مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1396، دوره 17، شماره 12، ص‌ص 223-233

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل دینامیکی رفتار شبه الاستیک یک تیر از جنس آلیاژ حافظ شکل

رضا رضویلر[1]، علیرضا فتحی[2*]، مرتضی دردل[2]، جمال ارغوانی هادی[3]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل
3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
*بابل، صندوق پستی 47148-71167، fathi@nit.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 مرداد 1396
پذیرش: 15 آبان 1396
ارائه در سایت: 17 آذر 1396

کلید واژگان:
مواد هوشمند
آلیاژ حافظ شکل
تیر اویلر- برنولی
ارتعاش آزاد
اثر هیسترزیس

چکیده

در این تحقیق روشی نوین برای تحلیل رفتار دینامیکی تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظ شکل ارائه شده است. فرض بر این است که تیر کاملا از آلیاژ حافظ شکل ساخته شده است. در ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مسئله براساس تئوری تیر اویلر برنولی و با به‌کارگیری اصل همیلتون توسعه یافته استخراج شده است. در معادلات استخراج شده پارامتر کرنش تغییر فاز در نقاط مختلف تیر به‌صورت یک متغیر داخلی تعریف شده که با زمان و مکان تغییر می‌کند. با استفاده از توابع شکل مود که کلیه شرایط مرزی را ارضا می‌کند و با به‌کارگیری روش گالرکین، معادلات حرکت سیستم به تعدادی معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و معادلات حاصله با استفاده از روش عددی نیومارک حل شده است. برای معین نمودن شرایط فاز آلیاژ حافظ شکل در نقاط مختلف تیر از مدل ماده سوزا جهت تعیین فاز ماده استفاده شده است. متغیر داخلی کرنش تغییر فاز که در معادلات حاکم با مختصه های زمانی کوپل می‌باشد با استفاده از این مدل ماده و براساس الگوریتم نگاشت برگشتی در هر زمان و برای هر نقطه از تیر تعیین می‌گردد. اثر متغیر کنترلی دما و متغیر کنترلی کرنش اولیه که به‌صورت جابجایی اولیه بر سیستم اعمال می‌شود را بر میزان میرایی سیستم، به تفصیل بررسی شده است. از نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌گردد که با افزایش دما میزان استهلاک به‌علت تشکیل حلقه های هیستریزیس بزرگتر افزایش می‌یابد و با افزایش جابجایی اولیه سرعت میرایی در ارتعاش آزاد افزایش می‌یابد.

Dynamic analysis of a shape memory alloy beam

Reza Razavilar[1], Alireza Fathi[1*], Morteza Dardel[1], Jamal Arghavani Hadi[2]

1- Faculty of Mechanical Engineering, BabolNoshirvaniUniversity of Technology, Babol, Iran
2- Departmentof Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
*P.O.B. 47148-71167, Babol,Iran, fathi@nit.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 August 2017
Accepted 06 November 2017
Available Online 08 December 2017

Keywords:
Smart materials
Shape Memory Alloy
Euler-Bernoulli beam
Free vibration
Hysteresis damping

ABSTRACT

In this study a novel solution method for dynamic analysis of clamped-free shape memory alloy beams is presented. It is assumed that the beam is entirely made of shape memory alloy. Based on Euler-Bernoulli beam theory the governing equations of motion and corresponding boundary conditions are derived by using extended Hamilton principle. In the derived PDEs the transformation strain is behaved as external force that changes with time and position. The Galrkin approach is employed to convert PDEs to ODE system equations of motion. The derived equations of motion are solved by using Newmark integration method. The shape memory alloy constitutive model that presented by Souza is applied for specifying the phase of material all over beam. The transformation strain as internal variable that is coupled withstates of equations of motion is identified in every time and every position of beam by using return map algorithm. A parametric study on the control variables has been adopted and the results of parametric study are discussed. The results show that the hysteresis damping is increased by increasing the operating temperature. Moreover the damping of system is faster by increasing the initial displacement in free vibration.

1- مقدمه

کاربرد مواد هوشمند در علوم مهندسی و کاربردی توجه بسیاری از محققین را به سمت بررسی سازه‌های ساخته شده از این مواد و تحت شرایط مختلف بارگذاری معطوف کرده است. مواد حافظ شکل که جزو زیرمجموعه مواد هوشمند دسته‌بندی می‌گردد [1]. دارای رفتارهای بی‌نظیری همچون قابلیت تغییر شکل‌های زیاد و بازیابی شکل اولیه تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی یا ترکیب این دو بارگذاری را دارا می‌باشند. رفتار کلی مواد حافظ شکل را می‌توان به دو دسته اصلی شامل رفتار حافظه‌ای[1] و رفتار شبه الاستیک[2] تقسیم‌بندی کرد [3,2]. رفتار حافظه‌ای رفتاری مربوط به تغییر شکل آلیاژ در فاز مارتنزیت بوده و سپس در حالی‌که هنوز دما پایین‌تر از دمای پایان مارتنزیت قرار دارد ابتدا بار برداری مکانیکی انجام یافته و سپس

[1] Shape memory effect
[2] Pseudoelastic

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

R. Razavilar, A. Fathi, M. Dardel, J. Arghavani Hadi, Dynamic analysis of a shape memory alloy beam, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 223-233, 2018 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

طی یک فرایند حرارتی ماده به شکل اولیه خود باز می‌گردد. در صورتی که دمای محیط بالای دمای آغاز آستنیت باشد بعد از اعمال کرنش‌های بالا (حدود 5 الی 10 درصد) می‌توان ماده را با حذف عامل ایجاد کرنش و بدون نیاز به فرآیند حرارتی به شکل اولیه خود بازگرداند. این رفتار اصطلاحا رفتار شبه الاستیک [1] نامیده می‌شود. مدل‌های مختلفی برای شبیه‌سازی رفتار مواد حافظ شکل ارائه شده است که شامل مدل‌های یک‌بعدی [5,4] و سه بعدی [7,6] می‌باشد. یکی از ساده‌ترین و در عین حال کامل‌ترین مدل‌های ارائه شده برای رفتار مواد حافظ شکل مدل ارائه شده توسط سوزا و همکاران [6] می‌باشد. این مدل سه‌بعدی علاوه بر سادگی دارای قابلیت‌های مهمی همچون شبیه‌سازی رفتار ماده تحت بارهای تناسبی[1] و غیرتناسبی[2] می‌باشد. بر این اساس در تحقیق حاضر از این مدل برای شبیه‌سازی رفتار ماده حافظ شکل استفاده گردیده است. یکی از خواص قابل توجه مواد حافظ شکل قابلیت استهلاک انرژی بر اثر بوجود آمدن رفتار هیستریزیس[3] [8] در بارهای دینامیکی می‌باشد که از این خاصیت برای دمپینک و کنترل ارتعاشات [9] در سازه‌هایی از جنس آلیاژ حافظ شکل استفاده می‌گردد. این خاصیت مواد حافظ شکل در محدوده کاری شبه‌الاستیک بیشتر مورد توجه است زیرا برای تکمیل چرخه هیستریزیس در این حالت نیازی به اعمال فرآیند حرارتی نیست و سیستم تحت تاثیر بارگذاری دینامیکی رفتار هیستریزیس را به‌طور کامل از خود نشان می‌دهد. از جمله موارد بررسی شده برای رفتار دینامیکی سازه‌های از جنس مواد حافظه شکل، می‌توان به سیستم‌های گسسته ارتعاشی شامل جرم و فنر به همراه یک المان از جنس آلیاژ حافظ شکل، سیم‌های از جنس آلیاژ حافظ شکل، تیرهای کامپوزیتی با سیم‌های تقویت کننده از جنس آلیاژ حافظ شکل و درنهایت تیرهای به‌طور کامل ساخته شده از آلیاژ حافظ شکل اشاره کرد. فنگ و لی [10] رفتار دینامیکی یک سیستم گسسته مکانیکی شامل جرم، دمپر و یک المان میله‌ای از جنس ماده حافظ شکل را هم به‌صورت عددی و هم تجربی مورد بررسی قرار دادند. اثر تغییر فاز بر فرکانس تشدید و میزان نقطه اوج دامنه[4] در نزدیکی فرکانس تشدید را مورد بررسی قرار گرفت. برناردینی و رگا [11] رفتار آشوبناک سیستم یک درجه آزادی گسسته شامل المان میله‌ای از جنس آلیاژ حافظ شکل را مورد بررسی قرار دادند. اثرات دمای کارکرد، میزان انتقال حرارت با محیط و ظرفیت حرارتی بر رفتار آشوبناک سیستم با استفاده از نمودارهای انشقاق[5] و مقطع پونکاره[6] در رژیم کاری شبه‌الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. ساوی و پاچچو [12] و همچنین ماچادو و همکاران [13] ارتعاشات اجباری و آزاد یک سیستم کوپل دو درجه آزادی گسسته شامل المان‌هایی از جنس آلیاژ حافظ شکل را از نظر رفتارهای آشوبناک و اثرات دمپینگ به‌وجود آمده در اثر هیسترزیس، مورد بررسی قرار دادند. لاگوداس و همکاران [14] با استفاده از تحلیل عددی و تجربی رفتار میرایی ارتعاش را با استفاده از یک سیستم مکانیکی که المان اصلی آن سیم از جنس آلیاژ حافظ شکل بود را مورد بررسی قرار دادند. پاسخ فرکانسی و قابلیت انتقال جابجایی توسط سیم حافظه‌دار و همچنین میزان تغییرات دما در طول آزمایش مورد توجه قرار گرفت. پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیت تقویت شده با سیم‌های از جنس آلیاژ حافظ شکل توسط تسایی و چن [15] بررسی گردید. در این تحقیق تیر کامپوزیت تحت تاثیر نیروی محوری قرار گرفته و با استفاده از روش اجزای محدود و به همراه روش بالانس هارمونیک محدوده ناپایداری تیر کامپوزیت شناسایی شده است. خلیلی و همکاران [16] اثرات استهلاک انرژی سیم‌های جاسازی شده در دو رویه بالایی و پایینی یک تیر کامپوزیت را مورد بررسی قرار دادند. روش استفاده شده در این تحقیق روش اجزاء محدود بوده و الگوریتم ارائه شده برای حل مسئله با چند مثال توضیح داده شده است. هاشمی و خادم [17] رفتار ارتعاشی یک تیر یکسر گیردار تماما ساخته شده از آلیاژ حافظ شکل را بررسی کردند. تیر یکسر گیردار به‌صورت یک سیستم گسسته جرم و فنر ساده‌سازی شده و رفتار ارتعاشی تیر برای محدوده کاری شبه الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. دامن‌پاک و همکاران [18] رفتار ارتعاشی و قابلیت کنترل ارتعاشات را برای یک تیر دو و سه لایه که شامل لایه هایی از جنس آلیاژ حافظ شکل بوده را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. روش مورد استفاده در این تحلیل روش اجزاء محدود بوده و اثرات پیش تنش، دما و ضخامت لایه‌های تیر بر روی رفتار دینامیکی آن مورد بررسی قرار گرفته است.

در تمامی تحقیقات مورد اشاره، از دو روش اصلی برای تحلیل سازه‌های از جنس آلیاژ حافظ شکل استفاده شده است. روش اول روش اجزاء محدود و روش دوم گسسته‌سازی و تبدیل سازه به یک سیستم ساده جرم و فنر می‌باشد. سازه‌های تیر و صفحه اکثرا کامپوزیت‌هایی تشکیل شده از سیم‌هایی از آلیاژ حافظ شکل بوده [16-19] و در موارد نادر تمامی تیر از آلیاژ حافظ شکل ساخته شده است [18,17].

تاکنون در تمام تحقیقات پیشین از روش‌های اجزاء محدود برای تحلیل دینامیکی سازه‌های از جنس آلیاژ حافظ شکل استفاده نموده‌اند [16-19]. در این تحقیق رویکردی نوین شامل استفاده از روش نیمه تحلیلی در جهت تحلیل این سازه‌ها ارائه می‌گردد. سازه مورد بررسی تیر یکسر گیردار است که کاملا از جنس آلیاژ حافظ شکل ساخته شده و برخلاف روش اجزاء محدود این روش مستلزم حل تعداد زیادی معادله حرکت و همچنین معضلات ناشی از مونتاژ ماتریس‌های جرم و سختی نمی‌باشد. همچنین با روشی که برای حل ارائه می‌گردد امکان دسترسی به مختصه‌های زمانی سیستم پیوسته برای کنترل سیستم نیز مهیا می‌گردد. سرعت حل مسئله در این روش با توجه به کاهش تعداد معادلات حرکت به طور چشمگیری کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به دسترسی به مختصه های زمانی سیستم امکان آنالیز پایداری سیستم مهیا می‌گردد.

2- استخراج معادلات حرکت سیستم

در این قسمت معادله ساختاری آلیاژ حافظ شکل به همراه روش استخراج معادلات حرکت و روش حل مسئله مورد بررسی قرار می گیرد.

2-1- معادله ساختاری

همان‌گونه که اشاره شد مدل‌های مختلفی برای توصیف رفتار آلیاژ حافظ شکل ارائه شده است. یکی از مدل‌های سه‌بعدی که قادر به توصیف دو رفتار شبه‌الاستیک و رفتار حافظه‌ای است، توسط سوزا و همکاران [6] معرفی گردید. این مدل برای ناحیه‌ای که تغییر شکل‌ها کوچک فرض شده‌اند به‌کار می‌رود. مهمترین متغیر این مدل کرنش تغییر فاز e^{tr}می‌باشد که به‌عنوان متغیر داخلی در نظر گرفته شده و کرنش ε و دمای مطلق T متغیرهای کنترل مدل سوزا می‌باشند.

در این مدل کرنش و تنش با کمک دو مؤلفه حجمی و مؤلفه انحرافی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

[1] Proportional
[2] Non-proportional
[3] Hysteresis
[4] peak response
[5] bifurcation
[6] Poincare´ section

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

$$\varepsilon = e + \frac{\theta}{3} I$$
$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D I \quad (1)$$

که در اینجا e کرنش انحرافی، θ کرنش حجمی، σ_s تنش انحرافی، σ_D تنش حجمی و I تانسور واحد می‌باشد.

سوزا تابع انرژی آزاد هلمهولتز را برای مدل‌سازی رفتار آلیاژ حافظ شکل چند بلوری به‌کار برد که به‌صورت زیر بیان می‌گردد [6]:

$$\Psi(e, e^{\mathrm{tr}}, T) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|e - e^{\mathrm{tr}}\|^2 + \tau_M(T)\|e^{\mathrm{tr}}\| + \frac{h^{\mathrm{tr}}}{2}\|e^{\mathrm{tr}}\|^2 + I_{\varepsilon_L}(e^{\mathrm{tr}}) \quad (2)$$

که در این بیان G,K به ترتیب مدول حجمی و برشی، h^{tr} پارامتر وابسته به سخت‌شوندگی ماده طی تحول تغییر فاز، $\tau_M(T)$ یک تابع صعودی یکنواخت و مثبت از دما معروف به تابع ماکسول، $\|\ \|$ علامت نرم بردار یا ماتریس و $I_{\varepsilon_L}(e^{\mathrm{tr}})$ تابعی از کرنش تغییر فاز به منظور ارضا قیود، در نرم تغییر فاز کرنشی می‌باشد.

از رابطه انرژی آزاد هلمهولتز معادلات حاکم بر رفتار ماده به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sigma_D = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(e, e^{\mathrm{tr}}, T) = K\theta \quad (3)$$

$$\sigma_s = \frac{\partial \psi}{\partial e}(e, e^{\mathrm{tr}}, T) = E(e - e^{\mathrm{tr}}) \quad (4)$$

$$\sigma_X \in \frac{\partial \psi}{\partial e^{\mathrm{tr}}}(e, e^{\mathrm{tr}}, T) = \sigma_s - \left(\tau_M(T)\partial\|e^{\mathrm{tr}}\| + h^{\mathrm{tr}}\|e^{\mathrm{tr}}\| + \partial I_{\varepsilon_L}(e^{\mathrm{tr}})\right) \quad (5)$$

$$\sigma_{th} \in -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(e, e^{\mathrm{tr}}, T) = -\partial\tau_M(T)\|e^{\mathrm{tr}}\| \quad (6)$$

که در آنتنش تغییر فاز σ_X کار مزدوج کرنش انتقال فاز e^{tr} است و σ_{th} به‌نام چگالی آنتروپی تعریف می‌شود. پتانسیل استهلاک معادلات تکاملی برای متغیر داخلی e^{tr} به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{e}^{\mathrm{tr}} = \dot{\zeta}\dfrac{\sigma_X}{\|\sigma_X\|} & \text{(الف)} \\ F(\sigma_X) = \|\sigma_X\| - \mathrm{R} \le 0 & \text{(ب)} \\ \dot{\zeta} \ge 0 & \text{(ج)} \\ \dot{\zeta}F(\sigma_X) = 0 & \text{(د)} \end{cases} \quad (7)$$

که در این معادلات معادله (7-الف) قانون جریان بوده و معادله (7-ب) تابع حد F برحسب تابع نسبی σ_X را بیان می‌کند. روابط (7-ج) و (7-د) شرایط کان- تاکر مسئله می‌باشند که مسئله را به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌نماید.

با استفاده از روش اویلر معکوس انتگرال‌گیری زمانی روی مدل انجام می‌گیرد. بنابراین روابط ساختاری (3-6) به همراه قانون جریان (7) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} (\sigma_D)_{n+1} = K\theta_{n+1} & \text{(الف)} \\ \sigma_{s_{n+1}} = E(e_{n+1} - e^{\mathrm{tr}}_{n+1}) & \text{(ب)} \\ \sigma_{X_{n+1}} = \sigma_{s_{n+1}} - \left(\begin{matrix}\tau_M(T)\partial\|e^{\mathrm{tr}}\| + \\ h^{\mathrm{tr}}\|e^{\mathrm{tr}}\| + \gamma_{n+1}\end{matrix}\right)\dfrac{e^{\mathrm{tr}}_{n+1}}{\|e^{\mathrm{tr}}_{n+1}\|} & \text{(ج)} \\ \gamma_{n+1} \ge 0 & \text{(د)} \\ e^{\mathrm{tr}}_{n+1} = e^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n}} + \Delta\zeta\dfrac{\sigma_{X_{n+1}}}{\|\sigma_{X_{n+1}}\|} & \text{(ص)} \\ \|e^{\mathrm{tr}}_{n+1}\| \le \varepsilon_{\mathrm{L}} & \text{(ط)} \\ \Delta\zeta \ge 0 & \text{(و)} \\ F(\sigma_{X_{n+1}}) = \|\sigma_{X_{n+1}}\| - R \le 0 & \text{(ه)} \\ \Delta\zeta F(\sigma_{X_{n+1}}) = 0 & \text{(ی)} \end{cases} \quad (8)$$

که n+1,n به لحظات زمانی t_n و t_{n+1} و $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_n$ اشاره دارد.

سوزا [6] الگوریتم حل به‌روش نگاشت معکوس[1][20] را برای معادلات حاکم بر رفتار ماده پیشنهاد کرد که حالت الاستیک را پیش‌بینی کرده و حالت غیرالاستیک را تصحیح می‌کند. الگوریتم حل شامل محاسبه با فرض الاستیک بودن حالت ماده و تایید حالت ماده فرض شده با استفاده از تابع قید انتقال فاز F^{tr} برای حالت فرض شده است. اگر حالت پیش فرض درست باشد یعنی $F^{\mathrm{tr}} \le 0$ درحالت الاستیک قرار داریم ولی اگر $F^{\mathrm{tr}} > 0$ در این حالت فرض اولیه نادرست بوده و در حالت غیرالاستیک هستیم و باید فرض اولیه اصلاح گردد.

2-2- استخراج معادلات حرکت

در این بخش معادلات حرکت یک تیر یکسر گیردار که تماما از آلیاژ حافظ شکل ساخته شده، بررسی می‌گردد. "شکل 1" نمای کلی تیر یک سر گیر دار را نشان می‌دهد.

بردار جابجایی و تانسور کرنش براساس تئوری تیر اویلر- برنولی [21] به صورت زیر می‌باشد:

$$U(x,z,t) = u_0(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (9)$$

$$W(x,z,t) = w(x,t) \quad (10)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (11)$$

$$e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0 \quad (12)$$

که در روابط (12,11) هر کدام از اجزای تانسور کرنش برحسب میدان جابجایی بیان شده است.

با استفاده از روابط مربوط به بردار جابجایی و تانسور کرنش و با به‌کارگیری اصل همیلتون توسعه یافته [21] مطابق رابطه (14) می توان معادلات حرکت سیستم را استخراج نمود.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K_e - \delta\psi + \delta W_{EX})dt = 0 \quad (13)$$

در رابطه (13) عبارت‌های K_e، ψ، W_{EX} به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی، انرژی آزاد هلمهولتز و کار ناشی از نیروهای خارجی اعمالی به سیستم می‌باشد. با استفاده از روش حساب تغییرات[2] و با قرار دادن مقادیر هر کدام از

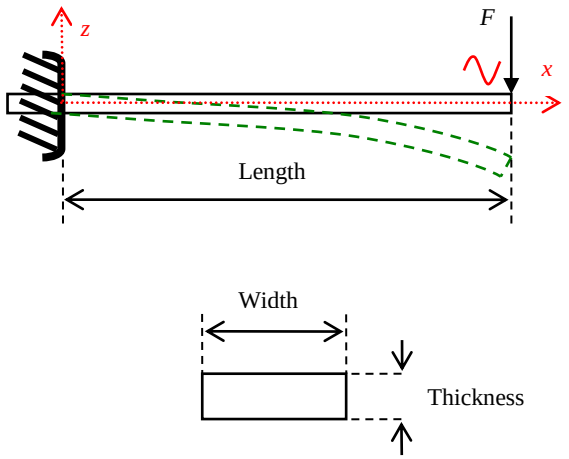


Fig. 1 SMA Cantilever beam

شکل 1 نمای کلی تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظ شکل

[1] Return map
[2] Variation calculus

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

ترم‌های رابطه (13) برحسب میدان جابجایی و کرنش داریم:

$$\delta\psi = \int_V \begin{pmatrix} K(\theta)\delta(\theta) \\ +E\|e-e^{\mathrm{tr}}\|\delta(\|e-e^{\mathrm{tr}}\|) \\ +\tau_M(T)\delta(\|e^{\mathrm{tr}}\|) \\ +h^{\mathrm{tr}}\|e^{\mathrm{tr}}\|\delta(\|e^{\mathrm{tr}}\|) \end{pmatrix} \mathrm{dV} \tag{14}$$

که رابطه (14) بیانگر انرژی آزاد هلمهولتز برحسب میدان کرنش است.

$$\begin{aligned}\delta K_e &= \int_V \rho\left(\delta\dot{U}^{\mathrm{T}}\dot{U} + \delta\dot{W}^{\mathrm{T}}\dot{W}\right) \\ &= \int_V \rho\left(\delta\left(\dot{u}_0(x,t) - z\frac{\partial\dot{w}(x,t)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\dot{u}_0(x,t) - z\frac{\partial\dot{w}(x,t)}{\partial x}\right) + \delta\dot{w}^{\mathrm{T}}\dot{w}\right)\mathrm{dV} \\ &= \int_V \rho\left\{\delta\left(\dot{u}_0(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\dot{u}_0(x,t) - z\delta\left(\dot{u}_0(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial\dot{w}(x,t)}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\dot{w}(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\dot{u}_0(x,t)z + z^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\dot{w}(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial\dot{w}(x,t)}{\partial x} + \delta\dot{w}^{\mathrm{T}}\dot{w}\right\}\mathrm{dV}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\delta W_{\mathrm{EX}} = \int_0^{\mathrm{L}} \delta w^T(x,t) f(x,t) dx \tag{16}$$

و روابط (15-16) به ترتیب بیانگر انرژی جنبشی و کار حاصل از نیروهای خارجی برحسب میدان جابجایی است.

با جایگزینی مقادیر هر کدام از ترم‌های معادلات (16,14) در رابطه اصل همیلتون که به‌صورت رابطه (13) بیان شد، می‌توان معادلات حرکت سیستم به همراه تمام شرایط مرزی، مطابق روابط (18,17) به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}\delta u_0: & -I_0 b\ddot{u}_0 + I_1 b\frac{\partial^2\ddot{w}(x,t)}{\partial x^2} + EA\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - EA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} = bE\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial e^{\mathrm{tr}}}{\partial x}dz \\ \delta w: & \left(-I_0 b\ddot{w} + I_1 b\frac{\partial^2\ddot{u}_0(x,t)}{\partial x^2} + I_2 b\frac{\partial^2\ddot{w}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{Ebh^3}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) = -f(x,t) + Eb\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^2 e^{\mathrm{tr}}}{\partial x^2}zdz\end{aligned} \tag{17}$$

$$\left(Eh\frac{\partial u_0}{\partial x} - E\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{\mathrm{tr}}\,dz\right)\delta u_0\Big|_{x=0}^{x=l} = 0$$

$$\left(-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{\mathrm{tr}}z\,dz\right)\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=l} = 0$$

$$\left\{I_1\left(\ddot{u}_0(x,t)\right) - I_2\left(\frac{\partial\ddot{w}(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}E\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{\mathrm{tr}}z\,dz\right)\right\}\delta w\Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \tag{18}$$

که دسته معادلات (17) معادلات حرکت بوده و اثر آلیاژ حافظ شکل به‌صورت نیروی خارجی در طرف راست این معادلات ظاهر شده است. در رابطه (17) پارامترهای I_2, I_1, I_0 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2)\,dz \tag{19}$$

همچنین تمام شرایط مرزی برای تیر در رابطه (18) آمده است که باید براساس شرایط مرزی هندسی تیر یکسر گیردار ساده‌سازی گردد.

2-3- روش حل مسئله

همان‌گونه که مشاهده می گردد دسته معادلات دیفرانسیل رابطه (17) از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی بوده و برای حل نیاز است به یکی از روش‌های نیمه تحلیلی به‌صورت دسته معادلات معمولی درآید. برای این‌کار از روش گالرکین [21] برای جداسازی مختصه های زمانی و مکانی و تبدیل معادلات حرکت با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود. مطابق این روش حل بردار جابجایی به‌صورت سری حاصل‌ضرب مختصه‌های زمانی در شکل مودهای مکانی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$u_0(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x)\,U_i(t) \tag{20}$$

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_i(x)\,W_i(t) \tag{21}$$

که در آن $U_i(t)$ و $W_k(t)$ به ترتیب مختصه‌های زمانی در جهت جابجایی طولی و عرضی و $\Phi_i(x)$ و $\Psi_k(x)$ به ترتیب شکل مودهای جابجایی های طولی و عرضی می‌باشد.

شکل مودهای طولی و عرضی مربوط به تیر یکسر گیردار برای تئوری تیر اویلر– برنولی قبلا استخراج شده [21] و به‌صورت زیر می باشد.

$$\Phi_i(x) = \sin\frac{(2i+1)\pi\hat{x}}{2} \quad i = 0,1,2\ldots.,n \tag{22}$$

$$\psi_k(x) = (\cos\beta_n\hat{x} - \cosh\beta_n\hat{x}) - \frac{(\cos\beta_n + \cosh\beta_n)}{\sin\beta_n + \sinh\beta_n}(\sin\beta_n\hat{x} - \sinh\beta_n\hat{x})$$

$$\beta_n \cong \frac{(2n-1)\pi}{2} = [1.875104, 4.694091, 7.854757, 10.9956] \tag{23}$$

با قرار دادن این مقادیر به‌جای بردار جابجایی معادلات مشتقات دیفرانسیل معمولی به‌دست می‌آید ولی پیش از آن برای افزایش دقت و سرعت حل باید پارامترهای سیستم بی‌بعد گردد. برای این کار پارامترهای بی‌بعد سیستم به‌صورت زیر معرفی و در معادلات دیفرانسیل لحاظ می‌گردند.

$$\widehat{U} = \frac{U}{L}, \widehat{W} = \frac{W}{L}, \hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{t} = \frac{t}{\tau}, \hat{z} = \frac{z}{L}, \Omega = \omega \times \tau \tag{24}$$

که در این روابط پارامتر بی‌بعدسازی زمانی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau = \sqrt{\frac{I_0 bL^4}{E\bar{I}}} \tag{25}$$

که در این رابطه $\bar{I} = bh^3/12$ می‌باشد.

با اعمال روش گالرکین و جایگزاری پارامترهای بی‌بعد در دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات حرکت سیستم برحسب مختصه‌های زمانی به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\widehat{U}} \\ \ddot{\widehat{W}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \widehat{U} \\ \widehat{W} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} NL_u^{th} \\ NL_w^{th} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ NL^f \end{Bmatrix} = 0 \tag{26}$$

که در آن ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر می‌باشند:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

$$[A_{11}]_{ij} = \int_0^1 \phi_j(\hat{x})\phi_i(\hat{x})d\,\hat{x}$$
$$[A_{12}]_{ij} = -\frac{I_1}{I_0 L}\int_0^1 \phi_j(\hat{x})\frac{\partial\psi_i(\hat{x})}{\partial\hat{x}}d\,\hat{x}$$
$$[A_{21}]_{ij} = \frac{I_1}{I_0 L}\int_0^1 \psi_j(\hat{x})\frac{\partial\phi_i(\hat{x})}{\partial\hat{x}}d\,\hat{x}$$
$$[A_{22}]_{ij} = \int_0^1 \psi_j(\hat{x})\psi_i(\hat{x})d\,\hat{x} - \frac{I_2}{I_0 L^2}\int_0^1 \psi_j(\hat{x})\frac{\partial^2\psi_i(\hat{x})}{\partial\hat{x}^2}d\,\hat{x}$$
$$[B_{11}]_{ij} = -\frac{AL^2}{\bar{I}}\int_0^1 \phi_j(\hat{x})\frac{\partial^2\phi_i(\hat{x})}{\partial\hat{x}^2}d\,\hat{x}$$
$$[B_{22}]_{ij} = \int_0^1 \psi_j(\hat{x})\frac{\partial^4\psi_i(\hat{x})}{\partial\hat{x}^4}d\,\hat{x}$$
$$\left[NL_U^{th}\right]_j = \frac{bL^3}{\bar{I}}\int_0^1 \phi_j(\hat{x})\left(\int_{-\frac{h}{2L}}^{\frac{h}{2L}}\frac{\partial e^{\mathrm{tr}}(\hat{x},\hat{z},\hat{t})}{\partial\hat{x}}d\hat{z}\right)d\,\hat{x}$$
$$\left[NL_W^{th}\right]_j = \frac{bL^3}{\bar{I}}\int_0^1 \psi_j(\hat{x})\left(\int_{-\frac{h}{2L}}^{\frac{h}{2L}}\frac{\partial^2 e^{\mathrm{tr}}(\hat{x},\hat{z},\hat{t})}{\partial\hat{x}^2}d\hat{z}\right)d\,\hat{x}$$
$$\left[NL_f\right]_j = -\frac{L^3}{E\bar{I}}\int_0^1 \psi_j(\hat{x})f(\hat{x},\hat{t})d\,\hat{x} \qquad (27)$$

در رابطه (27) ترم‌های NL_U^{th} و NL_W^{th} اثر تغییر فاز آلیاژ حافظ شکل را بر روی رفتار دینامیکی تیر در لحظات مختلف نشان می‌دهد که تابعی از زمان و مکان می‌باشد. همچنین اثر نیروی خارجی مکانیکی بر سیستم توسط ترم NL_f نشان داده می‌شود که تنها تابعی از زمان است. سایر ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی همه ثابت می‌باشند. با توجه به این‌که ترم‌های NL_U^{th} و NL_W^{th} هم تابع زمان و هم تابع مکان بوده و وابسته به کرنش تغییر فاز سیستم می‌باشندو همچنین مانند مختصه‌های مکانی تیر امکان حدس تابع صریح و تبدیل کرنش تغییر فاز به‌صورت سری حاصل ضرب مختصه زمانی و مکانی وجود ندارد، بنابراین باید ترم‌های NL_U^{th} و NL_W^{th} در هر لحظه از حل به‌صورت یک الگوریتم حل داخلی و با استفاده از روش نگاشت برگشتی به‌صورت عددی محاسبه گردد.

بدین منظور تیر در جهت طولی و در ضخامت به تعداد مناسبی نقطه گسسته‌سازی شده تا مقدار کرنش تغییر فاز در این نقاط در هر زمان محاسبه گردد. با توجه به حل داخلی برای تعیین وضعیت کرنش تغییر فاز در هر لحظه زمانی، روش حل نیومارک [22] برای حل دستگاه دیفرانسیل معمولی به‌کار برده می‌شود. روش حل عددی را می‌توان در فلوچارت حل ارائه شده در "شکل 2" خلاصه کرد.

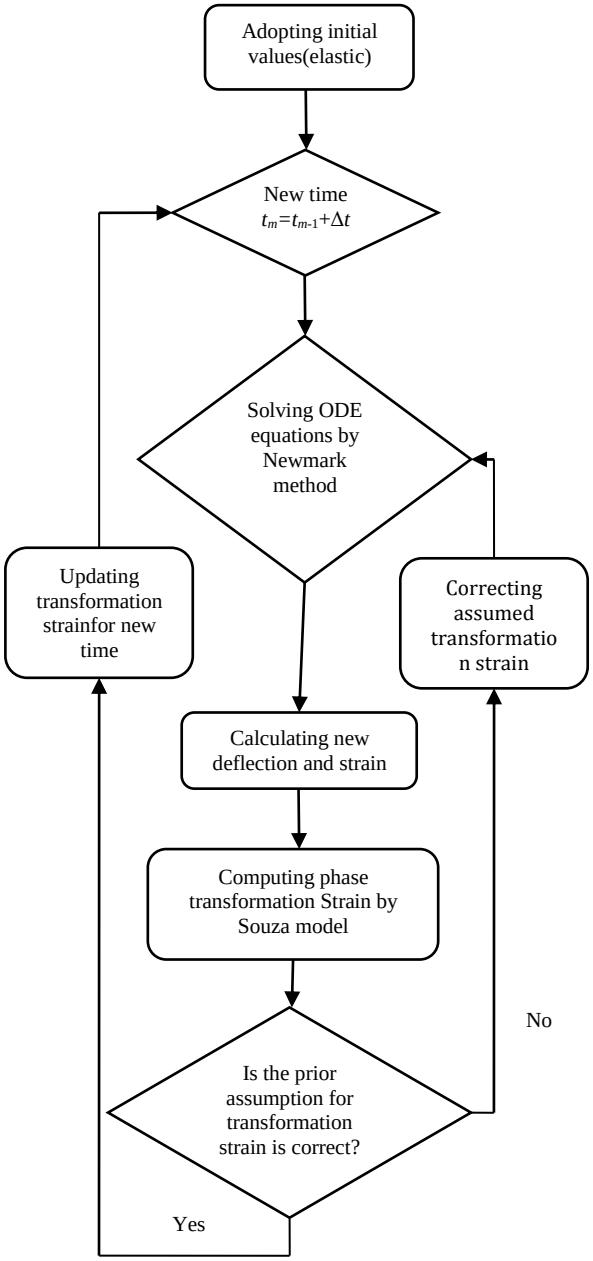


Fig. 2 Flow chart of incremental solution algorithm

شکل 2 فلوچارت الگوریتم حل لحظه‌ای

3- بررسی نتایج عددی برای یک تیر یکسر گیردار

در این بخش مسئله را با استفاده از یک کد برنامه‌نویسی متلب حل نموده و نتایج حاصل از حل برای یک نمونه تیر یکسر گیردار تحت شرایط دینامیکی که از آلیاژ حافظ شکل با مشخصات داده شده [6] ساخته شده را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم

3-1- مشخصات هندسی تیر و مشخصات آلیاژ حافظ شکل

مشخصات هندسی و آلیاژ حافظ شکل به‌کار رفته در ساخت تیر یکسر گیردار در جدول 1 ارائه شده است. لازم به ذکر است از این پس در طول مقاله تمام ابعاد مکانی و زمان به‌صورت بی‌بعد ارائه می‌گردد.

جدول 1 خواص ماده و مشخصات ظاهری تیر یکسر گیردار

Table 1 Material [6] and geometry property of clamped free beam

ابعاد و خواص ماده	مقادیر
مدول الاستیسیته (E)	70 GPa
چگالی (ρ)	4430(kg/m^3)
نسبت پواسون (ν)	0.33
شعاع محدود الاستیک ماده (R)	45MPa
ماکزیمم کرنش ε_L	0.03
دمای محیط (T_0)	285.15 K
پارامتر ماده حافظ شکل(β)	7.5 MPa K^{-1}
پارامتروابسته به سخت شوندگی (h^{tr})	500 MPa
عرض بی‌بعد (b/Length)	0.1
ضخامت بی‌بعد (h/Length)	0.03

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

3-2- صحت‌سنجی نتایج

با توجه به کمبود و در اصل نبود نتایج آزمایشگاهی و عددی برای تیرهای کاملا ساخته شده از جنس آلیاژ حافظ شکل، نتایج این تحقیق با نتایج تیر از جنس آستنیت که رفتار الاستیک دارد، مقایسه شده است. در ابتدا به کمک یک آنالیز همگرایی تعداد نقاط مش‌بندی در جهت طولی و ضخامت تیر انجام گرفته و تعداد نقاط می‌نیمم برای همگرایی نتایج، برابر با 100 نقطه طولی و 60 نقطه در جهت ضخامت بدست آمده است. با این مقادیر مش‌بندی نقاط، در ابتدا یک تحلیل آنالیز مودال انجام گرفته و نتایج این تحلیل با نتایج آنالیز مودال برای تیر الاستیک مقایسه شده است. نتایج حاصل از این مقایسه در جدول 2 ارائه شده است.

نتایج جدول 2 نشان می‌دهد که ماکزیمم اختلاف بین نتایج آنالیز مودال برای دو حالت تیر یکسر گیردار 9٪ بوده که در فرکانس طبیعی اول اتفاق می‌افتد. این مسئله نیز طبیعی است زیرا برای تئوری تیر اویلر- برنولی اثر آلیاژ حافظ شکل فقط به‌صورت نیروی استهلاک خارجی در معادلات ظاهر شده و نقشی در فرکانس طبیعی سیستم نمی‌تواند داشته باشد.

3-3- بررسی ارتعاش آزادتیر

در اولین تحلیل دینامیکی، تیر یکسر گیردار تحت جابجایی اولیه قرار گرفته و رها می‌شود تا اثر آلیاژ حافظ شکل بر رفتار ارتعاشی آزاد تیر بررسی گردد.شرایط اولیه اعمال شده بر تیر به گونه‌ای است که جابجایی اولیه تیر منطبق بر شکل مود اول تیر بوده و میزان جابجایی اولیه به اندازه‌ای می‌باشد که قسمتهایی از تیر وارد تغییر فاز شده باشد. "شکل 3" مختصه‌های زمانی 5 مود اول در جهت طولی و در جهت خیز تیر را نشان می‌دهد. مطابق همین نمودار مشخص است که فقط مختصه زمانی مود اولی در جهت خیز مختصه غالب بوده و مخصوصا از اثر مختصه‌های طولی می‌توان صرف‌نظر کرد.

برای مشاهده میزان اثر آلیاژ حافظ شکل بر استهلاک انرژی در ارتعاش آزاد تیر یکسر گیردار، ارتعاش انتهای آزاد تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. "شکل 4" ارتعاش انتهای آزاد تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظ شکل را با ارتعاش آزاد تیر یکسر گیردار با همان شرایط ولی از نوع الاستیک با مشخصات ماده فاز آستنیت نشان می دهد.

همان‌گونه که مشاهده می‌گردد هر دو تیر با یک جابجایی اولیه برابر شروع به ارتعاش کرده ولی اثر هیسترزیس ایجاد شده توسط آلیاژ حافظ شکل باعث استهلاک انرژی جنبشی تیر شده و این امر تا جایی ادامه می‌یابد که تمام نقاط تیر در منطقه الاستیک ارتعاش کند.

مقایسه دو نمودار در "شکل 4" همچنین نشان از این مسئله دارد که اثر آلیاژ حافظ شکل بر فرکانس طبیعی تیر تاثیری نداشته و در نهایت هر دو تیر الاستیک و تیر از جنس آلیاژ حافظ شکل در منطقه الاستیک هم فرکانس هستند. این رفتاری است که از تیر آلیاژ حافظ شکل در محدوده نوسانات

جدول 2 مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیر یکسر گیردار از آلیاژ حافظ شکل با تیر الاستیک

Table 2 Comparison of natural frequencies of SMA beam with elastic beam

شماره مود	فرکانس تیرحافظ شکل (Hz)	فرکانس تیرالاستیک (Hz)	درصد اختلاف
1	0.5596	0.6142	9%
2	3.5056	3.8340	8%
3	9.8069	10.6691	8.9%
4	19.1897	20.7220	8%
5	31.7049	33.8714	6%

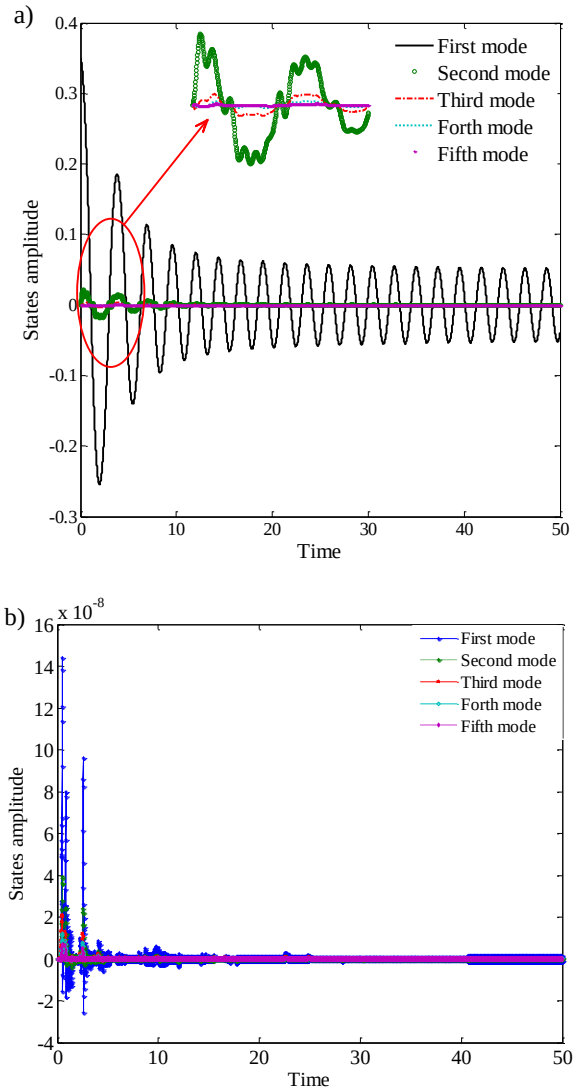


Fig. 3 The time history of a) transverse vibration states b) longitudinal vibration states

شکل 3 منحنی زمانی مختصه‌های الف) در جهت ارتعاش عرضی تیر ب) در جهت ارتعاش طولی

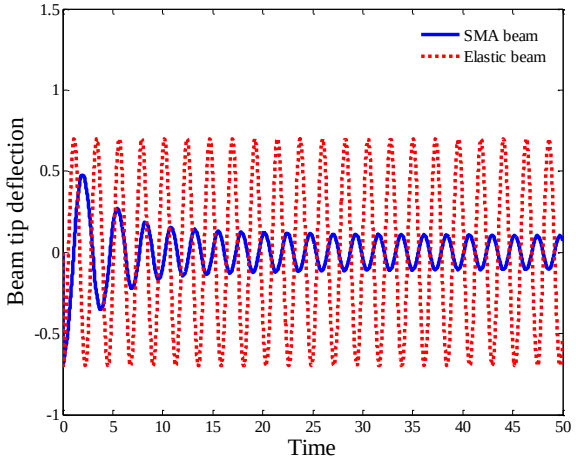


Fig. 4 The time history of beam tip deflection of SMA and elastic beam

شکل 4 منحنی زمانی ارتعاش آزاد تیر از جنس آلیاژ حافظ شکل و الاستیک

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

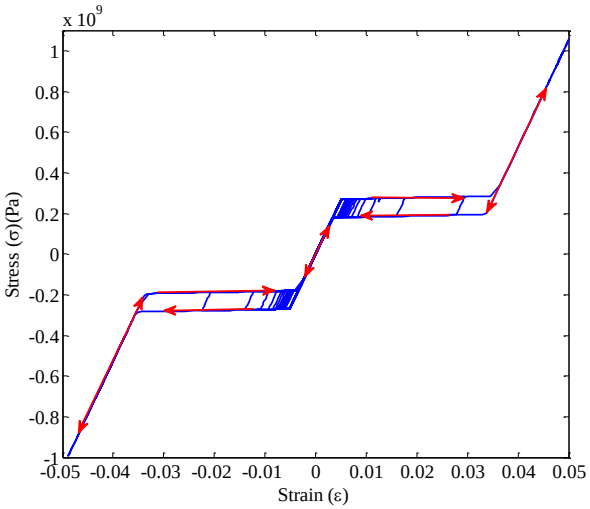


Fig. 5 Strain-Stress diagram for top point on clamped end

شکل 5 نمودار تنش- کرنش برای نقطه بالایی روی سر گیردار تیر

الاستیک قابل انتظار بوده که این نیز خود می‌تواند به‌عنوان محک خوبی برای صحت‌سنجی معادلات حرکت استخراج شده نیز باشد.

همان‌طور که قبلا اشاره شد عامل اصلی استهلاک انرژی سیستم در سازه‌های از جنس آلیاژ حافظ شکل ایجاد پدیده هیستریزیس است. برای بررسی این پدیده منحنی تنش-کرنش مربوط به نقطه فوقانی سر گیردار تیر در "شکل 5" نشان داده شده است. رفتار هیستریزیس آلیاژ حافظ شکل در طول ارتعاش تیر در این منحنی به‌وضوح دیده می‌شود به‌طوری که منحنی تنش-کرنش در نقطه مورد بحث در مراحل اولیه ارتعاش حلقه‌های بیرونی را طی کرده و به‌علت خاصیت غیرخطی ماده حلقه‌های منحنی تنش کرنش بر هم منطبق نبوده و تولید حلقه‌های هیسترزیس می‌کند. با افزایش زمان ارتعاش این حلقه‌ها به حالت به هم نزدیک و طول حلقه‌ها کوتاه‌تر می‌شود و آنقدر این عمل ادامه می‌یابد تا حلقه‌ها بسیار کوچک شده یا عملا از بین می‌رود. در این حالت دیگر ارتعاش تیر در محدوده الاستیک صورت گرفته و دامنه ارتعاش ثابت می‌ماند.

از این مرحله به بعد استهلاک انرژی عملا نزدیک به صفر رسیده و چون در تحلیل سیستم دارای میرایی لحاظ نشده بنابراین ارتعاش با دامنه ثابت در محدوده الاستیک ادامه پیدا می‌کند. تمام این مراحل توسط فلش‌های نشان داده شده در "شکل 5" قابل مشاهده است.

بررسی مناطق تحت تاثیر تغییر فاز ناشی از رفتار شبه‌الاستیک تیر موردی است که کمتر در تحقیقات دیگر مورد بررسی قرار گرفته [19,17,16] و تنها به بررسی رفتار نقاط یا مقاطع خاصی از تیر اکتفا شده است. برای به‌دست آوردن دید بهتر نسبت به اثر تغییر فاز بر رفتار دینامیکی تیر و همچنین مناطق تحت تاثیر تغییر فاز سه مقطع زمانی تیر را انتخاب کرده و پارامترهای تنش و کرنش و کرنش تغییر فاز را در طول تیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

"شکل 6" در سه مقطع زمانی، خیز تیر را نشان می‌دهد که شامل لحظه اولیه شروع به ارتعاش، لحظات مربوط به پیک ارتعاشی در حالتی که تیر تحت اثر تغییر فاز است و در نهایت زمانی که تیر در حال ارتعاش در محدوده الاستیک می‌باشد. هدف بررسی وضعیت کانتورهای تنش، کرنشو کرنش تغییر فاز در این مقاطع زمانی است. همزمان توزیع کرنش و کرنش تغییر فاز در لایه های مختلف تیر بررسی می‌گردد.

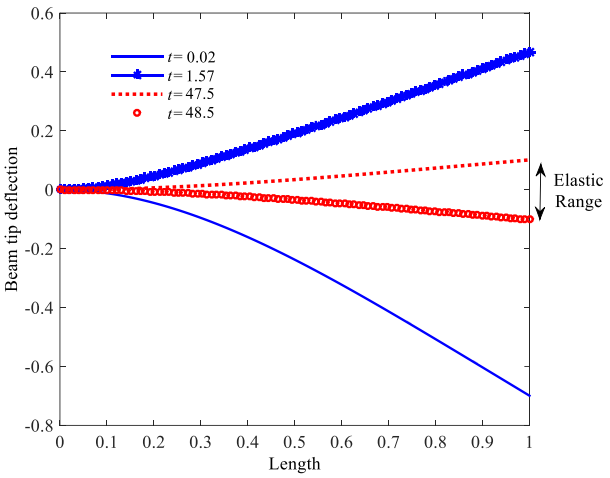


Fig. 6 Deflection of beam for three times

شکل 6 نمودار خیز تیر برای چهار مقطع زمانی

"شکل 7" پراکندگی کرنش در طول تیر را برای چهار مقطع مختلف زمانی اخیر نشان می‌دهد. مطابق شکل ماکزیمم کرنش در این مقاطع زمانی در انتهای گیردار تیر اتفاق می‌افتد. "شکل 7 الف" مربوط به لحظه زمانی شروع ارتعاش است که تیر تحت جابجایی اولیه مطابق "شکل 6" قرار گرفته است و مطابق همین نمودار با گذشت زمان ارتعاشی دامنه کرنش آنقدر کم می‌شود تا تیر در محدوده الاستیک مطابق "شکل 7 ب" نوسان کند. در "شکل 8" توزیع کانتور کرنش در طول تیر نشان داده شده است. کانتور کرنش برای این مقاطع زمانی در انتهای گیردار تیر در نقاط فوقانی و تحتانی مقطع ماکزیمم بوده و در تار خنثی تقریبا صفر است.

علاوه بر این هر دو نمودار "شکل 7و8" نشان می‌دهند که در سر آزاد تیر کرنش تقریبا صفر است و ماکزیمم خیز تیر در آن نقطه اتفاق می افتد که چنین رفتاری از تیر یکسر گیردار انتظار می‌رود.

توزیع کرنش تغییر فاز در لایه های مقطع تیر برای سه مقطع زمانی در "شکل 9" نمایش داده شده است.

این نمودارها از این جهت حائز اهمیت است که سیر مراحل کاهش و در

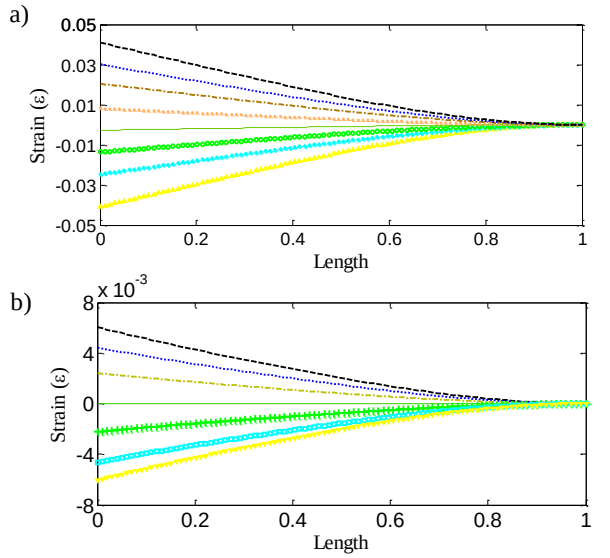


Fig. 7 Strain in layers of cross section a) t=1.57 b) t=47.5

شکل 7 کرنش در لایه های مختلف مقطع برای زمان های الف)57.1 ب)5.47

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

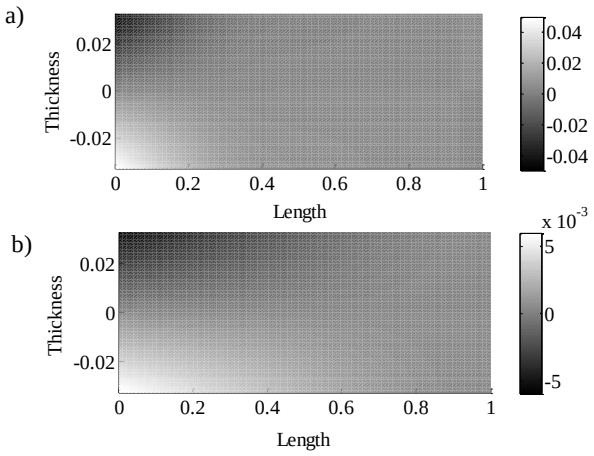


Fig. 8 Strain contour map along beam a) t=1.57 b) t=47.5

شکل 8 منحنی توزیع کانتورکرنش در طول تیر در زمان الف)57.1 ب)5.47

نهایت محو شدن کرنش تغییر فاز در انتهای گیردار تیر و حوزه اثر فاز کرنش تغییر فاز در طول تیر را نشان می‌دهد. مطابق نمودارهای "شکل 9" مشاهده می‌گردد که اثر تغییر فاز در مراحل اولیه ارتعاش و در مقاطع پیک زمانی در طول تیر در نقاط اطراف سر گیردار تیر موجود است و هر چه از سر گیردار دورتر می‌شویم فاز اشباع کمتر شده و از مقاطع معینی دیگر فاز اشباع نداریم و فقط تغییر فاز داریم. هر چه به طرف سر آزاد تیر حرکت می‌کنیم تغییر فاز هم کمتر شده و در نهایت در سر آزاد تیر تغییر فاز نیز محو شده و برابر صفر می‌شود.

بررسی پراکندگی تنش در مقاطع مختلف تیر و در طول تیر در نمودارهای "شکل 10" نمایش داده شده است. در این شکل کانتور زمانی تنش برای سه مقطع زمانی ترسیم شده است. گسترش تنش در این نمودار مناطق کششی- فشاری را در مقاطع مختلف نمایش می‌دهد. همچنین این نمودارها بیانگر وجود ماکزیمم تنش در مقطع گیردار و می‌نیمم تنش در مقطع آزاد برای تیر یکسر گیردار است.

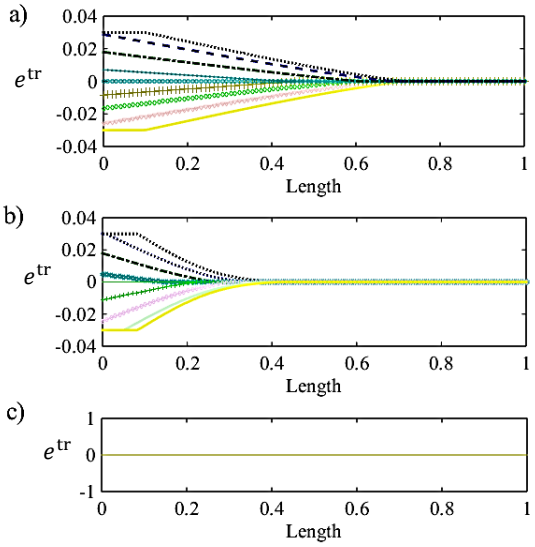


Fig. 9 Transformation strain in layers of cross section a) t=0.02b) t=1.57 c) t=47.5

شکل 9 کرنش تغییر فاز در لایه‌های مختلف مقطع برای زمان‌های الف) 0.02 ب) 1.57 ج) 47.5

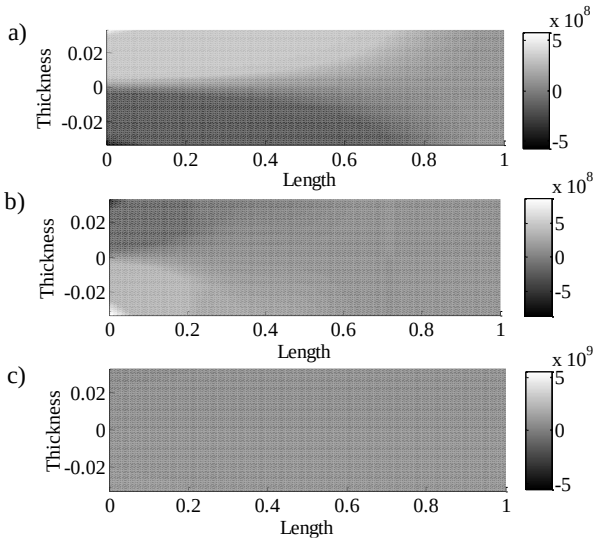


Fig. 10 Stress contour map along beam a) t=0.02 a) t=1.57 c) t=47.5

شکل 10 منحنی توزیع کانتور تنش در طول تیر در زمان الف) 0.02 ب) 1.57 ج) 47.5

همان‌طور که در بخش استخراج معادلات اشاره شد با توجه به ارائه روش جدیدی در حل مسائل دینامیکی سازه‌های با جنس آلیاژ حافظ شکل، امکان دسترسی به مختصه‌های زمانی و در نتیجه امکان آنالیز پایداری و همچنین کنترل سیستم فراهم شده است. با استفاده از این قابلیت می‌توان نمودارهای فازی و مقاطع پوانکاره را رسم و رفتار سیستم را بحث و بررسی کرد.

"شکل 11" نمودارهای فازی و مقطع پوانکاره برای جابجایی انتهای تیر را نمایش داده است. این نمودارها نشان می‌دهند که در لحظات اول ارتعاش تیر مقداری اغتشاش در رفتار ارتعاشی دیده می‌شود ولی در انتها منحنی فاز به یک سیکل حدی در محدوده الاستیک با رفتار پایدار می‌رسد. مقطع پوانکاره در "شکل 11 ب" نیز به صورت یک نقطه درآمده که بیانگر رفتار ارتعاشی پایدار سیستم می‌باشد.

3-4- بررسی پارامتریک

اثر متغیرهای کنترلی مدل ماده بر رفتار دینامیکی تیر یکسر گیردار در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. متغیرهای کنترلی آلیاژ حافظ شکل در مدل ماده سوزا کرنش و دما می‌باشند. برای بررسی اثر کرنش، تیر را تحت کرنش‌های اولیه متفاوت که به‌صورت جابجایی اولیه به سیستم اعمال می‌شود قرار داده و اثر این جابجایی‌های اولیه بر روی رفتار دینامیکی تیر یکسر گیردار معادل اثر کرنش اولیه اعمالی بر سیستم است.

برای این منظور سه جابجایی اولیه به تیر اعمال شده و رفتار ارتعاشی آزاد تیر در اثر این جابجایی‌های اولیه مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد.

"شکل 12" منحنی زمانی ارتعاش آزاد انتهای تیر را به‌ازای سه جابجایی اولیه اعمالی به سر آزادتیر نشان می‌دهد. این نمودار بیانگر این است که میزان استهلاک انرژی سیستم و بالطبع میرایی تیر بسته به جابجایی اولیه اعمالی، متغیر بوده و به‌گونه‌ای تغییر می‌کند که در نهایت تیر در محدوده الاستیک نوسان کند. از این خاصیت می‌توان برای کنترل دامنه ارتعاشات سیستم و یا به عبارتی کنترل کرنش اولیه وارد شده به سیستم استفاده کرد.

نمودارهای "شکل 12" همچنین بیانگر این است که در سیستم با جابجایی‌های اولیه متفاوت، اثر هیستریزیس آنقدر انرژی از سیستم تلف می‌کند تا درنهایت به محدوده الاستیک برسد ولی این کاهش دامنه اثری بر

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

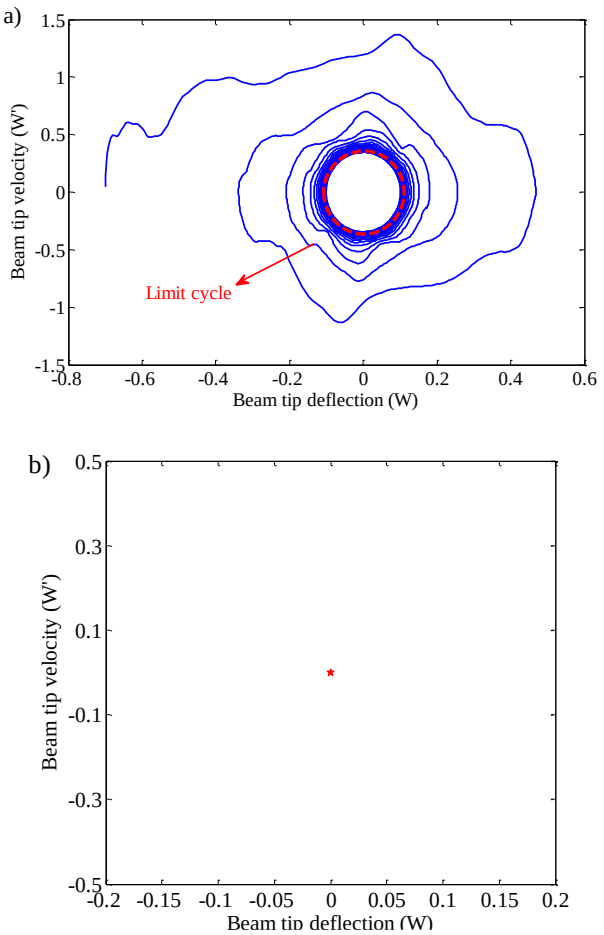


Fig. 11 a) Phase-portrait for beam tip b) Poincare section for beam tip

شکل 11 الف) منحنی فاز برای ارتعاش انتهای تیر ب) مقطع پونکاره برای ارتعاش انتهای تیر

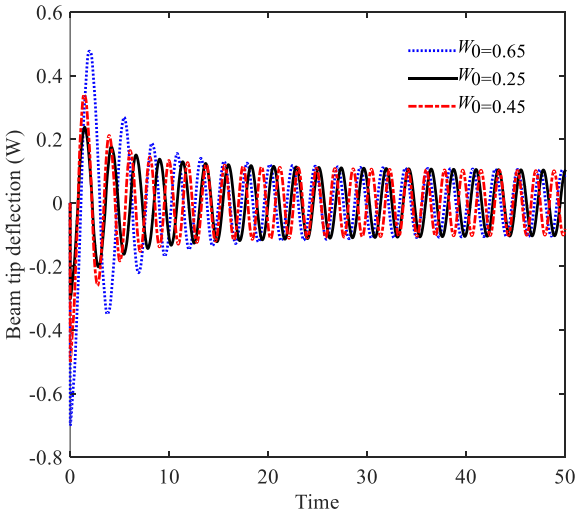


Fig. 12 Time history for beam tip deflection with various initial conditions

شکل 12 منحنی‌های جابجایی انتهای تیر به ازای شرایط اولیه متفاوت

فرکانس طبیعی سیستم ندارد و نهایتا یک اختلاف فاز در ارتعاش تیر به ازای شرایط اولیه متفاوت ایجاد می‌کند.

حال پارامتر بعدی کنترلی که دما می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این‌جا دما را برای سه حالت دمایی بررسی می‌کنیم که دو حالت مربوط به رفتار حافظ شکلی و یک حالت مربوط به رفتار شبه‌الاستیک است تا اثر دما بر ارتعاش آزاد در این دماها را تجزیه و تحلیل کنیم. براساس داده‌های جدول 1 می‌توان دمای محیط را آن‌چنان انتخاب کرد تا تیر در حالت حافظ شکلی و یا شبه الاستیک قرار گیرد. سه دمای کاری موردنظر ما برای بررسی پارامتری دما عبارتند از: $T_1 = 253.15\text{K}$ و $T_2 = 256\text{K}$ و $T_3 = 260\text{K}$ که دو دمای اولی باعث ایجاد رفتار حافظ شکلی و دمای سوم باعث به‌وجود آمدن رفتار شبه‌الاستیک در تیر می‌شود.

در حالت اول یعنی $T_1 = 253.15\text{K}$ سه نمودار جابجایی انتهای تیر و منحنی تنش- کرنش در انتهای گیردار و جابجایی تیر برای سه مقطع زمانی نشان داده شده است.

در این حالت ارتعاش آزادتیر به آن معنای کلاسیک وجود ندارد زیرا تیر که دارای خیز اولیه بوده بعد از رها شدن به حالت اول بر نمی‌گردد و فقط حول نقطه با کرنش پسماند نوسانات کوچک انجام می‌دهد. این مسئله را می‌توان به‌وضوح در "اشکال 13 الف و 13 ج" مشاهده کرد. در "شکل 13ب" منحنی تنش-کرنش برای نقطه بالایی انتهای گیردار تیر نمایش داده شده است. منحنی بیانگر این است که شروع ارتعاش از منطقه تغییر فاز بوده و به علت به‌وجود آمدن کرنش پسماند تیر حول یک نقطه زیر حالت آزاد مطابق "شکل 13 الف و 13 ج" نوسان با دامنه بسیار کم دارد. پدیده هیستریزیس مطابق "شکل 13ب" به‌صورت حلقه‌های کوچک حول کرنش پسماند ایجاد شده، تشکیل می‌شود.

در حالت دوم یعنی $T_2 = 256°\text{K}$ سه نمودار جابجایی انتهای تیر و منحنی تنش- کرنش در انتهای گیردار و جابجایی تیر برای سه مقطع زمانی در "شکل 14" نشان داده شده است.

در این حالت هم تیر رفتار حافظ شکلی از خود نشان می‌دهد. در این حالت مطابق "شکل 14ج" بعد از رها کردن، تیر مقدار بیشتری نسبت به حالت قبل به حالت آزاد خود نزدیک می شود.

در حالت سوم یعنی $T_3 = 260°\text{K}$ تیر کاملا در حالت رفتار شبه‌الاستیک قرار دارد. نوسان حول حالت آزاد تیر انجام می‌شود. سرعت استهلاک انرژی و رسیدن به ارتعاش در محدوده الاستیک خیلی بالاست و حلقه‌های هیستریزیس مطابق منحنی‌های "شکل 15ب" مسیرهای کامل‌تری را طی می‌کند.

ارتعاش از لحظه رها شدن سریعا تحت تاثیر میرایی سیستم وارد منطقه الاستیک می‌شود و در آن منطقه نوسان حول شکل اولیه تیر انجام می‌شود که از "شکل 15 ج" نیز این مسئله مشهود است زیرا برخلاف حالت قبل نوسان حول حالت آزاد تیر یعنی حالت جابجایی صفر اتفاق می‌افتد. نقطه شروع نوسان در منطقه تغییر فاز قرار دارد که در "شکل 15ب" قابل مشاهده است.

مشابه حالت‌های قبل شروع ارتعاش تیر همراه با تغیر فاز است که این مسئله را می‌توان در نمودار تنش- کرنش نقطه بالای مقطع گیردار تیر مشاهد کرد. تفاوت در این حالت نسبت به رفتار حافظ شکلی در تشکیل حلقه‌های بدون کرنش پسماند است یعنی منحنی تنش –کرنش در حالت نهایی حول تنش و کرنش صفر تشکیل می شود.

4- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق ارتعاش آزاد تیر یکسر گیردار از جنس آلیاژ حافظ شکل مورد بررسی قرار گرفت. روشی نوین در استخراج معادلات حرکت به‌کار گرفته شد

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

تا معادلات حرکت سیستم به‌صورت کوپل با کرنش تغییر فاز به‌دست آید. برای حل مسئله از روش گالرکین برای تبدیل معادلات مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شد. روش حل عددی مسئله شامل حل عددی دستگاه معادلات با استفاده از روش نیومارک بود که با روش نگاشت معکوس برای تعیین فاز آلیاژ حافظ شکل ترکیب شده است.

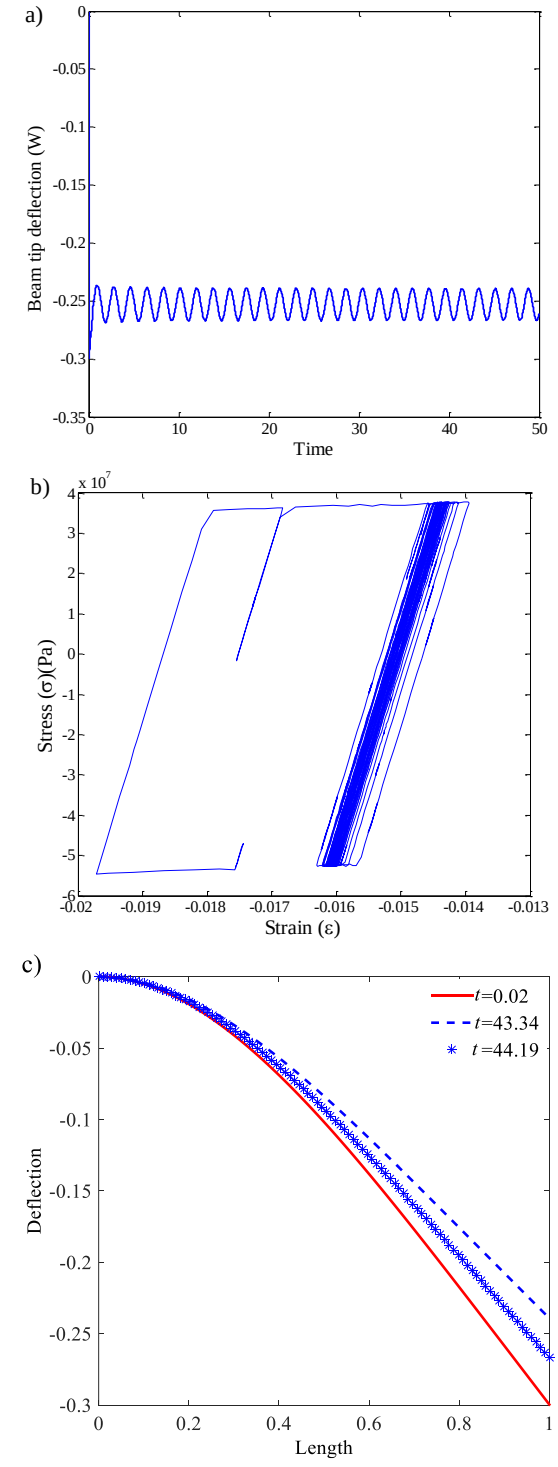


Fig. 13 Temperature parametric study inoperating temperature T_1 a) time history of beam tip b)strain-stress diagram c)three time deflections

شکل 13 بررسی پارامتریک دمایی در دمای T_1 الف) منحنی زمانی خیز انحنای تیر ب) منحنی تنش-کرنش ج) خیز برای سه مقطع زمانی

نتایج حاصل از حل ارتعاش آزادتیر آلیاژ حافظ شکل با فرض رفتار شبه الاستیک، حاکی از استهلاک انرژی سیستم در طی زمان ارتعاش است که در اثر ایجاد هیستریزیس به‌وجود می‌آید.پدیده هیسترزیس ناشی از شکستگی منحنی تغییر فاز سیستم بوده که باعث به‌وجود آمدن حلقه های هیسترزیس می‌گردد. این پدیده غیرخطی باعث استهلاک انرژی مکانیکی تیر شده که در

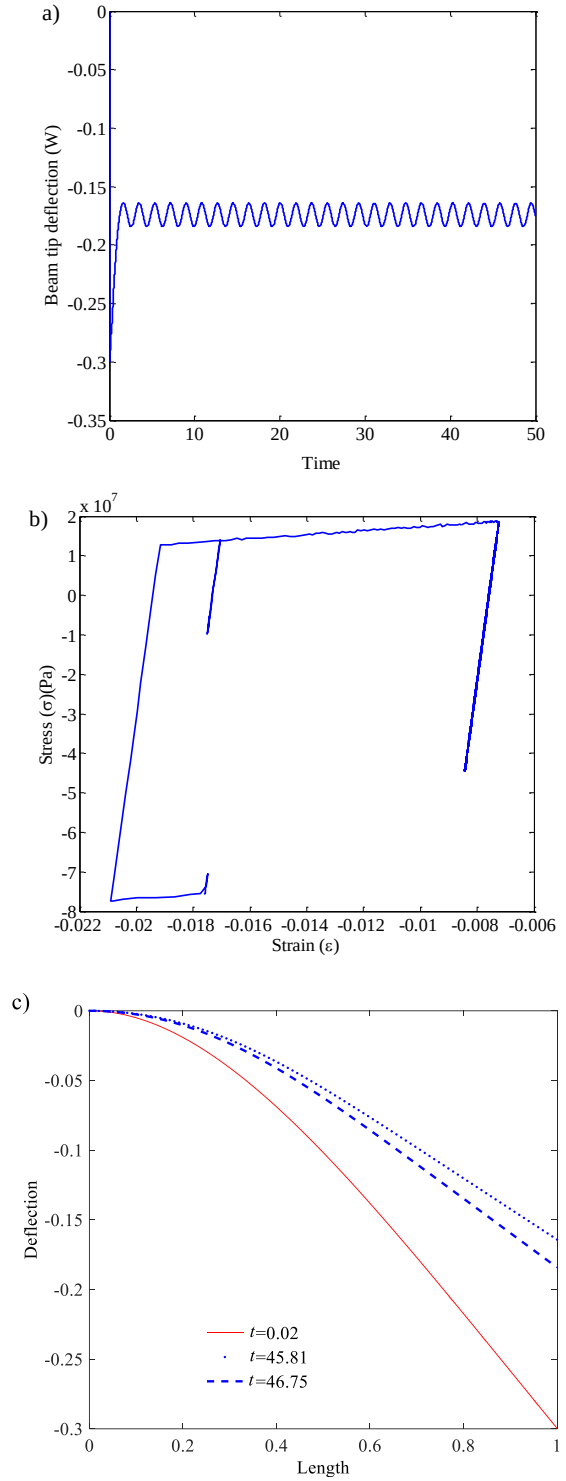


Fig. 14 Temperature parametric study in operating temperature T_2 a) time history of beam tip b)strain-stress diagram c)three time deflections

شکل 14 بررسی پارامتریک دمایی در دمای T_2 الف) منحنی زمانی خیز انحنای تیر ب) منحنی تنش-کرنش ج) خیز برای سه مقطع زمانی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]

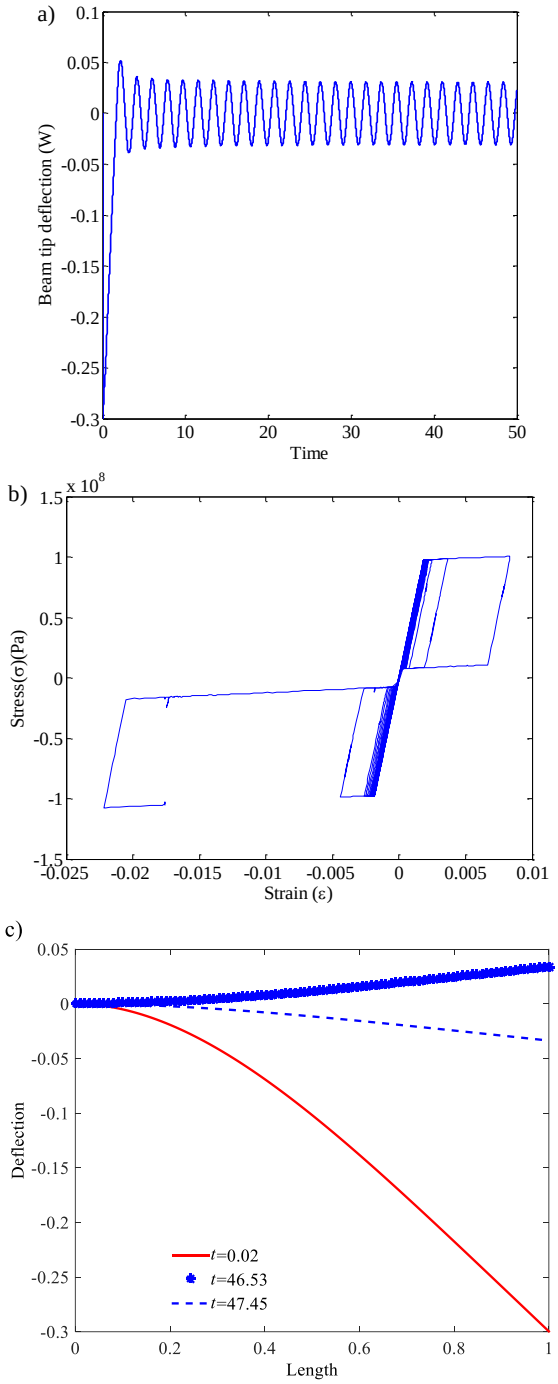


Fig. 15 Temperature parametric study in operating temperature T_3 a)time history of beam tip b) strain-stress diagram c) three time deflections

شکل 15 بررسی پارامتریک دمایی در دمای T_3 الف) منحنی زمانی خیز انحنای تیر ب) منحنی تنش-کرنش ج) خیز برای سه مقطع زمانی

منحنی‌های مربوط به ارتعاشات آزاد کاملا آشکار می‌باشد. دامنه ارتعاشات سیستم در فاصله زمانی بسیار کمی به مقدار ماندگار سیستم همگرا می‌گردد. توزیع کرنش تغییر فاز، کرنش و تنش در طول تیر برای مقاطع خاصی از ارتعاش در نقاط مختلف تیر بررسی گردید و نشان داده شد که میزان و سرعت میرایی سیستم بستگی به میزان تغییر فاز اولیه ایجاد شده در لحظه شروع ارتعاش دارد و استهلاک انرژی آنقدر ادامه می‌یابد تا تیر در محدوده الاستیک ارتعاش یابد. اثر پارامترهای کنترلی شامل کرنش اولیه و دما بر ارتعاش آزاد تیر مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که با افزایش جابجایی اولیه انتهای آزاد تیر و در نتیجه افزایش کرنش اولیه تیر، سرعت و میزان استهلاک انرژی افزایش می‌یابد. همچنین اثر دما بر ارتعاش آزاد تیر با در نظر گرفتن دمای کاری مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که برای دمای کاری با رفتار حافظ شکلی تیر حول حالت با کرنش پسماند ارتعاش می‌کند و یک تغییر شکل دائمی در تیر شکل می‌گیرد. با افزایش دما و ایجاد رفتار شبه‌الاستیک کرنش پسماند از بین رفته و تیر حول حالت آزاد خود نوسان نموده و به‌علت به‌وجود آمدن پدیده هیسترزیس دامنه نوسان کم شده و درنهایت تیر یکسر گیردار در محدوده الاستیک حول نقطه آزاد ارتعاش می‌کند. با افزایش دما در حالت شبه‌الاستیک منحنی‌های هیستریزیس مسیرهای بلندتر و کاملتری را طی می‌کنند و میزان میرایی افزایش می‌یابد.

5- مراجع

[1] C. A. Rogers, Intelligent material systems—the dawn of a new materials age, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 4, pp. 4-12, 1993.
[2] C. M. Wayman, K. Ōtsuka, Shape memory materials:pp 215-220 , Cambridge ,Cambridge University Press, 1998.
[3] T. W. Duerig, K. Melton, D. Stöckel, *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*: Butterworth-Heinemann, 2013.
[4] C. Liang, C. A. Rogers, One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials, Journal of intelligent material systems and structures, Vol. 8, No. 4, pp. 285-302, 1997.
[5] L. C. Brinson, One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 4, pp. 229-242, 1993.
[6] A. C. Souza, E. N. Mamiya, N. Zouain, Three-dimensional model for solidsundergoing stress-induced phase transformations, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 17, pp. 789-806, 1998.
[7] M. Panico, L. Brinson, A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 55, pp. 2491-2511, 2007.
[8] Q. Chen, C. Levy, Active vibration control of elastic beam by means of shape memory alloy layers, *Smart Materials and Structures*, Vol. 5, pp. 400, 1996.
[9] A. Gholampour, M. Ghassemieh, J. Kiani, State of the art in nonlinear dynamic analysis of smart structures with SMA members, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 75, pp. 108-117, 2014.
[10] Z. Feng, D. Li, Dynamics of a mechanical system with a shape memory alloy bar, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 7, pp. 399-410, 1996.
[11] D. Bernardini ,G. Rega, Thermomechanical modelling, nonlinear dynamics and chaos in shape memory oscillators, *Mathematical and Computer Modellingof Dynamical Systems*, Vol. 11, pp. 291-314, 2005.
[12] M. Savi, P. Pacheco, Chaos and hyperchaos in shape memory systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 12, pp. 645-657, 2002.
[13] L. G. Machado, M. A. Savi, P. M. C. Pacheco, Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 5139-5156, 2003.
[14] D. C. Lagoudas, L. G. Machado, M. Lagoudas, Nonlinear vibration of a one-degree of freedom shape memory alloy oscillator: A numerical-experimental investigation, in Proceeding of 46th Structural Dynamics and Materials Conference. Austin-Texas, pp. 2119, 18-21 April 2005.
[15] X. Y. Tsai, L. W. Chen, Dynamic stability of a shape memory alloy wire reinforcedcomposite beam, *Composite Structures*, Vol. 56, pp. 235-241, 2002.
[16] S. Khalili, M. B. Dehkordi, E. Carrera, A nonlinear finite element model using a unified formulation for dynamic analysis of multilayer composite plate embedded with SMA wires, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 635-645, 2013.
[17] S. Hashemi, S. Khadem, Modeling and analysis of the vibration behavior of a shape memory alloy beam, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 44-52, 2006
[18] A. Damanpack, M .Bodaghi, M. Aghdam, M. Shakeri, On the vibration control capability of shape memory alloy composite beams, *Composite Structures*, Vol. 110, pp. 325-334, 2014.
[19] H. Asadi, M. Bodaghi, M. Shakeri, M. Aghdam, An analytical approach for nonlinear vibration and thermal stability of shape memory alloy hybrid laminated composite beams, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 42, pp. 454-468, 2013.
[20] M. Qidwai , D. Lagoudas, Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1123-1168, 2000.
[21] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*: John Wiley & Sons, 2007.
[22] S. S. Rao , F. F. Yap, *Mechanical Vibrations*, Vol. 4: Prentice Hall Upper Saddle River, 2011.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.12.57.9]