

بهینه‌سازی دیسک غیرهمگن دوار به روش غیرگرادیانی

بهروز فرشی^{۱*}، محمدحسین فائزی^۲

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

۲- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

*تهران، صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵

farshi@iust.ac.ir

(دریافت مقاله: بهمن ۱۳۸۵، پذیرش مقاله: دی ۱۳۸۶)

چکیده- در صنایع هوافضا، برای دیسکهای توربین گاز، کاربردهای متعددی مانند استفاده در موتورهای توربوجت تعریف شده است. این دیسکهای دوار معمولاً در شرایط عادی در دمای بسیار بالایی کار می‌کنند و با سرعت زاویه‌ای بسیار زیادی می‌چرخند. لذا کم کردن وزن آنها در دستگاه‌های مرتبط با صنایع هوافضا، مزایای زیادی دارد و علاوه بر کاهش وزن خالص دستگاه، صرفه‌جویی اقتصادی را نیز در پی خواهد داشت. در حالت کلی دیسک دوار به‌علت کاربردهای فراوانی که در صنعت دارد، از دیرباز، موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می‌توان به دیسکهای توربین و کمپرسورهای توربین‌های گازی اشاره کرد. دیسک توربین گاز اغلب در گرادیان‌های دمایی بالا و سرعت‌های زاویه‌ای زیاد کار می‌کند. سرعت زاویه‌ای بالا باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز بزرگ در دیسک می‌شود و همزمان با آن، دمای بسیار زیاد، منجر به کاهش مقاومت ماده سازنده دیسک و این باعث افزایش تغییر شکل در دیسک می‌شود.

به‌منظور تحلیل دیسک و رسیدن به توزیع مناسب تنشها در آن، باید با توجه به شرایط دمایی دیسک، خواص ماده را نیز متغیر در نظر گرفت که این تغییرات ممکن است وابسته به شعاع، دما یا هر دو باشد. برای رسیدن به این هدف، دیسک غیرهمگن با ضخامت مشخصی مطالعه می‌شود. در اینجا، با استفاده از مدل‌سازی دیسک دوار به‌عنوان مجموعه‌ای از حلقه‌های مختلف که هر یک خواص ثابتی دارند، مسأله تغییرات خواص در کل دیسک را با کمی تقریب و با وجود تغییرات در خواص هر یک از حلقه‌ها نسبت به دیگری، می‌توان مدل‌سازی کرد. حالت بهینه و پروفیل آن، با متناسب شدن ضخامت حلقه‌ها نسبت به هم به‌دست می‌آید و محدودیتهای تنش را ارضا می‌کند. در این تحقیق با استفاده از الگوریتم سیمپلکس این فرایند انجام شده است. الگوریتم سیمپلکس با فضای نرم‌افزار تحلیلی انسیس ترکیب شده و سپس به اجرا درآمده و نتایج نهایی ارائه شده است.

کلید واژگان: بهینه‌سازی، سیمپلکس، دیسک دوار، دیسک غیرهمگن، المان محدود.

۱- مقدمه

دیسکهای توربین^۱ و کمپرسور^۲ توربین‌های گازی اشاره کرد. دیسک توربین گاز اغلب در گرادیان‌های دمایی

دیسک دوار به‌علت کاربردهای فراوانی که در صنعت دارد، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می‌توان به

1. Turbine Wheel
2. Compressor Discs

تحقیق حاضر به بیان روشی برای بهینه‌سازی دیسک دوار غیرهمگن پرداخته و حول این مسأله بنا شده که چگونه وزن این دیسک دوار را کمینه کنیم؛ به‌طوری محدودیت‌های تنش (پایین‌تر بودن تنش از حد تحمل ماده در شرایط حرارتی ذکر شده) ارضا شود و هندسه دیسک نیز در محدوده قابل قبولی نگاه داشته شود.

۲- تاریخچه بهینه‌سازی دیسک دوار

مسأله بهینه‌سازی در دهه‌های اخیر در مسائل مهندسی مختلفی مطرح شده و در صنایع هوایی با توجه به اهمیت خاص پارامترهایی مانند استحکام و لزوم پایین بودن وزن، اهمیت خاصی دارد. یکی از زمینه‌های مهم بهینه‌سازی در صنایع هوایی همان‌گونه که گفته شد، دیسک توربین گاز است و در سالهای اخیر کارهای عددی و تحلیلی مهمی در این زمینه انجام شده است.

سیرگ و سورانا^۱ [۱] در زمینه بهینه‌سازی دیسک متقارن تحت سرعت زاویه‌ای بدون گردایان دمایی، از الگوریتم‌های خاصی برای بهینه‌سازی دیسک متقارن استفاده کرده‌اند. پراگر و چن^۲ [۲] در همان زمان و به‌طور جداگانه تحلیل‌هایی را در زمینه بهینه‌سازی دیسک متقارن ارائه کرده‌اند.

استفاده از روشهای عددی برای بهینه‌سازی دیسک ابتدا توسط مالکوف^۳ و سالگانزکایا مطرح شد [۳]. لازم است ذکر شود که کارهای انجام شده اغلب بدون در نظر گرفتن غیرخطی بودن محدودیت‌ها و بررسی تأثیر گردایان محدودیت‌ها در بهینه‌سازی دیسک بوده است. با گذشت زمان و به‌کار گرفتن روشهای کارآمدتر در بهینه‌سازی دیسک - که

بالا و سرعتهای زاویه‌ای زیادی کار می‌کند. سرعت زاویه‌ای بالا باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز بزرگی در دیسک شده و همزمان با آن، دمای بسیار زیاد، منجر به کاهش مقاومت ماده سازنده دیسک می‌شود که این به‌نوبه خود، تغییر شکل زیادی را در دیسک دوار ایجاد می‌کند. برای داشتن تحلیلی مطمئن و قابل قبول از دیسک و به‌دست آوردن تنشهای ایجاد شده، باید از روشی برای حل استفاده شود که بتواند تغییرات رفتار ماده را متناسب با دما در نظر بگیرد. بدین‌منظور از تبدیل دیسک دوار غیرهمگن به تعدادی حلقه با خواص ثابت و ضخامت یکسان و سپس بر هم نهی حلقه‌ها و رسیدن به توزیع تنش نهایی استفاده شده است. با این روش که به تفصیل آن را شرح خواهیم داد، به‌جای متغیر گرفتن خواص در کل دیسک، خواص هر حلقه را با توجه به ویژگیهای فیزیکی آن حلقه ثابت فرض می‌کنیم. اما اختلاف خواص هر حلقه با حلقه مجاور در حالت کلی همان تغییر خواصی را تداعی می‌کند که با کم کردن ضخامت حلقه‌ها و در نتیجه افزایش تعداد آنها، دقت محاسبات هم زیاد خواهد شد. خواص متغیر در دیسک می‌توانند وابسته به شعاع یا دمای هر مقطع باشند که در هر حلقه، این خواص برای دمای متوسط و شعاع متوسط آن حلقه‌ها تعریف می‌شوند.

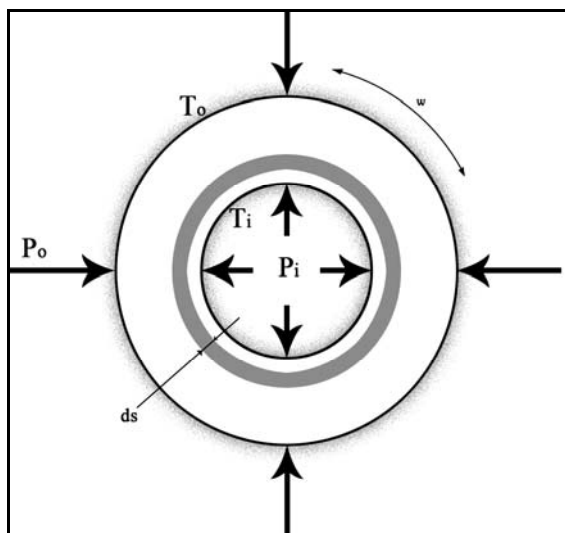
از طرفی بهینه‌سازی پارامترهایی مانند وزن یکی از مواردی است که در طراحی و ساخت دیسک توربین گاز به‌ویژه در موتورهای هوایی مدنظر قرار می‌گیرد. در این فرایند باید پارامترهایی مانند عمر خستگی و تنش ایجاد شده در دیسک کنترل شود تا کاهش وزن، محدودیت‌های فیزیکی مسأله را نقض نکند.

1. Seireg & Surana
2. Prager & Chen
3. Malkov

۲- نیروهایی که بر اثر چرخش و ارتعاش اجزای متحرک ایجاد می‌شود. نیروهای ارتعاشی در حالت عادی بسیار کم هستند؛ اما در صورت وجود عدم تقارن در محور توربین، قابل توجه خواهند بود. در عین حال بیشترین تنشهای وارد بر توربین، ناشی از نیروهای گریز از مرکز حاصل از چرخش قسمتهای دوار توربین است.

۳- نیروهای ناشی از گرادیان حرارتی در دیسک که باعث ایجاد تنشهای حرارتی در دیسک شده و تغییر شکل قابل توجهی را در دیسک ایجاد می‌کند. به‌طور کلی گرادیان حرارتی حاکم بر دیسک، سهم کمی در ایجاد تنش در دیسک دارد. اما سهم قابل توجهی از تغییر شکلهای مربوط به این بارگذاری است.

۴- نیروهای ضربه ناشی از برخورد قطعات خارجی به دیسک توربین نیز پدیده‌ای است که همیشه قابل جلوگیری نیست. این قطعات خارجی معمولاً بسیار کوچک بوده و قطری در حدود یک میلی‌متر یا کمتر دارند و سبب صدمات موضعی و سایش در دیسک می‌شوند.



شکل ۱ دیسک دوار و نیروهای خارجی وارد شونده بر آن

امکان در نظر گرفتن غیرخطی بودن محدودیت و محاسبه گرادیان محدودیت غیرخطی را داشتند - بهینه‌سازی دیسک به‌طور جدی‌تری مطرح شد. فوکس^۱ [۴] با استفاده از روش از جهت قابل قبول^۲ که روشی بر مبنای محاسبه گرادیان محدودیتها است به بهینه‌سازی دیسک توربین گاز اقدام کرد. در ادامه در دهه نود، زینکوویچ و کمبل^۳ [۵]، وانگ، گالاهر [۶] و پترسون^۴ [۷]، از بهینه‌سازی به روش برنامه‌ریزی خطی پی‌درپی^۵ استفاده کردند. که روشی بر مبنای در نظر گرفتن فرایند بهینه‌سازی با توجه به گرادیان تابع هدف و گرادیان محدودیتها است. همچنین در دهه اخیر استفاده از روشهای المان محدود در بهینه‌سازی دیسک دوار مطرح شده که در این زمینه می‌توان به کارهای چن‌چو^۶ و همکاران اشاره کرد که برای بهینه‌سازی دیسک دوار از خاصیت المان محدود در بهینه‌سازی از روش جهت قابل قبول^۷ و روش برنامه‌ریزی خطی پی‌درپی استفاده کردند.

۳- محاسبه تنشهای دیسک دوار

پیش از بررسی معادلات حاکم بر این دیسک، لازم است با شرایط ترمومکانیکی حاکم بر دیسک دوار در حین کار آشنا شویم. دیسک در شرایطی کار می‌کند که سرعت چرخش توربین در بعضی موارد به حدود پنجاه هزار دور بر دقیقه می‌رسد و اختلاف دمایی حدود چند صد درجه سانتیگراد بر دیسک حاکم است. در این شرایط نیروهای مختلفی بر دیسک دوار غیرهمگن وارد می‌شود که به شرح زیر است:

۱- نیروهای ناشی از مونتاژ قطعات جانبی که بر اثر اختلاف فشار جانبی دیسک و نیروهای ناشی از دوران پره ایجاد می‌گردد.

1. Fox
2. Feasible Direction
3. Zienkiwicz & Campbell
4. Wang & Gallaher & Pederson
5. Sequential Linear Programming
6. Chen Chev
7. Feasible Direction Method

در دیسک از نوع تنشهای حرارتی و مکانیکی است که نتیجه نهایی، باید ترکیبی از هر دو نوع این تنشها باشد. از طرفی انسیس نمی‌تواند تنشهای حرارتی و مکانیکی را با هم تعریف کند. به‌عنوان مثال در تحلیل میله تحت فشار که تحت گرادیان حرارتی نیز هست، باید بدین‌صورت عمل شود که ابتدا دمای تک تک گره‌ها را به آن وارد کنیم و سپس با بارگذاری مکانیکی، میله را تحلیل کنیم. اشکالات زیادی در سر راه این شیوه کار وجود دارد. مثلاً اگر هندسه شکل مورد بررسی پیچیده باشد یا تعداد گره‌ها زیاد شود، وارد کردن دمای هر گره در عمل امکان‌پذیر نیست.

برای حل این مشکل روش دیگری را برای حل این نوع مسائل استفاده می‌کنیم. ابتدا مسأله را بدون در نظر گرفتن نیروهای مکانیکی، به‌صورت حرارتی حل می‌کنیم؛ یعنی حتی المان‌بندی ما نیز المان‌بندی حرارتی است. حل چنین مسأله‌ای در انسیس بسیار آسان است و با وارد کردن دمای دو سر جسم، توزیع می‌تواند دما را در هر نقطه‌ای از آن به‌دست آورد. در این‌صورت با اعمال شرایط مرزی حرارتی، می‌توانیم دمای تمامی گره‌ها را در کل شکل به‌دست آوریم. هنگامی که دماها به‌دست آمد، مسأله را با همین شکلی که دارد، از نظر نوع المان تغییر می‌دهیم. دقت شود که همه ویژگی‌های مسأله در این تغییر ثابت می‌ماند و حتی نوع مش‌بندی نیز تغییری نمی‌کند. تنها تفاوت ایجاد شده، تبدیل المان حرارتی به المان مکانیکی است [۸].

با این تغییر، اکنون دمای تمامی گره‌ها در این المان‌بندی مکانیکی در دست است و می‌توان این دماها را به المان‌های جدید اعمال کرد. نرم‌افزار پس از اجرای مرحله اول، به‌طور

اکنون با مشخص شدن شرایط حاکم بر دیسک دوار غیرهمگن، به مطالعه چگونگی توزیع تنشهای موجود در آن می‌پردازیم. پیش از هر چیز باید بدانیم که روشهای مختلفی برای به‌دست آوردن توزیع تنش در این دیسک دوار پیش روی ما قرار دارد. اما در این تحقیق به این مسأله پرداخته‌ایم که می‌توان به‌جای تحلیل معادلات استاتیکی و دینامیکی حاکم بر این دیسک دوار، زحمت انجام این محاسبات سنگین را بر دوش نرم‌افزاری کارآمد و دقیق مانند انسیس^۱ گذاشت. انسیس نرم‌افزاری است که با وجود به‌بازار آمدن نرم‌افزارهای تحلیلی پیچیده‌ای مانند کتیا^۲ و آباکوس^۳، هنوز جایگاه و کاربرد خود را به همان شکل سابق حفظ کرده است.

پایه‌گذاری نرم‌افزار انسیس در سال ۱۹۷۱ توسط شرکت سوون‌سون^۴ انجام گرفت. امروز نرم‌افزار انسیس، نرم‌افزار کامپیوتری چندمنظوره بسیار پیشرفته اجزای محدود محسوب و شامل بیش از یکصد هزار خطوط کد می‌شود.

از میان توانایی‌های مهم انسیس می‌توان به انجام تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی، انتقال حرارت، جریان سیال و الکترومغناطیس اشاره کرد. یکی از مزایای این نرم‌افزار مجهز بودن به رابط گرافیکی^۵ است که باعث سهولت کار می‌شود و همچنین دسترسی سریع به توابع برنامه، دستورات، مدارک و مراجع اصلی نرم‌افزار را فراهم می‌سازد.

۳-۱- محاسبه تنشهای حرارتی و مکانیکی

دیسک تحت تأثیر گرادیان حرارتی و در این دمای بالا، با سرعت زیادی در حال چرخش است. تنشهای موجود

1. Ansys
2. Catia
3. Abaqus
4. Swanson
5. Graphical User Interface (GUI)

6. Node

به صورت متغیر طراحی محاسبه شوند که این محاسبات همیشه بسیار مفصل و دست و پاگیر است. اگر بتوانیم بدون طی کردن این مرحله دشوار محاسباتی، کار را به سرانجام برسانیم به طور قطع شیوه ساده تری را برای نتیجه گیری برگزیده ایم. یکی از این روشهای غیرگرادیانی روش سیمپلکس است. سیمپلکس عبارت است از پیدا کردن کوچکترین حجم در فضا با کمترین تعداد نقاط که حجم تعریف شده، حاکم بر فضا باشد. حاکم بودن بر فضا در جبر خطی بدین معنا است که نقاط مذکور از یکدیگر مستقل باشند و هر نقطه دیگری در آن فضا از ترکیب این نقاط به دست آید. لذا در این روش در فضای N بُعدی به $N+1$ نقطه مستقل نیاز داریم. از این روشهای غیرگرادیانی مانند روش سیمپلکس برای بالا بردن کارایی محاسباتی مناسب ترند.

روش سیمپلکس می تواند تابعی با N متغیر مستقل را با استفاده از یک چندوجهی N ضلعی قابل تغییر بهینه کند. این چندوجهی $N+1$ رأس دارد که هر رأس را می توان با یک بردار نشان داد. در بین این نقاط رأس، دو نقطه وجود دارد که مقدار تابع هدف در یکی از آنها بیشتر از سایر نقاط و در دیگری کمترین است. این دو نقطه در محاسبات نقش مهمی ایفا می کنند.

روش سیمپلکس نقطه بیشینه را با استفاده از مرکز گرانش^۵ تمامی N نقطه دیگر، به محل جدیدی پرتاب می کند. سپس با بررسی ویژگیهای نقطه جدید در صورتی که به گودی فضای N بُعدی نزدیکتر باشد، آن را جایگزین نقطه بیشینه می سازد.

بردارها x_1 تا x_{n+1} و $f(x_1)$ تا $f(x_{n+1})$ اعداد منتسب به بردارها هستند. در کل چهار مرحله برای رسیدن به نقطه کمینه باید طی شود که در ادامه با این مراحل آشنا می شویم.

خودکار، توزیع دمای به دست آمده در شکل را ذخیره^۱ می کند. در بارگذاری مکانیکی با استفاده از اطلاعات ذخیره شده می توان همان توزیع دمای به دست آمده را بر روی این المان نیز در نظر گرفت. یعنی در حالت جدید، نرم افزار با توجه به المان بندی مکانیکی و گرادیان حرارتی وارد بر آن، تنشهای حرارتی موجود در جسم را محاسبه می کند و این بدین معنا است که نتایج به دست آمده در حل حرارتی، در بارگذاری و شرایط مرزی حل مکانیکی اعمال خواهد شد؛ اگر نیرو یا تنش دیگری نیز از خارج بر این جسم اعمال شود، جواب توزیع تنش نهایی، ترکیبی از تنش حرارتی و تنش مکانیکی وارد بر جسم خواهد بود. در مورد مش بندی استفاده شده در تحلیل این مسأله باید گفت که مش های استفاده شده از نوع آزاد^۲ است. در این مسأله، مش های ایجاد شده که از نوع مش آزاد هستند، نظم بسیار خوبی داشتند و نیازی به منظم کردن آنها نبود.

۴- روش بهینه سازی سیمپلکس^۳

نلدر و مید^۴ [۹] روش سیمپلکس را در بهینه سازی بنیان نهادند که تا حدی از سایر روشهای جستجو پیچیده تر به نظر می رسد. سیمپلکس جزو روشهای غیرگرادیانی و به معنای چندوجهی هندسی منظم در فضای N بُعدی است که $(N+1)$ وجه دارد و نباید با روشی با همین نام که در برنامه ریزی خطی [۱۰] به کار می رود، اشتباه شود. اما آنچه این روش را به عنوان راهبردی مؤثر معرفی می کند، راحتی اجرای آن با محاسبات دیجیتالی و کامپیوتری است.

نکته ای حائز اهمیت در مقایسه روشهای گرادیانی و غیرگرادیانی آن است که در روشهای گرادیانی، باید گرادیانها

1. Save
2. Free
3. Simplex
4. Nelder & Mead

5. Centroid

الف- انبساط^۲: اگر $f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_l^{(k)})$ باشد، رابطه $(x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)})$ منبسط می‌شود. یعنی خواهیم داشت:

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \gamma(x_{n+3}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}) \quad (5)$$

اکنون اگر $f(x_{n+3}^{(k)}) \leq f(x_l^{(k)})$ باشد بردار $x_h^{(k)}$ را با بردار $x_{n+3}^{(k)}$ جایگزین می‌کنیم. در غیراین صورت بردار $x_{n+3}^{(k)}$ به جای بردار $x_h^{(k)}$ می‌نشیند.

ب- انقباض^۳: اگر به ازای هر مقدار i به جز حالت $i = h$ داشته باشیم $f(x_{n+3}^{(k)}) > f(x_i^{(k)})$ ، بردار $(x_h^{(k)} - x_{n+2}^{(k)})$ با استفاده از رابطه زیر انقباض می‌یابد:

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \beta(x_h^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}) \quad (6)$$

اکنون بردار $x_h^{(k)}$ با بردار $x_{n+3}^{(k)}$ جایگزین می‌شود.

ج- کاهش^۴: اگر $f(x_{n+3}^{(k)}) > f(x_h^{(k)})$ باشد، برای تمامی بردارها رابطه $(x_i^{(k)} - x_l^{(k)})$ را کاهش می‌دهیم. برای کاهش چندوجهی از این رابطه استفاده می‌شود:

$$x_i^{(k)} = x_l^{(k)} + 0.5(x_i^{(k)} - x_l^{(k)}) \quad i=1, \dots, n+1 \quad (7)$$

شرط همگرایی نلدر و مید از این قرار است:

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+2}^{(k)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (8)$$

که ε بسیار کوچک است. این شرط در پایان هر تکرار و پیش از آنکه به ابتدای الگوریتم بازگردیم باید بررسی شود. اگر برقرار بود، بدین معنا است که به حالت بهینه رسیده‌ایم و نیازی به ادامه نیست. آخرین پروفیل به دست آمده همان پروفیل بهینه است [۹].

۴-۱- مرحله اول: یافتن نقاط کمینه و بیشینه در

بین $N+1$ نقطه اولیه

اگر بر طبق آنچه گفته شد، برای هر نقطه یک بردار را تصور کنیم، داریم:

$$x_i^k = [x_{i1}^{(k)}, \dots, x_{ij}^{(k)}, \dots, x_{in}^{(k)}], \quad i=1, \dots, n+1 \quad (1)$$

شاخص K در اینجا و در روابط بعدی، شمارشگر تعداد دفعاتی است که کل الگوریتم سیمپلکس اجرا شده است:

$$f(x_h^{(k)}) = \max\{f(x_1^{(k)}), \dots, f(x_{n+1}^{(k)})\} \quad (2)$$

$$f(x_l^{(k)}) = \min\{f(x_1^{(k)}), \dots, f(x_{n+1}^{(k)})\}$$

۴-۲- مرحله دوم: به دست آوردن مرکز گرانش N

نقطه باقیمانده

با انجام این مرحله، مرکز گرانش N نقطه از $N+1$ نقطه به دست می‌آید. نقطه X_h را از بین نقاط حذف می‌کنیم تا پس از این مرحله با استفاده از مرکز گرانش به دست آمده، X_h را به مکانی دیگر پرتاب کنیم:

$$x_{n+2,j}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)} \right) - x_{hj}^{(k)} \right] \quad j=1, \dots, n \quad (3)$$

۴-۳- مرحله سوم: بازتاب^۱ دادن نقطه بیشینه

اکنون همان‌طور که گفته شد، با استفاده از مرکز گرانش به دست آمده، X_h را به مکانی دیگر پرتاب می‌کنیم تا نقطه‌ای جایگزین برای آن به دست آوریم:

$$x_{n+3}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \alpha(x_{n+2}^{(k)} - x_h^{(k)}) \quad (4)$$

۴-۴- مرحله چهارم:

پس از انجام مرحله بازتاب، یکی از حالت‌های زیر پیش روی قرار می‌گیرد:

2. Expansion
3. Contraction
4. Reduction

1. Reflection

۵- به کارگیری روش سیمپلکس

همان‌طور که در توضیح روش سیمپلکس گفته شد در صورتی که در فضای N بُعدی باشیم و تابع هدف دارای N متغیر باشد، به $N+1$ نقطه مستقل از هم در این فضا به‌عنوان حدسها و ورودیهای اولیه مسأله نیاز داریم. این $N+1$ نقطه، رؤوس یک چندوجهی هستند.

پروفیل‌ها N المان دارند و متغیر، ضخامت المان‌ها است. پس برای این N ضخامت باید $N+1$ پروفیل را به‌عنوان ورودیهای مسأله وارد کنیم؛ در فضای N بُعدی هر یک از این $N+1$ پروفیل معرف یکی از آن نقاط مستقل است.

نکته مهم در اینجا آن است که باید پروفیل‌های اولیه کاملاً از هم مستقل باشند و نتوان از ترکیب خطی برخی از آنها، برخی دیگر را به‌دست آورد. در صورتی که استقلال این پروفیل‌ها رعایت نشود، چندوجهی ایجاد شده نمی‌تواند پاسخ بهینه قطعی را برای ما پیدا کند. البته احتمالاً به جواب می‌رسد، اما آن جواب، جوابی محلی است. مثلاً اگر در فضای سه‌بُعدی، چهار نقطه انتخاب شده اولیه به هم وابسته باشند، به‌جای ساختن فضا، خط یا صفحه‌ای را می‌سازند و تنها در آن دور می‌زنند. در این حالت حرکت بهینه‌سازی ما درون صفحه‌ای از فضا محدود می‌شود و نمی‌تواند تمامی قسمتهای فضا را برای یافتن نقطه بهینه جستجو کند.

شیوه‌های دیگری نیز برای استفاده از این الگوریتم بهینه‌سازی می‌توان تعریف کرد که البته استفاده از آنها سخت‌تر و کم‌دقت‌تر از روش ذکر شده در این مقاله است. در این روش استفاده از الگوریتم نلدر و مید، آنقدر بدنه این پروفیل‌ها به بازی گرفته می‌شود تا از آنها پروفیل بهینه بیرون بیاید و شکل مورد نظر را به‌دست دهد. این نوع به‌کارگیری سیمپلکس بسیار مطمئن و دقیق است. زیرا کل پروفیل با هم در نظر

گرفته می‌شود. در اینجا تمامی المان‌ها در محاسبات در کنار هم هستند. در عالم واقع، جابه‌جایی یا تغییر اندازه هر یک از این المان‌ها، موجب تغییرات تنشی روی سایر المان‌ها می‌شود که در محاسبات بهینه‌سازی، این موضوع به‌خوبی در نظر گرفته می‌شود.

۵-۱- نحوه انتخاب ورودیهای مسأله

در حالتی که از روش سیمپلکس $N+1$ نقطه‌ای استفاده می‌کنیم، انتخاب نقاط شروع کاری مهم و حساس است. زیرا استقلال این نقاط از یکدیگر اهمیت زیادی دارد. به‌طور کلی در فضای یک‌بُعدی با داشتن ۲ نقطه یا یک بردار - که از ۲ نقطه ساخته می‌شود - می‌توان کل فضا را ساخت. در فضای ۲ بُعدی نیز ۲ بردار مستقل یا سه نقطه مستقل - یعنی سه نقطه‌ای که بتوانند با هم یک صفحه را بسازند - کل فضا را به‌وجود می‌آورد و همین‌طور از طریق استقرا به‌دست می‌آید که در فضای ۳ بُعدی، ۳ بردار یا ۴ نقطه این کار را انجام می‌دهند. اگر در همین فضای ۳ بُعدی، به‌جز مبدأ مختصات، ۳ نقطه دیگر را نیز بر روی محورهای متعامد انتخاب کنیم، اکنون ۴ نقطه مستقل داریم که با اتصال نقطه مبدأ به بقیه، ۳ بردار مستقل به‌وجود می‌آید. این بردارها، پایه فضای ۳ بُعدی مورد نظر هستند.

حال به فضای N بُعدی می‌رویم که در این فضا $N+1$ نقطه اولیه لازم داریم. می‌توان نقطه اول را مبدأ فضا در نظر گرفت و سایر نقاط را بر روی محورهای متعامد مختصاتی مشخص کرد. از اتصال نقطه اول به N نقطه دیگر، N بردار مستقل و متعامد پدیدار می‌شود که پایه فضای N بُعدی مورد بحث هستند.

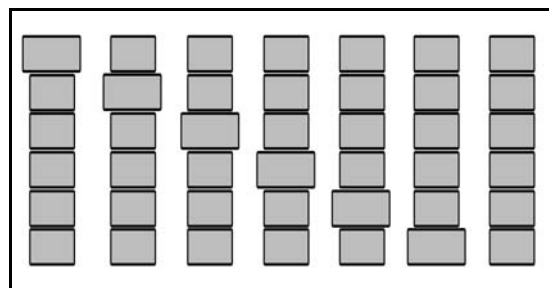
در روش سیمپلکس استفاده شده در این تحقیق، در صورتی که فضای مسأله N متغیر داشته و تابع هدف براساس

ترکیب خطی برخی از آنها دیگری را به دست آورد و چنانچه یک یا چند پروفیل به هم وابسته باشند، فضای جستجوی الگوریتم، به یک صفحه از فضا محدود خواهد شد که برای یافتن نقطه کمینه یا بیشینه، به جای جستجوی کل فضا، تنها در همین صفحه بهینه‌یابی می‌کند.

۵-۲- استفاده از انسیس در بهینه‌یابی

انسیس نرم‌افزاری تحلیلی است که تطبیق آن با محیط‌های برنامه‌نویسی کار آسانی نیست و اشکالات عدیده‌ای بر سر راه برنامه‌نویسی در آن وجود دارد.

در این تحقیق این مسأله محقق شده است؛ یعنی با استفاده از نرم‌افزار انسیس تنشها در نقاط موردنظر برای هر یک از پروفیل‌های ورودی به صورت جداگانه به دست می‌آید. سپس تابع هدف محاسبه شده و سپس در محیط همان نرم‌افزار، الگوریتم روش سیمپلکس شروع به کار کرده و پروفیل بهینه را به دست می‌آورد.



شکل ۲ نمای از پروفیل‌های ورودی برای حالت تقسیم‌بندی ۶ المانی پروفیل‌های ورودی

در مرحله اول و پیش از نوشتن چنین برنامه‌ای، برای حل این مسأله مانند بسیاری از مسائل دیگر در انسیس، شکل پروفیل ترسیم شده و توزیع تنش در آن به دست می‌آید. سپس سعی بر آن است که تابع هدف را از تنشهای محاسبه شده به دست آوریم؛ سپس از آنجاکه این تابع هدف مربوط

این N متغیر ساخته شود، به $N+1$ نقطه اولیه یا به عبارتی به $N+1$ پروفیل اولیه برای شروع کار نیاز داریم. پیشتر ذکر شد که این $N+1$ پروفیل باید استقلال داشته باشند. بر طبق نظریه مطرح شده برای در نظر گرفتن $N+1$ نقطه در فضای N بُعدی، پروفیل اول را روی مبدأ فضا انتخاب می‌کنیم. در این صورت ورودی اولیه، پروفیلی با ضخامت «صفر» در تمامی المان‌ها خواهد بود. سپس به سراغ سایر ورودیها می‌رویم. در پروفیل‌های بعدی نیز به همین صورت به سراغ محورهای مختصات می‌رویم. هر پروفیل که در خود N المان دارد، قطر تمامی این المان‌ها به جز یکی برابر صفر خواهد بود، مانند ماتریس‌های زیر:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

البته به جای عدد ۱ در این ماتریس‌ها، ضخامت خاصی را می‌توان قرار داد.

اما باید دقت کرد که انتخاب این ضخامت‌های صفر، ما را به جواب نمی‌رساند؛ لذا از ترفندی جدید استفاده می‌کنیم. ابتدا این $N+1$ نقطه را به همان صورتی که گفته شد انتخاب و سپس مجموع تمامی نقاط را با یک بردار انتقال، به وسط فضا منتقل می‌کنیم.

اگر بخواهیم یک حالت منظم و کلاسیک را برای شکل این پروفیل‌ها ارائه دهیم، به شکل ۲ می‌رسیم که البته این ۷ پروفیل اولیه برای حالت ۶ المانی است:

باید دقت شود که بر خلاف تصور اولیه، همه پروفیل‌ها را نمی‌توان به شکل دوزنقه وارد کرد. در تعداد بالا هیچگاه این دوزنقه‌ها از هم استقلال ندارند و می‌توان از

۶- تابع هدف و محدودیت‌ها

تابع هدفی که برای حل این مسأله در گذشته به‌کار می‌رفته تابع وزن پروفیل بوده و باید با استفاده از یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی این تابع را کمینه‌سازی می‌کرده‌اند. به‌عنوان مثال اگر از روشهای بهینه‌سازی مرتبه ۱ و ۲ برای بهینه‌سازی شکل و وزن پروفیل استفاده می‌شد، تابع هدف مسأله، وزن پروفیل و قیدهای آن، تنش در نقاط مختلف پروفیل بوده که باید از تنش تسلیم عبور نکند. اما روش بهینه‌سازی مورد استفاده در این تحقیق جزو روشهای مرتبه صفر است. روش سیمپلکس که توسط نلدر و مید ارائه شده، روشی نامقید است. این روش هیچ قیدی را نمی‌پذیرد؛ یعنی اگر بخواهیم تابع هدف را همان تابع وزن قرار دهیم و با این روش و بدون قید مسأله را حل کنیم، پاسخ آن، پروفیلی خواهد بود که هیچ ضخامتی ندارد و وزن آن حداقل مقدار ممکن یعنی برابر صفر است.

برای برطرف کردن این مشکل، ساده‌ترین راه حل آن است که پس از هر بار طی کردن مراحل بهینه‌سازی، مقدار تنش در نقاط مشخص شده و مهم کنترل شود و بدین ترتیب خودمان قیدی را به این روش اضافه می‌کنیم. تمامی کسانی که تاکنون مسائل مقید بهینه‌سازی را با روش سیمپلکس یا سایر روشهای نامقید حل کرده‌اند، از این شیوه برای ملحوظ کردن قیدها استفاده نکرده‌اند و این در حالی است که استفاده از این شیوه و افزودن قیدی به هر روش نامقید، مشکلات خاص خود را در پی دارد و محاسبات را دشوار و پیچیده می‌سازد.

لذا روشی که در این تحقیق برای حل این مشکل پیشنهاد می‌شود، ارتباطی به راهکار فوق ندارد و

به فقط یک پروفیل است، با همین روش سایر پروفیلها نیز به محاسبات وارد شده و تابع هدف آنها به‌دست می‌آید. این آغاز کار و البته نیمی از آن است.

قسمت دوم، ترکیب روش سیمپلکس با محاسبات انجام شده است. برای برنامه‌نویسی در محیط انسیس، از فایل وقایع‌نگار^۱ این نرم‌افزار استفاده می‌کنیم. زبان برنامه‌نویسی انسیس، APDL نام دارد که شباهت‌هایی به زبان فرترن دارد.

تفاوت‌های متعدد و امتیازهای ویژه‌ای را برای این روش می‌توان برشمرد. اولین امتیاز محاسبه دقیق تنشها و در نتیجه تابع هدف در نقاط موردنظر است. امتیاز مهمتر آن است که دیگر هیچ‌گونه محدودیتی در مورد وجود یا عدم وجود شکلی خاص برای پروفیل مورد بررسی نداریم. پروفیل به هر شکلی باشد و هر شرایطی که داشته باشد، می‌توان آن را در محیط انسیس تحلیل کرد.

علاوه بر این از انجام محاسبات تحلیلی مشکل و سنگین برای پروفیل‌هایی با شکلهای مختلف بی‌نیاز شده‌ایم. گاهی پیچیدگی شکل به‌نحوی است که مجبوریم از تقریبهای متعددی برای محاسبه حدودی تنشها و نیروها بهره ببریم. اما با این شیوه و با استفاده از این نرم‌افزار، دیگر مانند گذشته تقریبی وجود ندارد و حتی مواردی مانند تمرکز تنش - که در محاسبات ما جایگاهی نداشت - اکنون به‌خودی خود منظور شده است.

تنها اشکالی که می‌توان برای این روش برشمرد، زمان بیشتری است که رایانه در این روش برای محاسبه پروفیل بهینه به آن نیاز دارد. البته با توجه به حجم بالای مزیت‌های استفاده از این روش، شاید نتوان این مسأله را به‌عنوان مشکل در نظر گرفت.

1. Log File

روشن است که هیچ‌یک از این عبارتها نمی‌توانند منفی باشند؛ زیرا از توان دوم آنها استفاده کرده‌ایم. لذا اگر تابع F صفر شود، یعنی تمام $(\sigma_{yi} - \sigma_{ei})$ ها برابر صفر هستند. لازم است ذکر شود که برای تابع هدف می‌توان ضریب اطمینان تعریف کرد تا تنشهای پروفیل بهینه از لبه تنش تسلیم کمی فاصله داشته باشند. برای این کار ضریبی از تنش تسلیم را در معادله (۱۰) قرار می‌دهیم، نه مقدار واقعی آن. این ضریب عددی، دلخواه و کوچک‌تر از واحد است.

۷- شرط همگرایی

نلدر و مید عبارتی را به‌عنوان شرط همگرایی پیشنهاد می‌کنند که به شکل زیر است:

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} |f(x_i^{(k)}) - f(x_{n+1}^{(k)})| \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (11)$$

این عبارت بدین‌معنا است که هر گاه فاصله تمامی $N+1$ نقطه از نقطه مرکز گرانث یعنی نقطه $(N+2)$ ام، کمتر از ε شد، به جواب رسیده‌ایم. انتخاب مقدار ε که در اختیار ما است، دقت همگرایی را تعیین می‌کند و کمتر بودن آن باعث افزایش دقت می‌شود.

تابع هدف پیشنهادی نلدر و مید را چنین می‌توان تعبیر کرد: «هرگاه تمامی $N+1$ نقطه، حول نقطه مرکز گرانث چندوجهی مجتمع شدند، به‌طوری‌که فاصله تمامی آنها از مرکز گرانث، کوچکتر از یا مساوی با ε شد، همگرایی انجام شده است». نلدر و مید این تابع را برای کنترل همگرایی پیشنهاد کرده‌اند که تابع جالب و کارآمدی برای کنترل میزان همگرایی است. البته به‌نظر نویسندگان، با توجه به تابع هدف تعریف شده در این تحقیق می‌توان شرط همگرایی را نیز تغییر داد. شرط پیشنهادی ما برای همگرا شدن روش سیمپلکس چنین است:

شیوه‌ای کاملاً بدیع و ابتکاری است. روش جدید چنین است:

«می‌توان به‌جای کنترل قیدها در پایان هر سیکل بهینه‌سازی، قید را در خود تابع هدف قرار داد. یعنی تابع هدف را طوری طراحی کرد که با کمینه شدن آن، قیده‌های ما نیز کنترل شده و خودبه‌خود چک شوند. الگوریتم بهینه‌سازی در طی مراحل خود، بارها به تابع هدف رجوع می‌کند؛ در نتیجه به‌طریقی نامحسوس، قیود - که در دل تابع هدف قرار گرفته‌اند - نقش بسیار مهمی را در هر روش نامقید ایفا می‌کنند. با این کار مشکل عدم وجود قید در الگوریتم نامقید بهینه‌سازی و دشواری ملحوظ کردن آن کاملاً از میان خواهد رفت».

اکنون به ساخت چنین تابعی می‌پردازیم؛ شیوه‌ای که برای ساخت چنین تابع هدفی پیشنهاد می‌شود چنین است: می‌دانیم که برای حداقل شدن وزن پروفیل با توجه به المان‌بندی آن و ضخامت‌های مختلفی که در شعاع‌های مختلف داریم، باید ضخامت‌ها کمینه و بهینه شوند. یعنی ضخامت‌ها باید نه آن قدر کم باشند که تنش از حد تنش تسلیم بگذرد و نه آنقدر ضخیم که تنشها فاصله زیادی با تنش تسلیم داشته باشند. ضخامت بهینه بدین‌معنا است که تنش در مرز تنش تسلیم است نه بیشتر و نه کمتر. یعنی اگر تنش در المان‌ها به تنش تسلیم برسد و در مرز آن قرار گیرد، پروفیل متناظر بهینه خواهد بود. در این صورت به‌طور قطع ضخامت‌ها حداقل و وزن نیز کمینه است. لذا تابع هدف را برای شکلی با N المان به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = \sum_{i=1}^{N+1} (\sigma_{yi} - \sigma_{ei})^2 \quad (10)$$

۲۲۰۰۰ دور بر دقیقه می‌چرخد بهینه‌سازی شده است. این دیسک در شعاع داخلی دارای دمای ۲۶ درجه و در شعاع خارجی دارای دمای ۲۵۲ درجه سانتیگراد است. تنش تسلیم ماده به‌کار رفته در دیسک در همه جا ثابت و برابر ۸۶۰Mpa است. کشش خارجی و فشار داخلی وارد بر آن به ترتیب برابر ۱۶۵Mpa و ۵۰۰Mpa است. در [۱۱]، دیسک با روش برنامه‌ریزی خطی و با استفاده از الگوریتم روش جهت قابل قبول بهینه‌سازی شده است. به‌جز مرجع یاد شده، در [۱۲] نیز با استفاده از روش کره‌های محاطی دیسک مذکور بهینه‌سازی شده است.

در همه موارد فوق، تابع هدف وزن دیسک و محدودیت‌های مسأله، پایین‌تر بودن تنش از تنش تسلیم ماده است. اما در این تحقیق تابع هدف و محدودیت‌ها به‌طور کلی با تمامی موارد پیشین تفاوتی اساسی دارد. همان‌طور که در بخش ۶ گفته شد، روش سیمپلکس جزو روش‌های نامقید است و به‌همین علت، محدودیت‌ها را در تابع هدف قرار دادیم و معادله (۱۰) نتیجه کوشش‌های فراوان برای وارد کردن قیدها در این روش نامقید بود.

با استفاده از روش به‌کار رفته در این تحقیق که با انسیس به سرانجام رسید، نتایجی در اختیار ما قرار می‌گیرد که وزن دیسک دوار را بیشتر کاهش می‌دهد. پروفیل به‌دست آمده از این روش ۱۴٪ از پروفیل بهینه [۱۲] سبک‌تر است.

شکل ۳ نمودار ضخامت پروفیل بهینه برحسب شعاع است که به‌صورت مقایسه‌ای بین پروفیل بهینه [۱۱] و روش تحقیق حاضر نمایش داده شده است.

شکل ۴ توزیع تنش به‌دست آمده در پروفیل بهینه به‌دست آمده از روش‌های مختلف را به‌صورت مقایسه‌ای نشان می‌دهد.

$$\sum F(i) < \varepsilon \quad (12)$$

تابع هدف (i) برای هر پروفیل عددی مثبت و بزرگتر از صفر است که در بهترین حالت بهینه‌یابی برابر صفر خواهد بود. با توجه به اینکه تمامی $N+1$ نقطه به‌طور همزمان به سمت جواب بهینه پیش می‌روند، لذا تمامی $F(i)$ ها در حال رسیدن به حداقل مقدار خود هستند. بنابراین در صورتی که مجموع آنها کوچکتر از حد همگرایی شود، می‌توان گفت که به جواب مورد نظر رسیده‌ایم؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{N+1} F(i) < \varepsilon \quad (13)$$

در محاسبات انجام شده برای یافتن پروفیل بهینه، از هر دو تابع برای کنترل همگرایی استفاده کردیم و اختلاف چندانی بین آن دو مشاهده نشد. اما تابع پیشنهادی نلدر و مید نتیجه بهتری را ارائه کرد. تابعی که مؤلفان برای همگرایی روش سیمپلکس پیشنهاد می‌کند، همگرایی را کمی دیرتر اعلام می‌کند که این نقطه ضعفی برای این تابع است. از طرفی تابع نلدر و مید، در حالت کلی و برای هر شرایطی جواب می‌دهد؛ در حالی که تابع جدید فقط برای چنین مسأله‌ای و چنین تابع هدفی قابل قبول است. اما در هر حال، با این تابع نیز می‌توان به آسانی همگرایی را کنترل کرد.

۸- مثالهای عددی

مثال (۱): بهینه‌سازی دیسک مطرح شده در [۱۱]
در [۱۱] دیسک فولادی با شعاع داخلی $۲۰/۳۲$ میلی‌متر و شعاع خارجی $۱۲۳/۲$ میلی‌متر که با سرعت زاویه‌ای

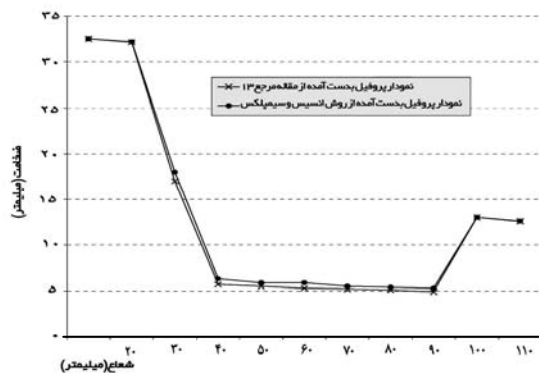
۵۰۰ Mpa است. در [۱۳]، دیسک با روش بهینه‌سازی کره‌های محاطی بهینه‌سازی شده است.

$$E(r) = (-2/0.225r^2 + 0/6.059r^2 - 0/0.813r + 0/0.194) \times 10^{13} \text{ pa} \quad (14)$$

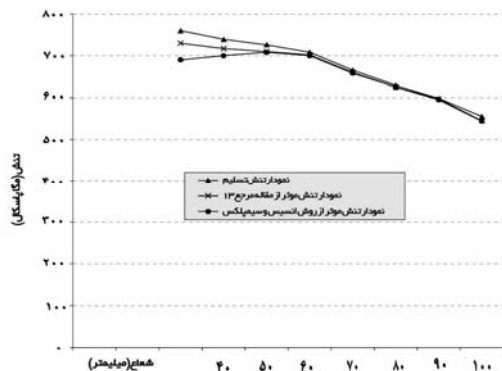
باز هم مانند مثال قبل، روش انسیس نتایج مطلوب‌تری را در اختیار می‌گذارد. نمودارهای پاسخهای به‌دست آمده به‌صورت مقایسه‌ای در ادامه آورده شده است.

شکل ۵ نمودار ضخامت پروفیل بهینه برحسب شعاع است که به‌صورت مقایسه‌ای بین پروفیل بهینه [۱۳] و روش تحقیق حاضر نمایش داده شده است.

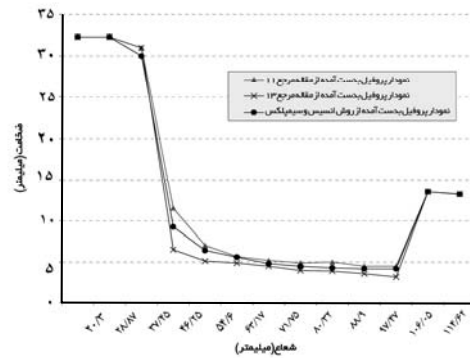
شکل ۶ توزیع تنش به‌دست آمده در پروفیل بهینه به‌دست آمده از روشهای مختلف را به‌صورت مقایسه‌ای نشان می‌دهد.



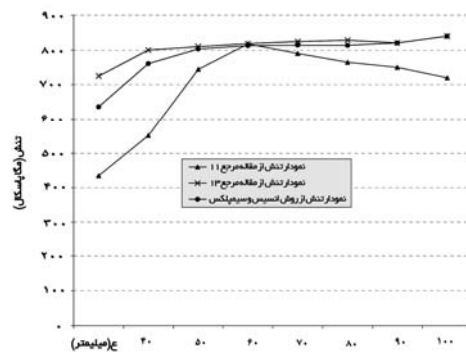
شکل ۵ مقایسه پروفیل‌های به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج [۱۳]



شکل ۶ مقایسه تنشهای به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج [۱۳]



شکل ۳ مقایسه پروفیل‌های به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج [۱۱] و [۱۳]



شکل ۴ مقایسه تنشهای به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج [۱۱] و [۱۳]

مثال (۲): بهینه‌سازی دیسک مطرح شده در [۱۳]

در [۱۳] دیسک فولادی با شعاع داخلی ۲۰/۳۲ میلی‌متر و شعاع خارجی ۱۲۳/۲ میلی‌متر که با سرعت زاویه‌ای ۲۲۰۰۰ دور بر دقیقه می‌چرخد بهینه‌سازی شده است. این دیسک در شعاع داخلی در دمای ۵۰۰ درجه سانتیگراد و در شعاع خارجی در دمای ۹۰۰ درجه سانتیگراد قرار دارد. تنش تسلیم و مدول الاستیسیته با شعاع تغییر می‌کنند. روابط مربوط به محاسبه آنها در معادله (۱۴) آورده شده است. کشش خارجی و فشار داخلی وارد بر دیسک به‌ترتیب برابر ۱۵۶ Mpa و

۹- منابع

- [7] Pederson, P., "the integrated Approach of distributed parameters", P. 757-780, sijthoff and Nourdhoff, Layton, 1981.
- [۸] حمیدرضا جاهد مطلق، محمدرضا نوبان، محمدمین اشراقی؛ «ANSYS» تهران: دانشگاه علم و صنعت ایران، مرکز انتشارات، ۱۳۷۹.
- [9] Nelder, J. A., & Mead, R., "Unconstrained Nonlinear Programming Methods", Computer Journal, 7:308 (1964).
- [۱۰] استیفن پی. برادلی، ترجمه هدایت ذکایی و حسین تقی زاده، «برنامه ریزی ریاضی کاربردی»، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ اول ۱۳۸۰.
- [11] Tsu - Chein Chev, "Procedures for Shape Optimization of Gas Turbine Disks", computers & structures, vol. 54, No 1, P. 1-4, 1990.
- [۱۲] محرابیان. عبدالحسین، «طراحی بهینه دیسک دوار با ضخامت متغیر در دمای بالا»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران، پاییز ۱۳۸۰.
- [13] Jahed, H., & Farshi, B., & Bidabadi J., "Minimum weight design of inhomogeneous rotating discs", Int. J. Press Vessels & Piping 2005; 82: 35-41.
- [1] Sereg, A., and Surana, K. S., "Optimum Design of Rotating Disks", ASME 92 1-10, 1970.
- [2] Chern, J. M., and Prager, W., "Optimum Design of Rotating Disks for Given Radial Displacement of edge", J. Optimized theory & Applic. 6, 161-170, 1970.
- [3] Malkov, V. P., and Salganskaya, E. A., "Optimum Material Distribution in Rotating Disks for Minimum Strength", sov. Aeronaut. 19, 46-50, 1976.
- [4] [۴] Fox, R. L., "Optimization method for Engineering", Addison - Wesley, London, 1970.
- [5] Zenkiewics, O. C., and Campbell, J. S., "Shape Optimization and sequential Linear Programming in Optimum structural Design", John Wily, NewYork, 1973.
- [6] Wang, S. Y. & son, Y., & Gallagher, K. H., "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures", compute-struct. 20, 855-867, 1985.

