



تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری یک میکروشفت دوار با درنظر گرفتن تئوری تنش کوبل اصلاح شده و اثر میکرواینرسی

سیدعلی قصابی^۱، مجید شاهقلی^{۲*}، محمدرضا ارباب‌تفتی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

۳- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

*تهران، صندوق پستی ۱۳۶۷۸۵-۱۳۶، majid.shahgholi@srttu.edu

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی و پایداری یک میکروشفت دوار مقارن و نامقarn با استفاده از تئوری تنش کوبل اصلاح شده در نزدیکی رزوئناسی اصلی سیستم مطالعه شده است. به کمک اصل هامیلتون معادلات غیرخطی حرکت استخراج شده و به کمک روش مقیاس های چندگانه معادلات حرکت حل شده اند و عبارت های تحلیلی برای فرکانس های طبیعی پیش گشت و پس گشت ارائه شده که تأثیر تئوری تنش کوبل اصلاح شده و اثرات میکرو اینرسی در آن مشهود است. پاسخ فرکانسی سیستم برای مودهای مختلف، نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی، نمودار دامنه بر حسب نابالانسی برای میکروشفت های دوار مقارن و نامقarn مقایسه و بررسی شده است. مشاهده می شود که برای میکروشفت های دوار مقارن و نامقarn با در نظر گرفتن تئوری تنش کوبل اصلاح شده و اثرات میکرو اینرسی دامنه سیستم کاهش می پاید و محل نقاط انشباع سیستم نیز تغییر خواهد کرد. میکروشفت مقارن در حضور تئوری کلاسیک و بدون اثرات میکرو اینرسی در کمترین مقدار ضریب میرایی و میکروشفت نامقارن برای این حالت در بیشترین مقدار ضریب میرایی به حالت کاملاً پایدار می رسد. میکروشفت مقارن در حضور تئوری تنش کوبل اصلاح شده و با اثرات میکرو اینرسی در کمترین مقدار نابالانسی به حالت کاملاً پایدار می رسد در حالی که میکروشفت نامقارن در حضور تئوری کلاسیک و بدون اثرات میکرو اینرسی در بیشترین مقدار نابالانسی به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید؛ بنابراین در نظر گرفتن اثرات مربوط به مقیاس کوچک ناشی از گردابیان های کرشن و گردابیان های سرعت که در تئوری تنش کوبل اصلاح شده منظور شده اند، در تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروشفت های دوار اهمیت دارد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۶ دی ۱۳۹۵

پذیرش: ۲۴ بهمن ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۱۹ فروردین ۱۳۹۶

کلید واژگان:

ارتعاشات غیرخطی و پایداری

میکروشفت دوار

تئوری تنش کوبل اصلاح شده

اثر میکرو اینرسی

Nonlinear vibrations and stability analysis of a micro rotating shaft by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect

Seyed Ali Ghasabi, Majid Shahgholi*, Mohammad Reza Arbabtafti

Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 16785-136 Tehran, Iran, majid.shahgholi@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 December 2016
Accepted 12 February 2017
Available Online 08 April 2017

Keywords:
Nonlinear vibrations and stability
Micro rotating shaft
Modified couple stress theory
Micro inertia effect

ABSTRACT

In this paper stability analysis of a nonlinear micro rotating shaft when the system is near the primary resonances by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect is investigated. The geometric nonlinearities due to classical and non-classical theories (the modified couple stress theory) are considered. Using Hamilton principle, the nonlinear equations of motion are obtained. In order to solve the equations of motion the multiple scales method is used and the analytical expressions are presented for forward and backward frequencies which illustrate the effects of modified couple stress theory and micro inertia effect. The frequency response curves, amplitude versus damping coefficient, amplitude versus total eccentricities etc. are reported. It is seen that due to the modified couple stress theory and micro inertia effect the amplitude of the system decreases and the loci of bifurcation points is changed. Symmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the lowest damping coefficient and asymmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the highest damping coefficient. Symmetrical micro-shaft in the presence of modified couple stress theory and with micro inertia effects becomes completely stable in the lowest total eccentricity and asymmetrical micro-shaft in the presence of classical theory and without micro inertia effects becomes completely stable in the highest total eccentricity. So, considering the small-scale effects due to strain and velocity gradients for analysis of the system is mandatory.

۱- مقدمه

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. A. Ghasabi, M. Shahgholi, M. R. Arbabtafti, Nonlinear vibrations and stability analysis of a micro rotating shaft by considering the modified couple stress theory and micro inertia effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 134-142, 2017 (in Persian)

برای فرکانس‌های طبیعی یک میکروتیر غیردوار براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای دو گونه از شرایط مرزی گوناگون به دست آوردن. آگوز و همکاران [11] ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تابعی هدفمند اویلرینولی را براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه و بررسی کردند. روش ریلی-ریتز برای حل معادلات حرکت مورد استفاده قرار گرفت. این پژوهشگران [12] ارتعاشات خمشی و کمانش میکروتیرهای تابعی هدفمند را که بر بستر الاستیک وینکلر قرار داشت به کمک تئوری گرایدیان کرنش اصلاح شده غیرکلاسیک گردانند. در زمینه ارتعاشات خطی میکروتیرهای دوار نیز کارهایی صورت گرفته است که هاشمی و همکاران [13] ارتعاشات آزاد خطی خمشی میکروتیرهای دوار با سطح مقطع متقارن را براساس تئوری غیرکلاسیک گرایدیان کرنش در کلی ترین حالت که پنج ثابت مرتبه بالای ماده وجود داشت در نظر گرفتند و به کمک تکنیک حل فضای حالت^{۱۴} برخی از فرکانس‌های طبیعی را در شرایط مرزی مختلف به دست آورند. مصطفی و زانگ [14] ارتعاشات خطی یک میکروتیرچرخان را که بر بستر الاستیک قرار داشت به کمک تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه و بررسی کردند و با روش المان اسپکتروال^{۱۵} پاسخ‌های فرکانسی خطی را به دست آورند. با مطالعه کارهای بالا می‌توان نتیجه گرفت که با وجود کارهای بسیاری که در زمینه میکروتیرها انجام شده ولی اثرات غیرخطی مربوط به تنش کوپل اصلاح شده و میکرواینرسی مخصوصاً بر میکروتیرهای دوار (متقارن و نامتقارن) به صورت توانمند بررسی نشده است. در این جا اثرات میکرواینرسی و نیز اثرات هندسه برای یک میکرو شفت دوار که غیرخطی آن از نوع کوتاه‌شدگی است به کمک تئوری گرایدیان کرنش و در حالت خاص آن یعنی تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت.

2- استخراج معادلات حرکت

در شکل 1 یک میکروشفت دوار که بر تکیه‌گاه‌های ساده قرار گرفته است و با سرعت زاویه‌ای θ حول محور X دوران می‌کند نشان داده شده است. XYZ محورهای مختصات عمومی^{۱۶} است که از تار خنثی میکروشفت عبور می‌کند. xYZ محورهای مختصات محلی^{۱۷} است که با جسم حرکت می‌کند. به کمک زوایای اویلر^{۱۸} ψ ، θ ، ϕ ارتباط بین دو محور مختصات عمومی و محلی معلوم خواهد شد. این زوایا از معادلات (1) به دست خواهد آمد [15].

$$\begin{aligned} \psi &= \sin^{-1} \frac{v'}{\sqrt{v'^2 + (1+u')^2}} \\ \theta &= \sin^{-1} \frac{-w'}{\sqrt{w'^2 + v'^2 + (1+u')^2}} \\ \beta &= \phi + \Omega t \end{aligned} \quad (1)$$

باید توجه کنیم که زوایای اویلر تابعی از موقعیت و زمان هستند. دو زوایه اویلر ψ و θ مربوط به خمش و زوایه اویلر β مربوط به پیچش کل است که شامل دو بخش ϕ تغییر شکل برشی^{۱۹} و ترم دیگر مربوط به سرعت زاویه‌ای است. w, v, u به ترتیب جابه‌جایی‌ها در راستای طولی، جابه‌جایی در راستای عرضی y ، جابه‌جایی در راستای عرضی z و علامت^{۲۰} نشان‌دهنده مشتق نسبت به x است.

امروزه المان‌های مهم مهندسی مانند تیر در ابعاد کوچک میکرومتر کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند. سیستم‌های دوار در مقیاس کوچک کاربردهای بسیار زیادی دارند از جمله در سیستم‌های میکرو الکترو مکانیکی^۱، میکرو توربین‌ها، میکرو کمپرسورها... وقتی ابعاد یک المان مهم مهندسی مثل تیر به سمت میکرومتر حرکت می‌کند اتفاقاتی خواهد افتاد که تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته قادر به توضیح آن‌ها نیست. محققان بسیاری بر تئوری‌های غیرکلاسیک نظری کلاسیک نظری تئوری گرایدیان کرنش^۲، تئوری تبدیلات انتگرالی به دست آورند. ناگاراکا و همکاران [2] ارتعاشات اجباری یک روتور دوار نامتقارن با غیرخطی هندسی را برای سرعت‌های نزدیک به سرعت بحرانی اولیه و ثانویه مطالعه و بررسی کردند. حسینی و زمانیان [3] ارتعاشات آزاد یک شفت دوار با غیرخطی از نوع کشیدگی^۳ را به کمک روش‌های مقیاس زمانی چندگانه مورد مطالعه و پژوهش قرار دادند. هر دو فرکانس طبیعی پیش‌گشت و پس‌گشت^۴ جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی تحریک شدند. خادم و همکاران [4] رزونانس‌های اصلی یک شفت دوار با غیرخطی از نوع کوتاه‌شدگی^۵ را مورد مطالعه و پژوهش قرار دادند. آن‌ها روش مقیاس‌های زمانی چندگانه را مستقیم بر معادلات حرکت با مشتق جزیی اعمال کردند و عبارتی تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی پیش‌گشت و پس‌گشت به دست آورند. شاهقلی و همکاران [5] رزونانس‌های اصلی و پارامتریک^۶ یک شفت دوار نامتقارن با غیرخطی از نوع کشیدگی را با در معادلات غیرخطی حاصله را به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه^۷ حل کردند، همچنین [6] رزونانس‌های داخلی ترکیبی و زیرهارمونیک^۸ شفت دوار نامتقارن را مطالعه کردند. برای حل معادلات غیرخطی از روش بالانس هارمونیک^۹ استفاده کردند. ایشان [7] رزونانس‌های اولیه و اصلی شفت نامتقارن را با در نظر گرفتن نوسانات سرعت^{۱۰} مطالعه کردند و تأثیر نوسانات سرعت بر پاسخ سیستم مطالعه و بررسی شد. در زمینه میکروتیرهای غیردوار شوشتري و همکاران [8] یک میکروتیر یکسر-گریدار ویسکو الاستیک که با یک لایه عملگر پیزاولکتریک تحریک خارجی می‌شد تحلیل ارتعاشاتی کردند. مدل تیرشان مدل کلاسیک اویلر برآنولی بود و اثرات مربوط به مقیاس کوچک را که با تئوری‌های غیرکلاسیک بیان می‌شود در نظر نگرفتند. فتحعلی لو و همکاران [9] معادلات حرکت یک بعدی میکرو تیرهای اویلر برآنولی را به کمک اصل هامیلتون^{۱۱} و تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای شرایط مرزی دو سر ساده و دو سر ثابت به دست آورند. روابطی را برای فرکانس‌های طبیعی خطی و شکل مودها به دست آورند. کونگ و همکاران [10] روابطی تحلیلی

¹ MEMS

² Strain Gradient Theory

³ Couple Stress Theory

⁴ Modal Analysis

⁵ Stretching

⁶ Forward and backward frequencies

⁷ Shortening

⁸ Primary and Parametric Resonances

⁹ Multiple Scales Method

¹⁰ Sub Harmonic

¹¹ Harmonic Balance

¹² Speed Fluctuations

¹³ Hamilton's Principle

¹⁴ Steady State

¹⁵ Spectral Element Method

¹⁶ Global Coordinates

¹⁷ Local Coordinates

¹⁸ Euler Angles

¹⁹ Shear Deformation

انحنای میکروشفت یا همان روابط (8) جایگذاری شود و به کمک بسط تیلور^۶ تا مرتبه سوم بسط داده شود روابط انحنای میکروشفت بر حسب جایه‌جایی‌ها به دست خواهد آمد. رابطه (2) انرژی پتانسیل کرنشی را می‌توان به صورت رابطه (10) نیز نوشت.

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l (A_1 e^2 + D_1 k_1^2 + D_2 k_2^2 + D_3 k_3^2) dx \quad (10)$$

در این رابطه D_3, D_2, D_1, A_1 به ترتیب سفتی محوری، سفتی پیچشی، سفتی خمی حول محور y و سفتی خمی حول محور z است و از روابط (11) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int E dA \\ D_1 &= \int G (y^2 + z^2) dA, \\ D_2 &= \int E z^2 dA \\ D_3 &= \int E y^2 dA \end{aligned} \quad (11)$$

بخش دوم انرژی پتانسیل سیستم مربوط به اثرا وابسته به اندازه و مقیاس کوچک است که به کمک تئوری‌های غیرکلاسیک محیط پیوسته نظیر تئوری گرادیان کرنش به صورت رابطه (12) خواهد شد [18].

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \int (\Lambda_1 \varepsilon_{xx,x}^2 + \Lambda_2 \varepsilon_{xx,y}^2 + \Lambda_3 \varepsilon_{xx,z}^2) dx dA \quad (12)$$

همچنین روابط (14,13) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5), \\ \Lambda_2 &= \Lambda_3 = 2(a_2 + a_4) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= G(-\frac{4}{15}l_1^2 + l_2^2) \\ a_2 &= G(l_0^2 - \frac{1}{15}l_1^2 - \frac{1}{2}l_2^2) \\ a_3 &= -G(\frac{4}{15}l_1^2 + \frac{1}{2}l_2^2) \\ a_4 &= G(\frac{1}{3}l_1^2 + l_2^2) \\ a_5 &= G(\frac{2}{3}l_1^2 - l_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

در روابط بالا a_i و a_{i+5} ($i = 1, \dots, 5$) موسوم به ثوابت مرتبه بالاتر ماده^۷ است که به کمک رابطه (14) به سه ثابت l_{i-1} و l_i ($i = 1, 2, 3$) تقلیل می‌یابند. یکی از حالات در نظر گرفتن ثوابت مرتبه بالاتر ماده به صورت می‌یابند. $l_0 = l_1 = l_2 = l = 2b$ و $l_0 = l_1 = 0$ که تئوری غیرکلاسیک به تئوری تنش کوبی اصلاح شده موسوم است.

رابطه (12)، انرژی پتانسیل مربوط به گرادیان‌های کرنش را می‌توان به صورت رابطه (15) نیز نوشت.

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^l (I_4 k_3^2 + I_5 k_2^2 + I_6 k_3^2 + I_7 k_2^2) dx \quad (15)$$

رابطه (16) به شرح زیر است.

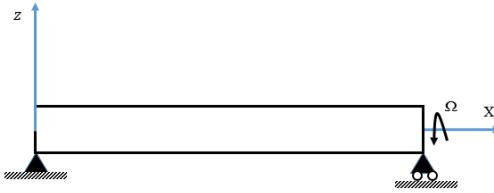
$$\begin{aligned} I_4 &= \int \Lambda_1 y^2 dA \\ I_5 &= \int \Lambda_1 z^2 dA \\ I_6 &= \int \Lambda_2 dA \\ I_7 &= \int \Lambda_3 dA \end{aligned} \quad (16)$$

حال انرژی پتانسیل کل سیستم (V_{total}) از مجموع روابط (15,10) به دست آورده می‌شود بنابراین می‌توان رابطه (17) را به صورت زیر نوشت.

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 \quad (17)$$

⁶ Taylor's Expansion

⁷ Higher Order Material Constants



شکل ۱ شماتیکی از میکروشفت دوار و محورهای مختصات متعلق شده بر آن

انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان به دو بخش تقسیم‌بندی کرد. نخست انرژی پتانسیل ناشی از کرنش‌ها و قسمت دوم انرژی ناشی از گرادیان‌های کرنش‌هاست که قسمت دوم را به کمک تئوری تنش کوبی اصلاح شده به دست آورده می‌شود. انرژی پتانسیل مربوط به کرنش‌ها از رابطه (2) به دست می‌آید.

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \int (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dx dA \quad (2)$$

در رابطه بالا $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$ به ترتیب تنش عمودی، تنش برشی در صفحه z ، تنش برشی در صفحه y ، کرنش عمودی، کرنش برشی در صفحه z و کرنش برشی در صفحه y است.

به کمک قانون هوک^۸ برای مواد همسانگرد^۹ روابط تنش از رابطه (3) به دست می‌آید.

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = G \varepsilon_{xz} \quad (3)$$

کرنش‌ها از روابط (4) می‌توان استفاده کرد

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e - y k_3 + z k_2 \\ \varepsilon_{xy} &= z k_1 \\ \varepsilon_{xz} &= y k_1 \end{aligned} \quad (4)$$

در روابط بالا e کرنش محوری تار خنثی است که از رابطه (5) به دست می‌آید.

$$e = \sqrt{w'^2 + v'^2 + (1 + u')^2} - 1 \quad (5)$$

اگر کرنش محوری تار خنثی تا مرتبه سوم بسط داده شود به صورت رابطه (6) خواهد شد.

$$e = u' + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2 + \dots \quad (6)$$

با توجه به این‌که یک سر میکرو شفت مفصل و سر دیگر آن غلتک و می‌توان فرض کرد که کرنش محوری تار خنثی صفر است و غیرخطی مسئله از نوع کوتاهشگی خواهد بود [16]؛ بنابراین رابطه (7) به صورت است.

$$e = 0 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}w'^2 - \dots \quad (7)$$

انحنای شفت در راستای محورهای اصلی^{۱۰} که از طریق طریق روابط (8) به دست می‌آیند [17].

$$\begin{aligned} k_1 &= \phi' - \psi' \sin \theta \\ k_2 &= q_2 \sin \Omega t + q_1 \cos \Omega t \\ k_3 &= q_2 \cos \Omega t - q_1 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین رابطه (9) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} q_1 &= \psi' \cos \theta \sin \phi + \theta' \cos \phi \\ q_2 &= \psi' \cos \theta \cos \phi - \theta' \sin \phi \end{aligned} \quad (9)$$

حال اگر روابط مربوط به زوایای اویلر یعنی روابط (1) در روابط مربوط به

¹ Hook's Law

² Isotropic

³ Young's Modulus

⁴ Shear Modulus

⁵ Principle Axes

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &= \frac{v}{\ell}, & \tilde{w} &= \frac{w}{\ell} \\
\tilde{x} &= \frac{x}{\ell}, & \tilde{b} &= \frac{b}{\ell} \\
\tilde{I} &= \frac{I}{m\ell^2}, & \tilde{I}_1 &= \frac{I_1}{m\ell^2} \\
\tilde{e}_y &= \frac{e_y}{\ell}, & \tilde{e}_z &= \frac{e_z}{\ell} \\
\tilde{\Delta}_l &= \frac{\Delta_l}{m\ell^2}, & \tilde{\Delta}_D &= \frac{\Delta_D}{D} \\
\tilde{\Omega} &= \Omega \sqrt{\frac{m\ell^4}{D}}, & \tilde{t} &= t \sqrt{\frac{D}{m\ell^4}} \\
\tilde{z} &= \tilde{v} - i\tilde{w}, & \tilde{z} &= \tilde{v} + i \\
\tilde{\theta}_1 &= \frac{\theta_1}{D}, & \tilde{\theta}_2 &= \frac{\theta_2}{D\ell^2} \\
\tilde{\theta}_3 &= \frac{\theta_3}{D}, & \tilde{\theta}_4 &= \frac{\theta_4}{D\ell^2} \\
\tilde{c} &= \frac{c\ell^2}{\sqrt{mD}}
\end{aligned} \tag{25}$$

که $\theta_4, \theta_3, \theta_2, \theta_1, b$ پس از حذف کردن علامت \sim جهت سهولت پارامترهای بدون بعد مناسب مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح شده است.

پس معادلات بدون بعد در فضای مختلف به صورت رابطه (26) خواهد شد:

$$\begin{aligned}
z^{(4)} + \ddot{z} + c\dot{z} + i\Omega_l z'' &= -\frac{2}{3}b^2\ddot{z}'' + \frac{1}{3}b^2I\ddot{z}^{(4)} \\
&\quad + \frac{1}{3}b^2\Delta_l\ddot{z}^{(4)} \\
-I\ddot{z}'' - \Delta_l(\ddot{z}'' + 2i\Omega_l\dot{z}'') &= e^{2i\Omega_l t} + \Delta_Q\bar{z}^{(4)}e^{2i\Omega_l t} \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{z}''\bar{z}'z''' \\
+\frac{3}{2}\bar{z}''z'z''' &+ \bar{z}''z''^2 + 2z''z'\bar{z}''' + \frac{1}{2}z^{(4)}\bar{z}'z' \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{z}^{(4)}z'^2 \\
+\frac{1}{2}z'' \int_0^x \int_0^x (2\dot{z}'\dot{z}'' + \ddot{z}'\ddot{z}'' + \ddot{z}'z') dx dx & \\
+\frac{1}{2}z' \int_0^x (2\dot{z}'\dot{z}'' + \ddot{z}'\ddot{z}'' + \ddot{z}'z') dx &+ \theta_1\bar{z}^{(4)}e^{2i\Omega_l t} \\
-\theta_2\bar{z}^{(6)}e^{2i\Omega_l t} + \theta_3(\frac{1}{2}z''\bar{z}'z''' &+ \frac{3}{2}\bar{z}''z'z''') \\
&\quad + \bar{z}''z''^2 \\
+2z''z'\bar{z}''' &+ \frac{1}{2}z^{(4)}\bar{z}'z' + \frac{1}{2}\bar{z}^{(4)}z'^2 \\
+\theta_3z^{(4)} &+ \frac{\theta_4}{8}(2z''^2\bar{z}'' - 92z''z'''z'') \\
&\quad - 2\bar{z}''^2z^{(4)} \\
-38z''^2\bar{z}^{(4)} &- 38z'\bar{z}'''z^{(4)} - 2\bar{z}'\bar{z}'''z^{(4)} \\
-42z'z'''z^{(4)} &+ 2z'\bar{z}'''z^{(4)} - 4z''z'z^{(5)} \\
-18\bar{z}'z'z^{(5)} &- 2\bar{z}'\bar{z}''z^{(5)} - 26z''z'\bar{z}^{(5)} \\
+2z''z'\bar{z}^{(5)} &- 4z''^2\bar{z}^{(6)} - 42z''\bar{z}''z^{(4)} \\
+2z''z'\bar{z}^{(4)} &- 4z'\bar{z}'z^{(6)}) - \theta_4z^{(6)} \\
&= (ie_z + e_y)\Omega^2e^{i\Omega_l t}
\end{aligned} \tag{26}$$

شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (27) است.

$$z = z'' = 0 \quad @ x = 0, x = 1 \tag{27}$$

باید توجه کنیم برای راحتی علامت \sim حذف شده است.

جهت حل معادلات حرکت غیرخطی بدون بعد از یکی از روش‌های اغتشاشات^۵ موسوم به روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده می‌شود

$$[20]. \text{ بدین منظور پاسخ معادله به صورت رابطه (28) در نظر گرفته می‌شود.}$$

$$z(x, t) = \varepsilon^1 z_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 z_3(x, T_0, T_2) + \dots \tag{28}$$

در جایی که T_2 به ترتیب مقیاس زمانی سریع^۶ و مقیاس زمانی خیلی کند^۷ است. ε پارامتر بدون بعدی است که مرتبه سایر پارامترها را

انرژی جنبشی سیستم را نیز می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش نخست انرژی جنبشی ناشی از حرکت‌های انتقالی و دورانی و نیز انرژی جنبشی ناشی از توزیع نابالانسی^۸ در سیستم که از روابط (19, 18) به دست می‌آید [16].

$$K_1 = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} + K_{\text{ecc}} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{trans}} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx \\
K_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) dx \\
K_{\text{ecc}} &= \frac{1}{2} \int_0^\ell m\Omega^2(e_y^2 + e_z^2) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^\ell (-2m\Omega(\dot{v}e_z + \dot{w}e_y) \sin \Omega t \\
&\quad + (\dot{v}e_y - \dot{w}e_z) \cos \Omega t) dx
\end{aligned} \tag{19}$$

در روابط بالا $e_z, e_y, I_3, I_2, I_1, m$ به ترتیب جرم واحد طول^۲ ممان اینرسی قطبی^۳، ممان اینرسی جرمی حول محور z ، ممان اینرسی جرمی حول محور y ، نابالانسی نسبت به محور y و نابالانسی نسبت به محور z است. $\Omega_3, \Omega_2, \Omega_1$ مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای میکروشفت نسبت به محورهای اصلی هستند و از روابط (20) به دست می‌آیند [19].

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= (\dot{\beta} - \dot{\psi} \sin \theta) \\
\Omega_2 &= \dot{\psi} \cos \theta \sin \beta + \dot{\theta} \cos \beta \\
\Omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \beta - \dot{\theta} \sin \beta
\end{aligned} \tag{20}$$

اگر زوایای اویلر روابط (1) در رابطه بالا جای گذاری شود و نتایج با سری تیلور تا مرتبه سوم بسط داده شود سرعت‌های زاویه‌ای برحسب جایه‌جایی‌ها به دست خواهد آمد. از آنجایی که میکروشفت دوار در ابعاد میکرومتر است علاوه‌بر انرژی جنبشی رابطه (18) باید تأثیر مربوط به ابعاد کوچک یا گرادیان سرعت نیز بررسی شود. انرژی جنبشی مربوط به گرادیان سرعت یا اثرات میکرو اینرسی از رابطه (21) به دست می‌آید [19].

$$K_2 = \int \frac{1}{6} \rho b^2 u_{j,i} \dot{u}_{j,i} dV \tag{21}$$

ρ دانسیته^۴ ماده و V حجم ماده است و u_j مؤلفه‌های جایه‌جایی است. $b = \frac{l}{2}$ تنها ثابت مرتبه بالاتر در تئوری تنش کوپل اصلاح شده خواهد بود. علامت نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است؛ بنابراین انرژی جنبشی کل سیستم (K_{total}) از مجموع روابط (21, 18) به صورت رابطه (22) به دست خواهد آمد:

$$K_{\text{total}} = K_1 + K_2 \tag{22}$$

با اصل هامیلتون معادلات حرکت به صورت رابطه (23) استخراج خواهد شد.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K_{\text{total}} - \delta V_{\text{total}}) dt = 0 \tag{23}$$

با تعریف پارامترهای رابطه (24) به صورت زیر

$$\begin{aligned}
\Delta_D &= \frac{D_3 - D_2}{2}, & \Delta_l &= \frac{I_3 - I_2}{2} \\
D &= \frac{D_3 + D_2}{2}, & I &= \frac{I_3 + I_2}{2} \\
\theta_1 &= \frac{I_6 - I_7}{2}, & \theta_2 &= \frac{I_4 - I_5}{2} \\
\theta_3 &= \frac{I_6 + I_7}{2}, & \theta_4 &= \frac{I_4 + I_5}{2}
\end{aligned} \tag{24}$$

و پارامترهای بدون بعد رابطه (25) به شرح زیر است.

⁵ Perturbations

⁶ Fast Time Scale

⁷ Super Slow Time Scale

می شود با درنظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده و اثرات میکرواینرسی دامنه نوسان کم می شود و سفتی سیستم افزایش می یابد. نقطه انشعاب سیستم در پارامترهای نامیزانی بزرگتری اتفاق می افتد. در میکروشفت متقارن پاسخهای پایدار و ناپایدار دو بار با هم تلاقی می کنند که به نقطه محل تلاقی آنها نقطه انشعاب می گویند. در اینجا نقطه انشعاب از نوع گره-زینی است. پدیده پرش نیز فقط یک بار اتفاق می افتد و سیستم می تواند به ازای یک پارامتر نامیزانی مشخص حداکثر سه پاسخ داشته باشد که آن پاسخ بسته به شرایط اولیه سیستم می تواند پایدار یا ناپایدار باشد. منظور از MCST تئوری تنش کوپل اصلاح شده است.

در شکل 3 نمودار پاسخ فرکانسی یک میکروشفت نامتقارن در مود دوم با درنظر گرفتن نابالانسی هایی با دامنه برابر 0.0005 و میرایی خارجی 0.03 در دو حالت مدل تئوری کلاسیک و مدل تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده ترسیم شده است. با درنظر گرفتن اثرات مربوط به متغیرهای کوچک یعنی تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اثر میکرواینرسی دامنه نوسانات کوچکتر می شود و محل نقاط انشعاب نیز تغییر می کند. در مدل کلاسیک انشعاب اول در سرعت هایی زیر سرعت بحرانی اتفاق می افتد، ولی نخستین انشعاب در سرعت هایی بالاتر از سرعت بحرانی با درنظر گرفتن اثرات میکرواینرسی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده اتفاق می افتد. مشاهده می شود که در میکروشفت نامتقارن دو نقطه انشعاب و دو پدیده پرش رخ می دهد و سیستم به ازای یک σ مشخص حداکثر پنج پاسخ می تواند داشته باشد که سه تای آن پایدار و دو تای دیگر ناپایدار است، ولی در میکروشفت متقارن دو نقطه انشعاب، یک بار پدیده پرش و حداکثر سه پاسخ می تواند اتفاق افتد؛ بنابراین هم اثرات هندسی و هم اثرات وابسته به اندازه تأثیر به سزاوی در پاسخ سیستم و نقاط انشعاب خواهد داشت. افزایش مود سبب می شود که انشعاب در ۵ های بزرگتری رخ دهد.

در شکل 4 پاسخ فرکانسی یک میکروشفت دوار در مود سوم وجود نابالانسی های با دامنه برابر 0.0005 و ضریب میرایی خارجی 0.03 برای دو حالت متقارن و نامتقارن ترسیم شده است. تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اثرات میکرواینرسی نیز در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می شود اثرات هندسی تأثیر مهمی در پاسخ سیستم و محل نقاط انشعاب دارد. با افزایش شماره مود انشعاب در سرعت هایی بالاتر از سرعت بحرانی میکروشفت اتفاق می افتد.

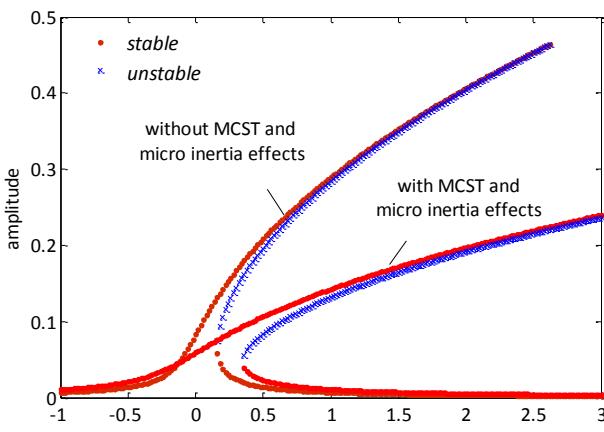


Fig. 2 the amplitude versus frequency curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 2 نمودار دامنه بر حسب فرکانس در مود اول برای میکروشفت متقارن

$$K = \left(\frac{n^4 \pi^4}{6} - \frac{3n^2 \pi^2}{16} \right) (\omega_f - \omega_b)^2 - 2n^6 \pi^6$$

$$e_1 = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin n\pi x \right) e_z dx, e_2 = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin n\pi x \right) e_y dx$$

$$I_r = I_1, I_s = \left(1 + \pi^2 n^2 I + \frac{2}{3} b^2 \pi^2 n^2 + \frac{1}{3} b^2 \pi^4 n^4 I \right) \quad (43)$$

حال به کمک تبدیل زیر رابطه (44) به دست می آید.

$$A_1(T_2) = A(T_2) e^{i\sigma T_2} \quad (44)$$

و با جای گذاری آن در روابط (43,42) می توان روابط (44) را نوشت.

$$-4n^6 \pi^6 \theta_3 A^2 \bar{A} - 8n^6 \pi^6 \theta_3 A A_2 \bar{A}_2 + \frac{7}{2} n^8 \pi^8 \theta_4 A^2 \bar{A} \\ + 7n^8 \pi^8 \theta_4 A A_2 \bar{A}_2 - i \Lambda_f D_2 A + \Psi_f \bar{A} + \sigma \Lambda_f A - n^6 \pi^6 A^2 \bar{A} \\ + K A A_2 \bar{A}_2 - i c \omega_f A + \Omega^2 (e_2 + i e_1) e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (45)$$

$$-8n^6 \pi^6 \theta_3 \bar{A} A A_2 - 4n^6 \pi^6 \theta_3 \bar{A}_2 A_2^2 + 7n^8 \pi^8 \theta_4 \bar{A} A A_2 \\ + \frac{7}{2} n^8 \pi^8 \theta_4 \bar{A}_2 A_2^2 - i \Lambda_b D_2 A_2 - i c \omega_b A_2 - n^6 \pi^6 \bar{A}_2 A_2^2 \\ + K \bar{A} A A_2 = 0 \quad (46)$$

را می توان به فرم مختصات قطبی به شکل رابطه (47) نوشت.

$$A = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\alpha(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\beta(T_2)} \quad (47)$$

با جای گذاری رابطه (47) در روابط (46,45) می توان روابط (49,48) را نوشت.

$$-\Psi_f a \sin 2\alpha - \Lambda_f D_2 a - c \omega_f a + 2\Omega^2 (e_1 \cos \alpha - e_2 \sin \alpha) \\ = 0, \quad (48)$$

$$-n^6 \pi^6 \theta_3 a^3 + \Psi_f a \cos 2\alpha + \Lambda_f a D_2 \alpha + \Lambda_f a \sigma - \frac{n^6 \pi^6}{4} a^3 \\ + \frac{K}{4} a a_2^2 - 2n^6 \pi^6 \theta_3 a a_2^2 + \frac{7}{4} n^8 \pi^8 \theta_4 a a_2^2 + \frac{7}{8} n^8 \pi^8 \theta_4 a^3 \\ + 2\Omega^2 (e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha) = 0 \quad (48)$$

$$-\Lambda_b D_2 a_2 - c \omega_b a_2 = 0, \quad (49)$$

$$\Lambda_b a_2 D_2 \beta - \frac{n^6 \pi^6}{4} a_2^3 + \frac{K}{4} a^2 a_2 - 2n^6 \pi^6 \theta_3 a^2 a_2 \\ - n^6 \pi^6 \theta_3 a_2^3 + \frac{7}{4} n^8 \pi^8 \theta_4 a^2 a_2 + \frac{7}{8} n^8 \pi^8 \theta_4 a_2^3 = 0 \quad (49)$$

در پاسخ حالت ماندگار سیستم^۱ تغییرات نسبت به زمان برابر صفر خواهد بود؛ بنابراین در روابط (49,48) با صفر قرار دادن $D_2 a_2, D_2 a, D_2 \alpha, D_2 \beta$ پاسخهای ماندگار به دست می آیند. از رابطه (49) نتیجه می شود که $a_2 = 0$ است. که نشان می دهد اثر مربوط به مود پس گشته از بین خواهد رفت و برای پاسخ مربوط به مود پیش گشته می توان رابطه (50) را به صورت زیر نوشت.

$$-\Psi_f a \sin 2\alpha - c \omega_f a + 2\Omega^2 (e_1 \cos \alpha - e_2 \sin \alpha) = 0, \\ -n^6 \pi^6 \theta_3 a^3 + \Psi_f a \cos 2\alpha + \Lambda_f a \sigma - \frac{n^6 \pi^6}{4} a^3 \\ + \frac{7}{8} n^8 \pi^8 \theta_4 a^3 + 2\Omega^2 (e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha) = 0 \quad (50)$$

3- نتایج عددی

یک میکروشفت دوار با ثوابت مرتبه بالاتر به صورت $l_0 = l_1 = 0$, $l_2 = b/2 = 17.6\mu\text{m}$ در نظر گرفته می شود. فرض می شود میکروشفت دوار از اپوکسی^۲ با خواص رابطه (51) ساخته شده باشد.

$$E = 1.44 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.38, \quad (51)$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

ابعاد هندسی میکروشفت متقارن دایره ای به شعاع 17.6 میکرومتر و طول 176 میکرومتر است.

در شکل 2 پاسخ فرکانسی یک میکروشفت دوار متقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی های برابر با اندازه 0.0005 و میرایی خارجی 0.03 در دو حالت تئوری کلاسیک و تئوری غیرکلاسیک ترسیم شده است. مشاهده

¹ Steady State Response

² Epoxy

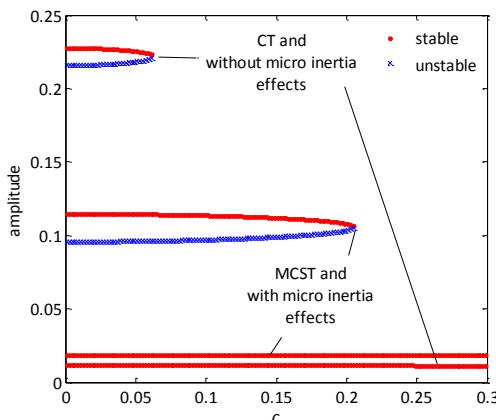


Fig. 5 the amplitude versus external damping coefficient curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 5 نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی در مود اول برای میکروشفت متقارن

در شکل 7 نمودار دامنه بر حسب نابالانسی در مود اول به ازای $\sigma = 1$ و وجود میرایی خارجی با ضریب 0.03 برای یک میکروشفت متقارن در دو حالت با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک و با در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده رسم شده است. وقتی نابالانسی صفر است، یعنی میکروشفت بالанс و سیستم دارای پاسخ بدیهی پایدار است. با افزایش نابالانسی پاسخ سیستم تغییر می‌کند و می‌تواند به ازای برخی نابالانسی‌های خاص سه پاسخ داشته باشد که باز هم شرایط اولیه تعیین می‌کند کدام پاسخ قابل قبول است. در نظر گرفتن تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اثرات میکرو اینرسی سبب شده که در نابالانسی‌های کمتری انشعاب اتفاق افتد. در یک نابالانسی مشخص برای نمونه 0.005 در مدل غیرکلاسیک سیستم فقط یک پاسخ پایدار غیربدیهی دارد، در حالی که در مدل کلاسیک سیستم سه پاسخ غیربدیهی دارد که دو تای آن پایدار و یکی ناپایدار است.

در شکل 8 نمودار دامنه بر حسب نابالانسی در مود اول با وجود میرایی خارجی 0.03 به ازای $\sigma = 0.6$ برای یک میکروشفت دوار نامتقارن در دو حالت مدل کلاسیک و مدل غیرکلاسیک رسم شده است. میکروشفت متقارن در میکرو شفت نامتقارن نیز در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک و اثرات میکرو اینرسی سبب شده که انشعاب دوم در نابالانسی‌های کمتری اتفاق افتد. در یک نابالانسی مشخص مثلاً 0.005 مدل

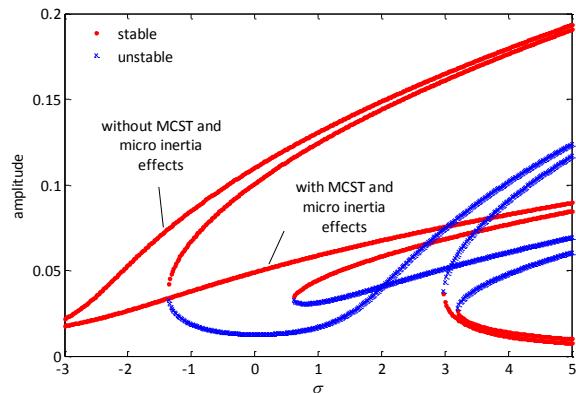


Fig. 3 the amplitude versus frequency curve for the second mode and asymmetrical micro shaft

شکل 3 نمودار دامنه بر حسب فرکانس در مود دوم برای میکروشفت نامتقارن

در شکل 5 نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی برای میکرو شفت دوار متقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی‌های برابر با 0.0005 به ازای یک مشخص (در اینجا برابر با 0.6) در دو حالت تئوری کلاسیک و تئوری غیرکلاسیک ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک یعنی اثرات میکرو اینرسی و اثر مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح شده انشعاب در ضرایب میرایی بالاتری اتفاق می‌افتد. اگر یک ضریب میرایی خاص مثلاً 0.15 در نظر گرفته شود با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک فقط یک پاسخ پایدار وجود دارد، ولی سیستم با در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک سه پاسخ دارد که یکی از آن‌ها ناپایدار و دوتای دیگر پایدار است، و شرایط اولیه تعیین می‌کند که کدام پاسخ قابل قبول خواهد بود. ضریب میرایی خارجی نیز یک پارامتر تاثیرگذار در پاسخ حالت ماندگار سیستم و نقطه انشعاب است. منظور از CT تئوری کلاسیک است.

در شکل 6 نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی برای یک میکروشفت دوار نامتقارن در مود اول ارتعاشی با وجود نابالانسی‌های برابر 0.0005 و به ازای $\sigma = 0.9$ در دو حالت تئوری غیرکلاسیک و تئوری کلاسیک رسم شده است. یکی از پاسخ‌های سیستم که دامنه کوچکی دارد در هر دو تئوری برهم منطبق شده، و این همان پاسخ پایدار و میراشهده سیستم است. برای چهار پاسخ باقی‌مانده دامنه نوسانات در تئوری غیرکلاسیک کوچک‌تر از تئوری کلاسیک است. در تئوری کلاسیک و بدون منظور کردن اثرات میکرو اینرسی در ضرایب میرایی بالاتری نقاط انشعاب اتفاق می‌افتد در حالی که در میکروشفت متقارن بر عکس چنین حالتی رخ می‌دهد.

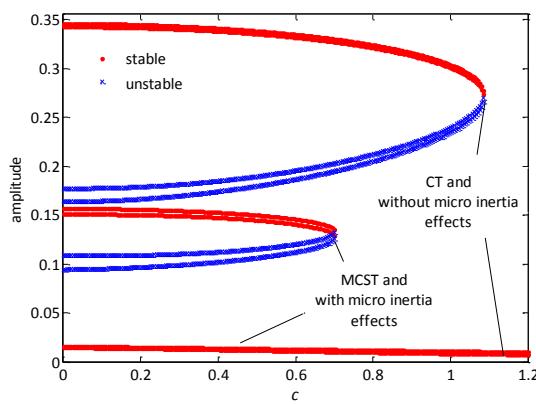


Fig. 6 the amplitude versus external damping coefficient curve for the first mode and asymmetrical micro shaft

شکل 6 نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی در مود اول برای میکروشفت نامتقارن

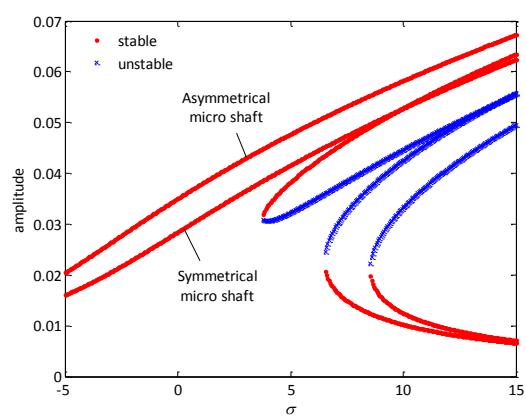


Fig. 4 the comparing of the frequency response between symmetrical and asymmetrical micro shaft on the third mode

شکل 4 مقایسه پاسخ فرکانسی میکروشفت متقارن و نامتقارن در مود سوم

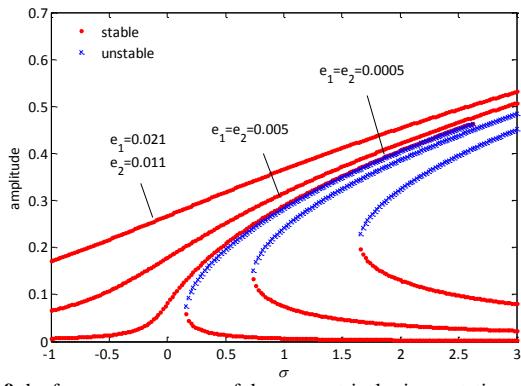


Fig. 9 the frequency response of the symmetrical micro rotating shaft for the first mode and the difference eccentricities

شکل 9 پاسخ فرکانسی میکرو شفت دوار متقارن در مود اول برای مقادیر نابالانسی های مختلف

می دهد که سیستم با وجود تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی در ضرایب میرایی بزرگتری به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید، ولی میکروشافت دوار نامتقارن در ضرایب میرایی کوچکتری به حالت کاملاً پایدار خواهد رسید. از نمودار دامنه بر حسب نابالانسی می توان نتیجه گرفت که برای یک میکروشافت متقارن یا نامتقارن با وجود تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی، انشعاب بارز مسئله در نابالانسی های کوچکتری اتفاق خواهد افتاد؛ بنابراین اثرات مربوط به مقیاس کوچک، ضریب میرایی خارجی، نابالانسی و نامتقارنی پارامترهای تأثیرگذاری بر پاسخ سیستم است که در طراحی و ساخت سازه های با ابعاد کوچک می تواند مورد توجه قرار گیرد.

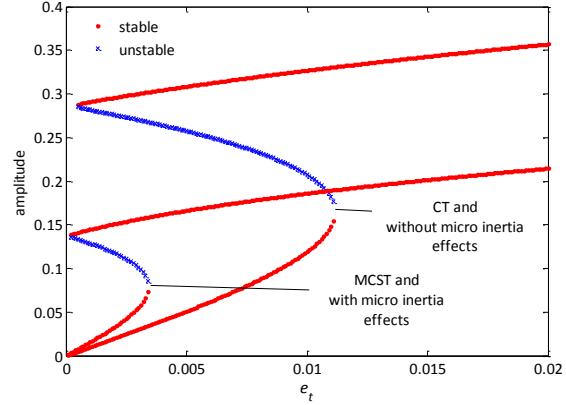


Fig. 7 the amplitude versus eccentricity curve for the first mode and symmetrical micro shaft

شکل 7 نمودار دامنه بر حسب نابالانسی در مود اول برای میکرو شفت متقارن

غیرکلاسیک فقط یک پاسخ پایدار غیربدینی را پیش بینی می کند، ولی مدل کلاسیک سه پاسخ را پیش بینی می کند که دو تای آن پایدار و یکی ناپایدار است. به هر حال شرایط اولیه باز هم تعیین کننده پاسخ خواهد بود. در شکل 9 پاسخ فرکانسی یک میکرو شفت دوار متقارن در مود اول با وجود میرایی خارجی با ضریب 0.03 و در نظر گرفتن اثرات میکرو اینرسی و تئوری غیرکلاسیک تنش کوبیل اصلاح شده برای مقادیر مختلف از نابالانسی رسم شده است. این شکل نشان می دهد که اختلاف بین نابالانسی نیز در پاسخ سیستم و نقطه انشعاب تأثیرگذار خواهد بود به گونه ای که افزایش نابالانسی برای حالت دامنه نابالانسی برابر سبب شده که نقطه انشعاب در سرعت های بالاتر از سرعت بحرانی میکروشافت صورت گیرد.

4- نتیجه گیری

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی و پایداری میکرو شفت دوار متقارن و نامتقارن با در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه و مقیاس کوچک مربوط به گردایان های کرنش (حالت خاص آن تنش کوبیل اصلاح شده) و میکرو اینرسی به کمک تئوری غیرکلاسیک تنش کوبیل اصلاح شده مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. در نظر گرفتن تئوری غیرکلاسیک و اثر میکرواینرسی سبب خواهد شد محل نقاط انشعاب تغییر کند، همچنین به دلیل تغییر سفتی سیستم دامنه سیستم به طور کلی پایین تر از تئوری کلاسیک خواهد بود. نمودار دامنه بر حسب ضریب میرایی خارجی برای یک میکروشافت دوار متقارن نشان

5- فهرست علایم	
جرم واحد طول	m
ضریب میرایی خارجی	c
طول میکروشافت	ℓ
سطح مقطع	A
مدول یانگ و مدول برشی	E, G
کرنش محوری تار خنثی	e
سفتی محوری	A_1
سفتی پیچشی، سفتی محوری حول محور y و سفتی محوری حول محور z	D_1, D_2, D_3
جا به جایی طولی، جا به جایی عرضی در راستای y و جا به جایی عرضی در راستای z	u, v, w
عرضی در راستای z	
انحنای میکرو شافت	k_1, k_2, k_3
ممان اینرسی قطبی، ممان اینرسی حول محور y و ممان اینرسی حول محور z	I_1, I_2, I_3
ناбалانسی نسبت به محور y و نابالانسی نسبت به محور z	e_y, e_z
ثوابت مرتبه بالاتر ماده	l_0, l_1, l_2
علایم یونانی	
چگالی حجمی	ρ
سرعت زاویه ای میکروشافت	Ω
زواوی اولیر 1-2-3	ψ, θ, β
مؤلفه های بردار سرعت زاویه ای	$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

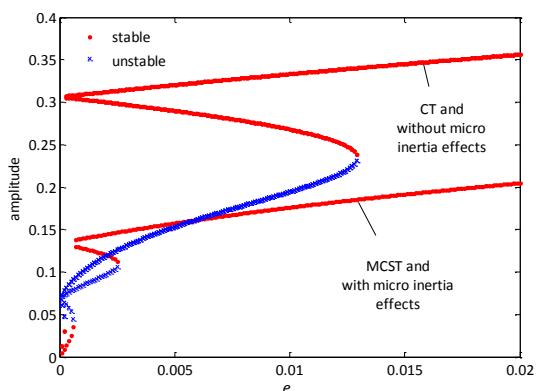


Fig. 8 the amplitude versus eccentricity curve for the first mode and asymmetrical micro shaft

شکل 8 نمودار دامنه بر حسب نابالانسی در مود اول برای یک میکرو شفت نامتقارن

6- مراجع

- [10] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams, *Engineering Science*, Vol. 46, pp. 427-437, 2008.
- [11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 314-322, 2013.
- [12] B. Akgöz, Ö. Civalek, Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity, *Composite Structures*, Vol. 134, pp. 294-301, 2015.
- [13] M. Hashemi, M. Asghari, A Semi-analytical Solution for Flexural Vibration of Micro Beams Based on the Strain Gradient Theory, *Theoretical and Applied Vibration and Acoustics*, Vol. 1, pp. 48-61, 2015.
- [14] K. B. Mustapha, Z. W. Zhong, Spectral element analysis of a non-classical model of a spinning micro beam embedded in an elastic medium, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 53, pp. 66-85, 2012.
- [15] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 65, pp. 217-233, 2011.
- [16] S. A. A. Hosseini, S. E. Khadem, Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, pp. 272-288, 2009.
- [17] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Second Edition, pp. 195-202, New York: Wiley-Interscience, 2004.
- [18] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 109-124, 1968.
- [19] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Stability analysis of a nonlinear rotating asymmetrical shaft near the resonances, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, pp. 1311-1325, 2012.
- [20] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Methods*, Second Edition, pp. 139-142, New York: Wiley-Interscience, 1981.
- [1] R. Katz, The dynamic response of a rotating shaft subject to an axially moving and rotating load, *Sound and Vibration*, Vol. 246, pp. 757-775, 2001.
- [2] I. Nagasaka, Y. Ishida, J. Liu, Forced oscillations of a continuous asymmetrical rotor with geometric nonlinearity (major critical speed and secondary critical speed), *Vibration and Acoustics*, Vol. 130, pp. 031012-031012, 2008.
- [3] S. A. A. Hosseini, M. Zamani, Multiple scales solution for free vibrations of a rotating shaft with stretching nonlinearity, *Scientia Iranica*, Vol. 20, pp. 131-140, 2013.
- [4] S. E. Khadem, M. Shahgholi, S. A. A. Hosseini, Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, pp. 1067-1081, 2010.
- [5] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 51, pp. 131-144, 2012.
- [6] M. Shahgholi, S. E. Khadem, Internal, combinational and sub-harmonic resonances of a nonlinear asymmetric rotating shaft, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, pp. 173-184, 2015.
- [7] M. Shahgholi, S. Esmaeilzadeh Khadem, Resonance analysis of gyroscopic nonlinear spinning shafts with parametric excitations and speed fluctuations, *Mechanical Sciences*, Vol. 64, pp. 94-109, 2012.
- [8] Shooshtari, A. n. A. M. Hoseini, S. n. A. N. Mahmoodi, S. n. A. Kalhori, Hamed, Analytical solution for nonlinear free vibrations of viscoelastic microcantilevers covered with a piezoelectric layer, *Smart Materials and Structures*, 2012.
- [9] M. Fathaliou, M. Sadeghi, G. Rezazadeh, Micro-inertia effects on the dynamic characteristics of micro-beams considering the couple stress theory, *Mechanics Research Communications*, Vol. 60, pp. 74-80, 2014.