیرصفر، سه بردار به طول درایه‌های غیرصفر تشکیل داده می‌شود که

مطرح در این زمینه است. همانطور که در بخش 6 اشاره شد، در این تحقیق الگوریتمی برای ذخیره‌سازی درایه‌های غیرصفر در راستای بهینه‌سازی حافظه مورد نیاز طراحی شده که در مقایسه با [11] بازدهی بیشتری دارد. در مرجع مذکور برای میدانی با تعداد 1600 گره،  $2/4$  مگابایت حافظه استفاده شده است در حالی که در تحقیق حاضر برای همین تعداد گره حدود  $1/3$  مگابایت حافظه مصرف می‌شود. شکل‌های 6 و 7 شامل نمودارهایی هستند که حافظه مورد نیاز و زمان حل را برای الگوریتم این تحقیق در مقایسه با شرایطی که تمام درایه‌های ماتریس ضرایب ذخیره شود، نشان می‌دهند. در به‌دست آوردن شکل‌های 6 و 7 از شبکه تولید شده در یک مربع با تعداد گره مرزی  $21 \times 21$ ،  $31 \times 31$ ،  $35 \times 35$ ،  $51 \times 51$  و  $71 \times 71$  استفاده شده است.



شکل 6 حافظه مورد نیاز در حالت ذخیره‌سازی درایه‌های غیرصفر

در این نمودارها نقاطی که با مربع مشخص شده‌اند، مربوط به شرایطی است که سه معادله یعنی معادله پیوستگی و دو معادله ممتنم برای حل میدان جریان در نظر گرفته شده است. دایره نیز معرف شرایطی است که چهار معادله یعنی پیوستگی، دو ممتنم و انرژی برای حل میدان جریان در نظر گرفته می‌شود.



## 7- نتایج

با توجه به کارایی‌های ذکر شده برای این روش ضمنی، نتایج به‌دست آمده در دو بخش ارائه خواهد شد. ابتدا الگوریتم طراحی شده برای گردآوری ماتریس سختی بررسی می‌شود و در قسمت دوم، نتایج به‌دست آمده از حل میدان جریان گردابه‌ای درون محفظه با دریچه متحرک<sup>1</sup>، با نتایج استاندارد مقایسه می‌شود.

### 7-1- حافظه مورد نیاز و زمان حل

برای اعمال روش ضمنی بر روی شبکه بی‌سازمان مثلثی، حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس ضرایب و زمان حل دستگاه معادلات خطی، از مهمترین مسائل

1. Driven Cavity

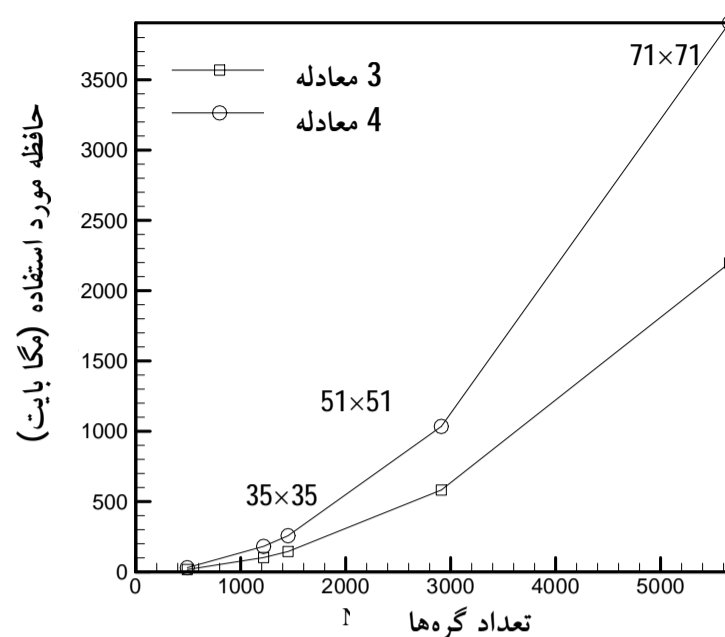


جواب نهایی روش عددی باید در مقایسه با سایر نتایج معتبر دقت لازم را داشته باشد.

اصولاً جریان گردابه‌ای درون هندسه مربعی از لحاظ برهم کنش عبارتهای جابه‌جایی و لزجتی، یکی از مناسبترین و در عین حال سخت‌ترین مسائل برای آزمایش نرم‌افزار عددی میدان جریان لزج است. هندسه موردنظر مربعی با ضلع یک است که ضلع افقی بالای آن به‌عنوان مرز متحرک و سه ضلع دیگر به‌عنوان مرز دیوار در نظر گرفته می‌شود. در شرایط مرز متحرک، مقادیر  $F$  و  $G$  روی هر یک از نقاط مرز متحرک به‌ترتیب در معادلات ممتنم در راستای  $x$  و  $y$  مقداردهی می‌شوند. همچنین فشار در معادله پیوستگی برای یکی از گره‌های روی مرز دیوار اعمال شود. با در نظر گرفتن لزجت برای سیال، شرط اعمال شده برای مرز دیوار، همان شرط عدم لغزش یا صفر بودن مؤلفه‌های سرعت روی دیوار خواهد بود. شکل 9 شبکه تولید شده برای هندسه مربعی در حالت  $21 \times 21$  را همراه با مرزهای پیشنهادی نشان می‌دهد.

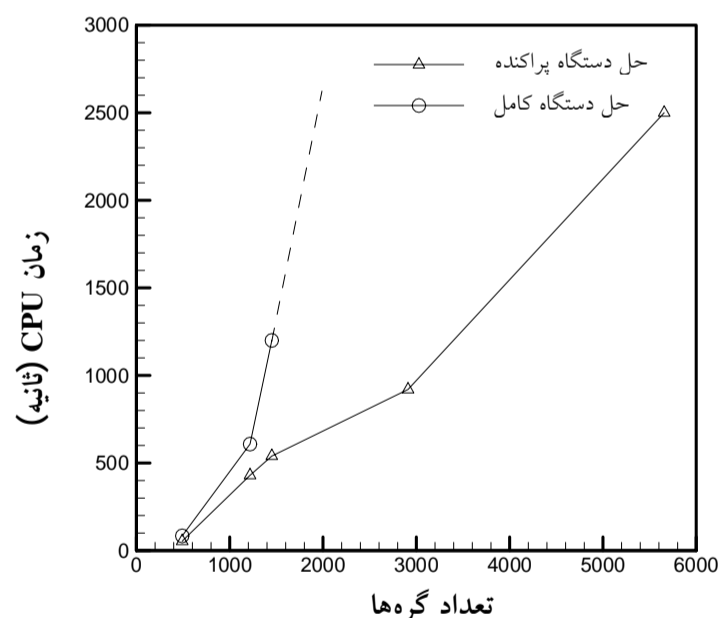
نتایج عددی حاصل برای سه عدد رینولدز ارائه می‌شود. در مرز متحرک  $F=1.0$  و  $G=0.0$  قرار داده شده و فشار نیز در معادله پیوستگی برای نقطه گوشه سمت راست و پایین مربع مقداردهی می‌شود. با در نظر گرفتن طول مشخصه یک در مرز متحرک، عدد رینولدز در مرز متحرک از رابطه  $Re=1/\mu$  محاسبه خواهد شد. بنابراین با تغییر ضریب لزجت می‌توان به اعداد رینولدز متفاوت دست یافت. در ادامه نتایج حاصل از حل عددی در سه عدد رینولدز 1000، 5000 و 7500 برای نشان دادن تأثیر شبکه در حل آورده شده اند (شکل‌های 10 تا 16).

همان‌طور که مشاهده می‌شود با بالا رفتن عدد رینولدز، فاصله حل عددی از حل استاندارد در شبکه درشت ( $21 \times 21$ ) بیشتر می‌شود که این به‌دلیل بالا رفتن تأثیر جمله‌های غیرخطی در معادلات است.



شکل 7 حافظه مورد نیاز در حالت ذخیره‌سازی

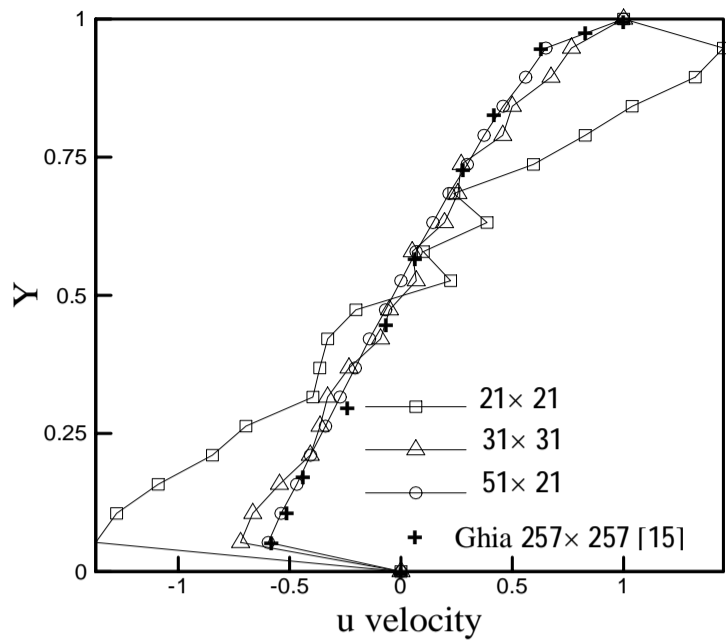
از نظر زمان حل نیز استفاده از الگوریتم حل ماتریس‌های پراکنده، کمک بزرگی در کاهش زمان حل برای مسأله مشخص، مشاهده می‌شود. برای این منظور مسأله جریان گردابه‌ای درون هندسه مربعی با عدد رینولدز برابر 1000 حل شده که نتایج زمان حل برای دو حالت استفاده از الگوریتم‌های حل دستگاه پراکنده و حل دستگاه کامل در شکل 8 ملاحظه می‌شود.



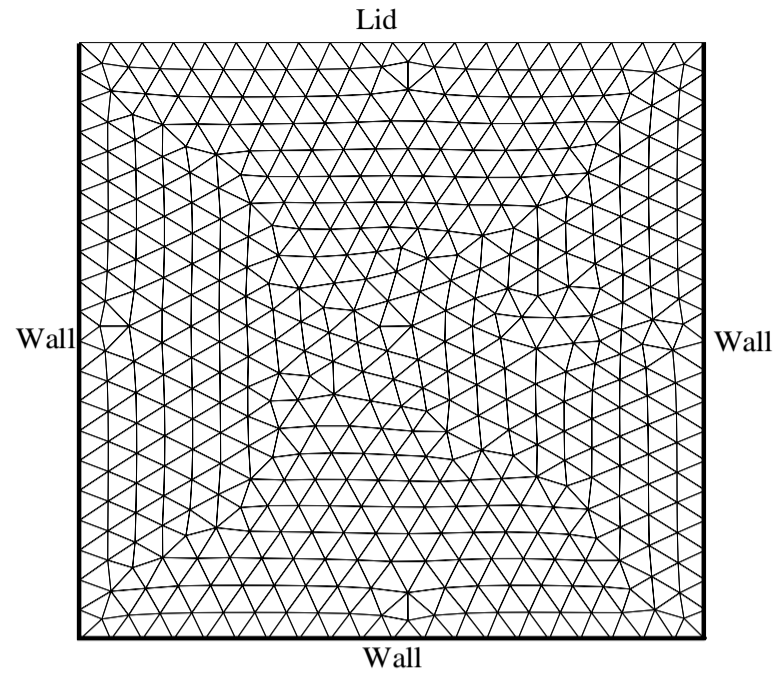
شکل 8 مقایسه زمان حل در دو حالت ماتریس پراکنده و کامل

## 2-7- مقایسه نتایج

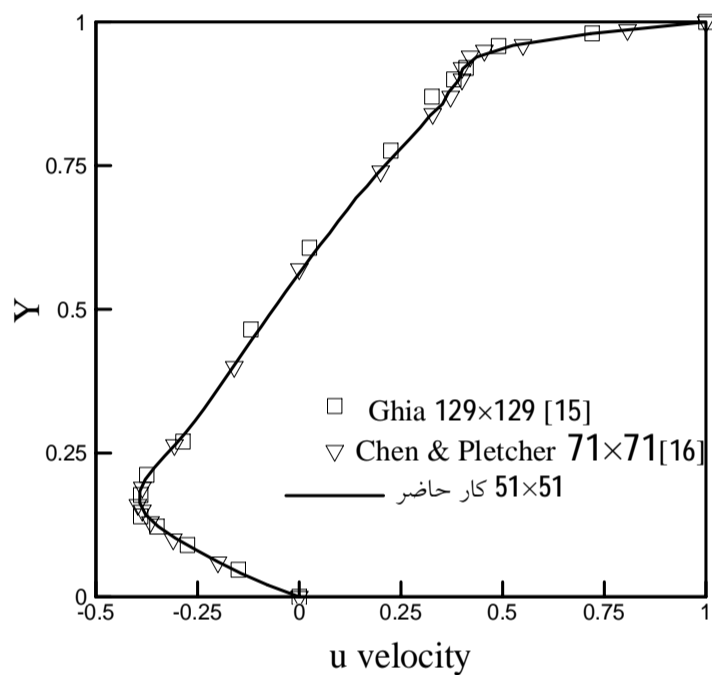
در این قسمت نتایج به‌دست آمده از حل مسأله جریان گردابه‌ای درون هندسه مربعی بررسی می‌شود. برای این بررسی دو ویژگی اساسی هر روش عددی در نظر گرفته می‌شوند. اولاً دقت روش عددی باید با ریز شدن شبکه بیشتر شود و به سمت جواب نهایی همگرا شود. ثانیاً



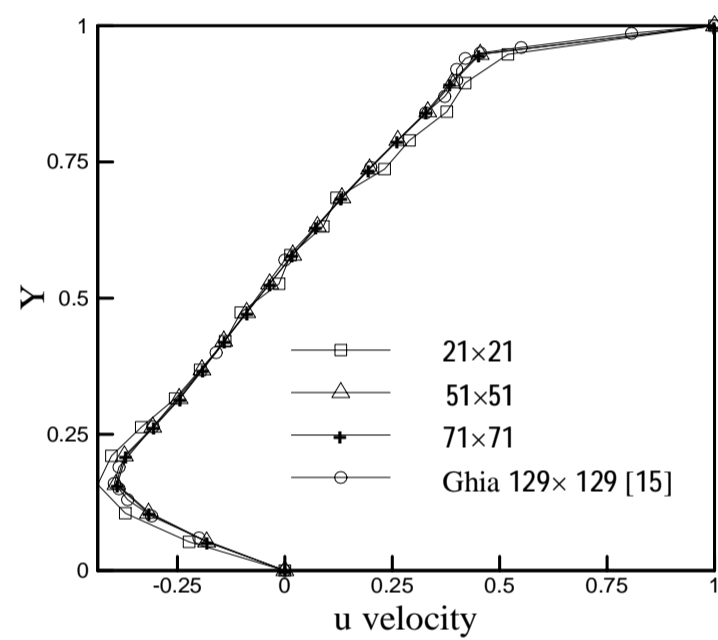
شکل 12 تأثیر ریزکردن شبکه بر سرعت افقی در خط تقارن عمودی در  $Re = 7500$



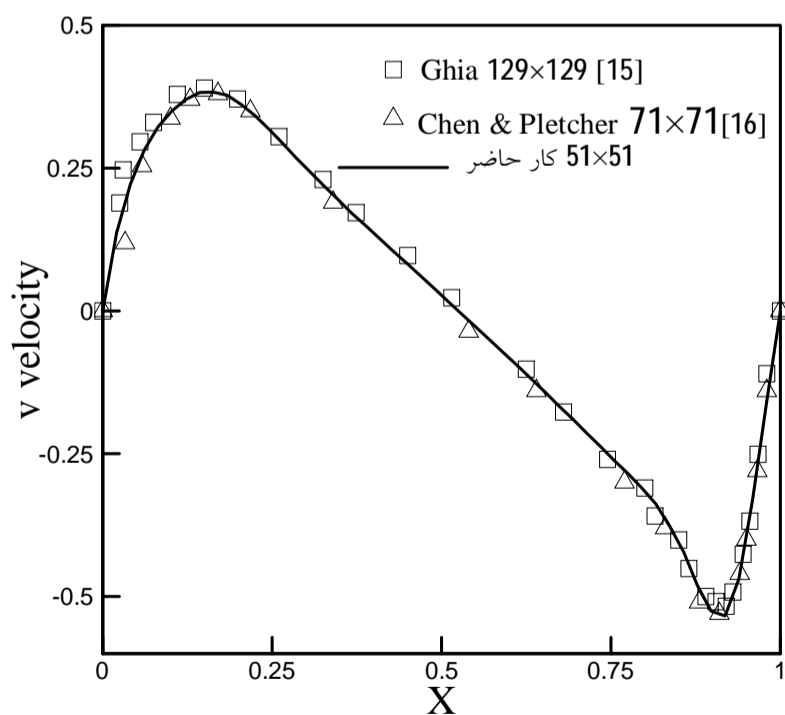
شکل 9 شبکه تولید شده در هندسه مربعی به صورت بی‌سازمان مثلثی



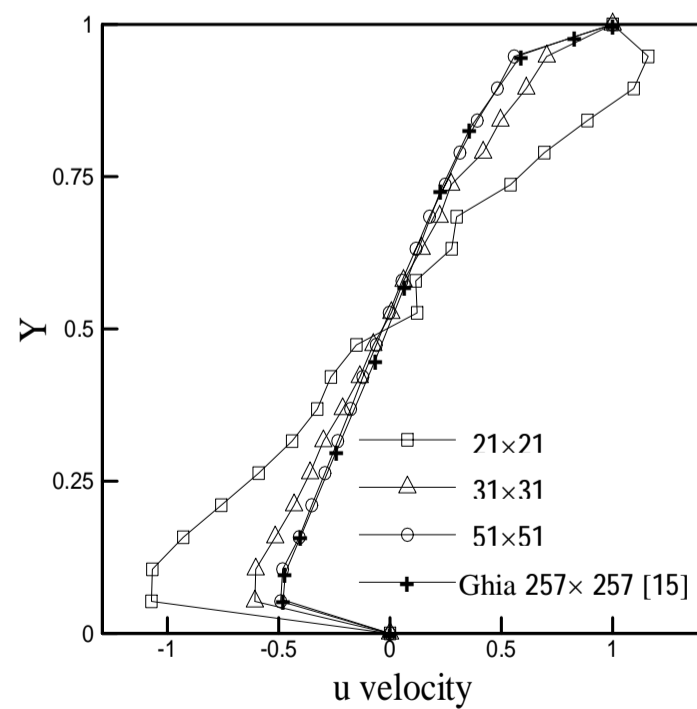
شکل 13 مقایسه حل عددی به دست آمده از روش حاضر بر روی خط تقارن عمودی در  $Re = 1000$



شکل 10 تأثیر ریزکردن شبکه بر سرعت افقی در خط تقارن عمودی در  $Re = 1000$



شکل 14 مقایسه حل عددی به دست آمده از روش حاضر بر روی خط تقارن افقی در  $Re = 1000$



شکل 11 تأثیر ریزکردن شبکه بر سرعت افقی در خط تقارن عمودی در  $Re = 5000$

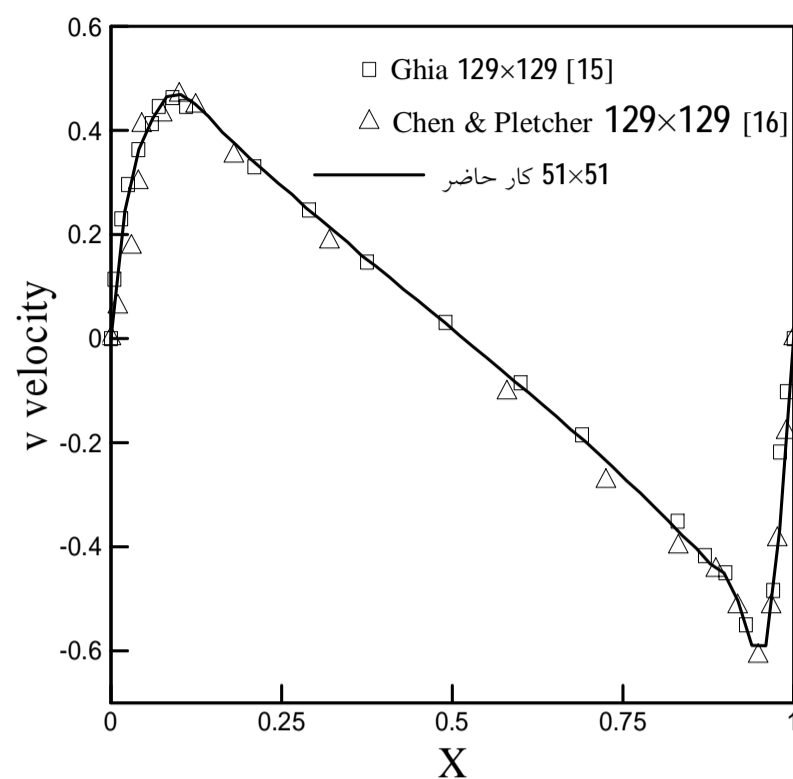
حدود 450 برابر حجم حافظه مورد نیاز را کاهش داد. مقایسه‌های انجام شده حاکی از تأثیرپذیری مناسب روش در مقابل ریز شدن شبکه است. همچنین اعمال این روش بر روی یک شبکه  $51 \times 51$  دقت بسیار عالی را در مقایسه با نتایج موجود نشان می‌دهد.

### 8- نتیجه‌گیری

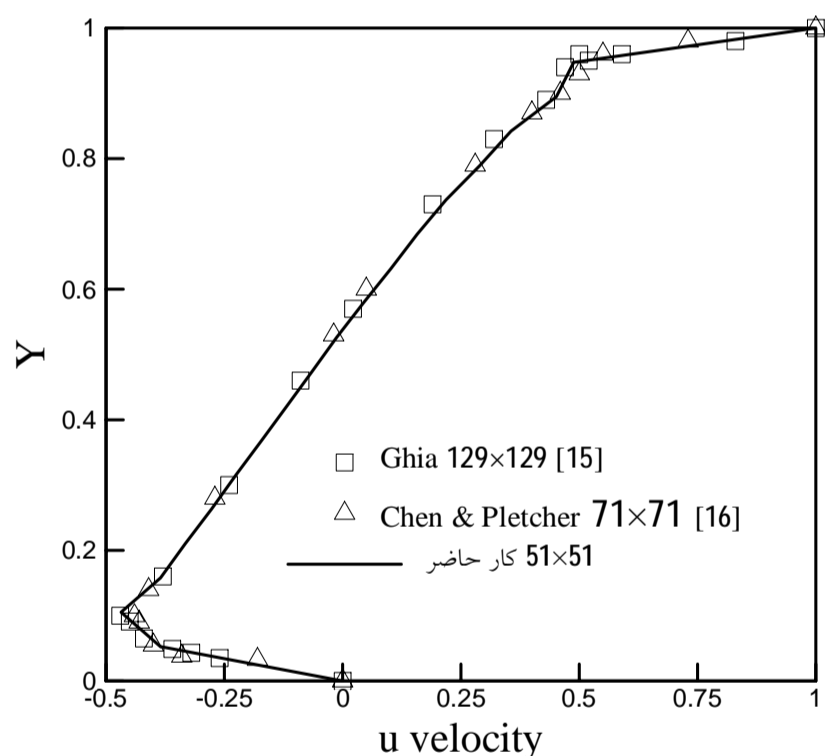
در تحقیق حاضر از مزیت‌های روش حجم محدود در غالب روش المان محدود استفاده شده و روشی ضمنی و بالادست به‌دست آمده است. در این روش گسسته‌سازی عبارتهای جابه‌جایی موجود در معادله‌های ناویراستوکس به شکل بقایی انجام شده که این سازگاری روش را تأمین می‌کند. برخورد المان محدود با عبارتهای لزجی در معادله‌های حاکم نیز منطبق بر ماهیت بیضوی آن عبارتها بود.

### 9- منابع

- [1] Darbandi, M., "A Momentum Variable Calculation Procedure for Solving Flow at All Speeds", *PhD Dissertation*, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1996.
- [2] Harlow, F.M., and Welch, J.E., "Numerical Solution of Time Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface", *Physics of Fluids*, Vol. 8, 1965; pp. 2182-2189.
- [3] Raithby, G.D., and Schneider, G.E., "Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow; Treatment of the Velocity-Pressure Coupling", *Numerical Heat Transfer*, Vol.2, 1979; pp.417-440.
- [4] Patankar, S.V., "A Calculation Procedure for Two Dimensional Elliptic Situations", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, 1981; pp.409-425.
- [5] Zedan, M., Schneider, G.E., "A Coupled Strongly Implicit Procedure for Velocity and Pressure Computation in Fluid Flow



شکل 15 مقایسه حل عددی به‌دست آمده از روش حاضر بر روی خط تقارن عمودی در  $Re=3200$



شکل 16 مقایسه حل عددی به‌دست آمده از روش حاضر بر روی خط تقارن افقی در  $Re=3200$

برای مقایسه نتایج از نظر دقت حل، نتایج به‌دست آمده از حل عددی با شبکه  $51 \times 51$  در اعداد رینولدز 1000 و 3200 با نتایج موجود در [15,16] مقایسه شده که نشان‌دهنده عملکرد بسیار عالی روش حاضر است.

الگوریتم طراحی شده برای ذخیره‌سازی درایه‌های غیرصفر ماتریس سختی، در یک میدان با 3000 گره، تا

- [11] Philip C.E. Jorgenson, R. H. Pletcher "An Implicit Numerical Scheme for the Simulation of Internal Viscous Flow on Unstructured Grids." *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 5, pp. 447-466, 1996.
- [12] وکیلی پور، ش.، "شبیه سازی عددی جریان تراکم پذیر و آرام درون یک نازل همگرا- واگرا به روش المان های محدود بر روی شبکه بی سازمان مثلثی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، گروه هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، بهمن 1381.
- [13] Darbandi, M., and Schneider, G.E., "Momentum Component Variable Procedure for Flow at All Speeds", *The Proceeding of the Third Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Banff, Alberta, Canada, June 25-29, 1995; pp.145-156.
- [14] Raithby, G.D., "A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, 1971; pp.75-103.
- [15] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., "High-Resolutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equation and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, 1982; pp. 378-411.
- [16] Chen, K.H., and Pletcher, R.H., "Primitive Variable, Strongly Implicit Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds", *AIAA Journal*, Vol. 29, 1991; pp. 1241-1249.
- Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, 1985; pp.537-557.
- [6] Patankar, S.V., and Spalding, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972; pp.1787-1806.
- [7] Baliga, B.R., and Patankar, S.V., "A Control-Volume Finite-Element Method for Two Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 6, 1983; pp.245-261.
- [8] Prakash, C., and Patankar, S.V., "A Control-Volume Based Finite-Element Method for Solving the Navier-Stokes Equation Using Equal Order Variable Interpolation", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, 1985; pp.259-280.
- [9] Peric, M., Kessler, R., and Sheerer, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Collocated Grids", *Computers and Fluids*, Vol. 16, 1988; pp.389-403.
- [10] Darbandi, M., Schneider, G.E. and Javadi, K., "The Performance of a Physical Influence Scheme in Structured Triangular Grids.", *41<sup>st</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, January 6-9, Reno, Nevada, 2003.