



## شبیه‌سازی جریان‌های شامل شوک با روش تفاضل محدود فشرده و فیلتر ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار

رضا بزرگپور<sup>1</sup>، مازیار شفائی روشن<sup>2\*</sup>، حسین محمودی داریان<sup>3</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* صندوق پستی 143951374، mshafae@ut.ac.ir، تهران

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 دی 1395

پذیرش: 16 اسفند 1395

ارائه در سایت: 13 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

فیلتر مرکب

حسگر شوک

روش‌های تسخیر شوک

روش‌های تفاضل محدود فشرده

روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار

### چکیده

در مقاله‌ی حاضر یک فیلتر مرکب برای حفظ همزمان پایداری و دقت و نیز حذف نوسانات نامطلوب در حل عددی جریان‌های شامل شوک معرفی می‌شود. گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه چهارم و انتگرال‌گیری زمانی با روش رونگه-کوتای مرتبه سوم صورت می‌گیرد. پس از هر گام زمانی، فیلتر مرکب به نتایج اعمال می‌شود. این فیلتر ترکیبی از یک فیلتر خطی مرتبه‌ی ششم و بخش اتلافی روش ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار مرتبه پنجم می‌باشد. با استفاده از یک حسگر تشخیص شوک، فیلتر مرکب در نواحی هموار به فیلتر خطی مرتبه ششم و در نواحی شوک به فیلتر ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار مرتبه پنجم تبدیل می‌شود تا نوسانات نامطلوب ناشی از روش غیراتلافی استفاده شده برای گسسته‌سازی مکانی را حذف نماید. عملکرد فیلتر و دقت نتایج حاصل از آن، در چند آزمون شامل معادله موج خطی و نیز معادلات دینامیک گاز اویلر یک بعدی و دو بعدی ارائه می‌گردد. نتایج حاصل از فیلتر مرکب از فیلتر خطی مرتبه ششم و فیلتر خطی مرتبه دوم و نیز با نتایج روش ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار مرتبه پنجم مقایسه می‌شوند.

## Simulation of shock-containing flows using a compact finite difference scheme and a weighed essentially non-oscillatory filter

Reza Bozorgpoor<sup>1</sup>, Maziar Shafae Roshan<sup>1\*</sup>, Hossein Mahmoodi Darian<sup>2</sup>

1- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Faculty of Engineering Science, University of Tehran, Tehran, Iran

\* P.O.B. 143951374, Tehran, Iran, mshafae@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 18 January 2017

Accepted 06 March 2017

Available Online 03 May 2017

#### Keywords:

Hybrid filter

Shock sensor

Shock-capturing schemes

Compact finite-difference schemes

Weighted essentially non-oscillatory schemes

### ABSTRACT

In the present paper, a hybrid filter is introduced to simultaneously preserve the stability and accuracy and also to eliminate unwanted oscillations in the numerical simulation of shock-containing flows. The fourth-order compact finite difference scheme is used for the spatial discretization and the third-order Runge-Kutta scheme is used for the time integration. After each time-step, the hybrid filter is applied on the results. The filter is composed of a linear sixth-order filter and the dissipative part of the fifth-order weighted essentially non-oscillatory scheme. Using a shock-detecting sensor, the hybrid filter reduces to the linear sixth-order filter in smooth regions and to the fifth-order weighted essentially non-oscillatory filter in shock regions in order to eliminate unwanted oscillations produced by the non-dissipative spatial discretization method. The filter performance and accuracy of the results are examined through several test cases including the linear wave equation and one- and two-dimensional Euler equations of gas dynamics. The results are compared with that of a hybrid filter which is composed of the linear sixth-order and the second-order linear filter and that of the fifth-order weighted essentially non-oscillatory scheme.

### 1- مقدمه

[4,3] در همین راستا می‌باشد. با این که این روش‌ها در تسخیر شوک‌ها بسیار موفق می‌باشند، با این حال اتلاف عددی (لزجت مصنوعی) آنها موجب می‌گردد که سایر ساختارهای مهم جریان نظیر گردابه‌ها بیش از اندازه مستهلک شوند. از سوی دیگر روش‌های دیگر نظیر روش‌های فشرده [5] که دقت بالایی دارند و ساختارها جریان را به‌خوبی حفظ می‌نمایند، به علت

یک مساله چالش برانگیز در حل عددی جریان سیال، شبیه‌سازی جریان‌های شامل ناپیوستگی‌ها، نظیر امواج شوک، با دقت بالا می‌باشد که در سه دهه اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده‌است. ابداع روش‌های تی‌وی‌دی [1]، روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی [2] و نیز روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار

Please cite this article using:

R. Bozorgpoor, M. Shafae Roshan, H. Mahmoodi Darian, Simulation of shock-containing flows using a compact finite difference scheme and a weighed essentially non-oscillatory filter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 201-210, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

$$U_t + F_x = 0 \quad (1)$$

از رابطه تفاضل محدود فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌شود [5]:

$$\frac{F'_{i-1} + 4F'_i + F'_{i+1}}{6} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2)$$

مزیت روش‌های فشرده نسبت به روش‌های غیرفشرده (با همان مرتبه دقت) در استفاده از تعداد نقاط کمتر می‌باشد که یک مزیت برای گسسته‌سازی معادلات در نقاط نزدیک به مرز می‌باشد. مزیت دیگر در دقت بیشتر برای موج‌های با فرکانس بالا می‌باشد [5]. البته هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش‌های غیرفشرده دارند، زیرا نیاز به حل یک دستگاه معادلات سه‌قطری وجود دارد.

هرچند خود روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار موضوع اصلی این مقاله نمی‌باشد، اما از آنجا که از آنها برای به دست آوردن شار فیلتر در بخش بعد استفاده می‌کنیم و در بخش نتایج، نتایج این روش نیز ارائه می‌گردد، به اختصار این روش‌ها را شرح می‌دهیم. تقریب مشتق مکانی با روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار به صورت زیر می‌باشد [4]:

$$F'_i = \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^{WENO} - F_{i-\frac{1}{2}}^{WENO}) \quad (3)$$

در این روش‌ها، برای مثال در روش مرتبه پنجم، شار جملات جابجایی از رابطه وزن‌دار زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} F^{WENO5} &= w_0 F_0 + w_1 F_1 + w_2 F_2 \\ F_0 &= \frac{1}{3} U_i + \frac{5}{6} U_{i+1} - \frac{1}{6} U_{i+2} \\ F_1 &= -\frac{1}{6} U_i + \frac{5}{6} U_{i+1} - \frac{1}{3} U_{i+2} \\ F_2 &= \frac{1}{3} U_{i-2} - \frac{7}{6} U_{i-1} + \frac{11}{6} U_i \end{aligned} \quad (4)$$

وزن‌های  $w_i$  به‌گونه‌ای می‌باشند که در نواحی هموار به ضرایب  $d_i$  تبدیل می‌شوند، که این ضرایب شار فوق را به یک شار مرتبه پنجم پادبادسو تبدیل می‌کند:

$$\begin{aligned} F^{UPW5} &= d_0 F_0 + d_1 F_1 + d_2 F_2 \\ d_0 &= \frac{3}{10}, d_1 = \frac{3}{5}, d_2 = \frac{1}{10} \end{aligned} \quad (5)$$

اما حول ناپیوستگی‌ها وزن‌های  $w_i$  مقادیر دیگر اختیار می‌کنند به‌گونه‌ای که نوسانات گیبز ایجاد نمی‌شود. در ادامه روابط لازم برای محاسبه وزن‌ها ارائه می‌شود و برای جزئیات بیشتر این روش‌ها به [4] ارجاع داده می‌شود.

$$\beta_0 = \frac{13}{12} (U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2})^2$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (U_{i-1} - U_{i+1})^2$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} (U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i)^2 + \frac{1}{4} (U_{i-2} - 4U_{i-1} + 3U_i)^2$$

$$\alpha_i = \frac{d_i}{(\varepsilon + \beta_i)^2} \quad \omega_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k} \quad \varepsilon = 10^{-6} \quad (6)$$

برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات حاکم از روش رونگه-کوتای مرتبه سوم استفاده می‌شود [4]:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + L(U^n) \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^{(1)} + \frac{1}{4} L(U^{(1)}) \\ U^{n+1} &= \frac{2}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{(2)} + \frac{2}{3} L(U^{(2)}) \end{aligned} \quad (7)$$

تولید نوسانات دندانه‌ای حول ناپیوستگی‌ها، موسوم به نوسانات گیبز یا پدیده گیبز، به هیچ وجه برای تسخیر شوک و ناپیوستگی‌ها مناسب نمی‌باشد. پدیده گیبز ناشی از این است که در یک ناپیوستگی موج‌های با فرکانس بالا سهم زیادی دارند و روش گسسته‌سازی و نیز اتلاف مصنوعی خطای زیادی برای این موج‌ها تولید می‌نماید که این خطاها به صورت نوساناتی حول ناپیوستگی‌ها پدیدار می‌شود.

به همین علت برخی محققان نظیر بی و همکاران [6]، اسوگرین و بی [7]، بوگی و همکاران [8] و ویزبال و همکاران [9] رهیافت دیگری را برگزیدند. بدین صورت که ابتدا با یک روش مرتبه بالا همانند روش‌های فشرده معادلات گسسته برای یک گام زمانی حل شوند و سپس (پیش از پیمایش به گام زمانی بعد) با اعمال یک پس‌پردازش (فیلتر) مقدار اتلاف مناسب اعمال شود. میزان مناسب اتلاف میزانی است که علاوه بر حفظ دقت و پایدارسازی حل، نوسانات گیبز را نیز حذف نماید. در این رهیافت یک چالش مهم تشخیص یا تمییز ناپیوستگی‌ها از نواحی هموار می‌باشد. به عبارت بهتر نیاز به حسگری برای تشخیص ناپیوستگی‌ها وجود دارد. در مقالات حسگرهای متفاوتی ارائه شده‌است که محمودی بررسی جامعی در این زمینه انجام داده است [10]. پس از انتخاب حسگر، نیاز به یک فیلتر غیرخطی می‌باشد. زیرا فیلترهای خطی، هرچند برای حذف موج‌های با فرکانس بالا (که عامل ناپایداری حل عددی هستند) مناسب می‌باشند، اما برای ناپیوستگی‌ها مناسب نمی‌باشند. البته فیلتر خطی مرتبه دوم از این قاعده مستثنی است.

محمودی و همکاران [10, 11] با طراحی یک حسگر جدید، یک فیلتر غیرخطی معرفی کردند که ترکیبی از یک فیلتر خطی مرتبه دوم و یک فیلتر خطی مرتبه بالاتر بود (به همین دلیل فیلتر مرکب نامیده شد). با استفاده از حسگر طراحی‌شده عملگر فیلتر حول ناپیوستگی‌ها به فیلتر مرتبه دوم و در نواحی هموار به فیلتر مرتبه بالا تبدیل می‌شود. در حقیقت فیلتر خطی مرتبه دوم نقش تسخیر شوک و فیلتر مرتبه بالا نقش پایدارسازی و حذف موج‌های با فرکانس بالا را دارد. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی نشان داد که با استفاده از حسگر طراحی‌شده محل ناپیوستگی‌ها به خوبی تشخیص داده می‌شود و فیلتر به خوبی نوسانات حول ناپیوستگی‌ها را حذف می‌نماید.

شایان ذکر است برای حفظ دقت، دقت فیلتر مرتبه بالا باید بیشتر از روش عددی استفاده شده باشد. به عبارت دیگر اگر برای محاسبه مشتقات از روش فشرده مرتبه چهارم استفاده می‌شود، فیلتر مرتبه بالا باید یک فیلتر مرتبه ششم یا مرتبه هشتم باشد. البته دقت فیلتر مرتبه دوم به شرط آن که ناحیه اثر آن محدود به ناپیوستگی باشد، تأثیری بر دقت نخواهد داشت و دقت حل در نواحی هموار کاهش نخواهد یافت. البته این ناحیه اثر که وابسته به حسگر می‌باشد، در صورت افزایش از محدوده ناپیوستگی به نواحی هموار، باعث کاهش دقت خواهد شد.

در مقاله حاضر هدف اصلاح فیلتر مرکب معرفی‌شده در [10, 11] و جایگزینی فیلتر مرتبه دوم در آن با فیلتر دیگری که حاصل از روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار است، می‌باشد. انتظار می‌رود افزایش ناحیه اثر این فیلتر، برخلاف فیلتر مرتبه دوم، به کاهش دقت منجر نگردد که در این مقاله به بررسی این موضوع می‌پردازیم.

## 2- روش حل عددی

برای گسسته‌سازی (تقریب مشتق) مکانی معادلات حاکم که در حالت کلی به صورت زیر می‌باشند:

### 3- تشریح فیلتر مرکب و حسگر

در این بخش ابتدا فیلتر مرکب و سپس حسگر طراحی شده محمودی و همکاران [11,10] به اختصار شرح داده می‌شود.

#### 3-1- فیلتر مرکب

مقدار گسسته تابع  $U$  به صورت  $U_i^n$  در نظر گرفته می‌شود که در آن  $n$  اندیس زمانی و  $i$  اندیس مکانی شبکه می‌باشد. سپس با یک روش گسسته‌سازی مکانی و زمانی حل عددی به اندازه یک گام زمانی پیش می‌رود و مقادیر  $U_i^{n+1}$  حاصل می‌شوند. پیش از پیشروی به گام بعد فیلتر زیر به مقادیر  $U_i^{n+1}$  اعمال می‌شود:

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}) \quad (8)$$

که  $\Delta t$  گام زمانی و  $\Delta x$  فاصله نقاط شبکه می‌باشد و نیز  $\bar{U}$  مقدار  $U$  پس از اعمال فیلتر است.  $\bar{F}$  شار فیلتر می‌باشد که با شار معادله حاکم  $F$  تفاوت دارد. در حقیقت برای پیمایش به گام زمانی بعد  $\bar{U}$  جای  $U$  استفاده می‌گردد. برای حذف نوسانات ناخواسته، عملگر فیلتر (8) به این حل اعمال می‌شود.

برای نمونه یک فیلتر خطی با دقت مرتبه  $2m$  شار فیلتر به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{F}_{i+1/2}^{(m)} = (-1)^{m-1} \varepsilon^{(m)} (\Delta \nabla)^{m-1} \Delta U_i \quad (9)$$

که  $\varepsilon^{(m)}$  ضریب اتلاف و  $\Delta$  و  $\nabla$  عملگرهای تفاضلی پیشرو و پسرو هستند:

$$\Delta U_j = U_{j+1} - U_j \quad \nabla U_j = U_j - U_{j-1}$$

با جایگذاری (9) در (8) رابطه خطی حاصل می‌شود:

$$\bar{U}_j^{n+1} = U_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^{m-1} \varepsilon^{(m)} (\Delta \nabla)^m U_j^{n+1} \quad (10)$$

انتخاب  $\varepsilon^{(m)} = (1/4)^m (\Delta t / \Delta x)$  باعث می‌شود فیلتر بتواند موج‌های با فرکانس بالا را حذف کند [5]. با وجود اینکه می‌توان از جمله  $\Delta t / \Delta x$  صرف نظر نمود، اما بهتر است که این جمله در رابطه فیلتر باقی بماند تا با شکل گسسته معادلات حاکم سازگار باشد.

از آنجا که فیلترهای خطی بالاتر از مرتبه دوم برای ناپیوستگی‌ها مناسب نمی‌باشد، محمودی [10] برای شار فیلتر در رابطه (8) شار ترکیبی زیر را پیشنهاد داد:

$$\bar{F} = \omega_1 \bar{F}^{(1)} + \omega_m \bar{F}^{(m)} \quad (11)$$

که در آن  $\bar{F}^{(1)}$  و  $\bar{F}^{(m)}$  بترتیب شار فیلتر مرتبه دوم و فیلتر مرتبه بالاتر از دو ( $m > 1$ ) می‌باشند. مقادیر وزن‌های  $\omega_1$  و  $\omega_m$  نیز با حسگر تعیین می‌شود.

#### 3-2- حسگر میان‌یاب-مینا

وزن‌های رابطه (11) از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\omega_1 = 1 - \exp\left(-c_e e_{j+\frac{1}{2}}^2\right) \quad \omega_m = 1 - \omega_1$$

$$e_{j+1/2} = \max(e_j, e_{j+1}) \quad e_j = \frac{|\bar{U}_j - U_j|}{D_j}$$

$$\bar{U}_j = U_j - \frac{(-1)^{m'}}{(2m')^2} (\Delta \nabla)^{m'} U_j \quad \left(\frac{2m'}{m'}\right) = \frac{(2m')!}{(m')! (m')!}$$

$$D_j = c_s S_g + (1 - c_s) S_l$$

$$S_g = \max(U_k) - \min(U_k) \quad 1 \leq k \leq j_{max}$$

$$S_l = \max(U_k) - \min(U_k) \quad j - m' \leq k \leq j + m' \quad (12)$$

که در آن  $e_j$  نسبت مقدار خطای درون‌یابی به مقیاس  $D_j$  می‌باشد. این مقیاس یک ترکیب خطی از مقیاس محلی (حول نقطه  $j$ ام) و مقیاس فراگیر

(تمام میدان حل) می‌باشد. ضریب  $c_e$  یک عدد ثابت می‌باشد که تأثیر آن بر

شار فیلتر به صورت زیر نمایان می‌شود:

$$c_e = 0 \rightarrow \omega_1 = 0 \rightarrow \bar{F} = \bar{F}^{(m)}$$

$$c_e = \infty \rightarrow \omega_1 = 1 \rightarrow \bar{F} = \bar{F}^{(1)} \quad (13)$$

مقدار مناسب این ضریب در مرجع [10] با آزمایش عددی در محدوده 200 تا 2000 پیشنهاد شده‌است. این حسگر موجب می‌گردد که در نواحی هموار به فیلتر خطی مرتبه بالا و در نواحی ناپیوستگی به فیلتر مرتبه دوم تبدیل شود. بنابراین در نواحی هموار فیلتر مرتبه بالا نوسانات با فرکانس بالا را حذف می‌نماید و موجب پایداری حل عددی در پیمایش زمانی می‌گردد و از سوی دیگر فیلتر مرتبه دوم نوسانات گیبز حول ناپیوستگی‌ها را حذف می‌نماید.

#### 4- شار فیلتر حاصل از روش‌های ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار

در مراجع [12,6] برای ایجاد یک شار اتلافی، شار یک روش مرکزی از شار یک روش تسخیر شوک (نظیر روش‌های تی‌وی‌دی) کسر گردید. مشابه با این ایده، با کم کردن رابطه (5) از (4) شاری حاصل می‌شود که تنها شامل سهم اتلافی روش ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار می‌باشد که به آن شار فیلتر روش ضرورتاً غیرنوسانی وزن‌دار گفته می‌شود:

$$\bar{F}^{WENOS} = F^{WENOS} - F^{UPW5} =$$

$$(w_0 - d_0)F_0 + (w_1 - d_1)F_1 + (w_2 - d_2)F_2 \quad (14)$$

در کار حاضر این شار جایگزین شار فیلتر مرتبه دوم در رابطه (5)

می‌گردد:

$$\bar{F} = -\omega_1 \bar{F}^{WENOS} + \omega_m \bar{F}^{(m)} \quad (15)$$

شایان ذکر است که شار جابجایی در معادلات حاکم (معادله (1)) در سمت چپ قرار دارد، اما شار فیلتر در سمت راست رابطه فیلتر (8) می‌باشد. بنابراین انتقال شار رابطه (14) به سمت راست و گنجاندن آن در شار فیلتر مرکب (رابطه (15)) نیازمند یک علامت منفی می‌باشد. در غیر این صورت اثر اتلافی فیلتر به عکس آن تبدیل می‌شود و سبب رشد نوسانات خواهد شد.

مزیت این فیلتر مرکب نسبت به فیلتر مرکب رابطه (11) که در مراجع [11,10] معرفی گردید، در این است که اگر به علت عملکرد حسگر ناحیه تأثیر فیلتر تسخیر شوک به نواحی هموار گسترش یابد، با رابطه (11) دقت حل عددی به دقت مرتبه دوم کاهش می‌یابد درحالی که با رابطه (15) کاهش دقت رخ نمی‌دهد زیرا که در این حالت دقت فیلتر تسخیر شوک از مرتبه پنجم می‌باشد.

#### 5- نتایج

برای آزمودن فیلتر مرکب اصلاح شده (رابطه (15)) ابتدا معادله موج خطی و سپس معادلات دینامیک گاز اویلر در یک و دو بُعد در نظر گرفته می‌شود. جهت اختصار در ادامه فیلتر مرکب معرفی شده در مراجع [11,10] (رابطه (11)) فیلتر الف و فیلتر اصلاح‌شده در کار حاضر (رابطه (15)) فیلتر ب نامیده می‌شود.

شایان ذکر است برای امکان مقایسه نتایج عددی ارائه شده با نتایج در کارهای دیگر، اندازه شبکه عددی و زمان ارائه نتایج با توجه به مراجع [11,10] انتخاب شده‌است. همچنین ضرایب موجود در روابط حسگر و فیلتر نیز با توجه به مراجع مذکور تعیین شده‌اند.

#### 5-1- معادله موج خطی

معادله موج خطی به صورت زیر می‌باشد

مواجه هستیم که حل تحلیلی آن را می‌توان در مرجع [13] یافت. شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد:

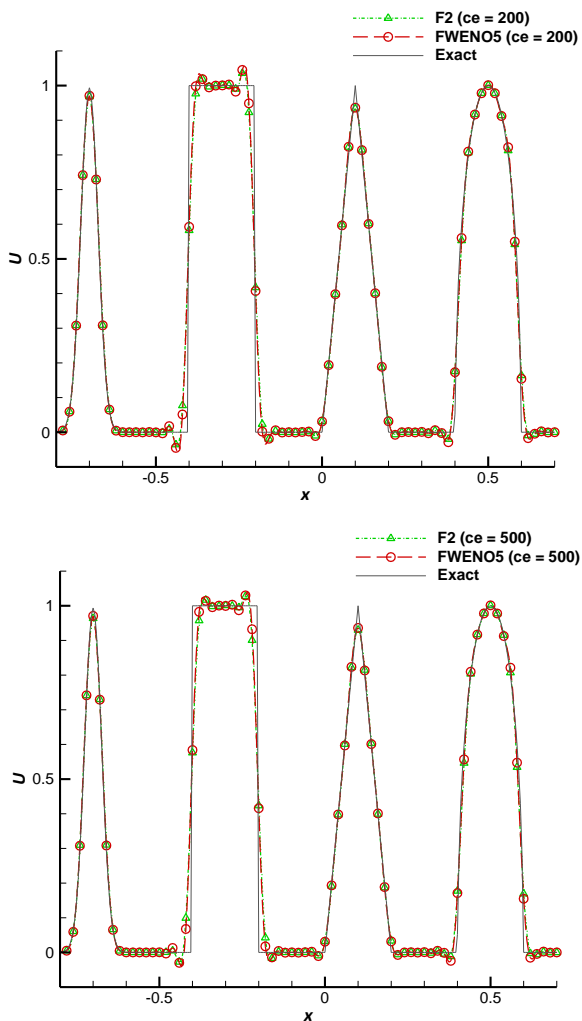
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0) & x < 5 \\ (0.125, 0.0, 0.1) & x \geq 5 \end{cases} \quad (19)$$

شکل 4 حل دقیق و نتایج حاصل با فیلتر B را در زمان  $t = 2$  برای کل بازه حل نشان می‌دهد. مشخصات حل عددی به شرح ذیل می‌باشد:

$$\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.005 \quad (20)$$

$c_e = 500, c_s = 0.1, \epsilon^{(1)} = 0.35$   
 برای اعمال اتلاف کافی در ناپیوستگی‌ها، مقدار ضریب  $\epsilon^{(1)}$  از 0.25 به 0.35 افزایش یافته‌است.

شکل 5 در نمای بزرگ‌تر تغییرات چگالی را حول شوک، ناپیوستگی تماسی و دو انتهای فن انبساطی نشان می‌دهد. نتایج حاصل با فیلتر الف و ب با روش ضرورتاً نوسانی مرتبه پنجم و حل دقیق مقایسه شده‌اند. حول شوک و فن انبساطی تفاوت چندانی میان روش‌ها وجود ندارد. حول ناپیوستگی تماسی با فیلتر B نتایج دقیق‌تری حاصل شده است. همچنین نتایج فیلتر الف از روش ضرورتاً غیرنوسانی دقیق‌تر است. البته هر دو فیلتر الف و ب بر خلاف روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم یک برآمدگی به سمت پایین (نزدیک  $x = 7$ ) دارند.



شکل 1 مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 200, 500$

$$u_x + u_t = 0 \quad (16)$$

که در اینجا یک مسأله متناوب را در بازه  $-1 \leq x \leq 1$  با شرایط اولیه زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left( \begin{matrix} G(x, \beta, z - \delta) + \\ G(x, \beta, z + \delta) + \\ 4G(x, \beta, z) \end{matrix} \right), & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1, & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - |10(x - 0.1)|, & 0.0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6} \left( \begin{matrix} F(x, \alpha, a - \delta) + \\ F(x, \alpha, a + \delta) + \\ 4F(x, \alpha, a) \end{matrix} \right), & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$G(x, \beta, z) = \exp(-\beta(x - z)^2) \quad (17)$$

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)}$$

شکل‌های 1 تا 3 نتایج را در زمان  $t = 6$  که معادل پیمایش سه دوره تناوب کامل می‌باشد، نشان می‌دهد. نتایج برای شبکه  $\Delta x = 0.005$  و با گام زمانی  $\Delta t = 0.002$  به دست آمده‌اند. در شکل‌های 1 و 2 فیلتر الف و ب مقایسه شده‌اند. مقدار ضریب  $c_e$  در این دو شکل از مقدار 200 تا 2000 تغییر کرده است و ضریب  $c_s = 0.1$  می‌باشد. در شکل 1 با ضریب  $c_e = 500$  تفاوتی میان دو فیلتر مشاهده نمی‌شود. همچنین کمی نوسانات گیبز حول ناپیوستگی‌ها برای هر دو فیلتر مشاهده می‌شود. در شکل 2 با افزایش ضریب به مقادیر 2000 و 5000 در هر دو فیلتر نوسانات گیبز حول ناپیوستگی‌ها تقریباً حذف می‌شوند، اما ارتفاع قله‌ها در موقعیت  $x = -0.7$  و  $x = 0.1$  با فیلتر B کمتر مستهلک شده و به حل دقیق نزدیک‌تر می‌باشد. خصوصاً برای مقدار 5000 کاهش ارتفاع قله‌ها برای فیلتر الف مشهودتر است. در شکل 3 نتایج فیلتر B و روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم با یکدیگر مقایسه شده‌اند. تفاوت ناچیزی میان نتایج این دو روش مشاهده می‌شود.

### 2-5- مسأله لوله-شوک

مسأله لوله شوک یک آزمون بسیار شناخته‌شده است که جهت بررسی قابلیت تسخیر شوک روش‌های عددی استفاده می‌شود. در این مسأله معادلات حاکم، معادلات دینامیک گاز اوپلر یک‌بعدی می‌باشند. این معادلات حاکم بر سیالات تراکم‌پذیر غیرلزج می‌باشند:

$$U_t + F_x = 0, U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}$$

$$E = \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right), p = \rho e (\gamma - 1), \gamma = 1.4 \quad (18)$$

که در آن چگالی،  $\rho$ ، سرعت،  $u$ ، فشار،  $p$ ، انرژی دورنی و  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه می‌باشد.

این آزمون را ساد [13] معرفی کرد. در این آزمون یک جداره نازک، هوای درون یک مخزن را به دو قسمت تقسیم کرده است که فشار هوا در دو سمت جداره متفاوت می‌باشد. در یک لحظه جداره با سرعت برداشته می‌شود. اختلاف فشار موجب پدید آمدن یک موج شوک، یک ناپیوستگی تماسی و یک فن انبساطی می‌شود (موج شوک و ناپیوستگی تماسی به لحاظ ریاضی هر دو یک ناپیوستگی هستند با این تفاوت که در شوک خطوط مشخصه به یکدیگر برخورد می‌کنند اما در ناپیوستگی تماسی، مانند موج خطی، خطوط مشخصه موازی هستند). در حقیقت با یک مسأله ریمان برای معادلات اوپلر

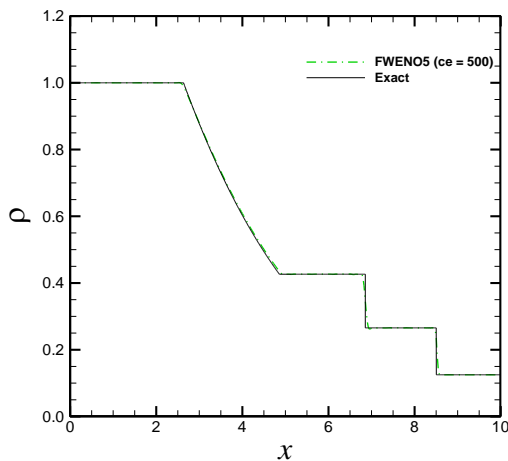


Fig. 4 Shock-tube problem; Comparison of filter B and exact solution.

شکل 4 آزمون لوله-شوک؛ نتایج فیلتر ب با حل دقیق

شوک و فن انبساطی نتایج تفاوت چندانی با شکل 5 ندارد، برآمدگی حول ناپیوستگی تماسی نیز رفع شده است. شایان ذکر است، همان طور که گفته شد، در ناپیوستگی تماسی خطوط مشخصه موازی یکدیگر هستند در حالی که در شوک خطوط مشخصه به یکدیگر برخورد می‌کنند. بنابراین اگر شوک به علت اتلاف عددی هموار شود، به دلیل اینکه خطوط مشخصه در پیمایش زمانی به یکدیگر برخورد می‌کنند، به طور خودکار دوباره فشرده می‌شود و شیب تند شوک تا حد زیادی حفظ می‌شود. اما در ناپیوستگی تماسی به علت موازی بودن خطوط مشخصه، هیچ عاملی برای دوباره فشرده کردن ناپیوستگی وجود ندارد و اتلاف عددی بتدریج در پیمایش زمانی بیشتر و بیشتر آن را هموار می‌کند. این مطلب را می‌توان در هر دو شکل 5 و 6 مشاهده نمود.

### 3-5- مسأله اندرکنش شوک-موج چگالی

در این آزمون یک شوک با عدد ماخ  $M = 3$  به یک موج چگالی برخورد می‌کند. پس از برخورد نوسانات نامنظم و ناپیوستگی‌های کوچکی پشت شوک ایجاد می‌شود. این آزمون جهت بررسی هم‌زمان قابلیت تسخیر شوک و حفظ دقت روش عددی در نواحی پیچیده جریان استفاده می‌شود [14]. بازه حل برای این آزمون  $-5 \leq x \leq 5$  و شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.8571429, 2.6293688, 10.333333) & x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1) & x \geq -4 \end{cases} \quad (21)$$

در حقیقت شرایط اولیه فوق بدون جمله موج سینوسی یک شوک متحرک با عدد ماخ 3 است. مقادیر سمت چپ شوک نیز با استفاده از روابط شوک قائم به دست آمده‌اند. شکل 7 توزیع چگالی را در لحظه اول و در زمان  $t = 1.8$  نمایش می‌دهد.

برای حل عددی گام مکانی و زمانی و مشخصات فیلتر به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\Delta x = 0.025, \Delta t = 0.001 \\ c_e = 500, c_s = 0.1, \epsilon^{(1)} = 0.75 \quad (22)$$

در اینجا نیز به علت قوی بودن شوک، در فیلتر الف ضریب  $\epsilon^{(1)}$  را به 0.75 افزایش داده‌ایم.

شکل 8 نتایج حاصل با فیلتر الف و ب را نشان می‌دهد که با حل دقیق و روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم مقایسه شده‌اند. در ناحیه نوسانی (بازه

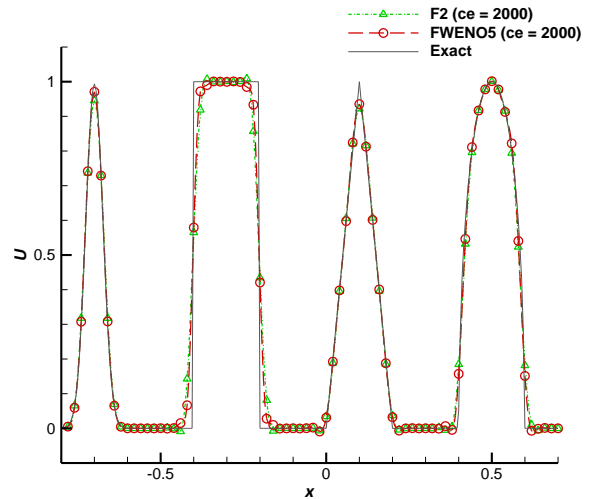


Fig. 2 Comparison of filter A and B for  $c_e = 2000, 5000$

شکل 2 مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 2000, 5000$

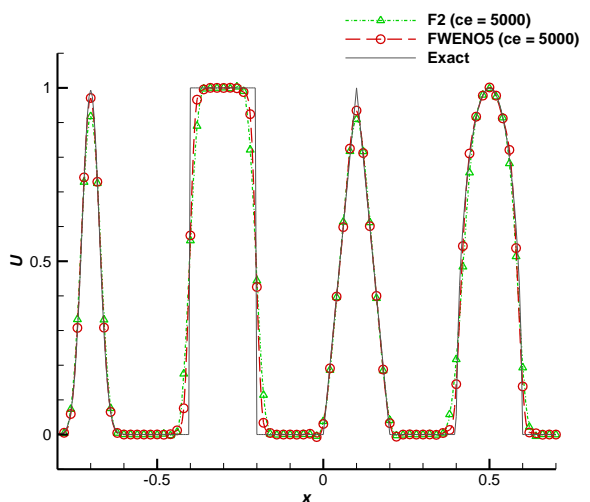


Fig. 3 Comparison of filter B and fifth-order essentially non-oscillatory scheme

شکل 3 مقایسه فیلتر ب و روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم

برای رفع این برآمدگی ضریب  $c_e$  را به مقدار 2000 افزایش می‌دهیم که نتایج آن در شکل 6 نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود هر چند که حول

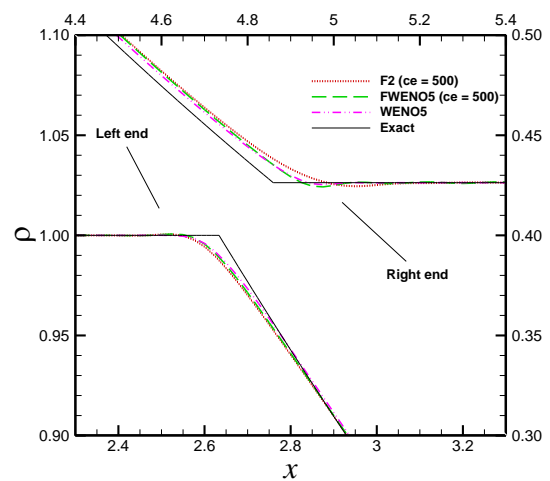
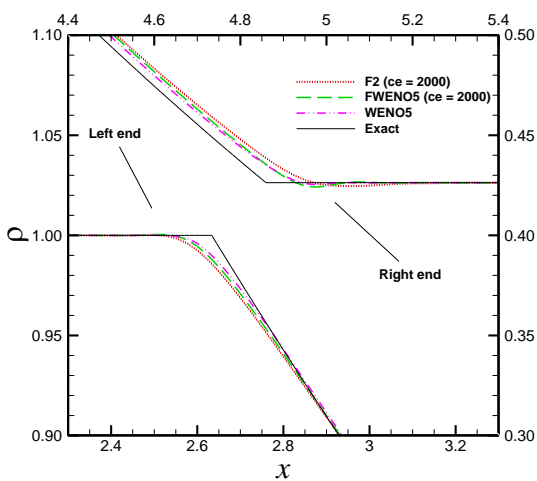
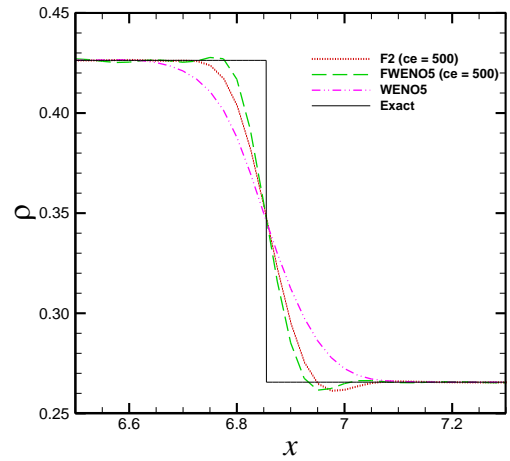
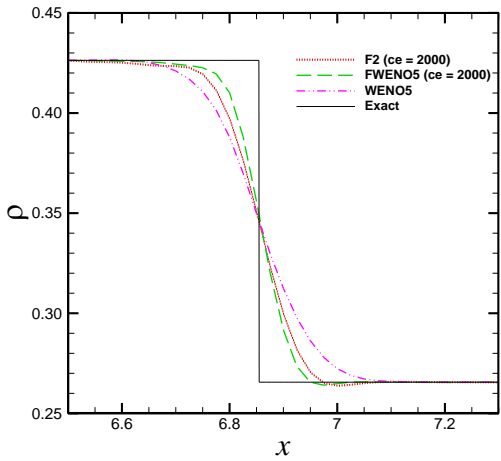
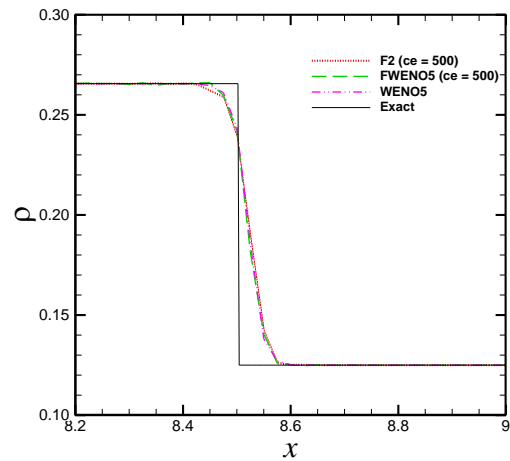
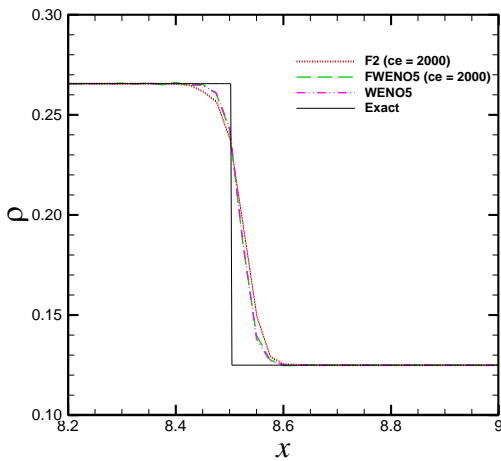


Fig. 6 Shock-tube problem; Comparison of filter A and B for  $c_e = 2000$  in different regions; from top to bottom: shock, contact discontinuity, expansion fan

شکل 6 آزمون لوله-شوک؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 2000$  در نواحی مختلف؛ از بالا به پایین: شوک، ناپیوستگی تماسی، فن انبساطی

ب به حل دقیق نزدیک‌تر می‌باشد. برای فیلتر الف نوسانات بیشتر از فیلتر ب و روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم مستهلک شده‌اند و دامنه نوسانات آفت

Fig. 5 Shock-tube problem; Comparison of filter A and B for  $c_e = 500$  in different regions; from top to bottom: shock, contact discontinuity, expansion fan

شکل 5 آزمون لوله-شوک؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 500$  در نواحی مختلف؛ از بالا به پایین: شوک، ناپیوستگی تماسی، فن انبساطی

مشاهده می‌شود که نتایج فیلتر ب و روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم مشابه است مگر حول ناحیه  $x = 1$  که نتایج فیلتر

چندانی میان روش‌ها مشاهده نمی‌گردد.

در شکل 9 نتایج برای مقادیر  $c_e = 200$  و  $c_e = 2000$  ارائه شده‌اند. مشاهده می‌شود با کاهش ضریب  $c_e$  برای فیلتر ب نتایج بشدت دندانه‌ای می‌شود. همان‌طور که پیش‌تر گفته شده کاهش این ضریب تأثیر فیلتر تسخیر شوک در فیلتر مرکب را کاهش می‌دهد. این کاهش باعث می‌شود فیلتر ب نتواند نوسانات گیبز حول ناپیوستگی‌ها را حذف نماید که این نوسانات بتدریج نواحی دیگر حل عددی را نیز آلوده نموده‌اند. برای فیلتر الف از آنجا که فیلتر تسخیر شوک آن فیلتر خطی مرتبه دوم می‌باشد، اتلاف عددی آن بیشتر از فیلتر ب (که فیلتر تسخیر شوک آن فیلتر غیرنوسانی مرتبه پنجم می‌باشد) است. البته برای فیلتر الف از ضریب  $\epsilon^{(1)} = 0.75$  استفاده نموده‌ایم، زیرا مقادیر کمتر برای این ضریب نیز نوساناتی حول شوک ایجاد می‌نماید.

با افزایش ضریب  $c_e$  مشاهده می‌شود نتایج فیلتر ب دقت خود را حفظ نموده‌اند اما نتایج فیلتر الف با کاهش دقت همراه بوده‌اند. مطابق انتظار برای افزایش این ضریب برای فیلتر ب نگرانی وجود ندارد اما برای فیلتر الف کاهش دقت رخ داده است. همچنین نکته دیگر این است که برای فیلتر ب نیاز به تنظیم ضریب دیگری همانند  $\epsilon^{(1)}$  وجود ندارد.

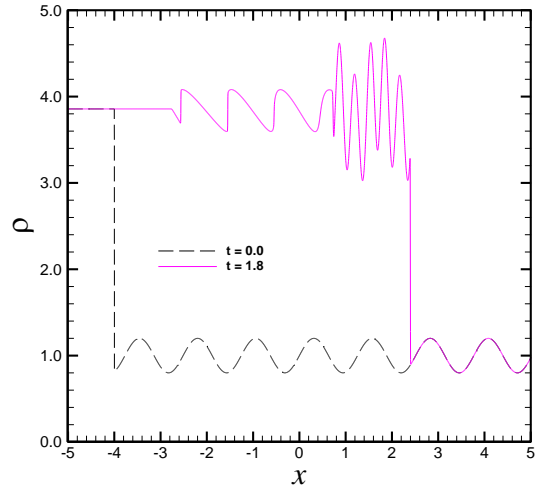


Fig. 7 Shock-density wave interaction; initial conditions and exact solution at  $t = 1.8$

شکل 7 اندرکنش شوک-موج چگالی؛ شرایط اولیه و حل دقیق در  $t = 1.8$

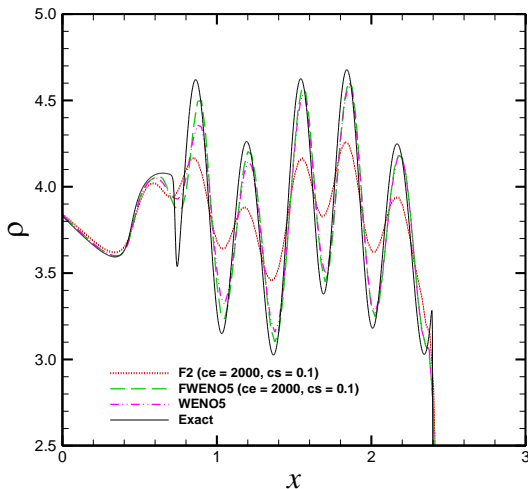
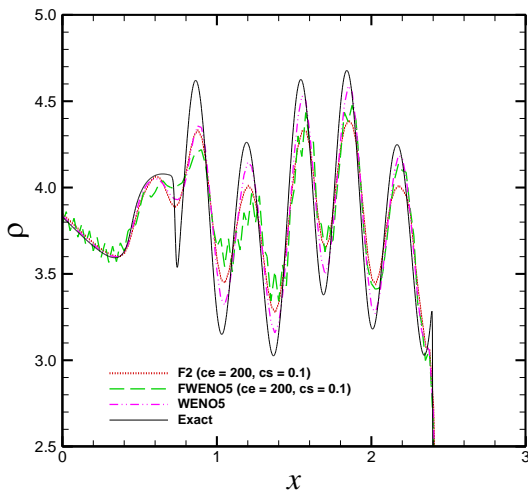


Fig. 9 Shock-density wave interaction; Comparison of filter A and B for  $c_e = 200$  (top) and  $c_e = 2000$  (bottom)

شکل 9 اندرکنش شوک-موج چگالی؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 200$  (بالا) و  $c_e = 2000$  (پایین)

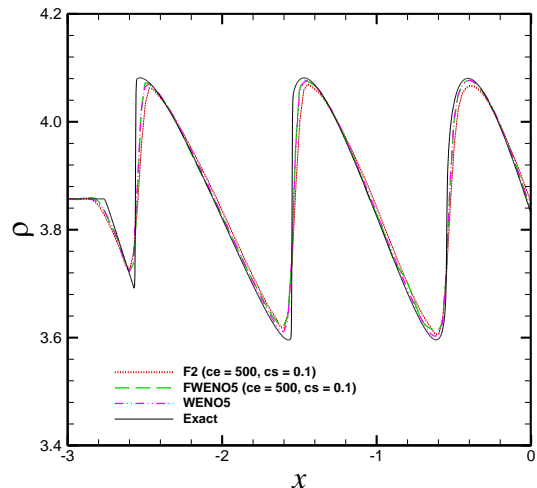
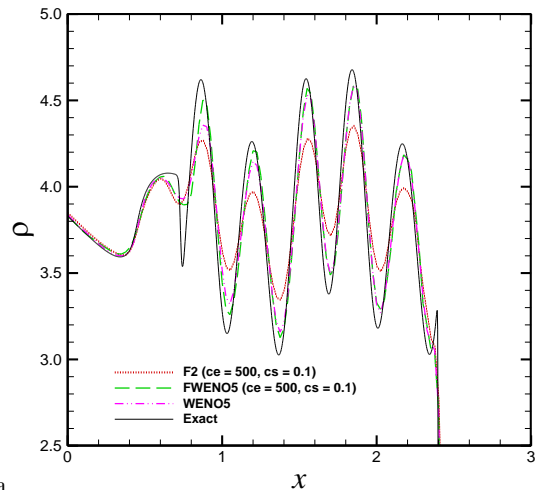


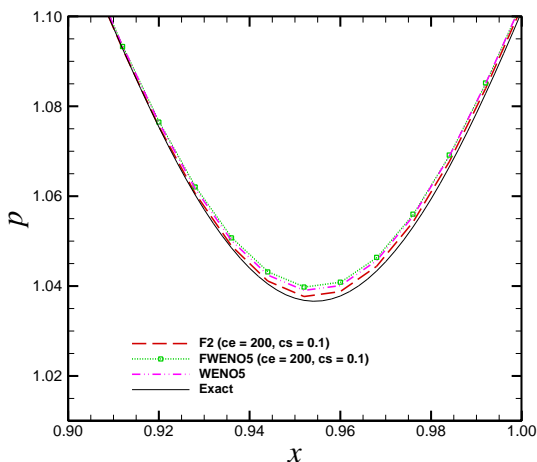
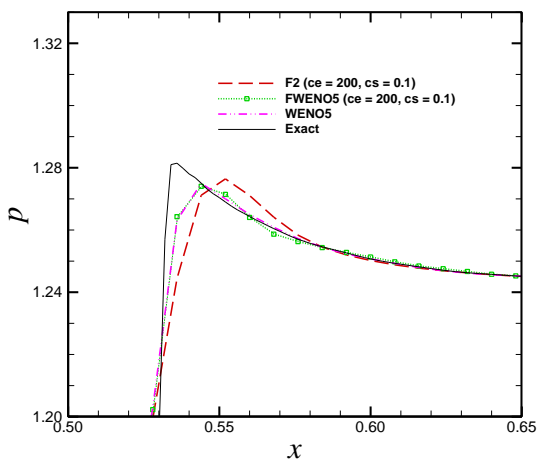
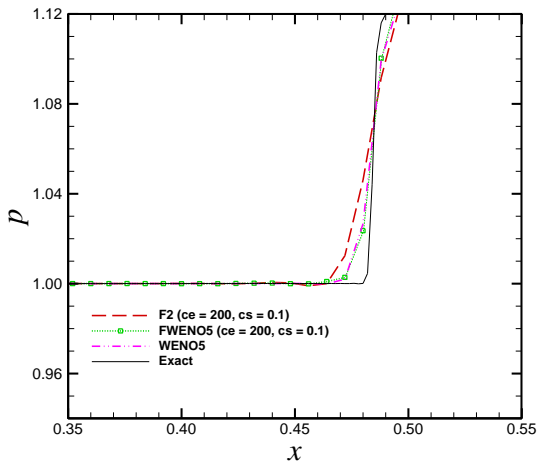
Fig. 8 Shock-density wave interaction; Comparison of filter A and B for  $c_e = 500$  in different regions

شکل 8 اندرکنش شوک-موج چگالی؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 500$  در نواحی مختلف

بیشتری داشته است. در ناحیه ناپیوستگی‌ها (بازه  $-3 \leq x \leq 0$ ) تفاوت

$$c_e = 200, c_s = 0.1, \epsilon^{(1)} = 0.25 \quad (25)$$

همچنین نتایج برای روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم نیز ارائه شده‌است. حل دقیق در حقیقت نتایج روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم برای شبکه ریز با ابعاد  $1001 \times 401$  و  $\Delta t = 0.00025$  می‌باشد. در محل



**Fig. 11** Shock-vortex interaction; Comparison of filter A and B for  $c_e = 200$  in different regions

شکل 11 اندرکنش شوک-گردابه؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $c_e = 200$  در نواحی مختلف؛ از بالا به پایین: پیش از شوک، پس از شوک، مرکز گردابه

#### 4-5- مسأله اندرکنش شوک-گردابه

این آزمون شامل اندرکنش یک شوک و یک گردابه است [14] که به بررسی جابجایی یک گردابه و اثر اتلاف عددی بر آن می‌پردازد. گردابه‌ها در جریان‌های آیرودینامیکی بسیار مشاهده می‌شوند. معادلات حاکم، معادلات اوایلر دو بُعدی می‌باشند:

$$U_t + F_x + G_y = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}$$

$$E = \rho \left( e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad p = \rho e (\gamma - 1) \quad (23)$$

ناحیه حل بازه  $[0, 2] \times [0, 1]$  می‌باشد. یک شوک ساکن با عدد ماخ  $M = 1.1$  در  $x = 0.5$  عمود بر محور  $x$  قرار دارد. در سمت چپ شوک  $(\rho, u, v, p) = (1, 1.1\gamma, 0, 1)$  می‌باشد و مقادیر سمت راست شوک از روابط شوک قائم به دست می‌آید. یک گردابه کوچک به سمت چپ شوک افزوده می‌شود. مرکز گردابه در  $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$  قرار دارد. گردابه به صورت یک اختلال به سرعت، دما و آنتروپی جریان متوسط افزوده می‌شود.

$$\hat{u} = \epsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin \theta, \quad \hat{v} = -\epsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos \theta$$

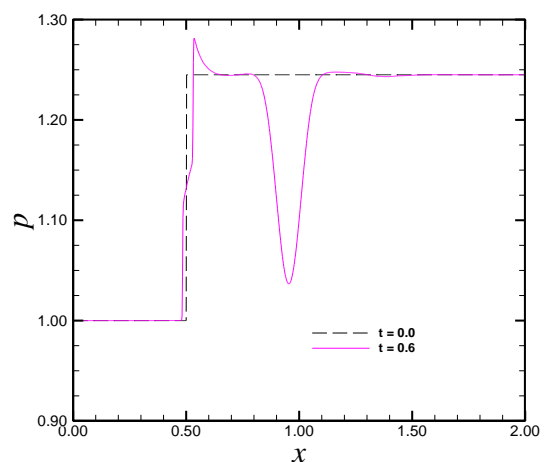
$$\hat{T} = -\frac{(\gamma - 1)\epsilon^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\gamma}, \quad \tau = \frac{r}{r_c}$$

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$$

$$\hat{S} = 0 \quad (24)$$

مقدار زاویه  $\theta$  با توجه به مرکز گردابه  $(x_c, y_c)$  سنجیده می‌شود.  $\epsilon$  ضریب قدرت گردابه و  $\alpha$  کاهش نرخ گردابه را کنترل می‌کند و نیز  $r_c$  شعاع بحرانی گردابه می‌باشد. مقدار  $\alpha = 0.204$ ،  $r_c = 0.05$  و  $\epsilon = 0.3$  را در نظر می‌گیریم. شکل 10 توزیع فشار را روی خط افقی  $y = 0.5$  نشان می‌دهد.

در شکل 11 توزیع فشار روی خط افقی  $y = 0.5$  در  $t = 0.6$  برای فیلتر الف و ب با مقادیر زیر نمایش داده شده‌اند. تعداد نقاط شبکه  $101 \times 251$  و  $\Delta t = 0.001$  می‌باشد.



**Fig. 10** Shock-vortex interaction; initial conditions and exact solution at  $t = 1.8$  on section  $y = 0.5$

شکل 10 اندرکنش شوک-گردابه؛ شرایط اولیه و حل دقیق در  $t = 0.6$  در مقطع  $y = 0.5$



که نتایج فیلتر ب با نتایج روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم انطباق زیادی دارد.

در شکل 12 مقایسه مشابهی صورت گرفته است با این تفاوت که مقدار  $C_e = 2000$  می‌باشد. مشاهده می‌شود نتایج حاصل از فیلتر الف هم حول شوک و هم در مرکز گردابه بشدت با اُفت دقت همراه شده‌است که ناشی از افزایش تأثیر فیلتر مرتبه دوم می‌باشد. برای فیلتر ب حول شوک می‌توان گفت که نتایج تغییری نداشته‌اند و در مرکز گردابه کاهش دقت به مقدار قابل توجهی کمتر از فیلتر الف است.

### 6- نتیجه‌گیری

در کار حاضر با استفاده از حسگر و اصلاح فیلتر مرکب ارائه شده در مراجع [11,10] برای چندین آزمون عددی شامل ناپیوستگی و شوک شبیه‌سازی صورت گرفت. در مراجع مذکور فیلتر مرکب در حقیقت ترکیبی از یک فیلتر خطی مرتبه بالا و یک فیلتر خطی مرتبه دوم بود که فیلتر مرتبه بالا نقش پایدارسازی و حذف فرکانس‌های بالا و فیلتر مرتبه دوم نقش تسخیر شوک را دارد. در کار حاضر اصلاح فیلتر بدین صورت انجام شد که فیلتر تسخیر شوک (فیلتر خطی مرتبه دوم) با یک فیلتر حاصل از روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم جایگزین گردید. نتایج عددی مؤید این مطلب بود که تنظیم حسگر برای افزایش ناحیه تأثیر فیلتر برای فیلتر مرکب جدید (فیلتر ب)، بدون کاهش دقت چه حول ناپیوستگی و چه در نواحی هموار جریان، بود. در حالی که برای فیلتر مرکب پیشین (فیلتر الف) این افزایش موجب کاهش دقت و نیز استهلاک بیش از اندازه ناپیوستگی‌ها و نواحی هموار جریان، شد. همچنین در فیلتر مرکب الف مشاهده شد برای آزمون‌های مختلف مقادیر متفاوتی برای ضریب فیلتر مرتبه دوم ( $\epsilon^{(1)}$ ) انتخاب گردید، در صورتی که برای فیلتر ب چنین ضریبی وجود ندارد، که آن را می‌توان مزیت دیگری برای این فیلتر مرکب برشمرد.

مقایسه با روش ضرورتاً غیرنوسانی مرتبه پنجم حاکی از این بود که با استفاده از هر دو فیلتر، تسخیر شوک بخوبی صورت می‌پذیرد. خصوصاً نتایج فیلتر ب با نتایج روش ضرورتاً غیرنوسانی انطباق زیادی داشت و در برخی مواقع دقت بیشتری در نواحی هموار داشت. این دقت بیشتر ناشی از حذف اثر فیلتر تسخیر شوک در نواحی هموار به وسیله حسگر بود.

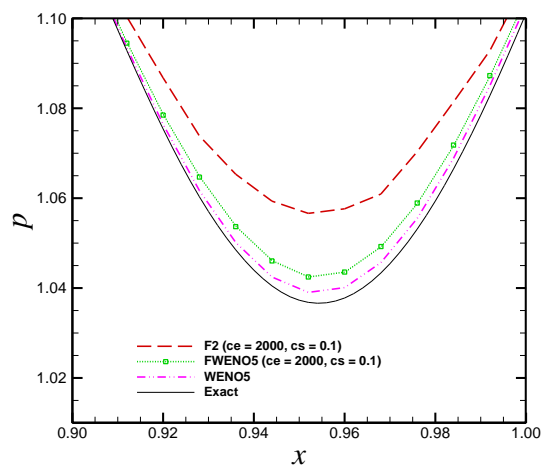
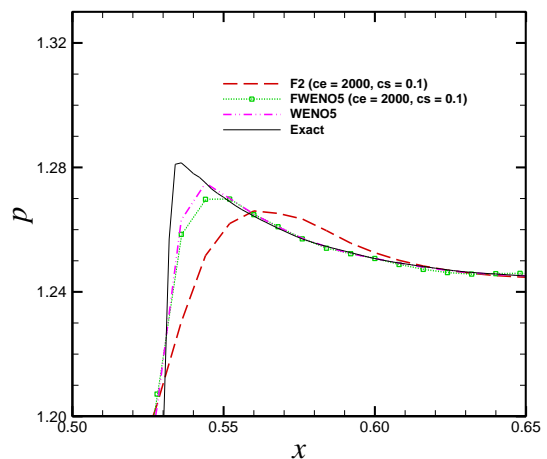
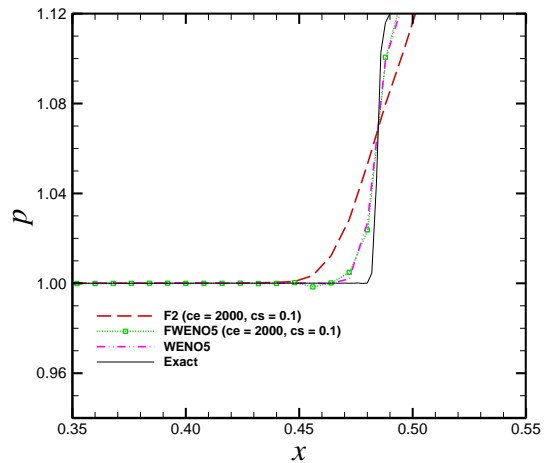
### 7- قدردانی

از حمایت مالی دانشگاه تهران از این تحقیق قدردانی می‌گردد.

### 8- مراجع

- [1] P. Colella, P. R. Woodward, The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 54, No. 1, pp. 174-201, 1984.
- [2] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy, Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III, *Journal of Computational Physics*, Vol. 71, No. 1, pp. 231-303, 1987.
- [3] X. D. Liu, S. Osher, T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, No. 1, pp. 200-212, 1994.
- [4] C. W. Shu, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, *ICASE Report*, No. 97-65, 1997.
- [5] S. K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, No. 1, pp. 16-42, 1992.
- [6] H. C. Yee, N. D. Sandham, M. Djomehri, Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters, *Journal of Computational Physics*, Vol. 150, No. 1, pp. 199-238, 1999.
- [7] B. Sjogreen, H.C. Yee, Adaptive filtering and limiting in compact high order methods for multiscale gas dynamics and mhd systems, *Computers and Fluids*, Vol. 37, No. 5, pp. 593-619, 2008.
- [8] C. Bogey, N. De Cacqueray, C. Bailly, A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 5, pp. 1447-1465, 2009.

شوک (بلافاصله قبل و بعد از آن) مشاهده می‌شود که نتایج فیلتر ب حل بهتری نسبت به فیلتر الف تولید کرده است. اما در مرکز گردابه نتایج فیلتر الف به حل دقیق نزدیک‌تر می‌باشد. نکته دیگری که دیده می‌شود این است



**Fig. 12** Shock-vortex interaction; Comparison of filter A and B for  $C_e = 2000$  in different regions; from top to bottom: before shock, after shock, vortex center

شکل 12 اندرکنش شوک-گردابه؛ مقایسه فیلتر الف و ب برای  $C_e = 2000$  در نواحی مختلف؛ از بالا به پایین: پیش از شوک، پس از شوک، مرکز گردابه

- Computational Physics*, Vol. 230, No. 3, pp. 494-514, 2011.
- [12] Y. Shen, G. Yang, Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 53, No. 4, pp. 531-560, 2007.
- [13] G. A. Sod, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, No. 1, pp. 1-31, 1978.
- [14] G. S. Jiang, C. W. Shu, Efficient implementation of weighted eno schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 126, No. 1, pp. 202-228, 1996.
- [9] M. Visbal, D. Gaitonde, Shock capturing using compact-differencing-based methods, *Proceeding of 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, United States, Reno, January 10-13, 2005.
- [10] H. Mahmoodi Darian, *Intelligent Filter Design for High-Order Methods in Aerodynamic Simulations with Accuracy Preservation*, PhD Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tehran, 2010 (in Persian فارسی).
- [11] H. M. Darian, V. Esfahanian, K. Hejranfar, A shock-detecting sensor for filtering of high-order compact finite difference schemes, *Journal of*