

## ارائه یک مدل ساختاری دوبعدی سازگار ترمودینامیکی برای آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی

محمدرضا موسوی<sup>1</sup>، جمال ارغوانی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران  
\* تهران، صندوق پستی 11155-9567، arghavani@sharif.edu

### چکیده

آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی دسته‌ی جدیدی از مواد هوشمند به شمار می‌آیند که خواصی همچون کرنش‌های برگشت‌پذیر بزرگ و فرکانس عملکرد بالا از خود نشان می‌دهند. این خواص منحصر به فرد، آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی را به عنوان گزینه‌ای مناسب در کاربردهایی همچون عملگرها، حسگرها و برداشت‌کننده‌های انرژی مطرح کرده است. این مقاله یک مدل ساختاری پدیده شناختی دوبعدی برای آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی، در چارچوب ترمودینامیک فرایندهای بازگشت‌ناپذیر ارائه می‌کند. به منظور منعکس کردن پدیده‌های میکروسکوپی بر روی رفتار ماکروسکوپی ماده، تعدادی متغیر داخلی مناسب معرفی شده است. در ضمن نیروی محرک بحرانی برای شروع بازچینی مارتنزیتی، وابسته به تنش در نظر گرفته شده است که دقت مدل در بارگذاری‌های چندمحوره را افزایش می‌دهد. معادلات سینتیکی پیش‌فرض شده برای کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی، معادلات مستقل از یکدیگر برای بردارهای یکه مغناطیس‌شوندگی و معرفی تابع حدی مناسب برای بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی منجر به سادگی فرمول‌بندی مدل پیشنهادی شده‌اند. به منظور بررسی عملکرد مدل پیشنهادی در پیش‌بینی رفتار آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی چند مثال عددی حل و با داده‌های تجربی موجود و همچنین با مدل‌های ساختاری دیگر مقایسه شده است. مدل پیشنهادی با دارا بودن دقت قابل قبول در پیش‌بینی نتایج تجربی و همچنین سادگی روابط که منجر به کاهش هزینه‌های محاسباتی می‌گردد، برای تحلیل سازه‌های هوشمند بر پایه آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی مناسب می‌باشد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 13 تیر 1395  
پذیرش: 24 مهر 1395  
ارائه در سایت: 29 آبان 1395  
کلید واژگان:  
آلیاژ حافظه‌دار مغناطیسی  
متغیر داخلی  
مدل‌سازی دوبعدی  
بارگذاری مغناطیسی-مکانیکی  
تابع سخت‌شوندگی

## A thermodynamically consistent two-dimensional constitutive model for magnetic shape memory alloys

Mohammad Reza Mousavi, Jamal Arghavani\*

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran  
\* P.O.B. 11155-9567 Tehran, Iran, arghavani@sharif.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 03 July 2016  
Accepted 15 October 2016  
Available Online 19 November 2016

#### Keywords:

Magnetic shape memory alloy  
Internal variable  
Two-dimensional modeling  
Magneto-mechanical loading  
Hardening function

### ABSTRACT

Magnetic shape memory alloys (MSMAs) are a new class of smart materials that exhibit characteristics of large recoverable strains and high frequency. These unique characteristics make MSMAs interesting materials for applications such as actuators, sensors, and energy harvesters. This paper presents a two-dimensional phenomenological constitutive model for MSMAs, developed within the framework of irreversible continuum thermodynamics. To this end, a proper set of internal variables is introduced to reflect the microstructural consequences on the material macroscopic behavior. Moreover, a stress-dependent thermodynamic force threshold for variant reorientation is introduced which improves the model accuracy in multiaxial loadings. Preassumed kinetic equations for magnetic domain volume fractions, decoupled equations for magnetization unit vectors and appropriate presentation of the limit function for martensite variant reorientation lead to a simple formulation of the proposed constitutive model. To investigate the proposed model capability in predicting the behaviors of MSMAs, several numerical examples are solved and compared with available experimental data as well as constitutive models in the literature. Demonstrating good agreement with experimental data besides possessing computational advantages, the proposed constitutive model can be used for analysis of MSMA-based smart structures.

### 1-مقدمه

مشاهده کنند، به عنوان نوع جدیدی از مواد هوشمند شناخته شدند. تا به امروز، بیشترین کرنش برگشت‌پذیر مشاهده شده در این آلیاژها، تا میزان 12% توسط سوزینوف و همکاران [2] گزارش شده است که این میزان کرنش یک یا حتی دو مرتبه بزرگتر از کرنشی است که در اثر میدان مغناطیسی در مواد مگنتوستریکتیو معمولی ایجاد می‌شود [3]. این میزان

آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی<sup>1</sup>، برای اولین بار در سال 1996، هنگامی که اولاکو و همکاران [1]، توانستند کرنش‌هایی تا میزان 0.2% را تحت میدان مغناطیسی متوسط و در غیاب تنش مکانیکی در تک کریستال  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$

<sup>1</sup> Magnetic shape memory alloys (MSMAs)

در نظر گرفتن مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی علاوه بر دو مکانیزم بازچینی واریانت‌ها و حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی، منجر به پیش‌بینی بسیار دقیق‌تر پاسخ مغناطیس‌شوندگی و همچنین رفتار وابسته به تنش شد. در سال 2012، والدان و همکاران [15]، با بهبود مدل کیفر و لاگوداس، مدلی به منظور در نظر گرفتن اثر مغناطیس‌زدایی<sup>7</sup> و تسهیل کالیبراسیون مدل ارائه دادند. در سال 2014، چن و همکاران [16]، بر اساس ترمودینامیک فرایندهای بازگشت‌ناپذیر، یک مدل ساختاری سه‌بعدی برای پیش‌بینی رفتار مغناطیسی-مکانیکی آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی تحت بارگذاری‌های چند محوره عمومی ارائه دادند. در سال 2014، لامستر و همکاران [17] بر پایه مدل کیفر و لاگوداس، یک مدل ساختاری دوبعدی برای زمانیکه نمونه تحت بارگذاری دوبعدی مغناطیسی-مکانیکی دلخواه قرار می‌گیرد، ارائه دادند. همچنین در این مدل برای هر واریانت مارتنزیتی، کسر حجمی دامنه‌های مغناطیسی جداگانه‌ای معرفی شده است. در سال 2015، شیرانی و کدخدایی [18]، یک مدل ساختاری دوبعدی بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته و در ادامه کار کیفر و لاگوداس، برای پیش‌بینی رفتار ترکیب سه‌گانه Ni-Mn-Ga تحت فشار دوماحوره ارائه دادند. علاوه بر این، پارامترهای مادی مورد نیاز در مدل کیفر و لاگوداس برای همه شرایط بارگذاری یکتا نیستند، در حالیکه این مدل به گونه‌ای بهبود داده شده است که در آن مجموعه‌ای یکتا از پارامترها، برای شرایط بارگذاری مختلف کافی باشد.

از بررسی و مرور ادبیات می‌توان نتیجه گرفت که اکثر مدل‌های موجود، تنها برای بارگذاری خاصی کارایی دارند؛ به عنوان مثال میدان مغناطیسی متغیر به همراه تنش فشاری ثابت در راستای عمود بر میدان مغناطیسی. علاوه بر این در بعضی از این مدل‌ها به منظور سادگی، از مکانیزم‌های حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی یا چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی و یا هردوی آنها صرف‌نظر شده است. در نظر نگرفتن هر یک از این مکانیزم‌ها موجب عدم توانایی مدل در پیش‌بینی برخی از رفتارهای ماکروسکوپی خواهد شد. به عنوان مثال مدلی که مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی را لحاظ نکند، در رفتار حافظه‌داری مغناطیسی<sup>8</sup> قادر به پیش‌بینی رفتار وابسته به تنش یعنی کاهش بیشینه کرنش قابل دسترس با افزایش تنش نخواهد بود. البته در این بین مدلهایی نیز هستند که هر سه مکانیزم را در نظر می‌گیرند و همچنین برای بارگذاری‌های عمومی مغناطیسی-مکانیکی نیز کاربرد دارند (به عنوان مثال لامستر و همکاران [17])؛ اما معمولاً فرمول‌بندی پیچیده‌ای دارند و در مقایسه با نتایج تجربی از دقت قابل قبولی برخوردار نیستند.

هدف از این پژوهش علاوه بر ارائه یک مدل ساختاری دوبعدی مناسب برای هر بارگذاری مغناطیسی-مکانیکی دوبعدی دلخواه، معرفی تعدادی متغیر داخلی مناسب، بهبود دقت در پیش‌بینی و همچنین ساده‌تر کردن فرمول‌بندی مدل به منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی است. فرمولاسیون ساده‌تر، حجم محاسباتی کمتر و در عین حال دقت قابل قبول، مدل پیشنهادی را برای استفاده در روش اجزای محدود برای شبیه‌سازی سازه‌های هوشمند به عنوان گزینه‌ای مناسب مطرح می‌نماید.

پس از این مقدمه، در بخش 2، فرمول‌بندی مدل ساختاری ارائه می‌شود. سپس در بخش 3، الگوریتم حل تشریح می‌گردد. بخش 4 به تعیین پارامترهای مدل، ارائه نتایج و بحث اختصاص یافته است. در نهایت در بخش

کرنش، حتی خیلی بزرگتر از کرنش ناشی از میدان الکتریکی در پیروالکتریک‌ها است [4]. در آلیاژهای حافظه‌دار معمولی، سرعت فرایند استحاله مارتنزیتی<sup>1</sup> به واسطه مدت زمان نسبتاً زیاد لازم برای انتقال حرارت محدود شده است؛ اما از آنجا که عملگری در آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی بر اثر بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی<sup>2</sup> انجام می‌گیرد، فرکانس عملکرد این آلیاژها بسیار بالاتر از فرکانس عملکرد آلیاژهای حافظه‌دار معمولی و در حدود چند کیلوهرتز [5] می‌باشد. کرنش‌های برگشت‌پذیر بزرگ به همراه فرکانس عملکرد بالا، این آلیاژها را به عنوان گزینه‌ای مناسب در طراحی عملگرها [6]، حسگرها و برداشت‌کننده‌های انرژی [7] مطرح کرده است.

کرنش ناشی از میدان مغناطیسی در آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی، غیرخطی، وابسته به میزان تنش اعمالی، همراه با هیستریزیس و در نتیجه وابسته به تاریخچه بارگذاری است [8]. خواص جالب و منحصر به فرد آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی از یک طرف و رفتار پیچیده آن‌ها از طرف دیگر، نیاز به مدل‌سازی رفتار این آلیاژها را روشن می‌سازد. تاکنون مدل‌های متعددی برای مدل‌سازی رفتار آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی ارائه شده است. رویکرد به کار گرفته شده در اکثر این مدل‌ها کمینه کردن تابع انرژی آزاد سیستم به منظور یافتن ساختار تعادلی می‌باشد.

در سال 1998، جیمز و ووتینگ [9] با توسعه تئوری "مقید مگنتواستریکشن" برای آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی، مدلی برای کرنش ناشی از میدان مغناطیسی تحت تنش ثابت در آلیاژهای مارتنزیتی فرومغناطیس ارائه دادند. در این مدل فرض شده است که به دلیل ناهمسانگردی مغناطیسی زیاد آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی، بردارهای مغناطیس‌شوندگی<sup>3</sup> در نزدیکی محورهای آسان مغناطیسی<sup>4</sup> ثابت باقی می‌مانند. در سال 1999، آهندلی [10]، فرایند بازچینی میان دو واریانت که توسط یک مرز دوقلوبی<sup>5</sup> از یکدیگر جدا شده‌اند را بر اثر میدان مغناطیسی و بدون حضور تنش مکانیکی بررسی کرد. او نیروی محرک برای حرکت مرز دوقلوبی را به صورت اختلاف انرژی مغناطیسی این دو واریانت ارائه نمود. در این مدل فرض شده است که هر واریانت مارتنزیتی تنها شامل یک دامنه مغناطیسی<sup>6</sup> است، اما مغناطیس‌شوندگی موضعی لزوماً به محور آسان مقید نشده است. در سال 2000، لیخاچف و اولاکو [11]، با معرفی تنش معادل با میدان مغناطیسی، از طریق نمودارهای تجربی تنش-کرنش توانستند کرنش ناشی از میدان مغناطیسی در غیاب تنش مکانیکی را پیش‌بینی کنند. در سال 2003، استراکا و هکزکو [12]، با استفاده از رابطه به دست آمده برای تنش معادل با میدان مغناطیسی در مدل لیخاچف و اولاکو [11]، مدلی به منظور پیش‌بینی کرنش ناشی از تنش به ازای یک میدان مغناطیسی ثابت دلخواه و عمود بر تنش، ارائه دادند. در سال 2003، هرزینگر و لکسلنت [13]، با معرفی متغیرهای حالت داخلی، مدلی دوبعدی بر اساس ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر معرفی کردند. در این مدل با این فرض که بردارهای مغناطیس‌شوندگی، نسبت به جهات آسان مغناطیسی نمی‌چرخند، دو متغیر داخلی کسر حجمی واریانت مارتنزیتی و کسر حجمی دامنه مغناطیسی به منظور در نظر گرفتن اثرات ریزساختار، معرفی شده است. در سال 2004، کیفر و لاگوداس [14]، با توسعه روش هرزینگر و لکسلنت، یک مدل پدیده‌شناختی دوبعدی بر پایه ترمودینامیک محیط‌های پیوسته ارائه دادند.

<sup>1</sup> Phase transformation

<sup>2</sup> Martensite variant reorientation

<sup>3</sup> Magnetization

<sup>4</sup> Magnetic easy axes

<sup>5</sup> Twin boundary

<sup>6</sup> Magnetic domain

<sup>7</sup> Demagnetization

<sup>8</sup> Magnetic shape memory effect

5، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

## 2- فرمول‌بندی مدل ساختاری پیشنهادی

در این بخش، ابتدا متغیرهای داخلی معرفی می‌شوند. پس از آن پاسخ‌های ماده (تانسور کرنش،  $\epsilon$ ، و بردار مغناطیس‌شوندگی،  $\vec{M}$ ) بر حسب متغیرهای داخلی و همچنین متغیرهای خارجی (تانسور تنش،  $\sigma$ ، و بردار میدان مغناطیسی،  $\vec{H}$ ) به دست می‌آیند.

### 1-2- انتخاب متغیرهای داخلی

مطابق شکل 1، برای آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی در فاز مارتنزیت تتراگونال پنج لایه‌ای<sup>1</sup>، در حالت دوبعدی دو نوع واریانت وجود دارد:  $V_1$  و  $V_2$ . محورهای کوتاه این دو نوع واریانت به ترتیب موازی با محورهای دستگاه مختصات  $\hat{e}_1$  و  $\hat{e}_2$  در شبکه آستنیت قرار می‌گیرند. از طرفی دیگر به دلیل اینکه دمای استحاله مارتنزیتی به مراتب پایین‌تر از دمای کوری<sup>2</sup> است، فاز مارتنزیت در آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی، خاصیت فرومغناطیسی خواهد داشت؛ به گونه‌ای که حتی در غیاب میدان مغناطیسی، واریانت‌های مارتنزیتی، مغناطیسی شده‌اند [19]. بردار مغناطیس‌شوندگی موضعی در هر واریانت مارتنزیتی در راستای آسان مغناطیسی جهت‌گیری می‌کند که در فاز مارتنزیت تتراگونال پنج لایه‌ای، در راستای همان محور کوتاه قرار می‌گیرد. با اعمال میدان مغناطیسی، راستای آسان مغناطیسی تمایل دارد در راستای میدان قرار بگیرد. به طور مشابه تحت فشار تک محوره، محور کوتاه تتراگونال تمایل دارد در راستای فشار تک محوره قرار بگیرد. از این رو هر کدام از این دو واریانت، بسته به این که بارگذاری خارجی چگونه باشد، از منظر انرژی واریانت ترجیحی می‌شوند. بنابراین بارگذاری‌های مکانیکی-مغناطیسی مختلف، منجر به بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی مختلف به یکدیگر می‌شوند. بردار مغناطیس‌شوندگی موضعی می‌تواند در هر دو جهت مثبت یا منفی آسان مغناطیسی قرار بگیرد [20]. در ضمن در هر دامنه مغناطیسی، می‌تواند نسبت به راستای آسان مغناطیسی چرخش داشته باشد. اگر میدان مغناطیسی در راستای آسان مغناطیسی اعمال شود، تنها حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی را به دنبال خواهد داشت. این حرکت به گونه‌ای انجام می‌گیرد که دامنه‌های مغناطیسی با جهت مخالف با میدان مغناطیسی خارجی، جای خود را به دامنه‌های موافق می‌دهند؛ اما اگر میدان مغناطیسی

در راستای دیگری اعمال شود، علاوه بر حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی، چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی به سوی میدان مغناطیسی نیز اتفاق خواهد افتاد. بنابراین سه مکانیزم مهم در آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی که رفتار ماکروسکوپی آنها را متأثر می‌سازد، عبارتند از:

- بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی
- حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی
- چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی

در این تحقیق به منظور دربرگرفتن سه مکانیزم داخلی مذکور، از متغیرهای داخلی مختلفی استفاده شده است. کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی  $V_i$  با  $\xi_i$  نشان داده شده‌اند، می‌بایست نامنفی بوده و مجموع آنها برابر با یک شود، که به صورت رابطه (1) قابل بیان است:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 1 \\ \xi_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

تغییر در مقادیر این متغیرهای داخلی نشان‌دهنده اثرات مکانیزم بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی است.

برای واریانت مارتنزیتی  $V_i$ ، متغیر  $\alpha_i$  نشان دهنده کسر حجمی دامنه‌های مغناطیسی است که در غیاب میدان مغناطیسی، جهت بردارهای مغناطیس‌شوندگی در آنها در جهت  $+\hat{e}_i$  است. بدیهی است  $(1 - \alpha_i)$  کسر حجمی دامنه‌های مغناطیسی است که در غیاب میدان مغناطیسی، جهت بردارهای مغناطیس‌شوندگی در آنها در جهت  $-\hat{e}_i$  است. متغیرهای داخلی  $\alpha_i$  نمی‌توانند مقداری کمتر از صفر و بیشتر از یک داشته باشند، که به صورت رابطه (2) قابل بیان است:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

تغییر در مقادیر این متغیرهای داخلی نشان‌دهنده اثرات مکانیزم حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی است.

بالاخره برای دربرگرفتن مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی، برای هر یک از دامنه‌های مغناطیسی  $\alpha_i$  و  $(1 - \alpha_i)$ ، به ترتیب بردارهای یکه  $\hat{m}_{+i}$  و  $\hat{m}_{-i}$  که جهت آنها نشان‌دهنده جهت مغناطیس‌شوندگی موضعی در آن دامنه مغناطیسی است، به عنوان متغیر داخلی در نظر گرفته شده است. اندازه هر یک از این بردارها همواره یک می‌باشد، که به صورت رابطه (3) قابل بیان است:

$$\begin{cases} \|\hat{m}_{+i}\| = 1, & i = 1, 2 \\ \|\hat{m}_{-i}\| = 1, & i = 1, 2 \end{cases} \quad (3)$$

که عملگر اندازه به صورت  $\|\hat{m}\| = \sqrt{\hat{m} \cdot \hat{m}}$  تعریف می‌شود. تغییر در جهت این بردارهای یکه به منزله مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی نسبت به جهات آسان مغناطیسی است. متغیرهای داخلی در نظر گرفته شده، در شکل 2 نشان داده شده‌اند.

### 2-2- تعیین پاسخ ماده بر حسب متغیرهای داخلی

با توجه به شکل 2، می‌توان بردار مغناطیس‌شوندگی کل در یک نقطه مادی را به صورت رابطه (4) ارائه نمود:

$$\vec{M} = \left\{ \sum_{i=1}^2 \xi_i \alpha_i \hat{m}_{+i} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (1 - \alpha_i) \hat{m}_{-i} \right\} M^{\text{sat}} \quad (4)$$

که  $M^{\text{sat}}$  مغناطیس‌شوندگی اشباع است که به خواص ماده بستگی دارد. به منظور معرفی پاسخ کرنش ماده، با استفاده از فرض کرنش‌های کوچک، ابتدا کرنش کل به صورت جمعی به دو بخش الاستیک،  $\epsilon^e$ ، و ناشی از

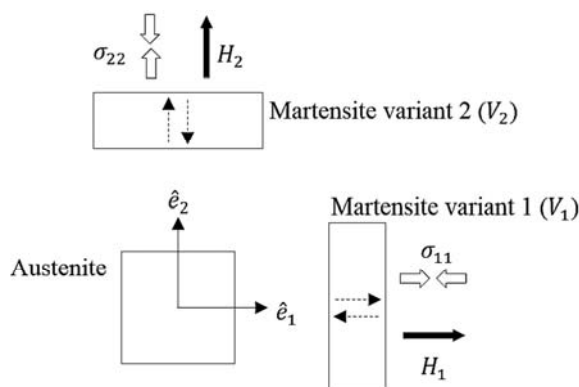


Fig. 1 Crystal structure of austenite phase and two types of martensite variants with magnetic easy axis in each variant

شکل 1 ساختار کریستالی در فاز آستنیت و دو نوع واریانت مارتنزیتی به همراه جهات آسان مغناطیسی در هر واریانت

<sup>1</sup> Tetragonal five-layered modulated martensite phase

<sup>2</sup> Curie temperature

انرژی مغناطیسی سیستم به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود:

$$g^{\text{mag}} = -\frac{\mu_0}{\rho} \vec{M} \cdot \vec{H} - \sum_{i=1}^2 \xi_i \alpha_i K_1 \{1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i})^2\} + \sum_{i=1}^2 \xi_i (1 - \alpha_i) K_1 \{1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{-i})^2\} \quad (10)$$

در این رابطه،  $\mu_0$  نفوذپذیری مغناطیسی خلاء و  $K_1$  ثابت ناهمسانگردی مغناطیسی است که جزء خواص ماده می‌باشد و از تست‌های مغناطیس شوندگی در راستای سخت مغناطیسی به دست می‌آید. جمله اول در رابطه (10) انرژی زمین<sup>2</sup> است که به خاطر برهم‌کنش میدان مغناطیسی با مغناطیس‌شوندگی کل است؛ جمله دوم انرژی ناهمسانگردی مغناطیسی<sup>3</sup> برای واریانت‌های با بردار مغناطیس‌شوندگی  $\hat{m}_{+i}$  و جمله سوم انرژی ناهمسانگردی مغناطیسی برای واریانت‌های با بردار مغناطیس‌شوندگی  $\hat{m}_{-i}$  می‌باشد. انرژی ناهمسانگردی مغناطیسی، که انرژی مورد نیاز برای چرخاندن بردارهای مغناطیس‌شوندگی نسبت به جهات آسان مغناطیسی است، به صورت  $K_1 \sin^2(\theta)$  تقریب زده می‌شود. در این عبارت،  $\theta$  زاویه انحراف بردار مغناطیس‌شوندگی نسبت به جهت آسان مغناطیسی است [21]. عبارت‌های  $\{1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{-i})^2\}$  و  $\{1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i})^2\}$  همان  $\sin^2(\theta)$  به ترتیب برای بردارهای  $\hat{m}_{-i}$  و  $\hat{m}_{+i}$  یک می‌باشند.

- انرژی برهم‌کنش:

انرژی برهم‌کنش سیستم به صورت رابطه (11) در نظر گرفته می‌شود:

$$g^{\text{int}} = \frac{1}{\rho} f^\xi(\xi_1, \xi_2) \quad (11)$$

که در آن  $f^\xi$  تابع سخت‌شوندگی<sup>4</sup> برای بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی است. در حالت کلی این تابع می‌تواند تابعی از کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی باشد. در این مدل تابع سخت‌شوندگی برای بازچینی مارتنزیتی مطابق رابطه (12) معرفی می‌گردد:

$$f^\xi = \frac{1}{n} \kappa_1 (\xi_1^n + \xi_2^n) \quad (12)$$

در این رابطه  $\kappa_1$  و  $n < 1$  پارامترهای مادی هستند که به همراه سایر پارامترهای مادی مدل می‌بایست با استفاده از تست‌های تجربی تعیین شوند.

- جملات مربوط به قیدهای حاکم بر متغیرهای داخلی:

برای اینکه انرژی آزاد گیبس بدون قید شود، جملات مربوط به قیدهای داخلی نیز به آن اضافه می‌شود. بدین منظور برای قیدهای نامساوی رابطه (1)، از تابع اندیکاتور<sup>5</sup>  $I^{\xi_i}(\xi_i)$  که به صورت رابطه (13) تعریف می‌شود:

$$I^{\xi_i}(\xi_i) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi_i \\ +\infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, i = 1, 2 \quad (13)$$

و برای قیدهای نامساوی رابطه (2)، از تابع اندیکاتور  $I^{\alpha_i}(\alpha_i)$  که به صورت رابطه (14) تعریف می‌شود:

$$I^{\alpha_i}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\ +\infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, i = 1, 2 \quad (14)$$

استفاده می‌شود. همچنین برای قیود تساوی موجود در روابط (1) و (3)، از ضرایب لاگرانژ  $\lambda_{\pm i}$  ( $i = 1, 2$ ) استفاده می‌شود. در نهایت،  $g^{\text{con}}$  به صورت رابطه (15) در خواهد آمد:

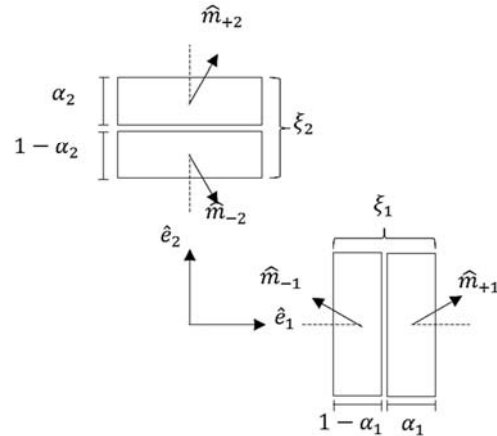


Fig. 2 Internal variables in the proposed constitutive model

شکل 2 متغیرهای داخلی در نظر گرفته شده در مدل ساختاری پیشنهادی

بازچینی،  $\varepsilon^r$ ، تجزیه می‌شود، که به صورت رابطه (5) قابل بیان است:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^r \quad (5)$$

با فرض اینکه رفتار الاستیک فاز مارتنزیت، همسانگرد باشد رابطه (6) به دست می‌آید:

$$\varepsilon^e = \mathbb{S} : \sigma \quad (6)$$

که  $\mathbb{S}$  تانسور مرتبه چهارم نرمی الاستیک در حالت صفحه‌ای (تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای) می‌باشد. علاوه بر این کرنش ناشی از بازچینی واریانت‌ها برای دستگاه مختصات  $\hat{e}_1 - \hat{e}_2$  نشان داده شده در شکل 1، به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^r = - \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix} \varepsilon^{\text{r,max}} \quad (7)$$

در این رابطه  $\varepsilon^{\text{r,max}}$  بیشینه کرنش ناشی از بازچینی مارتنزیتی است.  $\varepsilon^{\text{r,max}}$  را می‌توان به صورت تجربی اندازه‌گیری کرد یا از طریق رابطه  $a - c/a$  تقریب زد، که  $a$  و  $c$  به ترتیب طول لبه بزرگ و کوچک تتراگونال مارتنزیتی است [20].

### 3-2- تعیین انرژی آزاد گیبس

در مدل پیشنهادی، انرژی آزاد گیبس شامل جملات مختلف ناشی از انرژی مکانیکی  $g^{\text{mec}}$ ، انرژی مغناطیسی  $g^{\text{mag}}$ ، انرژی برهم‌کنش<sup>1</sup>  $g^{\text{int}}$  بر اثر برهم‌کنش میان واریانت‌های مارتنزیتی و در نهایت جملات مربوط به قیدهای حاکم بر متغیرهای داخلی  $g^{\text{con}}$  می‌باشد، که به صورت رابطه (8) قابل بیان است:

$$g = g^{\text{mec}} + g^{\text{mag}} + g^{\text{int}} + g^{\text{con}} \quad (8)$$

- انرژی مکانیکی:

انرژی مکانیکی سیستم به صورت رابطه (9) تعریف می‌شود:

$$g^{\text{mec}} = -\frac{1}{2\rho} \sigma : \mathbb{S} : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : \varepsilon^r \quad (9)$$

که  $\rho$  چگالی ماده است. جمله اول در رابطه (9)، انرژی ذخیره شده در ماده بر اثر تغییر شکل الاستیک را توصیف می‌کند. جمله دوم نیز به خاطر برهم‌کنش میان تنش و بخش غیرالاستیک کرنش در نظر گرفته شده است.

- انرژی مغناطیسی:

<sup>2</sup> Zeeman energy

<sup>3</sup> Magnetic anisotropy energy

<sup>4</sup> Hardening function

<sup>5</sup> Indicator function

<sup>1</sup> Interaction energy

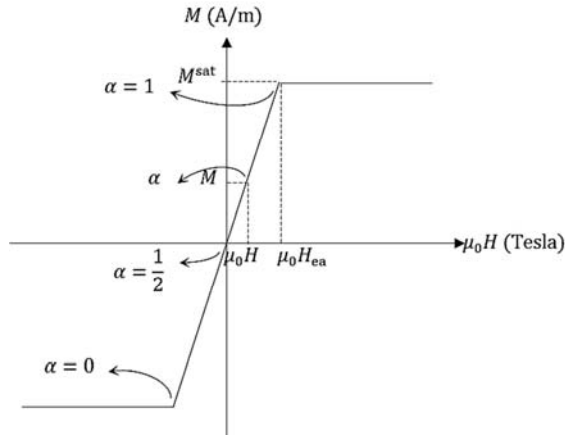


Fig. 3 A qualitative magnetization curve along the magnetic easy axis and approximation of magnetic domain volume fractions

شکل 3 منحنی مغناطیس‌شوندگی کیفی یک نمونه تک کریستال از آلیاژ حافظه‌دار مغناطیسی در راستای آسان مغناطیسی و نحوه تقریب کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \hat{m}_{+i} &= -\rho \frac{\partial g}{\partial \hat{m}_{+i}} = \mu_0 M^{sat} \xi_i \alpha_i \vec{H} + 2\rho K_1 \xi_i \alpha_i (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i}) \hat{e}_i \\ -\lambda_{+i} \hat{m}_{+i} &= \vec{0}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (17)$$

با ضرب داخلی رابطه (17) در  $\hat{m}_{+i}$  و استفاده از قید (3)، ضریب لاگرانژ  $\lambda_{+i}$  به صورت رابطه (18) به دست می‌آید:

$$\lambda_{+i} = \mu_0 M^{sat} \xi_i \alpha_i (\vec{H} \cdot \hat{m}_{+i}) + 2\rho K_1 \xi_i \alpha_i (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i})^2, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

با جایگذاری  $\lambda_{+i}$  از رابطه (18) در رابطه (17)، رابطه (19) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mu_0 M^{sat} \xi_i \alpha_i \{ \vec{H} - (\vec{H} \cdot \hat{m}_{+i}) \hat{m}_{+i} \} + 2\rho K_1 \xi_i \alpha_i \{ (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i}) \hat{e}_i \\ - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i})^2 \hat{m}_{+i} \} = \vec{0}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

با به کارگیری رابطه  $(\vec{H} \cdot \hat{m}_{+i}) \hat{m}_{+i} = [\hat{m}_{+i} \otimes \hat{m}_{+i}] \vec{H}$  به معادله (19) به صورت رابطه (20) در می‌آید:

$$\begin{aligned} \xi_i \alpha_i [I - \hat{m}_{+i} \otimes \hat{m}_{+i}] \{ \mu_0 M^{sat} \vec{H} + 2\rho K_1 [\hat{e}_i \otimes \hat{e}_i] \hat{m}_{+i} \} = \vec{0} \\ i = 1, 2 \end{aligned} \quad (20)$$

بنابراین معادلات حاکم بر بردارهای یک‌گانه مغناطیس‌شوندگی  $\hat{m}_{+i}$  و  $\hat{m}_{-i}$  به صورت رابطه (21) خلاصه می‌شوند:

$$\begin{aligned} [I - \hat{m}_{+i} \otimes \hat{m}_{+i}] \{ \mu_0 M^{sat} \vec{H} + 2\rho K_1 [\hat{e}_i \otimes \hat{e}_i] \hat{m}_{+i} \} = \vec{0} \\ i = 1, 2 \\ [I - \hat{m}_{-i} \otimes \hat{m}_{-i}] \{ \mu_0 M^{sat} \vec{H} + 2\rho K_1 [\hat{e}_i \otimes \hat{e}_i] \hat{m}_{-i} \} = \vec{0} \\ i = 1, 2 \end{aligned} \quad (21)$$

رابطه (21) شامل چهار معادله برداری است که از یکدیگر مستقل می‌باشند. بنابراین از حل هر کدام از آنها به صورت جداگانه، می‌توان بردار یک‌گانه مغناطیس‌شوندگی مجهول در آن معادله را به دست آورد.

### 3-4-2- کسرهای حجمی واریانتهای مارتنزیتی

نیروهای محرک برای واریانتهای مارتنزیتی مطابق رابطه (22) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \pi^{\xi_i} &= -\rho \frac{\partial g}{\partial \xi_i} = -\varepsilon^{r,max} \sigma_{ii} \\ &+ \mu_0 M^{sat} \{ \alpha_i \hat{m}_{+i} + (1 - \alpha_i) \hat{m}_{-i} \} \cdot \vec{H} \\ &- \rho K_1 \alpha_i [1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{+i})^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{con} &= \frac{1}{\rho} [\lambda_{\xi} (\xi_1 + \xi_2 - 1) + I^{\xi_1} (\xi_1) + I^{\xi_2} (\xi_2) \\ &+ I^{\alpha_1} (\alpha_1) + I^{\alpha_2} (\alpha_2) + \lambda_{+1} (|\hat{m}_{+1}| - 1) \\ &+ \lambda_{-1} (|\hat{m}_{-1}| - 1) + \lambda_{+2} (|\hat{m}_{+2}| - 1) \\ &+ \lambda_{-2} (|\hat{m}_{-2}| - 1)] \end{aligned} \quad (15)$$

هم اکنون با جایگذاری روابط (9) تا (12) و (15) در رابطه (8)، انرژی آزاد گیبس به دست می‌آید.

### 4-2- تعیین متغیرهای داخلی

این قسمت به یافتن معادلات حاکم بر متغیرهای داخلی اختصاص داده شده است. در مورد نحوه تعیین کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی، بردارهای یک‌گانه مغناطیس‌شوندگی و کسرهای حجمی واریانتهای مارتنزیتی به ترتیب در بخش‌های 1-4-2، 2-4-2 و 3-4-2 بحث شده است.

### 1-4-2- کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی

در غیاب میدان مغناطیسی خارجی ( $H_i = 0$ )، که در این رابطه  $H_i$  نشان دهنده مولفه میدان مغناطیسی در جهت  $\hat{e}_i$  است، دامنه‌های مغناطیسی که بردارهای مغناطیس‌شوندگی آنها در جهت مثبت مختصات می‌باشد با دامنه‌های مغناطیسی که بردارهای مغناطیس‌شوندگی آنها در جهت منفی مختصات می‌باشد، کسرهای حجمی برابر دارند ( $\alpha_i = 1/2$ )، به گونه‌ای که مغناطیس‌شوندگی کل صفر می‌شود. با اعمال میدان مغناطیسی و افزایش آن تا مقدار بحرانی برای اشباع مغناطیسی ( $H_i = H^{sat}$ )، دامنه‌هایی که جهت بردار مغناطیس‌شوندگی آنها با میدان مغناطیسی مخالف است، کاملاً از بین می‌روند ( $\alpha_i = 1$  یا  $\alpha_i = 0$ ).

بر اساس این مشاهدات در مدل پیشنهادی فرض شده است که رشد کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی تنها متأثر از میدان مغناطیسی است و به صورت خطی با آن تغییر می‌کند:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{H_i}{2H^{sat}}, & |H_i| < H^{sat} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(H_i), & |H_i| \geq H^{sat} \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

در واقع رابطه (16) یک معادله سینتیکی پیش فرض شده<sup>1</sup> برای  $\alpha_i$  است که علاوه بر کاهش هزینه‌های محاسباتی، دقت مناسبی را نیز ارائه می‌دهد. به منظور تعیین پارامتر مادی  $H^{sat}$ ، از یک تست مغناطیس‌شوندگی در راستای آسان مغناطیسی که تنها مکانیزم حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی در آن اتفاق می‌افتد، استفاده می‌شود. در شکل 3 پاسخ مغناطیس‌شوندگی یک نمونه آلیاژ حافظه‌دار مغناطیسی تحت این بارگذاری به صورت کیفی نشان داده شده است. اگر میدان مغناطیسی بحرانی برای اشباع مغناطیسی در راستای آسان مغناطیسی با  $H_{ea}$  نشان داده شود، این نتیجه به دست می‌آید که  $H^{sat} = H_{ea}$ .

لازم به ذکر است در مدل پیشنهادی،  $H_{ea}$  برای هر دو جهت آسان مغناطیسی یکسان فرض شده است. علاوه بر این رابطه (16)، همواره برقراری قیدهای رابطه (3) را ضمانت می‌کند.

### 2-4-2- بردارهای یک‌گانه مغناطیس‌شوندگی

از آنجا که مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی، فرایندی بازگشت‌پذیر است و با اتلاف انرژی همراه نیست، می‌توان نتیجه گرفت در حین این فرایند، نیروی محرک برای چرخش بردارهای یک‌گانه مغناطیس‌شوندگی برابر صفر است، که به صورت رابطه (17) قابل بیان است:

<sup>1</sup> Preassumed kinetic equation

کرش و مغناطیس‌شوندگی می‌بایست به‌روزرسانی شوند.

با دانستن میدان مغناطیسی  $\vec{H}^{(n+1)}$  کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی با توجه به رابطه (16) به صورت رابطه (31) به‌روزرسانی می‌شوند:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{H_i^{(n+1)}}{2H_{ea}}, & |H_i^{(n+1)}| < H_{ea} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(H_i^{(n+1)}), & |H_i^{(n+1)}| \geq H_{ea} \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

همچنین بردارهای یکه مغناطیس‌شوندگی با توجه به رابطه (21) به صورت رابطه (32) به‌روزرسانی می‌شوند:

$$\begin{aligned} [I - \hat{m}_{+i}^{(n+1)} \otimes \hat{m}_{+i}^{(n+1)}] \{ \mu_0 M^{\text{sat}} \bar{H}^{(n+1)} \\ + 2\rho K_1 [\hat{e}_i \otimes \hat{e}_i] \hat{m}_{+i}^{(n+1)} \} = \vec{0}, \quad i = 1, 2 \\ [I - \hat{m}_{-i}^{(n+1)} \otimes \hat{m}_{-i}^{(n+1)}] \{ \mu_0 M^{\text{sat}} \bar{H}^{(n+1)} \\ + 2\rho K_1 [\hat{e}_i \otimes \hat{e}_i] \hat{m}_{-i}^{(n+1)} \} = \vec{0}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (32)$$

یادآوری می‌شود رابطه (32) خود شامل چهار معادله برداری مستقل از یکدیگر است که به صورت جداگانه حل می‌شوند. مستقل بودن این معادلات از یکدیگر کاهش هزینه‌های محاسباتی را به دنبال دارد.

پس از به‌روزرسانی کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی و بردارهای یکه مغناطیس‌شوندگی، نوبت به به‌روزرسانی کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی می‌رسد. بدین منظور ابتدا فرض می‌شود در این گام زمانی رفتار ماده، الاستیک باشد. با این فرض، کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی تغییر نمی‌کنند و تابع حدی آزمون محاسبه می‌شود. اگر تابع حدی آزمون قابل قبول باشد فرض الاستیک درست بوده است؛ در غیر اینصورت گام زمانی غیرالاستیک بوده است و کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی می‌بایست به‌روزرسانی شوند. بدین منظور دستگاه معادلات (33) باید حل شود:

$$\begin{cases} \pi^{\xi_P} \xi_P^{(n+1)} - \pi^{\xi_R} \xi_R^{(n+1)} = Y^{(n+1)} \\ \xi_P^{(n+1)} + \xi_R^{(n+1)} = 1 \end{cases} \quad (33)$$

پس از به‌روزرسانی تمام متغیرهای داخلی، اکنون مغناطیس‌شوندگی و کرش به ترتیب از طریق رابطه (4) و روابط (5)، (6) و (7) به سادگی به دست می‌آیند.

#### 4- مثال‌های عددی

در این بخش به منظور اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، برای سه بارگذاری مختلف، نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نتایج تجربی مقایسه شده است. در ضمن به منظور مقایسه عملکرد مدل پیشنهادی با مدل‌های دیگر، نتایج حاصل از شبیه‌سازی توسط مدل دوبعدی لامستر و همکاران [17] نیز آورده شده است. در نهایت پس از بررسی عملکرد و دقت مدل پیشنهادی، از آن جهت پیش‌بینی یک بارگذاری دوبعدی دلخواه استفاده شده است.

حال پارامترهای مادی مدل را که در مثال‌های عددی از آنها استفاده می‌شود، تعیین می‌کنیم. شش عدد از این پارامترها از اطلاعات موجود در هکزکو [22] برای تک کریستال Ni<sub>2</sub>MnGa در دمای اتاق گرفته شده است. مقادیر این پارامترها در سطرهای اول تا ششم جدول 1 آورده شده است. به منظور تعیین پارامترهای مادی  $\kappa_1$ ،  $n$  و  $Y_0$  از یک تست فشار تک‌محوره ساده در غیاب میدان مغناطیسی می‌توان استفاده نمود. حال اگر فرض شود نمونه قبل از اعمال تنش در راستای مختصات  $\hat{e}_1$ ، کاملاً از واریانت  $V_2$  تشکیل شده است، تابع حدی برای این بارگذاری به صورت رابطه (34) در خواهد آمد:

$$-\varepsilon^{\text{r,max}} \sigma_{11} - \kappa_1 [\xi_1^{n-1} - \xi_2^{n-1}] - Y_0 = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -\rho K_1 (1 - \alpha_i) [1 - (\hat{e}_i \cdot \hat{m}_{-i})^2] \\ - \kappa_1 \xi_i^{n-1} - \lambda_\xi - \gamma_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (22)$$

که  $\gamma_i$  به صورت رابطه (23) تعریف می‌شود:

$$\gamma_i = \frac{\partial I^{\xi_i}(\xi_i)}{\partial \xi_i} = \begin{cases} \gamma_i^* \leq 0, & \xi_i = 0 \\ 0, & \xi_i \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

حال قرارداد می‌شود که  $P$  اندیس نیروی محرک ترمودینامیکی بزرگتر و  $R$  اندیس نیروی محرک کوچکتر باشد، که به صورت رابطه (24) قابل بیان است:

$$\pi^{\xi_P} \geq \pi^{\xi_R} \quad (24)$$

با توجه به اینکه مکانیزم بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی، تنها مکانیزم برگشت ناپذیر سیستم است، نامساوی کلازیوس-دوهم<sup>1</sup> به صورت رابطه (25) در خواهد آمد:

$$D^{\text{mech}} = \pi^{\xi_P} \xi_P + \pi^{\xi_R} \xi_R \geq 0 \quad (25)$$

با مشتق گرفتن از قید تساوی رابطه (1) نسبت به زمان، رابطه (26) به دست می‌آید:

$$\dot{\xi}_P = -\dot{\xi}_R \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه (26) درون نامساوی کلازیوس-دوهم (25)، رابطه (27) به دست می‌آید:

$$D^{\text{mech}} = (\pi^{\xi_P} - \pi^{\xi_R}) \dot{\xi}_P \geq 0 \quad (27)$$

از نظر فیزیکی انتظار می‌رود همواره بازچینی مارتنزیتی از واریانت با نیروی محرک کمتر به نیروی محرک بیشتر اتفاق افتد، که به صورت رابطه (28) قابل بیان است:

$$\dot{\xi}_P \geq 0 \quad (28)$$

با توجه به نامساوی‌های (24) و (28)، می‌توان نتیجه گرفت که اتلاف مکانیکی (27) همواره نامنفی و بنابراین نامساوی کلازیوس-دوهم همواره برقرار است. در اینجا تابع حدی<sup>2</sup> مطابق رابطه (29) تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F} = (\pi^{\xi_P} - \pi^{\xi_R}) - Y = 0 \quad (29)$$

که شرط بازچینی مارتنزیتی از واریانت  $V_R$  به واریانت  $V_P$  را هنگامی که نیروی ترمودینامیکی موثر  $(\pi^{\xi_P} - \pi^{\xi_R})$  به مقدار بحرانی برای شروع بازچینی مارتنزیتی  $Y$  می‌رسد، توصیف می‌کند. در مدل ساختاری پیشنهادی، پارامتر  $Y$  مطابق رابطه (30) در نظر گرفته می‌شود:

$$Y = Y_0 + \kappa_1 \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{J_2(\sigma)}}{\kappa_2}\right) - 1 \right] (\xi_P^{n-1} - \xi_R^{n-1}) \quad (30)$$

که  $Y_0$  و  $\kappa_2$  پارامترهای مادی هستند.  $J_2(\sigma)$  نیز مقدار نوردای اصلی<sup>3</sup> دوم تانسور تنش است. رابطه (30) نشان می‌دهد، انرژی مورد نیاز برای شروع فرایند بازچینی مارتنزیتی، به تنش اعمالی و کسرهای حجمی واریانت‌های مارتنزیتی بستگی دارد.

#### 3- الگوریتم حل

در این بخش الگوریتم حل توضیح داده می‌شود. بدین منظور بازه زمانی مورد نظر  $[0, t]$  به زیربازه‌هایی تقسیم و مسأله برای هر گام زمانی  $[t^{(n)}, t^{(n+1)}]$  حل می‌شود. اگر پاسخ ماده  $(\varepsilon, \bar{M}, \alpha_i, \hat{m}_{\pm i}, \xi_i)$  در زمان  $t^{(n)}$  و همچنین تنش و میدان مغناطیسی در زمان  $t^{(n+1)}$  باشد، تمام متغیرهای داخلی و همچنین

<sup>1</sup> Clausius-Duhem inequality

<sup>2</sup> Limit function

<sup>3</sup> Principal invariant

حال پیکربندی تک واریانته قبل از اعمال میدان مغناطیسی را به عنوان پیکربندی مرجع در نظر گرفته و پیش‌بینی‌های مدل پیشنهادی از کرنش  $\varepsilon_{11}$  به ازای سه سطح تنش  $-0.6$ ،  $-1.4$  و  $-3.0$  مگاپاسکال به ترتیب در شکل‌های 6 تا 8 ارائه می‌شود. پیش‌بینی‌های پاسخ مغناطیس‌شوندگی  $M_2$  نیز برای این سه سطح تنش، در شکل‌های 9 تا 11 مشاهده می‌شود. در ضمن به منظور مقایسه، نتایج تجربی هکزکو [22] و شبیه‌سازی‌های لامستر و همکاران [17] نیز آورده شده است.

با توجه به شکل 6، مدل ارائه شده نسبت به تست تجربی، میدان مغناطیسی لازم برای شروع فرایند بازچینی مارتنزیتی از  $V_1$  به  $V_2$  را کمی کمتر پیش‌بینی می‌کند، در حالیکه مدل لامستر و همکاران آن را کمی بیشتر پیش‌بینی می‌کند. نرخ فرایند بازچینی (شیب نمودار در حین بازچینی مارتنزیتی) در مدل پیشنهادی نسبت به مدل دیگر به تجربه نزدیک‌تر است. هر دو مدل بر خلاف نتایج تجربی، بازچینی کامل را در مسیر رفت پیش‌بینی می‌کنند؛ در حالیکه تست تجربی نشان می‌دهد که در حالت اشباع هنوز کمی از واریانت  $V_1$  باقی می‌ماند. در هنگام برداشتن میدان مغناطیسی نیز مدل

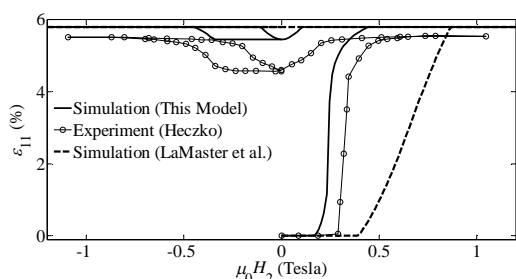


Fig. 6 Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -0.6$  MPa

شکل 6 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -0.6$  MPa

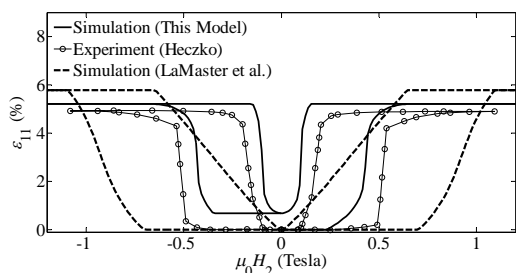


Fig. 7 Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -1.4$  MPa

شکل 7 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -1.4$  MPa

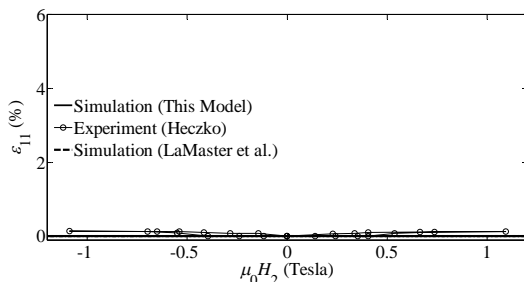


Fig. 8 Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -3.0$  MPa

شکل 8 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -3.0$  MPa

جدول 1 پارامترهای مادی تعیین شده جهت استفاده در مثال‌های عددی  
Table 1 Identified material parameters for numerical examples

پارامتر	مقدار	واحد
$M^{\text{sat}}$	$5.0 \times 10^5$	A/m
$\varepsilon_{r,\text{max}}$	5.8	%
$\rho K_1$	$1.65 \times 10^5$	J/m <sup>3</sup>
$\mu_0 H_{\text{ea}}$	0.24	Tesla
$E$	$5.0 \times 10^3$	MPa
$\nu$	0.3	-
$\kappa_1$	$4.9 \times 10^4$	J/m <sup>3</sup>
$n$	10.0	-
$\gamma_0$	$6.4 \times 10^4$	J/m <sup>3</sup>
$\kappa_2$	3.0	MPa

با استفاده از نتایج تست تجربی فشار تک‌محوره هکزکو [22]، سه پارامتر مادی تعیین می‌شوند. مقادیر به دست آمده برای این پارامترها در سطرهای هفتم تا نهم جدول 1 آورده شده است. در شکل 4، نتیجه برازش منحنی با داده‌های تجربی مقایسه شده است.

به طور مشابه، پارامتر مادی  $\kappa_2$  می‌تواند از یک تست فشار دوجوره تعیین شود. لازم به ذکر است از آنجا که داده تجربی برای چنین تستی در هکزکو [22] وجود نداشت، به ناچار از داده‌های تجربی چن و همکاران [16] برای تقریب  $\kappa_2$  استفاده شده است.

#### 1-4- مثال 1: رفتار حافظه‌داری مغناطیسی

یک نمونه تک کریستال  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  در دمای اتاق را در نظر بگیرید که با اعمال تنش فشاری به اندازه کافی بزرگ در راستای  $\theta_1$ ، کاملاً از واریانت  $V_1$  تشکیل شده است. سپس این مقدار تنش تا مقدار نامی مورد نظر کاهش می‌یابد. در این حالت نمونه در راستای  $\theta_1$  در فشرده‌ترین حالت ممکن قرار دارد. حال همان‌طور که تنش فشاری ثابت نگه داشته می‌شود، میدان مغناطیسی سینوسی در راستای  $\theta_2$  مطابق شکل 5 اعمال می‌شود.

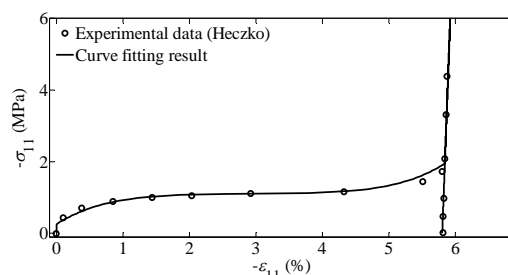


Fig. 4 Experimental stress-strain curve for simple uniaxial compression test in Heczko [22] and the proposed model prediction based on identified material parameters from curve fitting

شکل 4 منحنی تجربی تنش-کرنش برای تست فشار تک‌محوره هکزکو [22] و پیش‌بینی مدل پیشنهادی بر اساس پارامترهای مادی تعیین شده از برازش منحنی.

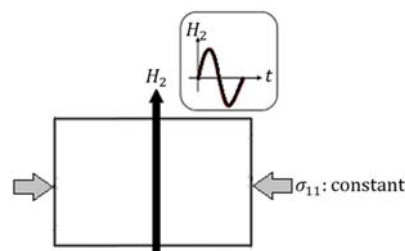


Fig. 5 The magnetic shape memory effect

شکل 5 رفتار حافظه‌داری مغناطیسی

بازیابی شود.

همانگونه که از شکل 7 پیداست مدل پیشنهادی، میدان مغناطیسی لازم برای شروع و اتمام فرایند بازچینی را بهتر از مدل دیگر پیش‌بینی می‌کند. پیش‌بینی بهتر این مدل از نرخ فرایند بازچینی، هیستریزس منحنی‌ها و همچنین پاسخ مغناطیس‌شوندگی (شکل 10)، کماکان در این سطح تنش نیز همانند سطح تنش قبل مشاهده می‌شود.

با توجه به شکل 8، در این حالت هر دو مدل تنش فشاری را بیشتر از تنش مسدودکننده پیش‌بینی می‌کنند، در حالیکه در تست تجربی اندکی کرنش بازچینی مشاهده می‌شود. پاسخ‌های مغناطیس‌شوندگی در راستای سخت مغناطیسی نیز در شکل 11 نشان داده شده‌اند.

#### 4-2- مثال 2: سوپرالاستیسیته به کمک میدان مغناطیسی

یک نمونه تک کریستال  $Ni_2MnGa$  در دمای اتاق را در نظر بگیرید که با اعمال میدان مغناطیسی به اندازه کافی بزرگ در راستای  $e_2$ ، کاملاً از واریانت  $V_2$  تشکیل شده است. سپس این مقدار میدان مغناطیسی تا مقدار نامی مورد نظر کاهش می‌یابد. در این حالت نمونه در راستای  $e_1$  در کشیده‌ترین حالت ممکن قرار دارد. حال همان‌طور که میدان مغناطیسی ثابت نگه داشته می‌شود، تنش فشاری سینوسی در راستای  $e_1$  مطابق شکل 12 اعمال می‌شود.

حال پیکربندی تک واریانته قبل از اعمال تنش فشاری را به عنوان پیکربندی مرجع در نظر گرفته و پیش‌بینی‌های مدل پیشنهادی از کرنش فشاری  $-\varepsilon_{11}$  به ازای سه سطح میدان مغناطیسی 0.0، 0.4 و 1.1 تسلا به ترتیب در شکل‌های 13، 14 و 15 ارائه می‌شود. پیش‌بینی‌های پاسخ مغناطیس‌شوندگی  $M_2$  نیز برای این سه سطح میدان مغناطیسی، در شکل‌های 16، 17 و 18 مشاهده می‌شود. در ضمن به منظور مقایسه، نتایج تجربی هکزکو [22] و شبیه‌سازی‌های لامستر و همکاران [17] نیز آورده شده است.

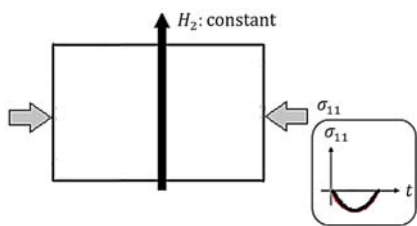


Fig. 12 The magnetic field-assisted super-elasticity

شکل 12 سوپرالاستیسیته به کمک میدان مغناطیسی

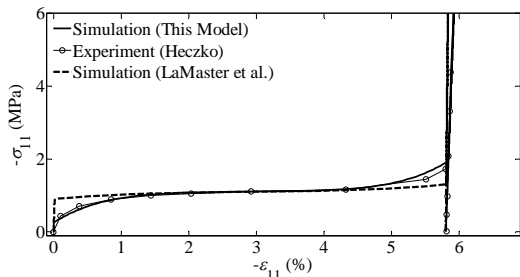


Fig. 13 Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\mu_0 H_2 = 0.0$  Tesla

شکل 13 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\mu_0 H_2 = 0.0$  Tesla

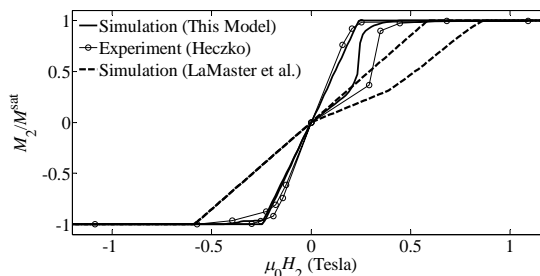


Fig. 9 Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\sigma_{11} = -0.6$  MPa

شکل 9 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\sigma_{11} = -0.6$  MPa

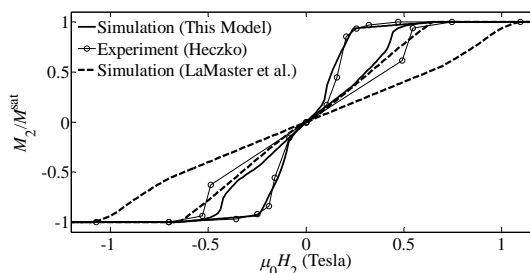


Fig. 10 Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\sigma_{11} = -1.4$  MPa

شکل 10 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\sigma_{11} = -1.4$  MPa

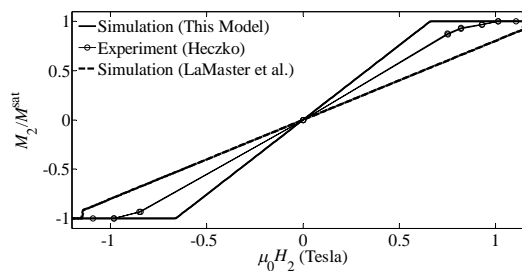


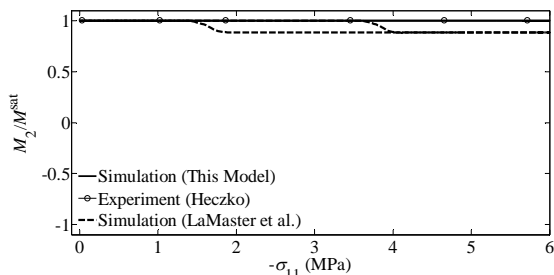
Fig. 11 Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\sigma_{11} = -3.0$  MPa

شکل 11 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\sigma_{11} = -3.0$  MPa

دیگر، فرایند بازچینی معکوس را برای این سطح از تنش پیش‌بینی نمی‌کند، در حالیکه مدل پیشنهادی همانند نتیجه تجربی این سطح از تنش را برای شروع فرایند بازچینی معکوس کافی می‌داند. البته فرایند بازچینی معکوس به صورت کامل انجام نمی‌پذیرد. هیستریزس مشاهده شده در این مدل نیز نسبت به مدل دیگر به هیستریزس منحنی تجربی نزدیک‌تر است. در مورد پاسخ مغناطیس‌شوندگی برای این سطح تنش نیز همانگونه که در شکل 9 مشاهده می‌شود این مدل پاسخ به مراتب نزدیکتری به واقعیت ارائه می‌دهد. شکل 7 پاسخ کرنشی ماده هنگامیکه سطح تنش ثابت از 0.6- به 1.4- افزایش می‌یابد را نشان می‌دهد. با افزایش سطح تنش فشاری انتظار می‌رود:

- 1- میزان میدان مغناطیسی لازم برای شروع فرایند بازچینی کمی افزایش یابد.
- 2- در حالت اشباع مغناطیسی، کرنش کمتری در راستای  $e_1$  به دست آید.
- 3- در فرایند بازچینی معکوس، کسر حجمی بیشتری از واریانت  $V_1$





**Fig. 18** Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\mu_0 H_2 = 1.1$  Tesla

شکل 18 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\mu_0 H_2 = 1.1$  Tesla

مغناطیس‌شوندگی تغییری نمی‌کند. همان‌گونه که از شکل 16 پیداست، هر دو مدل تغییری در مغناطیس‌شوندگی پیش‌بینی نمی‌کنند.

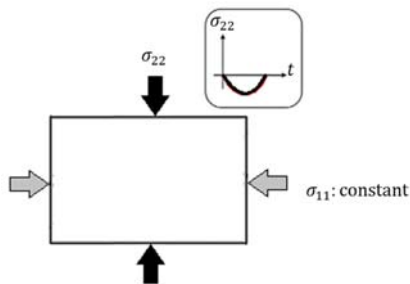
با توجه به شکل 14، پیش‌بینی‌های مدل ارائه شده از تنش لازم برای شروع فرایند بازچینی مارتنزیتی از  $V_2$  به  $V_1$  مطابقت خوبی با نتایج تجربی نشان می‌دهد. علاوه بر این نرخ فرایند بازچینی و همچنین هیستریزس نیز در این مدل نسبت به مدل دیگر به تجربه نزدیکتر است. هر دو مدل همانند نتایج تجربی، بازچینی کامل را در مسیر رفت پیش‌بینی می‌کنند. در مورد پاسخ مغناطیس‌شوندگی نیز همانگونه که در شکل 17 مشاهده می‌شود این مدل پاسخ به مراتب نزدیکتری به واقعیت ارائه می‌دهد.

همانگونه که شکل‌های 15 و 18 نشان می‌دهند، برای این سطح از میدان مغناطیسی، پیش‌بینی هر دو مدل تقریباً نزدیک به هم است و در مقایسه با تجربه، هر دو نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهند. البته در مورد پاسخ مغناطیس‌شوندگی (شکل 18) در مدل لامستر و همکاران مقداری انحراف نسبت به تجربه دیده می‌شود.

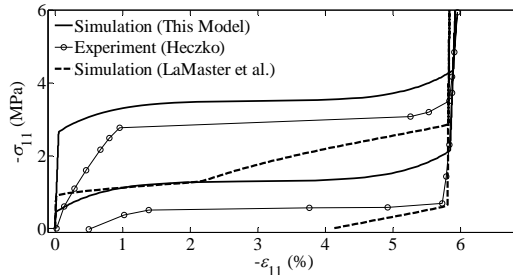
**3-3-4 مثال 3: سوپراالاستیسیته تحت فشار دوجوره**

یک نمونه تک کریستال  $Ni_2MnGa$  در دمای اتاق را در نظر بگیرید که با اعمال تنش فشاری به اندازه کافی بزرگ در راستای  $e_1$ ، کاملاً از واریانت  $V_1$  تشکیل شده است. سپس این مقدار تنش تا مقدار نامی مورد نظر کاهش می‌یابد. در این حالت نمونه در راستای  $e_1$  در فشرده‌ترین حالت ممکن قرار دارد. حال همان‌طور که تنش فشاری  $-\sigma_{11}$  ثابت نگه داشته می‌شود، تنش فشاری سینوسی در راستای  $e_2$  مطابق شکل 19 اعمال می‌شود.

حال پیکربندی تک واریانته قبل از اعمال تنش فشاری  $-\sigma_{22}$  را به عنوان پیکربندی مرجع در نظر گرفته و پیش‌بینی‌های مدل پیشنهادی از کرنش فشاری  $-\varepsilon_{22}$  به ازای سه سطح تنش  $-1.0$ ،  $-6.5$  و  $-9.0$  مگاپاسکال به ترتیب در شکل‌های 20 تا 22 ارائه می‌شود. در ضمن به منظور مقایسه، نتایج

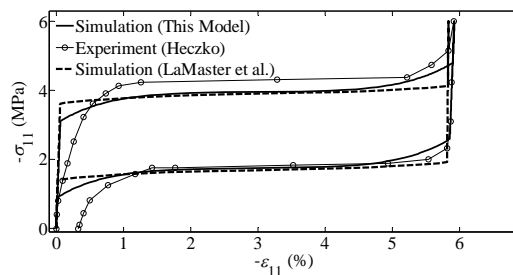


**Fig. 19** The super-elasticity under biaxial compressions  
شکل 19 سوپراالاستیسیته تحت فشار دوجوره



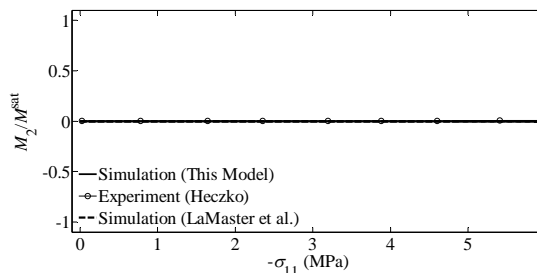
**Fig. 14** Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\mu_0 H_2 = 0.4$  Tesla

شکل 14 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\mu_0 H_2 = 0.4$  Tesla



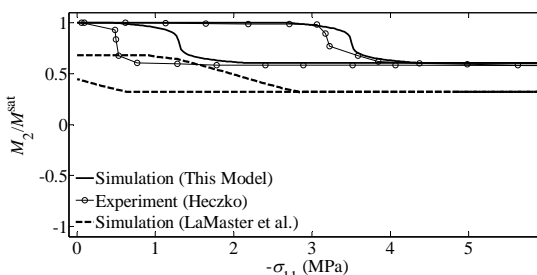
**Fig. 15** Comparison between simulations and experiment: strain response for  $\mu_0 H_2 = 1.1$  Tesla

شکل 15 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\mu_0 H_2 = 1.1$  Tesla



**Fig. 16** Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\mu_0 H_2 = 0.0$  Tesla

شکل 16 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\mu_0 H_2 = 0.0$  Tesla



**Fig. 17** Comparison between simulations and experiment: magnetization response for  $\mu_0 H_2 = 0.4$  Tesla

شکل 17 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ مغناطیس‌شوندگی به ازای  $\mu_0 H_2 = 0.4$  Tesla

منحنی نشان داده شده در شکل 13، نتیجه شبیه‌سازی برای پاسخ کرنشی است که قبلاً از آن برای تعیین برخی از پارامترهای مادی (شکل 4) استفاده شده است. این پیش‌بینی مطابقت خوبی با نتایج تجربی از خود نشان می‌دهد. در این حالت بارگذاری از آنجا که میدان مغناطیسی اعمال نمی‌شود، پاسخ

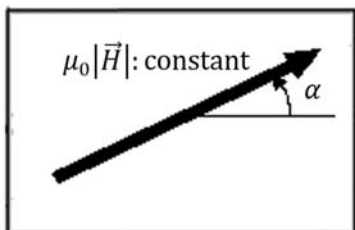
تغییر کرنش پیش‌بینی شده توسط این مدل نزدیک به نرخ تغییر کرنش تجربی است. مدل ارائه شده دقت قابل قبولی در پیش‌بینی میزان تنش فشاری لازم برای شروع و همچنین اتمام فرایند بازچینی مارتنزیتی مستقیم و معکوس دارد. و البته مهمتر از همه اینها، باید اظهار داشت این مدل، کم شدن بیشینه کرنش قابل دسترس به ازای افزایش سطح تنش فشاری ثابت را با دقت خوبی پیش‌بینی می‌کند. این در حالیست که مدل دیگر برای این دو سطح تنش فشاری ثابت، در همه موارد گفته شده دقت خود را از دست می‌دهد.

**4-4- مثال 4: یک بارگذاری دوبعدی دلخواه**

یک نمونه تک کریستال Ni<sub>2</sub>MnGa در دمای اتاق در نظر گرفته می‌شود که با اعمال میدان مغناطیسی به اندازه کافی بزرگ در راستای  $e_1$ ، کاملاً از واریانت  $V_1$  تشکیل شده است. سپس این مقدار میدان مغناطیسی تا مقدار نامی مورد نظر کاهش می‌یابد. در این حالت نمونه در راستای  $e_2$  در کشیده‌ترین حالت ممکن قرار دارد. حال همان‌طور که اندازه میدان مغناطیسی ثابت نگه داشته می‌شود، مطابق شکل 23 حول محور  $e_3$  پادساعتگرد چرخانده می‌شود.

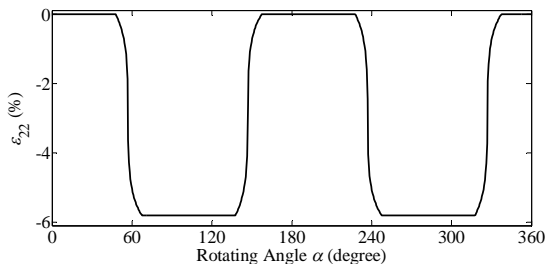
حال پیکربندی تک واریانته قبل از چرخش میدان مغناطیسی را به عنوان پیکربندی مرجع در نظر گرفته و پیش‌بینی مدل پیشنهادی از کرنش  $\epsilon_{22}$  به ازای میدان مغناطیسی به بزرگی 2.0 تسلا در شکل 24 ارائه می‌شود.

پاسخ پیش‌بینی شده در شکل 24، منطقی به نظر می‌رسد. در طی نیم سیکل اول ( $\alpha: 0^\circ \rightarrow 180^\circ$ )، با رسیدن به  $\alpha \approx 45^\circ$ ، بازچینی مارتنزیتی از واریانت  $V_1$  به واریانت  $V_2$  آغاز می‌شود. با شروع فرایند بازچینی، کرنش به سرعت تا کمترین مقدار ممکن خود کاهش می‌یابد. فرایند بازچینی معکوس نیز در نیم سیکل اول، از  $\alpha \approx 135^\circ$  شروع شده و در  $\alpha \approx 180^\circ$  کامل می‌شود. رفتار ماده در نیم سیکل دوم عیناً شبیه نیم سیکل اول پیش‌بینی می‌شود.



**Fig. 23** Martensite variant reorientation induced by a rotating magnetic field

شکل 23 بازچینی مارتنزیتی توسط میدان مغناطیسی چرخشی



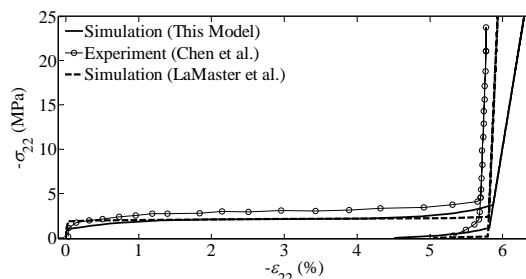
**Fig. 24** the proposed model prediction of strain response for  $\mu_0 |\vec{H}| = 2.0$  Tesla

شکل 24 پیش‌بینی مدل پیشنهادی از پاسخ کرنشی به ازای  $\mu_0 |\vec{H}| = 2.0$  Tesla

تجربی چن و همکاران [16] و شبیه‌سازی‌های لامستر و همکاران [17] نیز آورده شده است.

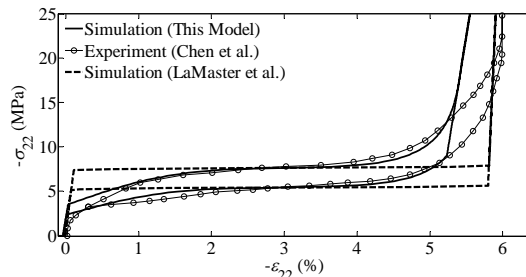
لازم به ذکر است از آنجا که ماده استفاده شده در این تست‌های تجربی، همان ماده مورد استفاده در هکزکو [22] می‌باشد، برای شبیه‌سازی‌های این حالت بارگذاری نیز از همان پارامترهای مادی جدول 1 استفاده شده است. با توجه به شکل 20، برای این سطح از تنش فشاری ثابت  $(\sigma_{11} = -1.0 \text{ MPa})$ ، هر دو مدل تقریباً پیش‌بینی یکسانی از رفتار غیرالاستیک دارند. اما همان‌طور که مشاهده می‌شود، شیب ناحیه الاستیک در مدل لامستر به تست تجربی نزدیک‌تر است. این بدین خاطر است که در مدل لامستر و همکاران [17] رفتار الاستیک فاز مارتنزیت اورتوتروپیک فرض شده؛ اما در مدل پیشنهادی همسانگرد در نظر گرفته شده است. مدل ارائه شده فرایند بازچینی معکوس را نسبتاً بهتر پیش‌بینی می‌کند.

با توجه به شکل‌های 21 و 22، با افزایش بیشتر سطح تنش فشاری ثابت، عملکرد بهتر این مدل در پیش‌بینی این حالت بارگذاری بیشتر مشاهده می‌شود. تقریباً در تمام مدتی که بازچینی مارتنزیتی در حال انجام است، نرخ



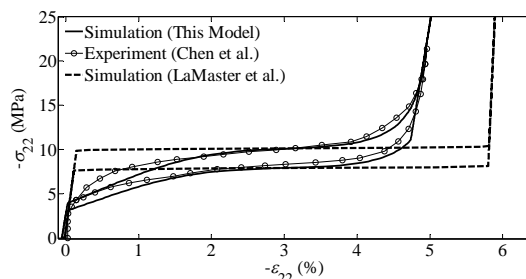
**Fig. 20** comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -1.0 \text{ MPa}$

شکل 20 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -1.0 \text{ MPa}$



**Fig. 21** comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -6.5 \text{ MPa}$

شکل 21 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -6.5 \text{ MPa}$



**Fig. 22** comparison between simulations and experiment: strain response for  $\sigma_{11} = -9.0 \text{ MPa}$

شکل 22 مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها و داده‌های تجربی: پاسخ کرنشی به ازای  $\sigma_{11} = -9.0 \text{ MPa}$

## 5- نتیجه گیری

## 6- مراجع

- [1] K. Ullakko, J. Huang, C. Kantner, R. O'handley, V. Kokorin, Large magnetic-field-induced strains in  $Ni_2MnGa$  single crystals, *Applied Physics Letters*, Vol. 69, No. 13, pp. 1966-1968, 1996.
- [2] A. Sozinov, N. Lanska, A. Soroka, W. Zou, 12% magnetic field-induced strain in Ni-Mn-Ga-based non-modulated martensite, *Applied Physics Letters*, Vol. 102, No. 2, pp. 021902, 2013.
- [3] R. Kellogg, A. B. Flatau, A. Clark, M. Wun-Fogle, T. A. Lograsso, Temperature and stress dependencies of the magnetic and magnetostrictive properties of  $Fe_{0.81}Ga_{0.19}$ , *Journal of applied physics*, Vol. 91, No. 10, pp. 7821-7823, 2002.
- [4] I. Chopra, Review of state of art of smart structures and integrated systems, *AAAA journal*, Vol. 40, No. 11, pp. 2145-2187, 2002.
- [5] J. Tellinen, I. Suorsa, A. Jaaskelainen, I. Aaltio, K. Ullakko, Basic properties of magnetic shape memory actuators, *Proceeding of The 8th international conference ACTUATOR*, June 10-12, 2002.
- [6] K. Schlüter, B. Holz, A. Raatz, Principle design of actuators driven by magnetic shape memory alloys, *Advanced Engineering Materials*, Vol. 14, No. 8, pp. 682-686, 2012.
- [7] E. Faran, D. Shilo, Ferromagnetic Shape Memory Alloys-Challenges, Applications, and Experimental Characterization, *Experimental Techniques*, Vol. 40, pp. 1005-1031, 2015.
- [8] B. Kiefer, H. Karaca, D. Lagoudas, I. Karaman, Characterization and modeling of the magnetic field-induced strain and work output in  $Ni_2MnGa$  magnetic shape memory alloys, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 312, No. 1, pp. 164-175, 2007.
- [9] R. D. James, M. Wuttig, Magnetostriction of martensite, *Philosophical Magazine A*, Vol. 77, No. 5, pp. 1273-1299, 1998.
- [10] R. C. O'Handley, Model for strain and magnetization in magnetic shape-memory alloys, *Journal of Applied Physics*, Vol. 83, No. 6, pp. 3263-3270, 1998.
- [11] A. Likhachev, K. Ullakko, Magnetic-field-controlled twin boundaries motion and giant magneto-mechanical effects in Ni-Mn-Ga shape memory alloy, *Physics Letters A*, Vol. 275, No. 1, pp. 142-151, 2000.
- [12] L. Straka, O. Heczko, Superelastic response of Ni-Mn-Ga martensite in magnetic fields and a simple model, *Magnetics, IEEE Transactions on*, Vol. 39, No. 5, pp. 3402-3404, 2003.
- [13] L. Hirsinger, C. LExcellent, Modelling detwinning of martensite platelets under magnetic and (or) stress actions on Ni-Mn-Ga alloys, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 254, pp. 275-277, 2003.
- [14] B. Kiefer, D. C. Lagoudas, Phenomenological modeling of ferromagnetic shape memory alloys, *Proceeding of Smart Structures and Materials: Active Materials: Behavior and Mechanics*, July 21, 2004.
- [15] A. B. Waldauer, H. P. Feigenbaum, C. Ciocanel, N. M. Bruno, Improved thermodynamic model for magnetic shape memory alloys, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 9, pp. 094015, 2012.
- [16] X. Chen, Z. Moumni, Y. He, W. Zhang, A three-dimensional model of magneto-mechanical behaviors of martensite reorientation in ferromagnetic shape memory alloys, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 64, pp. 249-286, 2014.
- [17] D. H. LaMaster, H. P. Feigenbaum, I. D. Nelson, C. Ciocanel, A Full Two-Dimensional Thermodynamic-Based Model for Magnetic Shape Memory Alloys, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 6, pp. 061003, 2014.
- [18] M. Shirani, M. Kadkhodaei, Constitutive modeling of Ni-Mn-Ga ferromagnetic shape memory alloys under biaxial compression, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 27, No. 11, pp. 1547-1564, 2015.
- [19] B. D. Cullity, C. D. Graham, *Introduction to magnetic materials*, Second Edition, pp. 241-265, New York: Wiley, 2011.
- [20] D. Lagoudas, *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*, pp. 325-376, Berlin: Springer, 2008.
- [21] R. C. O'Handley, S. Murray, M. Marioni, H. Nembach, S. Allen, Phenomenology of giant magnetic-field-induced strain in ferromagnetic shape-memory materials, *Journal of Applied Physics*, Vol. 87, No. 9, pp. 4712-4717, 2000.
- [22] O. Heczko, Magnetic shape memory effect and magnetization reversal, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 290, pp. 787-794, 2005.

در این پژوهش، یک مدل ساختاری دوبعدی بر اساس ترمودینامیک فرایندهای بازگشت‌ناپذیر به منظور پیش‌بینی رفتار آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی تحت بارگذاری‌های مغناطیسی-مکانیکی دلخواه ارائه شد. رفتار ماکروسکوپی آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی متأثر از سه مکانیزم حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی، چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی و بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی می‌باشد. در این مدل به منظور در نظر گرفتن هر سه این مکانیزم‌ها، برای هر یک از آنها، متغیرهای داخلی مناسبی معرفی شده است. در ضمن در مدل پیشنهادی، نیروی محرک بحرانی برای شروع بازچینی مارتنزیتی، وابسته به تنش در نظر گرفته شده است که موجب پیش‌بینی‌های دقیق‌تر در بارگذاری‌های چندمحوره می‌شود. در مدل پیشنهادی، دو کسر حجمی دامنه مغناطیسی به عنوان متغیر داخلی در نظر گرفته شده است که رشد آنها، مکانیزم حرکت دیواره دامنه‌های مغناطیسی را در دو واریانت مارتنزیتی منعکس می‌کند. به منظور یافتن کسرهای حجمی دامنه‌های مغناطیسی از معادلات سینتیکی پیش فرض شده‌ای استفاده شده است که تنها تابعی از میدان مغناطیسی اعمالی است. این فرض در عین‌نگه داشتن دقت مناسب، هزینه‌های محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد. به منظور در نظر گرفتن مکانیزم چرخش بردارهای مغناطیس‌شوندگی نیز از چهار بردار یکه مغناطیس‌شوندگی استفاده شده است که تغییر در جهت آنها نشان‌دهنده مکانیزم چرخش بردارها است. معادلات حاکم بر این چهار بردار یکه از یک روش سازگار ترمودینامیکی به دست می‌آیند که خوشبختانه همگی از یکدیگر مستقل بوده و تنها تابعی از میدان مغناطیسی خارجی می‌باشند. مستقل بودن این معادلات از یکدیگر و وابسته نبودن رشد این بردارهای یکه به رشد دیگر متغیرهای داخلی، منجر به کاهش هزینه‌های محاسباتی و افزایش بازده مدل می‌شوند. در نهایت دو کسر حجمی برای دو واریانت مارتنزیتی نیز در نظر گرفته شده است که رشد آنها مکانیزم بازچینی واریانت‌های مارتنزیتی را منعکس می‌کند.

به منظور اعتبارسنجی مدل، پیش‌بینی مدل در سه بارگذاری دوبعدی کاربردی و مهم شامل: رفتار حافظه‌داری مغناطیسی، سوپرالاستیسیته به کمک میدان مغناطیسی و سوپرالاستیسیته تحت فشار دوماحوره، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده با داده‌های تجربی و همچنین با مدل دوبعدی لامستر و همکاران مقایسه شد. مدل پیشنهادی، همخوانی خوبی با نتایج تجربی از خود نشان می‌دهد. علاوه بر دقت قابل قبول، مدل پیشنهادی فرمول‌بندی نسبتاً ساده‌تر و در نتیجه هزینه‌های محاسباتی کمتری دارد که آن را برای تحلیل سازه‌های هوشمند بر پایه آلیاژهای حافظه‌دار مغناطیسی مناسب می‌سازد.

مهم‌ترین نوآوری‌ها و ویژگی‌های مدل پیشنهادی در مقایسه با سایر مدل‌های دوبعدی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- در نظر گرفتن هر سه واریانت و هر سه مکانیزم ریزساختاری با استفاده از تعریف متغیرهای داخلی مناسب.
- وابسته به تنش در نظر گرفتن نیروی محرک بحرانی برای شروع بازچینی مارتنزیتی که دقت مدل در بارگذاری‌های چندمحوره را افزایش می‌دهد.
- استفاده از معادلات سینتیکی پیش فرض شده مناسب برای کسرهای حجمی دامنه مغناطیسی که ضمن حفظ دقت، هزینه‌های محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد.
- مستقل از یکدیگر بودن معادلات حاکم بر بردارهای یکه مغناطیس‌شوندگی.