



## ردیابی مسیر به وسیله هواپیمای عمودپرواز در حضور نایقینی و اغتشاش

میثم کبیری<sup>1</sup>، محمدباقر منهاج<sup>2\*</sup>، هاجر عطریانفر<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)، تهران

2- استاد، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)، تهران

3- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)، تهران

\* صندوق پستی 159163-4311، menhaj@aut.ac.ir، تهران

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 اردیبهشت 1396

پذیرش: 21 تیر 1396

ارائه در سایت: 17 مرداد 1396

کلید واژگان:

هواپیمای عمودپرواز

نایقینی

اغتشاش

ردیابی مسیر

### چکیده

در این نگاهت نامه کنترل ردیابی برای هواپیمای عمود پرواز مورد بررسی قرار گرفته است. هدف کنترلی، ردیابی یک مسیر سه بعدی از پیش تعیین شده توسط هواپیما در حضور اغتشاش‌های ثابت و نایقینی در ماتریس اینرسی است. با تکیه بر الگوریتم استخراج، کنترل دینامیک انتقالی و چرخشی از یکدیگر جدا می‌شوند. ابتدا یک کنترل کننده مجازی برای دینامیک انتقالی طراحی می‌گردد که جهت تراست مطلوب از روی آن استخراج می‌گردد. برای فائق آمدن بر زیر- تحریک بودن دینامیک انتقالی، در طراحی کنترل کننده مجازی از پیاده‌سازی یک سیستم کمکی و یک تخمین گر برای خنثی کردن اثر اغتشاش دینامیک انتقالی استفاده شده است. همچنین برای کران دار نگاه داشتن تخمین انجام گرفته از عملگر تصویر هموار بهره گرفته شده است. برای کنترل دینامیک چرخشی به طوری که جهت تراست مطلوب به دست آمده محقق گردد، از کنترل تطبیقی مد لغزنده استفاده شده است. از آنجایی که مقدار ماتریس اینرسی و کران اغتشاش دینامیک چرخشی معلوم نیست از ساختار تطبیقی در طراحی بهره گرفته شده تا به وسیله آن کران‌های نامعلوم تخمین زده شود. پایداری کنترل کننده ارائه شده با استفاده از تحلیل پایداری لیاپانوف اثبات شده است. در پایان نتایج شبیه‌سازی برای نشان دادن کارایی کنترل کننده معرفی شده در مقاله ارائه گردیده است.

## Trajectory tracking of a VTOL aircraft with uncertainty and disturbances

Meisam Kabiri, Mohammad Bagher Menhaj\*, Hajar Atrianfar

Electrical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 159163-4311, Tehran, Iran, menhaj@aut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 27 April 2017

Accepted 12 July 2017

Available Online 08 August 2017

#### Keywords:

VTOL UAV

Uncertainty

Disturbance

Trajectory tracking

### ABSTRACT

This paper addresses the trajectory tracking of a Vertical Take-Off and Landing (VTOL) aircraft. Our objective is to design a controller for a VTOL aircraft in such a way that the aircraft tracks a predefined 3d spatial path in the presence of constant disturbances and uncertainty in the inertial matrix. Taking advantage of the extraction algorithm, we separate the design for the translational and rotational dynamics. First, a virtual controller is designed for the translational dynamics from which the ideal thrust direction is extracted. To deal with the under-actuation of the translational dynamics, we have exploited an auxiliary system while an estimator is also involved in the design of the virtual controller to compensate for the effect of the translational disturbance. In order to keep our estimation bounded, we utilize the projection operator which is also smooth enough. An adaptive sliding mode control is used for rotational dynamics control such that the ideal thrust is accomplished. Since the inertial matrix and the bound on rotational disturbance are unknown, an adaptive structure is used to estimate the unknown bounds. The stability of the control framework is established through Lyapunov analysis. Finally, simulation results are given to test the validity of the proposed control scheme.

### 1- مقدمه

تحریک<sup>1</sup> بودن آن‌هاست، یعنی تعداد ورودی‌های کنترلی کمتر از تعداد درجات آزادی سیستم است. دینامیک هواپیماهای عمودپرواز را می‌توان به دو بخش تقسیم نمود. دینامیک انتقالی<sup>2</sup> که زیر-تحریک بوده و به ازای سه درجه آزادی در فضای سه بعدی تنها دارای یک ورودی کنترلی اسکالر به نام تراست<sup>3</sup> است که هواپیما را در جهت عمود بر چارچوب<sup>4</sup> بدنه شتاب می‌دهد، و دینامیک چرخشی<sup>5</sup> که تمام-تحریک<sup>1</sup> بوده و به ازای سه درجه آزادی دارای

هواپیماهای عمودپرواز به دلیل کاربردهای گسترده و متنوعی که دارند موضوع بسیاری از مطالعات و پژوهش‌ها قرار گرفته‌اند [1]. این هواپیماها به دلیل قابلیت ثابت ماندن در یک نقطه در هوا و قدرت مانور بالا در فضاهای محدود، در حوزه‌های کاربردی وسیعی که حضور انسان مشکل یا خطرناک است کاربرد دارند. از انواع مهم آن می‌توان به هواپیماهای عمودپرواز داکت‌فن [2] و کوادروتور [3] اشاره کرد.

به کارگیری موثر هواپیماها در کاربردهای عملی درگرو کنترل مناسب این سیستم‌هاست. اما چالش اصلی در کنترل هواپیماهای عمودپرواز زیر-

<sup>1</sup> Under-actuated

<sup>2</sup> Translational dynamics

<sup>3</sup> Thrust

<sup>4</sup> frame

<sup>5</sup> Rotational dynamics

### Please cite this article using:

M. Kabiri, M. B. Menhaj, H. Atrianfar, Trajectory tracking of a VTOL aircraft with uncertainty and disturbances, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 68-74, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ورودی گشتاور سه مؤلفه‌ای است.

در زمینه کنترل جهت این سیستم‌ها کارهای مختلفی انجام گرفته است [4]، درحالی‌که چالش اصلی این سیستم‌ها در کنترل موقعیت نهفته است. روش‌های مختلفی برای کنترل موقعیت سیستم‌های تحت مطالعه ارائه شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در مرجع [5] پایداری پرنده عمودپرواز حول یک موقعیت ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [6] پایداری هواپیمای عمودپرواز داکت‌فن حول یک نقطه ثابت در حضور باد مخالف با استفاده از طراحی کنترلی پسگام<sup>۱</sup> بررسی شده است. در مراجع [7] و [8] با استفاده از الگوریتم استخراج، ردیابی یک مسیر سه‌بعدی در فضا برای هواپیمای عمودپرواز بررسی شده که در مرجع اول با فرض در دسترس نبودن سرعت هواپیما و در مرجع دوم با فرض وجود دو اغتشاش ثابت در دینامیک‌های چرخشی و انتقالی این طراحی انجام گرفته است. در مرجع [9] با استفاده از روشی مشابه به کنترل این سیستم‌ها پرداخته شده با این تفاوت که به‌جای استفاده از جهت در تنظیم تراست، از سرعت زاویه‌ای استفاده شده است. در مرجع [10] با استفاده از روش کنترل پسگام، کنترل‌کننده‌ای به‌منظور ردیابی موقعیت توسط یک کوادروتور در حضور اغتشاش‌های ثابت طراحی گردیده است. در مرجع [11]، با استفاده از کنترل هابیرید، ردیابی موقعیت و جهت این سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفته است، درحالی‌که تنها وجود اغتشاش ثابت در دینامیک انتقالی در نظر گرفته شده است. همچنین لازم به ذکر است که در اکثر کارهای انجام گرفته بر روی سیستم‌های مورد مطالعه نظیر [12] و [13]، در مدل‌سازی سیستم از زویه‌های اوپلر استفاده شده است و کارهای کمتری در رابطه با این سیستم‌ها در مدل‌سازی مبتنی بر کوآرتونیون واحد وجود دارد. این در حالی است که در مدل‌سازی بر پایه زویه‌های اوپلر در زویه برابر  $\pm\pi/2$  در روابط تکینگی به وجود می‌آید. استفاده از کوآرتونیون واحد از بروز تکینگی در روابط جلوگیری می‌کند چرا که این روش فاقد تکینگی است.

از جمله مسائلی که از نقطه‌نظر عملی دارای اهمیت هستند می‌توان از ناپیچینی در پارامترهای سیستم (ماتریس اینرسی) و اغتشاش نام برد. همان‌طور که می‌دانیم به‌دست آوردن دینامیک دقیق سیستم، امکان‌پذیر نیست و همچنین همواره محیط‌ها ایده‌آل نبوده و دارای سیگنال‌های ناخواسته‌ای نظیر وزش باد هستند. با این وجود از بین منابع ذکر شده هیچ یک اثر اغتشاش و ناپیچینی را به‌طور هم‌زمان برای این دینامیک‌ها در نظر نگرفته‌اند.

هدف این نگاشت نامه طراحی کنترل‌کننده ردیاب است به‌طوری‌که هواپیمای عمود پرواز یک سیگنال مرجع از پیش تعیین شده را دنبال نماید. همچنین در طراحی اثر اغتشاش و نامعلوم بودن ماتریس اینرسی نیز در نظر گرفته شده است. برای فایق آمدن به مشکل زیر-تحریک بودن دینامیک انتقالی از روش دو مرحله‌ای الگوریتم استخراج سود می‌جوییم که توسط آن کنترل دینامیک انتقالی و چرخشی جدا می‌گردد. سپس با استفاده از کنترل پسگام و کنترل تطبیقی، کنترل‌کننده‌ای مجازی برای دینامیک انتقالی طراحی می‌کنیم که با استفاده از آن تراست ورودی دینامیک انتقالی و جهت مرجع برای دینامیک چرخشی به دست می‌آید. مقدار اغتشاش نیز توسط یک تخمین‌گر هموار و از پیش کران‌دار تخمین زده می‌شود که به این منظور از کنترل تطبیقی و عملگر تصویر در طراحی تخمین‌گر استفاده می‌شود. در گام بعد کنترل‌کننده‌ای مبتنی بر کنترل سطح لغزنده تطبیقی برای دینامیک

چرخشی طراحی می‌گردد به‌طوری‌که جهت مرجع به‌دست آمده در مرحله قبل توسط سیستم دنبال شود. کارهای انجام گرفته در این نگاشت نامه را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- با ارائه روشی ترکیبی (ترکیبی از پیاده‌سازی سیستم کمکی، کنترل تطبیقی و عملگر تصویر) کنترل‌کننده‌ای برای دینامیک انتقالی طراحی گردیده است به‌طوری‌که به‌طور مؤثری بر اغتشاش غلبه کند.
- در طراحی ورودی گشتاور از کنترل مد لغزنده بدون استفاده از مقدار ماتریس اینرسی (که مقدار آن نامعلوم است) طراحی طوری انجام گرفته که نه تنها بر اثر این ناپیچینی غلبه گردد بلکه اثر اغتشاش و مقدار نامعلوم مشتق دوم سیگنال مرجع برای دینامیک چرخشی نیز خنثی شود.
- از آن‌جایی که فرض بر این است که کران اغتشاش دینامیک چرخشی معلوم نیست در طراحی کنترل مد لغزنده مبادرت به پیاده‌سازی یک بهره تطبیقی گردیده است به طوری که کران نامعلوم اغتشاش تخمین زده شود.

## 2- دینامیک پرنده عمود پرواز

برای به‌دست آوردن معادلات دینامیکی سیستم ابتدا دو چارچوب تعریف می‌گردد. چارچوب زمین<sup>۳</sup> و چارچوب بدنه-ثابت<sup>۴</sup>. چارچوب زمین با پایه‌های متعامد  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  به‌طور ثابت بر روی یک نقطه روی زمین مسطح تعریف می‌شود که جهت بردار  $\hat{x}$  به سمت شمال، بردار  $\hat{y}$  به سمت شرق و بردار  $\hat{z}$  به سمت مرکز زمین است. چارچوبی که منطبق بر مرکز جرم جسم صلب است، نیز چارچوب بدنه-ثابت نامیده می‌شود. با توجه به دو چارچوب تعریف شده، دینامیک حرکتی پرنده‌های عمود پرواز از طریق رابطه (1) بیان می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{p} = v \\ \dot{v} = g\hat{z} - \frac{T}{m}R(q)^T\hat{z} + w \\ \dot{q} = \left( \eta I_3 + q^\times \right) \omega \\ J\dot{\omega} = \tau - \omega^\times J\omega + d \end{cases} \quad \begin{matrix} (1-f) \\ (1-b) \end{matrix}$$

که در آن  $p \in \mathbb{R}^3$  و  $v \in \mathbb{R}^3$  به ترتیب بردارهای موقعیت و سرعت خطی در چارچوب زمین هستند.  $\hat{z} = (0, 0, 1)^T$  و  $m$  جرم هواپیما،  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ماتریس مثبت معین اینرسی در چارچوب بدنه-ثابت،  $T \in \mathbb{R}$  تراست،  $\omega \in \mathbb{R}^3$ ، سرعت زاویه‌ای در چارچوب بدنه-ثابت و  $\tau \in \mathbb{R}^3$  ورودی گشتاور سه مؤلفه‌ای است.  $w \in \mathbb{R}^3$  و  $d \in \mathbb{R}^3$  اغتشاش‌های ثابت دینامیک انتقالی و چرخشی هستند. برای نمایش جهت هواپیما نیز از بردار 3 تایی کوآرتونیون واحد  $q = (q, \eta)^T$  استفاده شده است، که مشکل از قسمت برداری  $q \in \mathbb{R}^3$  و قسمت اسکالر  $\eta \in \mathbb{R}$  است. همچنین در کوآرتونیون واحد همواره شرط  $q^T q + \eta^2 = 1$  برقرار است. معکوس کوآرتونیون واحد به‌صورت  $q^{-1} = (-q, \eta)^T$  به دست می‌آید. ضرب کوآرتونیونی به‌صورت

$$q_i \odot q_j = \left( (q^T \eta_j + q_j \eta + q^\times q_j)^T, \eta_j - q^T q_j \right)^T$$

تعریف می‌گردد، که حاصل خود یک کوآرتونیون واحد است. ماتریس چرخش  $R(q)$  چارچوب زمین را به چارچوب بدنه-ثابت انتقال می‌دهد و از رابطه  $x^\times = R(q) = (\eta^2 - q^T q)I_3 + 2qq^T - 2\eta q^\times$  به‌دست می‌آید که در آن  $(0, -x_3, x_2, x_3, 0, -x_1, -x_2, x_1, 0)$  است.

<sup>3</sup> Inertial frame  
<sup>4</sup> Body-fixed frame

<sup>1</sup> Fully-actuated  
<sup>2</sup> Back-stepping

ورودی به دینامیک انتقالی وجود ندارد. اما با توجه به این که این ورودی تابعی از ورودی اسکالر  $T$  و جهت مطلوب  $q_d$  است می‌توان این معادله را حل کرد و مقدار تراست موردنیاز و جهت مطلوبی که باعث تحقق ورودی کنترل مجازی (صفر شدن خطای زیر-تحریک) می‌گردد را محاسبه کرد، که این روابط تحت نام الگوریتم استخراج است در ادامه توضیح داده می‌شوند.

با فرض  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  که در (11) آمده، تراست  $T$  و جهت مناسب  $q_d = (q_d, \eta_d)^T$  از روابط (13) و (14) محاسبه می‌گردند [15].

$$T = m\|\mu - g\hat{z}\|, \quad (13)$$

$$\eta_d = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{g - \mu_3}{2\|\mu - g\hat{z}\|}}, \quad q_d = \frac{1}{2\|\mu - g\hat{z}\|\eta_d} \mu_2 \quad (14)$$

همچنین سرعت زاویه‌ای مطلوب و مشتق آن نیز از رابطه‌های (15) و (16) به دست می‌آیند [15].

$$\omega_d = \Xi(\mu)\dot{\mu}, \quad (15)$$

$$\dot{\omega}_d = \dot{\Xi}(\mu, \dot{\mu})\dot{\mu} + \Xi(\mu)\ddot{\mu}, \quad (16)$$

$$\Xi(\mu) = \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2} \begin{pmatrix} -\mu_1 \mu_2 & -\mu_2^2 + \gamma_1 \gamma_2 & -\mu_2 \gamma_2 \\ \mu_1^2 - \gamma_1 \gamma_2 & \mu_1 \mu_2 & -\mu_1 \gamma_2 \\ \mu_2 \gamma_1 & -\mu_1 \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

و  $\gamma_1 = \frac{T}{m}$ ،  $\gamma_2 = \gamma_1 + (g - \mu_3)$ ، مشتق  $\Xi(\mu)$  است. بنابراین پس از طراحی کنترل‌کننده مجازی  $\mu$ ، از روی آن تراست  $T$  به دست می‌آید که به‌طور مستقیم به‌عنوان ورودی به دینامیک انتقالی اعمال می‌گردد و همچنین جهت مطلوب  $q_d$  محاسبه می‌گردد که به‌عنوان سیگنال مرجع برای دینامیک چرخشی باید ردیابی گردد. اما در استفاده از این روش نکات و چالش‌هایی وجود دارد که باید به آن‌ها توجه گردد و در طراحی ورودی کنترل مجازی منظور شود.

1) همان‌طور که از رابطه (6) پیداست به ازای  $\mu = g\hat{z}$  در روابط استخراج تکنیکی<sup>1</sup> به‌وجود می‌آید. بنابراین ورودی کنترلی مجازی باید طوری طراحی گردد که تحت هیچ شرایطی باعث بروز تکنیکی در روابط نگردد. به این منظور ما با استفاده از تابع کران‌دار  $(\tanh)$ ،  $\mu$  را طوری طراحی می‌کنیم که همواره مقدار تمام عناصر آن کوچک‌تر از  $g$  باشد. این شرط کافی برای عدم بروز تکنیکی را تضمین می‌کند.

2) به‌دلیل این که  $q_d$  به‌عنوان رفرنس مرجع برای دینامیک چرخشی استفاده می‌گردد، پس باید مشتق اول و دوم آن نیز وجود داشته باشد. همچنین مشتق اول آن نیز باید در دسترس باشد به این معنی که تنها متشکل از سیگنال‌های قابل اندازه‌گیری مانند موقعیت و سرعت باشد. لازم به ذکر است که در طراحی به مشتق دوم  $q_d$  نیز احتیاج است اما با استفاده از کنترل سطح لغزنده تطبیقی این نیاز برطرف خواهد گردید. از طرف دیگر از رابطه (14) مشاهده می‌کنیم که  $q_d$  تابعی از  $\mu$  است. پس گفته‌های فوق معادل این است که ورودی کنترل مجازی طراحی شده حداقل دو بار مشتق‌پذیر باشد و مشتق اول آن برای استفاده به‌عنوان بازخورد<sup>2</sup> در دست باشد.

در ادامه کنترل‌کننده را در قالب دو بخش طراحی کنترل‌کننده مجازی و طراحی گشتاور برای دینامیک چرخشی ارائه می‌کنیم.

#### 4- طراحی کنترل‌کننده مجازی

هدف طراحی کنترل‌کننده‌های  $T$  و  $\tau$  است به‌طوری‌که سیگنال موقعیت مرجع  $p_d(t)$  توسط هواپیما ردیابی گردد.

فرضیه 1. تمام حالت‌های سیستم (موقعیت، سرعت خطی، جهت و سرعت زاویه‌ای) در دسترس هستند.

فرضیه 2. مشتق سیگنال مرجع تا مرتبه 4 وجود دارد و کران‌دار است.

فرضیه 3. اغتشاش دینامیک انتقالی کران‌دار است و  $\sup_{t>0} \|w(t)\| < \bar{w}$  و  $\sup_{t>0} \|\ddot{p}_d(t)\| + \bar{w} < g$ .

فرضیه 4. اغتشاش دینامیک چرخشی و ماتریس اینرسی کران‌دار هستند به طوری که  $\|J\| \leq \bar{J}$  و  $\sup_{t>0} \|d(t)\| < \varphi$  که  $\bar{J}$  معلوم و  $\varphi$  نامعلوم است.

لم 1. [14] قانون تطبیقی (2) را در نظر بگیرید.

$$\dot{\hat{w}} = \gamma_w \text{proj}(Y, \hat{w}) = \gamma_w (Y - \kappa \omega_1 \omega_2 \hat{w}), \quad \gamma_w > 0 \quad (2)$$

که

$$\kappa = (2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon B)^{n+1} B^2)^{-1} \quad (3)$$

$$\omega_1 = \begin{cases} (\hat{w}^T \hat{w} - B^2)^2 & \hat{w}^T \hat{w} > B^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\omega_2 = \hat{w}^T Y + \left( (\hat{w}^T Y)^2 + \bar{\delta}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

و  $\varepsilon$  و  $\bar{\delta}$  ثابت‌های دلخواه هستند،  $\hat{w}$  تخمین  $w$  است و خطای تخمین از رابطه  $\tilde{w} = w - \hat{w}$  به دست می‌آید.  $B > 0$  کرانی است که توسط طراح برای تخمین‌گر انتخاب می‌گردد و همچنین  $Y$  متغیر بازمان، معلوم و مشتق‌پذیر است. آن‌گاه شرایط (6) - (8) همواره برقرار خواهند بود.

$$\|\hat{\theta}\| \leq B + \varepsilon, \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

$$\hat{\theta}^T \text{proj}(Y, \hat{\theta}) \geq \hat{\theta}^T Y, \quad (7)$$

$$\text{proj}(Y, \hat{\theta}) \in \mathcal{C}^n. \quad (8)$$

لم 2. [15] سیستم مرتبه دوم (9) را در نظر بگیرید.

$$\mu = \ddot{p}_d(t) - k_\alpha \tanh(\alpha) - k_{\dot{\alpha}} \tanh(\dot{\alpha}) - \dot{\hat{w}}, \quad (9)$$

که در آن  $k_\alpha, k_{\dot{\alpha}} > 0$ ،  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  و  $\dot{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  اگر  $\varepsilon$  به‌عنوان یک آشفنگی کران‌دار باشد و درنهایت به صفر میل کند آنگاه حالت‌های  $\alpha$  و  $\dot{\alpha}$  نیز کران‌دار خواهند بود و به صفر خواهند رسید.

#### 3- روش کنترلی

از آنجایی که دینامیک انتقالی این سیستم‌ها زیر-تحریک است، برای کنترل موقعیت هواپیما ناگزیر به استفاده از جهت سیستم هستیم. به این منظور از روش دو مرحله‌ای استخراج سود می‌جوییم. ابتدا خطای ردیابی را به‌صورت  $\tilde{p} = p - p_d$ ،  $\tilde{v} = v - \dot{p}_d$ ، تعریف می‌کنیم. حال با اضافه و کم کردن عبارت  $(T/m)R(q_d)^T \hat{z}$  به معادلات شتاب در رابطه (1-الف)، معادلات خطای ردیابی را در قالب رابطه (10) فرموله‌بندی می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \tilde{v} \\ \dot{\tilde{v}} = -\ddot{p}_d(t) + \mu + \tilde{\mu} + w, \end{cases} \quad (10)$$

که

$$\mu = g\hat{z} - \frac{T}{m} R(q_d)^T \hat{z} \quad (11)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{T}{m} \left( R(q_d)^T - R(q)^T \right) \hat{z}, \quad (12)$$

$\mu$  ورودی کنترلی مجازی و  $\tilde{\mu}$  خطای زیر-تحریک است. جهت مطلوب تراست است که در ادامه محاسبه می‌گردد. روش کار به این صورت است که ابتدا ورودی کنترل مجازی  $\mu$ ، بدون در نظر گرفتن زیر-تحریک بودن، برای سیستم طراحی می‌گردد. چون سیستم زیر-تحریک است، اعمال مستقیم این

<sup>1</sup> singularity

<sup>2</sup> feedback

عملگر تصویر این است که تخمین انجام گرفته از اغتشاش دینامیک انتقالی از پیش‌کران‌دار باشد. در واقع با تنظیم پارامترهای عملگر تصویر، ما تضمین می‌کنیم که تخمین ما همیشه در بازه  $B + \varepsilon$   $\|\hat{w}\|$  تغییر کند (رابطه (6) لم 1).

با استفاده از رابطه (18) و همچنین رابطه (7) در لم 1، رابطه (24) به صورت رابطه (26) درمی‌آید.

$$\dot{V}_T \leq -k_e s^T s - \tilde{w}^T \tilde{w} + s^T \tilde{\mu} \quad (26)$$

با استفاده از نامساوی  $\|R(q_d)^T - R(q)^T\| \hat{z} \leq 2\sqrt{2}\|\tilde{q}\|$  و رابطه (12) می‌توان نامساوی (27) را نتیجه گرفت.

$$\tilde{F} \leq 2\sqrt{2} \frac{T}{m} \|\tilde{q}\| = 2\sqrt{2}\|\mu - g\hat{z}\|\|\tilde{q}\| \leq 2\sqrt{12}g\|\tilde{q}\| \quad (27)$$

رابطه (26) را با توجه به نامساوی (27) می‌توان به فرم (28) نوشت.

$$\dot{V}_T \leq -k_e s^T s - \tilde{w}^T \tilde{w} + 2\sqrt{12}g\|\tilde{q}\|\|s\| \quad (28)$$

حال با استفاده از نامساوی  $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$  می‌توانیم رابطه (29) را نتیجه بگیریم.

$$\dot{V}_T \leq -(k_e - \delta) s^T s - \tilde{w}^T \tilde{w} + \frac{12}{\delta} g^2 \|\tilde{q}\|^2 \quad (29)$$

که در آن  $\delta$  یک ثابت دلخواه است به طوری که  $0 < \delta \leq 1$ .

تابع معرفی شده در (23) در این بخش در واقع بخشی از تابع لیاپانوف کلی سیستم خواهد بود که در بخش اثبات پایداری ارائه خواهد شد. اثر مثبت بودن عبارت آخر در رابطه (22)، در تابع لیاپانوفی که برای کل سیستم معرفی خواهد شد خنثی خواهد گردید.

لازم به ذکر است که هدف از استفاده عملگر تصویر، کران‌دار نگاه داشتن تخمین انجام گرفته در یک بازه از پیش تعیین شده است. از آنجایی که تمام عناصر ورودی کنترلی مجازی باید کوچک‌تر از  $g$  باشند (محدودیت اول ورودی کنترلی مجازی)، لذا در طراحی آن (18) از تابع‌های کران و همچنین تخمین کران‌دار (با استفاده از عملگر تصویر) استفاده شده است. همچنین از آنجایی که ورودی کنترلی مجازی باید حداقل دوبار مشتق‌پذیر باشد (محدودیت دوم ورودی کنترلی مجازی)، پس تخمین‌گر  $\hat{w}$  نیز باید دو بار مشتق‌پذیر باشد. به این منظور از عملگر تصویر استفاده شده که این شرط را نیز برآورده می‌سازد.

برخلاف اکثر تخمین‌گرهای تطبیقی که در آن تخمین‌گر به مقدار دقیق آن همگرا نمی‌شود در این مقاله با استفاده از ساختار جدیدی که برای تخمین‌گر اغتشاش دینامیک انتقالی معرفی می‌گردد همگرایی تخمین به مقدار دقیق آن به صورت مجانبی تضمین می‌گردد به طوری که بتوان از عملگر تصویر استفاده کرد. در غیر این صورت ما مجاز به استفاده از عملگر تصویر نبودیم. چرا که عملگر تصویر زمانی قابل استفاده است که ما از محدوده‌ای که مقدار نهایی تخمین در آن می‌ماند مطلع باشیم. چون ما از کران اغتشاش دینامیک انتقالی آگاهی داریم (بنا بر فرضیه 3)، بنابراین با توجه به این که تخمین‌گر طوری طراحی شده است که به مقدار واقعی آن برسد می‌توان نتیجه گرفت که کران مقدار نهایی تخمین نیز معلوم است.

### 5- طراحی ورودی گشتاور

در این بخش ورودی گشتاور را برای دینامیک چرخشی طراحی می‌کنیم، به طوری که جهت سیستم، جهت مطلوب  $q_d$  را که از روی ورودی کنترلی مجازی طراحی شده در بخش قبل (18) و روابط ارائه شده در (14) - (17) به دست می‌آید.

خطای ردیابی جهت  $\tilde{q} = (q_i, \eta_i)^T$  را از طریق رابطه (30) تعریف

با توجه به محدودیت‌های ذکر شده برای ورودی کنترلی مجازی ساختار زیر را برای  $\mu$  معرفی می‌کنیم.

$$\mu = \tilde{p}_d(t) - k_{\alpha} \tanh(\alpha) - k_{\dot{\alpha}} \tanh(\dot{\alpha}) - \hat{w}, \quad (18)$$

که  $k_{\alpha}, k_{\dot{\alpha}} > 0$  ضرایب ثابت هستند،  $\hat{w}$  تخمین اغتشاش  $w$  است و  $\alpha$  و  $\dot{\alpha}$  حالت‌های سیستم کمکی (19) هستند.

$$\ddot{\alpha} = -k_{\alpha} \tanh(\alpha) - k_{\dot{\alpha}} \tanh(\dot{\alpha}) - \phi \quad (19)$$

که  $\phi$  در ادامه طراحی خواهد شد.

ساختار کنترلی معرفی شده در رابطه (18) برای فائق آمدن بر محدودیت‌ها و چالش‌های ورودی کنترلی مجازی است که پیش‌تر به آن‌ها اشاره گردید. در واقع رابطه (18) تضمین می‌کند که: (1) ورودی کنترلی مجازی همواره از پیش کران‌دار است که این کران توسط ما قابل تعیین است. دو ترم اول شامل تابع تانژانت هایپربولیک می‌باشند که کران دار هستند. ترم آخر نیز تخمین اغتشاش است که همان‌طور که در ادامه توضیح داده خواهد شد این تخمین با استفاده از عملگر تصویر از پیش کران‌دار خواهد بود که این کران نیز توسط خود ما قابل تنظیم است. (2) مشتق ورودی کنترلی مجازی معلوم و قابل محاسبه است. در واقع به جای استفاده از خطای ردیابی موقعیت و سرعت  $(\tilde{p}, \dot{\tilde{p}})$  از حالات سیستم کمکی  $(\alpha, \dot{\alpha})$  در طراحی کنترلی کننده مجازی استفاده کردیم. همان‌طور که می‌بینیم مشتق این سیگنال‌ها قابل محاسبه و تماماً متشکل از سیگنال‌های قابل اندازه‌گیری و در دسترس است در حالی که اگر از خطای ردیابی سرعت  $\dot{\tilde{p}}$  در طراحی کنترلی مجازی استفاده می‌شد آن گاه مشتق آن معلوم نبود چرا که در محاسبه آن اغتشاش ظاهر می‌شود که نامعلوم است. به همین دلیل اقدام به پیاده‌سازی سیستم کمکی شده است.

با تعریف  $e = \tilde{p} - \alpha$ ،  $s = \dot{e} + c_1 e$  و خطای تخمین  $\tilde{w} = w - \hat{w} - \dot{e}$  خواهیم داشت.

$$\dot{s} = \tilde{\mu} + \tilde{w} + (c_1 + 1)\dot{e} + \phi \quad (20)$$

که با طراحی  $\phi$  به شکل رابطه (21)

$$\phi = -(c_1 + 1)\dot{e} - k_e s, \quad (21)$$

رابطه (13) به فرم (22) درمی‌آید.

$$\dot{s} = \tilde{\mu} + \tilde{w} - k_e s \quad (22)$$

که  $c_1$  و  $k_e$  بهره‌های مثبت هستند.

هدف از ارائه چنین ساختاری این است که در ابتدا متغیر  $e$  و  $\dot{e}$  به سمت صفر همگرا شوند. در گام بعدی حالت‌های سیستم کمکی یعنی  $\alpha$  و  $\dot{\alpha}$  به سمت صفر همگرا خواهند شد که این یعنی محقق شدن هدف کنترلی چرا که داریم  $e = \tilde{p} - \alpha$ ، پس صفر شدن متغیرهای  $\alpha$  و  $e$  صفر شدن خطای ردیابی موقعیت  $\tilde{p}$  را به دنبال خواهد داشت. تابع مثبت معین (23) را معرفی می‌کنیم.

$$V_T = \frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2\lambda_w} \tilde{w}^T \tilde{w} \quad (23)$$

که مشتق آن از رابطه (24) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_T = -k_e s^T s + s^T \tilde{\mu} + s^T \tilde{w} + \frac{1}{\lambda_w} \tilde{w}^T (-\dot{\hat{w}} - \dot{\tilde{\mu}} - \dot{\tilde{w}} - \phi + \dot{e}) \quad (24)$$

حال قانون تطبیقی برای تخمین اغتشاش دینامیک انتقالی  $\hat{w}$  را در قالب رابطه (25) طراحی می‌کنیم.

$$\dot{\hat{w}} = \lambda_w \text{proj}(Y, \hat{w}), \quad Y = -\dot{\tilde{\mu}} - \phi + \dot{e}, \lambda_w > 0 \quad (25)$$

که  $\text{proj}(Y, \hat{w})$  در لم 1، رابطه (2)-(5) تعریف شده است. هدف از استفاده از

می‌گردد.

$$\tilde{q} = q_d^{-1} \odot q \quad (30)$$

همچنین خطای سرعت زاویه‌ای هم از رابطه  $\tilde{\omega} = \omega - R(\tilde{q})\omega_d$  محاسبه می‌گردد.

حال دینامیک خطای ردیابی جهت را می‌توان در قالب روابط (31) و (32) بیان کرد.

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2}(\tilde{\eta}I_3 + \tilde{q}^*)\tilde{\omega}, \quad \dot{\tilde{\eta}} = -\frac{1}{2}\tilde{q}^T\tilde{\omega}, \quad (31)$$

$$J\dot{\tilde{\omega}} = -\omega^*J\omega + J(\tilde{\omega}^*R(\tilde{q})\omega_d - R(\tilde{q})\dot{\omega}_d) + d \quad (32)$$

با تعریف خطای  $\tilde{\omega} = \omega - c_2\tilde{q}$ ، معادلات (33) برای خطا حاصل می‌شود.

$$J\dot{\tilde{\omega}} = -\omega^*J\omega + J(\tilde{\omega}^*R(\tilde{q})\omega_d - R(\tilde{q})\dot{\omega}_d) + \tau + d + \frac{c_2}{2}J(\tilde{\eta}I_3 + \tilde{q}^*)\tilde{\omega} \quad (33)$$

لازم به ذکر است که سرعت زاویه‌ای مطلوب از رابطه (15) و مشتق آن از رابطه (16) محاسبه می‌گردند. باید خاطر نشان کرد که در محاسبه مشتق سرعت زاویه‌ای مطلوب  $\dot{\omega}_d$ ، بخشی از آن به دلیل ظهور اغتشاش  $w$  در روابط نامعلوم است (برای روشن‌تر شدن موضوع به پیوست مراجعه شود). براساس آنچه در پیوست آمده (59)، می‌توان  $\dot{\omega}_d$  را به صورت رابطه  $\dot{\omega}_d = \theta w + \bar{\theta}$  نوشت که  $\theta$  و  $\bar{\theta}$  معلوم هستند و در (60) و (61) تعریف شده‌اند و  $w$  اغتشاش نامعلوم است. پس می‌توان رابطه (33) را در قالب رابطه (34) بازنویسی کرد.

$$J\dot{\tilde{\omega}} = -\omega^*J\omega + J\tilde{\omega}^*R(\tilde{q})\omega_d - JR(\tilde{q})\theta - JR(\tilde{q})\bar{\theta}w + \tau + d + \frac{c_2}{2}J(\tilde{\eta}I_3 + \tilde{q}^*)\tilde{\omega} \quad (34)$$

همان‌طور که از رابطه (34) مشخص است برای حذف اثر ترم‌های موجود در سمت راست معادله نیاز به مقدار ماتریس ممان اینرسی  $J$  داریم. این در حالی است که ما این مقدار را در اختیار نداریم. لذا در طراحی ورودی گشتاور از کران اغتشاش دینامیک چرخشی یعنی  $\bar{J}$  استفاده می‌کنیم.

حال ورودی گشتاور را برای کنترل دینامیک چرخشی در قالب روابط (35) و (36) تعریف می‌کنیم.

$$\tau = -k_\Omega\Omega - k_q\tilde{q} - v, \quad (35)$$

$$v = \begin{cases} \frac{\Omega}{\|\Omega\|}(\hat{\phi} + \chi) & \|\Omega\| \neq 0 \\ 0 & \|\Omega\| = 0 \end{cases} \quad (36)$$

که

$$\chi = \bar{J}\|\omega^*J\omega\| + \bar{J}\|\tilde{\omega}^*R(\tilde{q})\omega_d\| + \bar{J}\|R(\tilde{q})\theta\| + \frac{c_2}{2}\bar{J}\|\tilde{\eta}I_3 + \tilde{q}^*\|\tilde{\omega}\| \quad (37)$$

و  $\hat{\phi}$  از رابطه تطبیقی که در (38) آمده به دست می‌آید.

$$\dot{\hat{\phi}} = \lambda_\phi\|\Omega\| \quad (38)$$

ضرایب  $k_\Omega$  و  $\lambda_\phi$  بهره‌های کنترلی هستند که تنها کافی است بزرگتر از صفر انتخاب گردند. اما ضریب  $k_q$  باید طوری انتخاب گردد شرط  $c_2k_q > (12/\delta)g$  را برآورده سازد، که دلیل این انتخاب در بخش 6 و از طریق تابع لیاپانوف مشخص می‌گردد.

در طراحی کنترل مد لغزنده از بهره تطبیقی  $\hat{\phi}$  استفاده شده است. همان‌طور که می‌دانیم در کنترل مد لغزنده کران اغتشاش باید معلوم باشد اما در این مقاله فرض بر این است که کران اغتشاش دینامیک چرخشی معلوم نیست (فرضیه 4). بنابراین با پیاده‌سازی یک ساختار تطبیقی در کنترل مد لغزنده مبادرت به تخمین کران نامعلوم اغتشاش می‌کنیم.

حال تابع مثبت معین (39) را به‌عنوان تابع لیاپانوف برای دینامیک چرخشی تعریف می‌کنیم.

$$V_R = \Omega^T J \Omega + 2k_q(1 - \tilde{\eta}) + \frac{1}{2\lambda_\phi}\tilde{\phi}^2 \quad (39)$$

که  $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$ .

رابطه (40) را می‌توان برای مشتق (39) به‌دست آورد.

$$\begin{aligned} \dot{V}_R &\leq -k_\Omega\|\Omega\|^2 - c_2k_q\|\tilde{q}\| + \|\Omega\|\phi + \|\Omega\|\chi \\ &\quad - \|\Omega\|\chi - \|\Omega\|\hat{\phi} + \frac{1}{\lambda_\phi}\tilde{\phi}(-\dot{\hat{\phi}}) \\ &= -k_\Omega\|\Omega\|^2 - c_2k_q\|\tilde{q}\| \\ &\quad + \|\Omega\|\tilde{\phi} + \frac{1}{\lambda_\phi}\tilde{\phi}(-\dot{\hat{\phi}}) \end{aligned} \quad (40)$$

با جای‌گذاری (35)-(38) در (40) رابطه (41) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_R \leq -k_\Omega\|\Omega\|^2 - c_2k_q\|\tilde{q}\|^2 \quad (41)$$

## 6- تحلیل پایداری

قضیه 1. هواپیمای عمودپرواز معرفی‌شده در رابطه (1) و کنترل‌کننده مجازی طراحی‌شده برای متغیر کنترلی واسط در (18)، (19) و (21) و قانون تطبیقی (25) برای اغتشاش دینامیک انتقالی در نظر بگیرد. آن‌گاه به‌وسیله تراست  $T$  که از روی کنترل‌کننده مجازی  $\mu$  و از طریق رابطه (13) به دست می‌آید و همچنین ورودی گشتاور طراحی‌شده در (35)-(38)، موقعیت سیستم به‌صورت مجانبی موقعیت مطلوب  $p_d(t)$  را دنبال می‌کند، اگر ضرایب طوری انتخاب شوند که شرایط (42) و (43) به همراه فرضیه‌های 1-4 برآورده گردند.

$$k_\theta + k_{\dot{\theta}} + \|\ddot{p}_d(t)\| + B + \varepsilon < g \quad (42)$$

$$k_e > \delta, c_2k_q > \frac{12}{\delta}g \quad (43)$$

اثبات. برقراری شرط (42) عدم بروز تکینگی را در روابط استخراج تضمین می‌کند. بنابراین استخراج تراست و جهت مطلوب از کنترل‌کننده مجازی طراحی شده همواره امکان‌پذیر خواهد بود. حال تابع لیاپانوف (44) را که متشکل از جمع تابع لیاپانوف ارائه شده برای دینامیک انتقالی (23) و چرخشی (39) است را برای اثبات پایداری سیستم معرفی می‌کنیم.

$$V = V_T + V_R \quad (44)$$

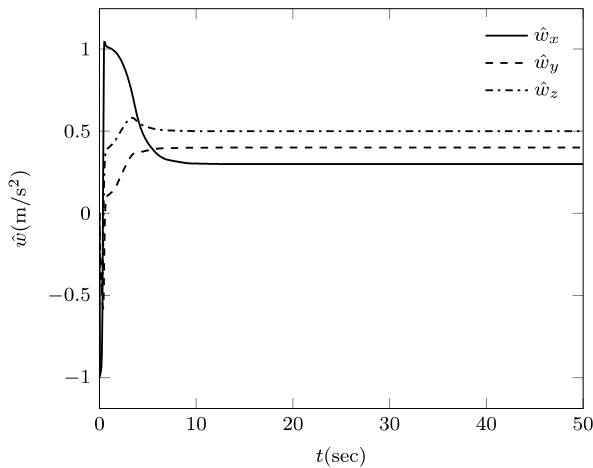
با استفاده از روابط (29) و (41) مشتق تابع لیاپانوف (44) را به شکل رابطه (45) به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(k_e - \delta)\|s\|^2 - \tilde{w}^T\tilde{w} - k_\Omega\|\Omega\|^2 - (c_2k_q \\ &\quad - \frac{12}{\delta}g)\|\tilde{q}\|^2 \end{aligned} \quad (45)$$

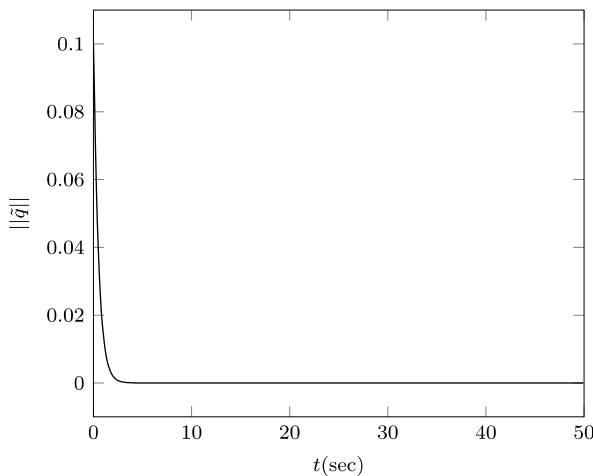
اگر ضرایب طوری انتخاب شوند که شرط (43) برقرار شود، مشتق تابع لیاپانوف (45)، منفی نیمه معین است. بنابراین سیگنال‌های  $s$ ،  $\tilde{w}$ ،  $\Omega$  و  $\tilde{q}$  کران‌دار هستند. همچنین با استفاده از لم تغییرناپذیری لسل<sup>1</sup> می‌توان نتیجه گرفت که سیگنال‌های  $s$ ،  $\tilde{w}$  و  $\Omega$  به صفر میل می‌کنند. چون  $s$  کران‌دار است و به صفر میل می‌کند، پس  $\dot{e}$ ،  $\dot{e}$  نیز کران‌دار هستند و به صفر همگرا می‌شوند. از صفر شدن  $\tilde{w}$  و  $\dot{e}$  و رابطه  $\tilde{w} = w - \tilde{w} - \dot{e}$  نتیجه می‌شود که مقدار تخمین  $\tilde{w}$  به مقدار واقعی آن  $w$  همگرا می‌شود. چون  $\dot{e}$ ،  $\dot{e}$  کران‌دار هستند و به صفر میل می‌کنند، پس از رابطه (21) می‌توان نتیجه گرفت که  $\phi$  نیز کران‌دار است و به صفر میل می‌کند. حال با استفاده از لم 2 ثابت می‌شود که  $\alpha$  و  $\dot{\alpha}$  نیز کران‌دار هستند و به صفر همگرا می‌شوند که این با توجه به تعریف  $(e = \tilde{p} - \alpha)$  به معنای صفر شدن خطای ردیابی موقعیت یعنی  $\tilde{p}$  است، به عبارت دیگر خواهیم داشت  $p \rightarrow p_d$ .

## 7- نتایج شبیه‌سازی

<sup>1</sup> LaSalle's invariance principle



**Fig. 3** Estimation of translational disturbance  $\hat{w} = (\hat{w}_x, \hat{w}_y, \hat{w}_z)$   
 شکل 3 تخمین اغتشاش دینامیک انتقالی  $\hat{w} = (\hat{w}_x, \hat{w}_y, \hat{w}_z)$



**Fig. 4** Attitude tracking error  $\|\hat{q}\|$   
 شکل 4 خطای ردیابی جهت  $\|\hat{q}\|$

**8- نتیجه گیری**

در این نگاهت نامه کنترل ردیابی هواپیمای عمودپرواز در حضور اغتشاش و ناپیچینی مورد بررسی قرار گرفت. بر پایه الگوریتم استخراج، کنترل کننده‌ای دومرحله‌ای برای کنترل دینامیک انتقالی و چرخشی ارائه شد. سپس، با استفاده از کنترل تطبیقی و پیاده‌سازی سیستم کمکی، یک کنترل کننده مجازی برای دینامیک انتقالی طراحی گردید. همچنین برای کنترل دینامیک چرخشی از کنترل سطح لغزنده تطبیقی استفاده شد. پایداری سیستم حلقه بسته با استفاده از تابع لیپانوف اثبات و در نهایت نتایج شبیه‌سازی بررسی صحت کنترل کننده معرفی شده، ارائه گردید.

**9- فهرست علائم**

- $d$  اغتشاش دینامیک چرخشی
- $J$  ماتریس اینرسی
- $m$  جرم
- $p$  موقعیت
- $q$  چهارتایی کواترنیون واحد
- $q$  قسمت برداری کواترنیون واحد
- $T$  تراست

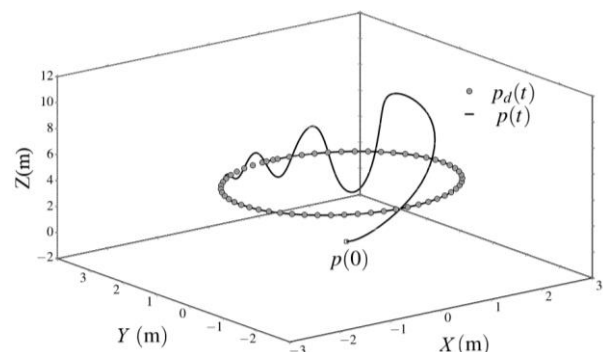
برای انجام شبیه‌سازی یک هواپیمای عمودپرواز با مشخصات  $m = 1\text{kg}$  سیگنال موقعیت مرجع را به صورت  $\text{diag}(0.3, 0.4, 0.25)\text{kg m}^2$   $p_d = (2 \cos(0.5t/\pi), 2 \sin(0.5t/\pi), 5)$  در نظر می‌گیریم. اغتشاش‌های دینامیک انتقالی و چرخشی به شکل زیر انتخاب می‌گردند.

$$w(t) = (0.3, 0.4, 0.5)^T (\text{m/s}^2), \quad (46)$$

$$d(t) = (0.7, 0.9, 0.6)^T (\text{Nm}). \quad (47)$$

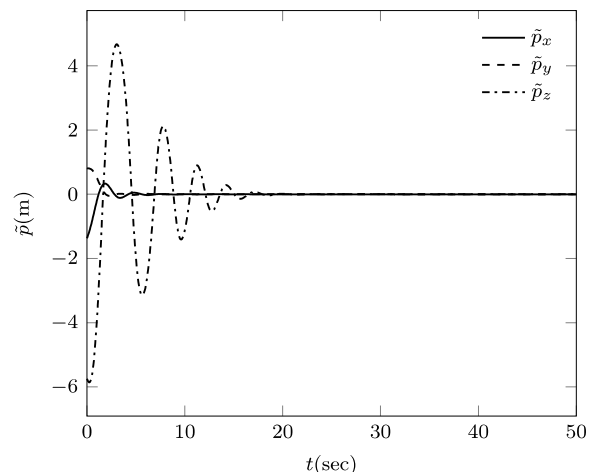
شرایط اولیه برای موقعیت و سرعت خطی به صورت تصادفی در بازه  $[-2, 2]$  انتخاب می‌گردند. مقدار اولیه برای سرعت زاویه‌ای به فرم  $\omega(0) = (0.1, 0.2, 0.03)\text{rad/s}$  و برای  $q_d(0)$  به صورت تصادفی تعریف می‌گردد. شرایط اولیه برای سیستم کمکی (19) و تخمین دینامیک انتقالی صفر انتخاب می‌گردد و  $\hat{p}(0) = 1$  ضرایب و بهره‌ها نیز به شکل  $k_e = c_1 = 2$ ،  $\lambda_\varphi = 1$  و  $\lambda_w = 2$ ،  $k_\Omega = 5$ ،  $k_q = 3$ ،  $c_2 = 2$ ،  $k_\theta = 1$ ،  $k_\theta = 5$ ،  $\delta = B = 1$  و  $\epsilon = 0.1$  انتخاب می‌گردند.

نتایج شبیه‌سازی در "شکل‌های 1-4" نمایش داده شده‌اند. "شکل 1" مسیر سه‌بعدی که هواپیما تحت کنترل می‌پیماید را به همراه مسیر مطلوب نشان می‌دهد. در "شکل 2" خطای ردیابی به تفکیک مؤلفه در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  نمایش داده شده است. "شکل 3" تخمین اغتشاش دینامیک چرخشی را نشان می‌دهد، که همان‌طور که از شکل مشخص است تخمین انجام گرفته به مقدار واقعی اغتشاش‌ها همگرا شده است. در نهایت "شکل 4" خطای ردیابی جهت مطلوب را نمایش می‌دهد.



**Fig. 1** 3d plot of system trajectory and desired trajectory

شکل 1 رسم سه‌بعدی موقعیت سیستم و موقعیت مطلوب



**Fig. 2** Position tracking error  $\tilde{p} = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z)$

شکل 2 خطای ردیابی موقعیت  $\tilde{p} = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z)$

است.

$v$  سرعت

در نهایت مشتق سرعت زاویه‌ای مطلوب به فرم (61) به دست می‌آید.

$w$  اغتشاش دینامیک انتقالی

$$\dot{\omega}_d = \theta + \bar{\theta}w, \quad (61)$$

علائم یونانی

با

$\eta$  قسمت اسکالر کوآرترونیون واحد

$$\theta = \dot{\varepsilon}(\mu, \dot{\mu})\dot{\mu} + \varepsilon(\mu)\theta_3, \quad (62)$$

$\omega$  سرعت زاویه‌ای

$$\bar{\theta} = \varepsilon(\mu)\bar{\theta}_3. \quad (63)$$

$\tau$  ورودی گشتاور

زیر نویس‌ها

$d$  مطلوب

### 11- فهرست مراجع

- [1] M. Nourimotlagh, P. Safarpour, M. Pourgholi, Dynamic modeling, simulation and control of a quadrotor using feedback linearization and PID controller based on MEMS sensors experimental data, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 175–185, 2016. (in Persian)
- [2] J. M. Pflimlin, T. Hamel, P. Soueres, R. Mahony, A hierarchical control strategy for the autonomous navigation of a ducted fan flying robot, *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2006, ICRA 2006, pp. 2491–2496, 2012.
- [3] A. Parsa, A. Kalhor, M. Amiri Atashgah, Backstepping control performance enhancement using close loop identification for quadrotor trajectory tracking, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 224–234, 2016. (in Persian)
- [4] M. R. Akella, A. Valdivia, G. R. Kotamraju, Velocity-Free attitude controllers subject to actuator magnitude and rate saturations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, pp. 659–666, 2005.
- [5] S. Bertrand, N. Guénard, T. Hamel, H. Piet-Lahanier, L. Eck, A hierarchical controller for miniature VTOL UAVs: Design and stability analysis using singular perturbation theory, *Control Engineering Practice*, Vol. 19, No. 10, pp. 1099–1108, 2011.
- [6] J. M. Pflimlin, P. Soueres, T. Hamel, Hovering flight stabilization in wind gusts for ducted fan UAV, *IEEE Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.04CH37601)*, Bahamas: IEEE, Vol. 4, pp. 3491–3496, 2004.
- [7] A. Abdessameud, A. Tayebi, Global trajectory tracking control of VTOL-UAVs without linear velocity measurements, *Automatica*, Vol. 46, No. 6, pp. 1053–1059, 2010.
- [8] A. Roberts, A. Tayebi, Adaptive Position Tracking of VTOL UAVs, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 27, No. 1, pp. 129–142, 2011.
- [9] M. D. Hua, T. Hamel, P. Morin, C. Samson, A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to VTOL drones, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 8, pp. 1837–1853, 2009.
- [10] D. Cabecinhas, R. Cunha, C. Silvestre, A nonlinear quadrotor trajectory tracking controller with disturbance rejection, *Control Engineering Practice*, Vol. 26, No. 1, pp. 1–10, May 2014.
- [11] P. Casau, R. G. Sanfelice, R. Cunha, D. Cabecinhas, C. Silvestre, Robust global trajectory tracking for a class of underactuated vehicles, *Automatica*, Vol. 58, No. 1, pp. 90–98, 2015.
- [12] T. X. Dinh, K. K. Ahn, Adaptive tracking control of a quadrotor unmanned vehicle, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 18, No. 2, pp. 163–173, 2017.
- [13] Z. Zuo, Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor, *IET Control Theory & Applications*, Vol. 4, No. 11, pp. 2343–2355, 2010.
- [14] Z. Cai, M. S. de Queiroz, D. M. Dawson, A sufficiently smooth projection operator, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 1, pp. 135–139, 2006.
- [15] A. Abdessameud, A. Tayebi, *Motion Coordination For VTOL Unmanned Aerial Vehicles: Attitude Synchronisation and Formation Control*, pp. 85–101, New York, Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] A. Abdessameud, A. Tayebi, Formation control of VTOL-UAVs, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, Shanghai: IEEE, pp. 3454–3459, 2009.

### 10- پیوست‌ها

در این بخش به محاسبه مشتق سرعت زاویه‌ای مطلوب  $\dot{\omega}_d$  می‌پردازیم و آن را در قالب دویبخش معلوم و نامعلوم محاسبه می‌کنیم. به این منظور ابتدا توجه خود را به محاسبه مشتق دوم ورودی کنترل واسطه  $\ddot{\mu}$  معطوف می‌کنیم. از رابطه (25) و (12) و (13) می‌توان رابطه (48) را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \dot{Y} = -\dot{\mu} - \dot{\phi} + \dot{e} = & -\dot{\mu} + c_1 k_e \dot{e} \\ & + (c_1 + 2 + k_e)(\dot{\mu} - \hat{w} + \phi) \\ & + (c_1 + 2 + k_e)w \end{aligned} \quad (48)$$

که

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{T}}{m} (R(q_d) - R(q))^T \hat{z} + \frac{T}{m} (R(q_d)\omega_d - R(q)\omega)^T \hat{z} \quad (49)$$

$$\frac{\dot{T}}{m} = \frac{2\mu_1 \dot{\mu}_1 + 2\mu_2 \dot{\mu}_2 + 2(\mu - g)\dot{\mu}_3}{\|\mu - g\hat{z}\|} \quad (50)$$

حال با مشتق‌گیری از روابط (3)–(5)، روابط (51) و (52) را محاسبه می‌کنیم.

$$\dot{\omega}_1 = \begin{cases} 4(\hat{w}^T \hat{w} - B^2) \hat{w}^T \hat{w} & \hat{w}^T \hat{w} > B^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (51)$$

$$\dot{\omega}_2 = \theta_1 + \bar{\theta}_1 \hat{w}^T w, \quad (52)$$

که  $\theta_1$  و  $\bar{\theta}_1$  از روابط (53) و (54) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \left(1 + \hat{w}^T Y \left( (\hat{w}^T Y)^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ & \times \left( \hat{w}^T Y - \dot{\mu} + c_1 k_e \dot{e} \right. \\ & \left. + (c_1 + 2 + k_e)(\dot{\mu} - \hat{w} + \phi) \right), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\bar{\theta}_1 = \left(1 + \hat{w}^T Y \left( (\hat{w}^T Y)^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}\right) (c_1 + 2 + k_e), \quad (54)$$

حال مشتق دوم تخمین یعنی  $\ddot{w}$  را محاسبه می‌نماییم که رابطه آن در قالب روابط (55)–(57) بیان شده است.

$$\begin{aligned} \ddot{w} = & \lambda_w (\dot{Y} - \kappa \omega_1 \omega_2 \hat{w} - \kappa \omega_1 \dot{\omega}_2 \hat{w} - \kappa \omega_1 \omega_2 \dot{\hat{w}}) \\ & = \theta_2 + \bar{\theta}_2 w \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & -\dot{\mu} + c_1 k_e \dot{e} + (c_1 + 2 + k_e)(\dot{\mu} - \hat{w} + \phi) \\ & - \lambda_w \kappa \omega_1 \omega_2 \hat{w} - \lambda_w \kappa \omega_1 \omega_2 \dot{\hat{w}} \\ & - \lambda_w \kappa \omega_1 \theta_1 \hat{w}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\bar{\theta}_2 = \lambda_w (\kappa \omega_1 \bar{\theta}_1 \hat{w} \hat{w}^T + (c_1 + 2 + k_e)I_3) \quad (57)$$

و در ادامه مشتق دوم ورودی کنترل مجازی را می‌توان به صورت (58) نوشت

$$\ddot{\mu} = \theta_3 + \bar{\theta}_3 w \quad (58)$$

با

$$\begin{aligned} \theta_3 = & p_d^{(4)}(t) - k_\alpha \dot{h}(\alpha, \dot{\alpha})\dot{\alpha} - (k_\alpha h(\alpha) - k_\alpha \dot{h}(\dot{\alpha}))\ddot{\alpha} \\ & - k_\alpha \dot{h}(\dot{\alpha})(-k_\alpha h(\alpha)\dot{\alpha} - k_\alpha \ddot{\alpha} + k_\alpha \dot{\alpha} \\ & + k_\alpha \ddot{\alpha}) - \theta_2, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\bar{\theta}_3 = -\bar{\theta}_2. \quad (60)$$

که در آن  $h(x) = \text{diag} \left( \frac{dq(x_1)}{dx_1}, \frac{dq(x_2)}{dx_2}, \frac{dq(x_3)}{dx_3} \right)$  و  $\dot{h}(x, \dot{x})$  مشتق