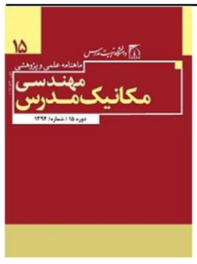
مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 387-395



ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

هدایت خط‌دید بهینه مرتبه دوم برای اهداف ثابت

سیدحسام سجادی[1]، سیدحمید جلالی نائینی[2*]

1- دانشجوی مقطع دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

*تهران، صندوق پستی 14115-111، shjalalinaini@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 شهریور 1394

پذیرش: 06 مهر 1394

ارائه در سایت: 17 آبان 1394

کلید واژگان:

هدایت خط‌دید

هدایت بهینه

تحلیل خطای نهایی بی‌بعد

سیستم کنترل مرتبه دوم

چکیده

در این مقاله، حل صریح هدایت خط‌دید بهینه برای سیستم‌های کنترل دوجمله‌ای مرتبه دوم بدون شتاب اشباع بصورت حلقه‌بسته استخراج می‌شود. معادلات حرکت برای حل بهینه به‌صورت تک‌بعدی در نظر گرفته شده و زمان و موقعیت نهایی معلوم و ثابت فرض شده‌است. بعلاوه، استخراج معادلات با استفاده از سه فرم بی‌بعدسازی انجام شده‌است که سبب افزایش قابلیت در طراحی و بهبود تحلیل عملکرد قانون هدایت بهینه استخراج‌شده می‌شود. با توجه به ریزپردازنده‌های کنونی، بار محاسباتی قانون هدایت بهینه استخراج‌شده در حد معقولی است؛ اگرچه از برازش منحنی برای بهره‌های هدایت و یا ذخیره‌سازی داده می‌توان استفاده نمود. عملکرد قانون هدایت خط‌دید بهینه مرتبه دوم با قوانین هدایت خط‌دید بهینه با سیستم کنترل مرتبه صفر (ایده‌آل) و مرتبه اول با اعمال سیستم‌های کنترل مرتبه سوم، چهارم و ششم و در حالت با محدودیت شتاب و بدون محدودیت شتاب بصورت بی‌بعد مقایسه شده‌است. همچنین تأثیر زمان نهایی، ثابت زمانی سیستم کنترل، ضریب وزنی انحراف از خط‌دید و محدودیت شتاب نیز بررسی شده‌است. تحلیل فاصله خطای بی‌بعد نشان می‌دهد که فاصله خطای سیستم هدایت بهینه مرتبه دوم به ازای زمان‌های پرواز کوتاه به ویژه در وسایل پروازی با قابلیت مانوری زیاد، کمتر از دو قانون هدایت مرتبه صفر و مرتبه اول می‌شود.

Second-Order optimal line-of-sight guidance for stationary targets

Seyed Hesam Sajjadi, Seyed Hamid Jalali Naini*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

*P.O.B. 14115111 Tehran, Iran, shjalalinaini@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 29 August 2015

Accepted 28 September 2015

Available Online 08 November 2015

Keywords:

Line-of-Sight Guidance

Optimal Guidance

Normalized Miss Distance Analysis

Second-Order Control System

ABSTRACT

In this paper, an explicit optimal line-of-sight guidance law for second-order binomial control systems is derived in closed-loop without acceleration limit. The problem geometry is assumed in one dimension and the final time and final position are fixed. The formulation is normalized in three forms to give more insight into the design and performance analysis of the guidance law. The computational burden of the guidance law is reasonable for today’s microprocessors; however curve fitting or look-up table may be used for the implementation of the second-order optimal guidance law. The performance of the second-order optimal guidance law is compared in normalized forms with zero-lag and first-order optimal guidance laws using third-, fourth-, and sixth-order binomial control systems with/without acceleration limit. Moreover, the effect of the final time, the equivalent time constant of the vehicle control system, the vehicle-to-target line-of-sight weighting factor in cost function, and acceleration limit are investigated. Normalized miss distance analysis shows that the miss distance of the second-order guidance law is smaller than the two mentioned schemes for small total flight times, especially with large maneuvering capability.

1- مقدمه

بطور کلی قوانین هدایت به دو دسته هدایت دونقطه‌ای و سه‌نقطه‌ای تقسیم می‌شود. به قوانین هدایت سه نقطه‌ای، هدایت خط‌دید نیز می‌گویند. هدف از هدایت خط‌دید این است که وسیله پروازی همواره بر روی خط واصل بین هدف و ردیاب هدف (خط‌دید) قرار گیرد [2،1]. در هدایت خط‌دید، فاصله (عمودی) وسیله پروازی از خط‌دید به عنوان خطا در نظر گرفته‌شده و دستور شتاب به منظور صفر کردن این خطا محاسبه می‌شود. این قانون هدایت کاربرد زیادی برای تعیین مسیر آتی وسایل پروازی از جمله موشک‌های کوتاه برد [3،2] و هواپیماهای بدون سرنشین دارد. از قانون هدایت خط‌دید تغییریافته می‌توان برای تعقیب مسیر و تعقیب عوارض زمین استفاده کرد [5،4].

تاکنون روش‌های متعددی برای طراحی و/یا بهینه‌سازی قانون هدایت سه‌نقطه‌ای در وسایل پروازی ارائه شده‌است. بطور نمونه می‌توان از روش‌های خطی‌سازی پسخور [6]، کنترل فازی [7-9]، کنترل مقاوم [10]، کنترل تطبیقی [11]، کنترل پیش‌بین خطی [12]، کنترل بهینه [14،13] و روش‌های بهینه‌سازی مانند الگوریتم ژنتیک [15] و بهینه‌سازی کلونی مورچگان [16] نام برد.

حل تحلیلی مسئله هدایت سه‌نقطه‌ای نسبت به هدایت دو نقطه‌ای، به علت اضافه شدن قید قرارگیری بر روی خط‌دید، غامض‌تر است. بعلاوه، استخراج قانون هدایت بهینه حلقه‌بسته سه‌نقطه‌ای نسبت به قانون هدایت دو

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. H. Sajjadi, S. H. Jalali Naini, Second-Order optimal line-of-sight guidance for stationary targets, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 387-395, 2015 (In Persian)

نقطه‌ای بسیار غامض‌تر است. قانون هدایت دونقطه‌ای بهینه حلقه‌بسته برای سیستم‌های کنترلی مرتبه اول، دوم و مرتبه‌های بالا استخراج شده‌است [17]. اما به علت اضافه‌شدن قید مذکور و پیچیدگی حل مسئله، قانون هدایت بهینه حلقه‌بسته سه‌نقطه‌ای تنها برای سیستم کنترل ایده‌آل (مرتبه صفر) [13] و مرتبه یک [18] در منابع موجود است. بعلاوه، حل‌های مذکور برای اهداف ثابت و بصورت تک‌بعدی استخراج شده‌است. در مرجع [18] به منظور تحلیل عملکرد قانون هدایت، سه فرم بی‌بعدسازی ارائه شده و نتایج آن با سیستم کنترل ایده‌آل مقایسه شده‌است. در مرجع [14] نیز قانون هدایت سه‌نقطه‌ای بهینه برای سیستم کنترل ایده‌آل استخراج شده‌است؛ البته با این تفاوت که در معیار عملکرد «مجذور مؤلفه سرعت عمود بر خط‌دید» به منظور مقاومت بیشتر وسیله پروازی در مقابل اغتشاش باد اضافه شده، اما در عوض بهره‌های هدایت بصورت پایا[1] استخراج شده‌است. حل مرجع مذکور نیز برای حالت تک بعدی و هدف ثابت است.

در این مقاله، با استفاده از تئوری کنترل بهینه، حل صریح و حلقه‌بسته هدایت خط‌دید برای سیستم کنترل مرتبه دوم به ازای هدف ثابت و در حالت تک‌بعدی استخراج شده و نتایج آن با هدایت بهینه برای سیستم کنترل مرتبه صفر (ایده‌آل) و مرتبه اول مقایسه شده‌است.

2- معادلات حرکت

معادله حرکت حاکم بر وسیله پروازی با فرض مدل جرم نقطه‌ای در حالت تک‌بعدی بصورت $\ddot{h} = a$ است که h فاصله وسیله پروازی از خط‌دید و a شتاب وسیله پروازی در جهت عمود بر خط‌دید است. شکل 1 هندسه تک‌بعدی مسئله هدایت خط‌دید را نشان می‌دهد که در آن وسیله پروازی با P و هدف با T نمایش داده شده‌است.

برای استخراج قانون هدایت بهینه، سیستم کنترل وسیله پروازی بصورت مرتبه دوم فرض شده‌است. به عبارت دیگر، کل دینامیک وسیله پروازی از ورودی دستور شتاب (u) تا خروجی شتاب مانوری با یک تابع تبدیل مرتبه دوم به اصطلاح دو جمله‌ای[2] مدل شده‌است [2]:

$$\frac{a}{u}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{2}s\right)^2} \tag{1}$$

که در آن، T ثابت زمانی معادل سیستم کنترل و s متغیر حوزه لاپلاس است. معادلات حالت مسئله به صورت رابطه (2) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = J \\ \dot{J} = -\dfrac{4}{T^2}a - \dfrac{4}{T}J + \dfrac{4}{T^2}u \end{cases} \tag{2}$$

که در آن، v مؤلفه سرعت وسیله پروازی در جهت عمود بر خط‌دید (در راستای محور h) و J نرخ شتاب وسیله پروازی است.

در ادامه، معادلات حالت بی‌بعد با استفاده از تغییر متغیرهای رابطه (3) استخراج می‌شود:

$$\tau = \frac{t}{T}\,,\ \ \tau_f = \frac{t_f}{T}\,,\ \ \tau_{\mathrm{go}} = \frac{t_{\mathrm{go}}}{T}\,,\ \ \hat{u} = \frac{u}{A}$$
$$\hat{h} = \frac{h}{AT^2}\,,\ \ \hat{v} = \frac{v}{AT}\,,\ \ \hat{a} = \frac{a}{A}\,,\ \ \hat{J} = \frac{JT}{A} \tag{3}$$

که در آن، t_f زمان نهایی، $t_{go} = t_f - t$ زمان باقی‌مانده تا زمان نهایی (تا رسیدن به هدف) و A پارامتر بی‌بعدسازی با دیمانسیون مشابه شتاب است [18]. بنابراین، معادلات حالت بی‌بعد به‌صورت رابطه (4) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{h}' = \hat{v} \\ \hat{v}' = \hat{a} \\ \hat{a}' = \hat{J} \\ \hat{J}' = -4\hat{a} - 4\hat{J} + 4\hat{u} \end{cases} \tag{4}$$

که $(\,)' = d(\,)/d\tau$ نمایانگر مشتق نسبت به زمان بی‌بعد τ است.

3- مسئله هدایت خط‌دید بهینه

در هدایت سه‌نقطه‌ای ممکن است معیار عملکرد بصورت رابطه (5) انتخاب شود [13]:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[bh^2 + u^2]\mathrm{d}t \tag{5}$$

که در آن، u دستور شتاب (ورودی کنترلی) و $b > 0$ ضریب وزنی برای مجذور فاصله از خط‌دید است.

حال مسئله هدایت بهینه به صورت بی‌بعد تعریف می‌شود. ورودی کنترل $\hat{u}$ به‌گونه‌ای استخراج شود که تابع عملکرد (6) منوط به معادلات حالت (4) و شرایط اولیه و نهایی (7) به ازای زمان نهایی معین τ_f (مقدار ثابت از پیش تعیین‌شده) کمینه شود.

$$\frac{\mathfrak{J}}{TA^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau_f}[\hat{b}\hat{h}^2 + \hat{u}^2]\mathrm{d}\tau\,, \qquad \hat{b} = bT^4 \tag{6}$$

$$\begin{cases} \hat{h}(0) = \hat{h}_0 \\ \hat{v}(0) = \hat{v}_0 \\ \hat{a}(0) = \hat{a}_0 \\ \hat{J}(0) = \hat{J}_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{h}(\tau_f) = 0 \\ \hat{v}(\tau_f) = \text{free} \\ \hat{a}(\tau_f) = \text{free} \\ \hat{J}(\tau_f) = \text{free} \end{cases} \tag{7}$$

که زیرنویس "0" نمایانگر مقدار اولیه است. تابع هامیلتونی مسئله به‌صورت رابطه (8) نوشته می‌شود:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hat{b}\hat{h}^2 + \frac{1}{2}\hat{u}^2 + \lambda_h\hat{v} + \lambda_v\hat{a} + +\lambda_a\hat{J} + \lambda_J(-4\hat{a} - 4\hat{J} + 4\hat{u}) \tag{8}$$

که در آن، ضرایب لاگرانژ با λ_h، λ_v، λ_a و λ_J نمایش داده شده‌است. با استفاده از روابط کنترل بهینه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\hat{u}} = 0 \to\ \hat{u} = -4\lambda_J \\ \dfrac{d(\vec{\lambda})}{d\tau} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{X}} \to \begin{cases} \lambda_h' = -\hat{b}\hat{h} \\ \lambda_v' = -\lambda_h \\ \lambda_a' = -\lambda_v + 4\lambda_J \\ \lambda_J' = -\lambda_a + 4\lambda_J \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

که در آن، $\vec{\lambda} = [\lambda_h \quad \lambda_v \quad \lambda_a \quad \lambda_J]^{\mathrm{T}}$ و $\vec{X} = [\hat{h} \quad \hat{v} \quad \hat{a} \quad \hat{J}]^{\mathrm{T}}$. با ترکیب معادلات مرتبه یک می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{bmatrix}\vec{X} \\ \vec{\lambda}\end{bmatrix} = A_p\begin{bmatrix}\vec{X} \\ \vec{\lambda}\end{bmatrix} \tag{10}$$

که در آن،

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ -\hat{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

حل سیستم خطی (10) بین زمان حال و زمان نهایی (بی‌بعد)، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

1- Steady State
2- Binomial

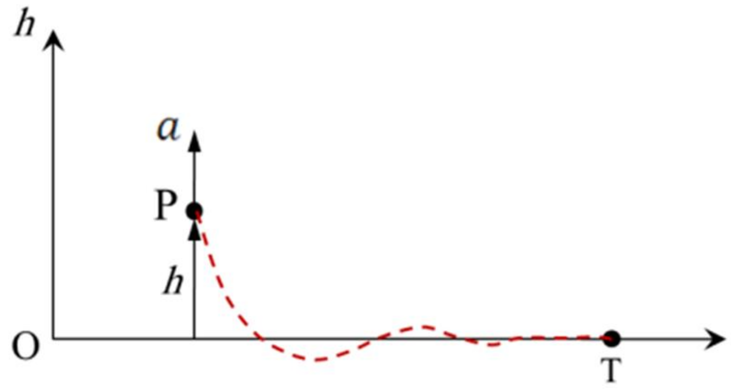


Fig. 1 Geometry of one-dimensional problem

شکل 1 هندسه تک‌بعدی مسئله هدایت خطدید

$$\begin{bmatrix}\vec{X}(\tau_f)\\ \vec{\lambda}(\tau_f)\end{bmatrix}_{8\times1} = \Phi(\tau_{go})\begin{bmatrix}\vec{X}(\tau)\\ \vec{\lambda}(\tau)\end{bmatrix}_{8\times1} \tag{12}$$

که در آن، $\Phi(\tau)$ ماتریس انتقال حالت برای ماتریس سیستم A_p است، بنابراین،

$$\Phi(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A_p)^{-1}\}\big|_{\tau} \tag{13}$$

که در آن، I ماتریس همانی با ابعاد 8×8 است. محاسبه ماتریس انتقال حالت در پیوست الف آمده‌است. با توجه به معین بودن مقدار نهایی h و آزاد بودن سایر مقادیر نهایی متغیرهای حالت، شرایط اولیه و نهایی مورد نیاز برای حل مسئله به‌صورت رابطه (14) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases}\hat{h}(0) = \hat{h}_0\\ \hat{v}(0) = \hat{v}_0\\ \hat{a}(0) = \hat{a}_0\\ \hat{J}(0) = \hat{J}_0\end{cases} \qquad \begin{cases}\hat{h}(\tau_f) = 0\\ \lambda_v(\tau_f) = 0\\ \lambda_a(\tau_f) = 0\\ \lambda_J(\tau_f) = 0\end{cases} \tag{14}$$

با قرار دادن مقادیر نهایی (14) برای سطر اول و سه سطر آخر معادله ماتریسی (12) می‌توان نوشت:

$$P_1(\tau_{go})\vec{X}(\tau) + P_2(\tau_{go})\vec{\lambda}(\tau) = \vec{0} \tag{15}$$

که در آن،

$$P_1(\tau_{go}) = \begin{bmatrix}\phi_{11}(\tau_{go}) & \phi_{12}(\tau_{go}) & \phi_{13}(\tau_{go}) & \phi_{14}(\tau_{go})\\ \phi_{61}(\tau_{go}) & \phi_{62}(\tau_{go}) & \phi_{63}(\tau_{go}) & \phi_{64}(\tau_{go})\\ \phi_{71}(\tau_{go}) & \phi_{72}(\tau_{go}) & \phi_{73}(\tau_{go}) & \phi_{74}(\tau_{go})\\ \phi_{81}(\tau_{go}) & \phi_{82}(\tau_{go}) & \phi_{83}(\tau_{go}) & \phi_{84}(\tau_{go})\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$P_2(\tau_{go}) = \begin{bmatrix}\phi_{15}(\tau_{go}) & \phi_{16}(\tau_{go}) & \phi_{17}(\tau_{go}) & \phi_{18}(\tau_{go})\\ \phi_{65}(\tau_{go}) & \phi_{66}(\tau_{go}) & \phi_{67}(\tau_{go}) & \phi_{68}(\tau_{go})\\ \phi_{75}(\tau_{go}) & \phi_{76}(\tau_{go}) & \phi_{77}(\tau_{go}) & \phi_{78}(\tau_{go})\\ \phi_{85}(\tau_{go}) & \phi_{86}(\tau_{go}) & \phi_{87}(\tau_{go}) & \phi_{88}(\tau_{go})\end{bmatrix} \tag{17}$$

لازم به ذکر است که عناصر ماتریس P_1 و P_2 از عناصر ماتریس انتقال حالت (13) ساخته شده‌است. اگر P_2 معکوس‌پذیر باشد، $\vec{\lambda}(\tau)$ را به راحتی می‌توان از رابطه (15) محاسبه نمود. البته با توجه به رابطه (9)، برای محاسبه دستور شتاب تنها مؤلفه چهارم $\vec{\lambda}(\tau)$ نیاز است. بنابراین،

$$\lambda_J(\tau) = \hat{C}_1(\tau_{go})\hat{h} + \hat{C}_2(\tau_{go})\hat{v} + \hat{C}_3(\tau_{go})\hat{a} + \hat{C}_4(\tau_{go})\hat{J} \tag{18}$$

که در آن،

$$\begin{cases}\hat{C}_1(\tau_{go}) = -f_1\phi_{11} - f_2\phi_{61} - f_3\phi_{71} - f_4\phi_{81}\\ \hat{C}_2(\tau_{go}) = -f_1\phi_{12} - f_2\phi_{62} - f_3\phi_{72} - f_4\phi_{82}\\ \hat{C}_3(\tau_{go}) = -f_1\phi_{13} - f_2\phi_{63} - f_3\phi_{73} - f_4\phi_{83}\\ \hat{C}_4(\tau_{go}) = -f_1\phi_{14} - f_2\phi_{64} - f_3\phi_{74} - f_4\phi_{84}\end{cases} \tag{19}$$

همچنین،

$$f_1(\tau_{go}) = \frac{f_{n_1}}{|P_2|},\quad f_2(\tau_{go}) = \frac{f_{n_2}}{|P_2|},\quad f_3(\tau_{go}) = \frac{f_{n_3}}{|P_2|},\quad f_4(\tau_{go}) = \frac{f_{n_4}}{|P_2|} \tag{20}$$

$$f_{n_1}(\tau_{go}) = -\phi_{65}(\phi_{76}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{77}) + \phi_{75}(\phi_{66}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{67}) - \phi_{85}(\phi_{66}\phi_{77} - \phi_{76}\phi_{67}) \tag{21}$$

$$f_{n_2}(\tau_{go}) = \phi_{15}(\phi_{76}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{77}) - \phi_{75}(\phi_{16}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{17}) + \phi_{85}(\phi_{16}\phi_{77} - \phi_{76}\phi_{17}) \tag{22}$$

$$f_{n_3}(\tau_{go}) = -\phi_{15}(\phi_{66}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{67}) + \phi_{65}(\phi_{16}\phi_{87} - \phi_{86}\phi_{17}) - \phi_{85}(\phi_{16}\phi_{67} - \phi_{66}\phi_{17}) \tag{23}$$

$$f_{n_4}(\tau_{go}) = \phi_{15}(\phi_{66}\phi_{77} - \phi_{76}\phi_{67}) - \phi_{65}(\phi_{16}\phi_{77} - \phi_{76}\phi_{17}) + \phi_{75}(\phi_{16}\phi_{67} - \phi_{66}\phi_{17}) \tag{24}$$

$$|P_2(\tau_{go})| = \phi_{18}\ f_{n_1} + \phi_{68}\ f_{n_2} + \phi_{78}\ f_{n_3} + \phi_{88}\ f_{n_4} \tag{25}$$

لازم به ذکر است که ϕ_{ij} در روابط (19) و (21) تا (25) تابعی از τ_{go} و $\hat{b}$ است که برای خلاصه‌نویسی نمایش داده نشده‌است. در نتیجه با استفاده از روابط (9) و (18)، دستور شتاب بهینه حلقه‌بسته به‌صورت رابطه (26) حاصل می‌شود:

$$u(t) = A\hat{u}(\tau) = -C_h\, h - C_v\, v - C_a a - C_J\, J \tag{26}$$

که در آن،

$$C_h = \frac{\hat{C}_h}{T^2},\qquad C_v = \frac{\hat{C}_v}{T},\qquad C_a = \hat{C}_a\,,\qquad C_J = T\,\hat{C}_J \tag{27}$$

$$\hat{C}_h = 4\hat{C}_1,\qquad \hat{C}_v = 4\hat{C}_2,\qquad \hat{C}_a = 4\hat{C}_3,\qquad \hat{C}_J = 4\hat{C}_4 \tag{28}$$

دستور شتاب بهینه حلقه‌باز نیز به‌صورت مشابه محاسبه می‌شود:

$$\hat{u}(\tau) = [-N_1(\tau) + N_2(\tau)\, P_2^{-1}(\tau_f)\, P_1(\tau_f)]\, \vec{X}(0) \tag{29}$$

که در آن،

$$\begin{cases}N_1(\tau) = [\phi_{81}(\tau) \quad \phi_{82}(\tau) \quad \phi_{83}(\tau) \quad \phi_{84}(\tau)]\\ N_2(\tau) = [\phi_{85}(\tau) \quad \phi_{86}(\tau) \quad \phi_{87}(\tau) \quad \phi_{88}(\tau)]\end{cases} \tag{30}$$

با ظهور ریزپردازنده‌های سریع، افزایش بار محاسباتی ضرایب هدایت، آنقدر نیست که قابل پیاده‌سازی نباشد. بعلاوه، می‌توان روابطی برای ضرایب بهره هدایت با برازش منحنی بدست آورد و یا از مقادیر ذخیره شده در کامپیوتر استفاده نمود. رفتار ضرایب بی‌بعد قانون هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم برحسب زمان بی‌بعد به ازای ضرایب وزنی مختلف در شکل 2 ترسیم شده‌است. همانطور که در این نمودارها مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب وزنی، ضرایب بهره سریع‌تر به مقدار پایای خود می‌رسد. البته توصیه می‌شود که در رابطه دستور شتاب از ضریب C_h فاکتور گرفته‌شود.

4- بحث و نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد قانون هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم با دو قانون هدایت خطدید بهینه مرتبه صفر (ایده‌آل) و اول مقایسه می‌شود. به منظور بررسی عملکرد و مقایسه منصفانه این سه قانون، سیستم کنترل در کد شبیه‌سازی بصورت مرتبه سوم، چهارم و ششم (n = 3,4,6) مدل می‌شود.

$$\frac{a}{u}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{n}s\right)^n} \tag{31}$$

از سه پارامتر بی‌بعد کننده $A = h_0/T^2$، $A = v_0/T$ و $A = a_{\mathrm{sat}}$ برای تحلیل عملکرد می‌توان استفاده نمود که a_{sat} شتاب اشباع وسیله پروازی است. لازم به ذکر است که اعمال هر یک از این پارامترها برای یک دسته مشخص از سناریوها مناسب است. در دسته اول از سناریوها، $A = h_0/T^2$ به عنوان پارامتر بی‌بعد کننده انتخاب می‌شود و می‌توان دستور شتاب و مقادیر عملکردی را برای تمام مقادیر اولیه فاصله از خطدید و ثابت زمانی سیستم به ازای مقادیر ثابت v_0T/h_0 در یک نمودار ترسیم نمود. البته برای حالتی که

$v_0 = 0$ است، عملا نتایج بی‌بعد مذکور برای همه حالات جوابگوست. در دسته دوم از سناریوها، $A = v_0/T$ به عنوان پارامتر بی‌بعد کننده انتخاب می‌شود. بنابراین در این دسته، دستور شتاب و باقی مقادیر برای تمام مقادیر اولیه سرعت عمودی نسبت به خط‌دید و ثابت زمانی سیستم به ازای مقادیر ثابت h_0/v_0T در یک نمودار قابل ترسیم است. برای حالتی که $h_0 = 0$ است، نتایج بی‌بعد مذکور برای همه حالات جوابگوست. در نهایت در دسته سوم از سناریوها و با انتخاب $A = a_{\mathrm{sat}}$، می‌توان دستور شتاب و دیگر پارامترها را برای کلیه مقادیر شتاب اشباع و ثابت زمانی سیستم به ازای مقادیر ثابت $h_0/a_{\mathrm{sat}}T^2$ و $v_0/a_{\mathrm{sat}}T$ در یک نمودار رسم کرد. در مرجع [18] از این سه پارامتر بی‌بعد کننده استفاده شده و نمودارهای سه دسته مذکور برای حالات مختلف ترسیم شده و مزایای آن تشریح شده‌است.

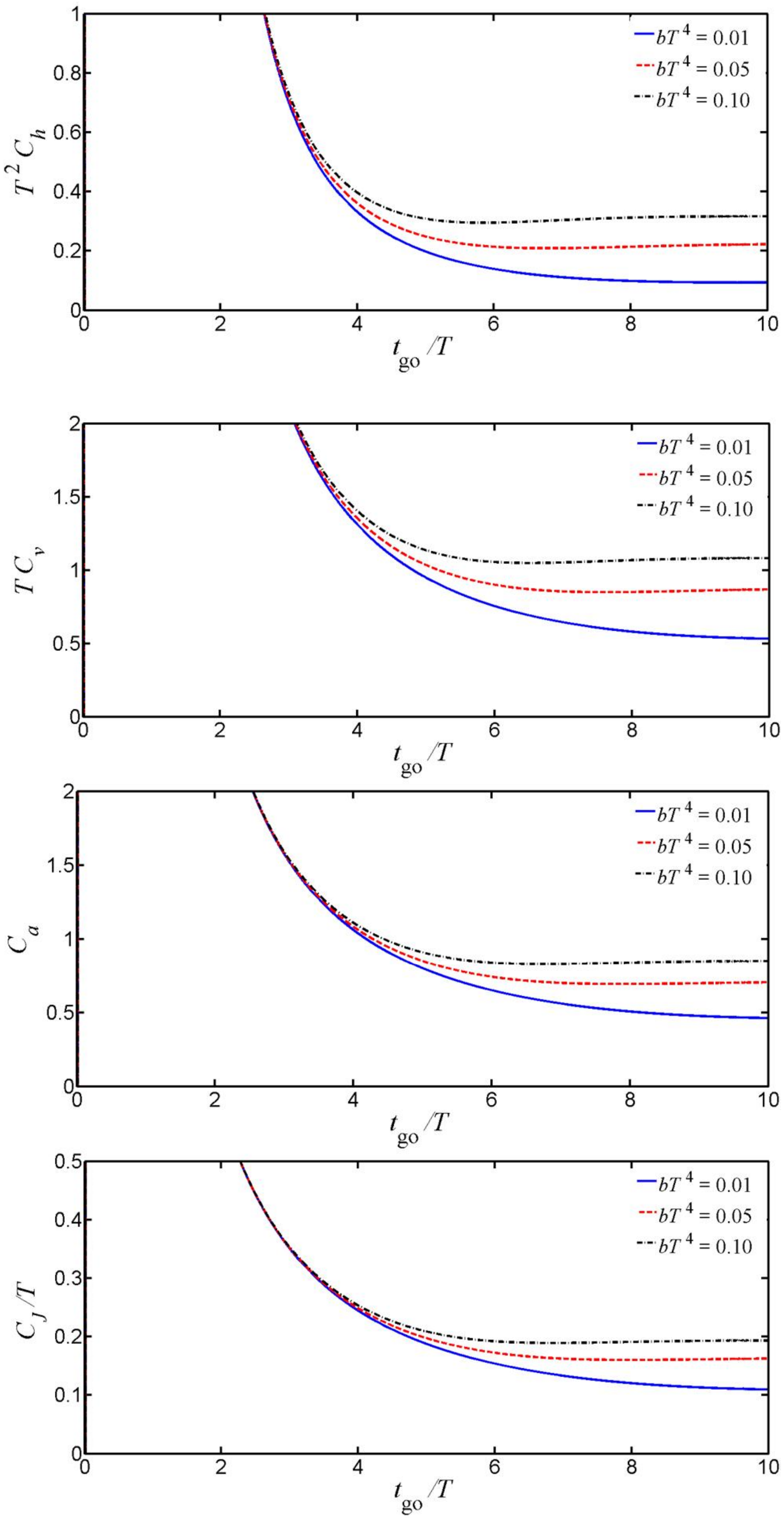


Fig. 2 Normalized guidance gains profiles for different values of $\hat{b} = 0.01, 0.05, 0.1$

شکل 2 رفتار ضرایب بی‌بعد قانون هدایت بهینه مرتبه دوم به ازای مقادیر مختلف ضریب وزنی بی‌بعد

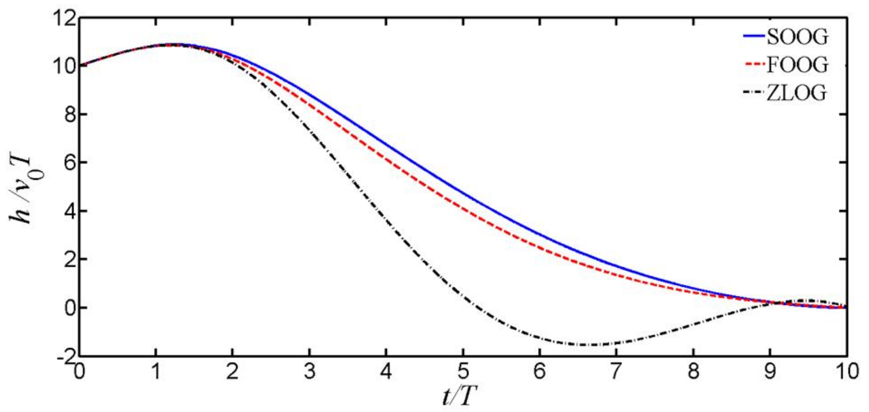


Fig. 3 Normalized LOS deviation vs normalized time for the three guidance laws ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, n = 3$)

شکل 3 فاصله عمودی بی‌بعد از خط‌دید برحسب زمان بی‌بعد برای سه قانون هدایت ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, n = 3$)

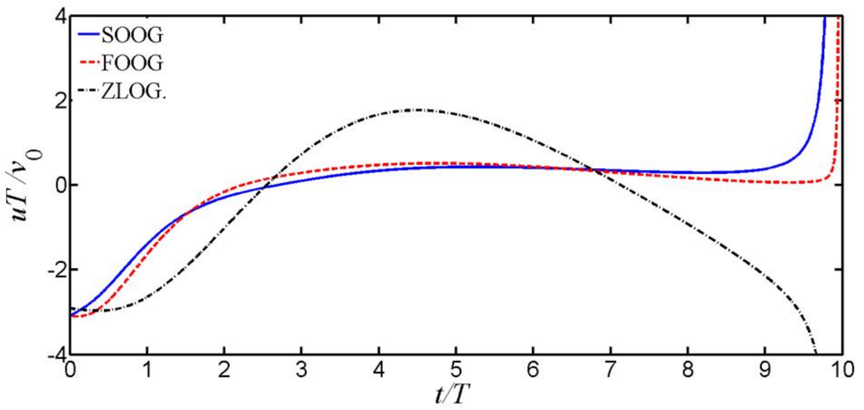


Fig. 4 Normalized commanded acceleration vs normalized time for the three guidance laws ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, n = 3$)

شکل 4 دستور شتاب بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد برای سه قانون هدایت ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, n = 3$)

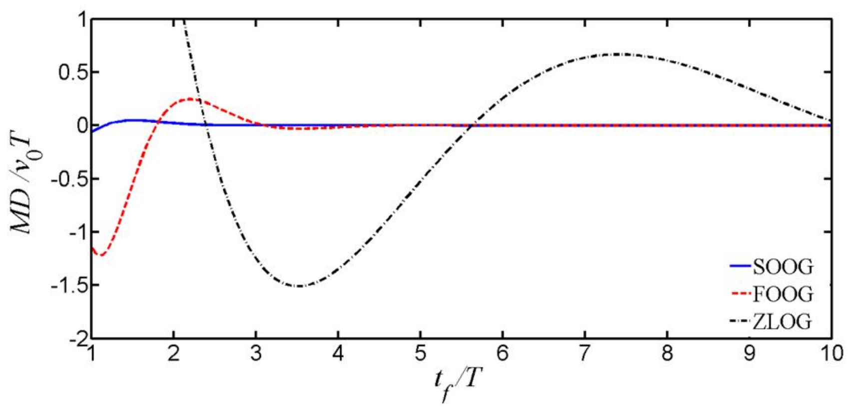


Fig. 5 Normalized miss distance vs normalized final time for the three guidance laws ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, n = 3$)

شکل 5 فاصله خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای سه قانون هدایت بهینه به ازای بر سیستم کنترل مرتبه سوم ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05$)

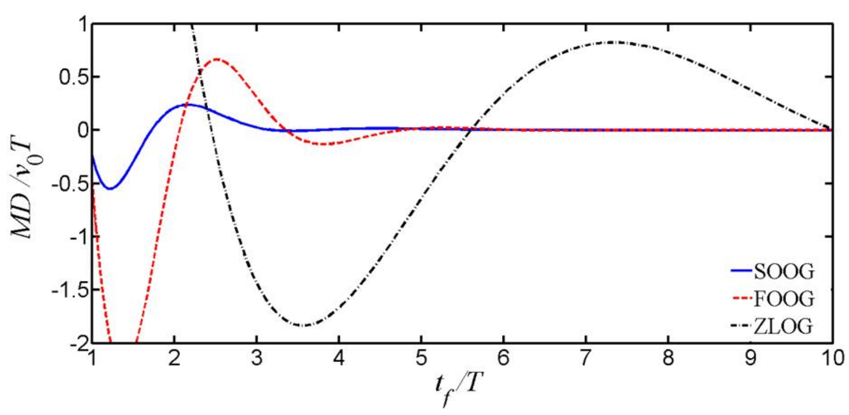


Fig. 6 Normalized miss distance vs normalized final time for the fourth-order control system ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05$)

شکل 6 فاصله خطای نهایی بی‌بعد به ازای سیستم کنترل مرتبه چهارم ($h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05$)

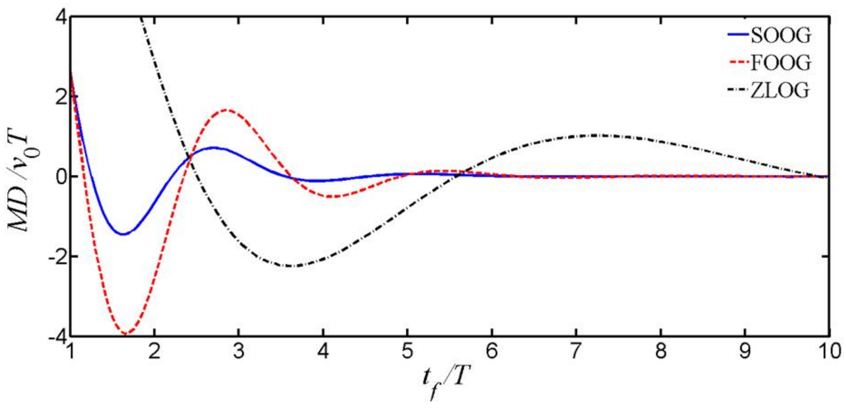


Fig. 7 Normalized miss distance vs normalized final time for the sixth-order control system (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05)

شکل 7 فاصله خطای نهایی بی‌بعد به ازای سیستم کنترل مرتبه ششم(h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05)

در شکل‌های 3 و 4 فاصله عمودی بی‌بعد از خط‌دید و دستور شتاب بی‌بعد برحسب زمان بی‌بعد، ترسیم شده که از $A = v_0/T$ به عنوان پارامتر بی‌بعدکننده استفاده شده‌است (دسته دوم سناریوها). در این دو شکل، عملکرد سه قانون، هدایت بهینه استخراج‌شده برای سیستم کنترل مرتبه دوم (SOOG)، هدایت بهینه برای سیستم کنترل مرتبه اول (FOOG) و هدایت بهینه برای سیستم کنترل ایده‌آل (ZLOG) با اعمال سیستم کنترلی مرتبه سوم (n = 3) در کد شبیه‌سازی، مقایسه شده‌است. با توجه به این دو شکل، رفتار و عملکرد دو قانون «هدایت بهینه برای سیستم مرتبه اول» و «هدایت بهینه برای سیستم مرتبه دوم» تشابه زیادی دارد. البته قانون هدایت بهینه برای سیستم کنترل ایده‌آل درخواست دستور شتاب بیشتری نسبت به دو قانون دیگر دارد. تحلیل کاملی برای سیستم کنترل مرتبه اول در مرجع [18] موجود است. لذا در ادامه، تنها بر تحلیل بی‌بعد فاصله خطای نهایی تمرکز می‌شود. این مقایسه در شکل‌های 5 الی 7 به ازای سیستم‌های کنترلی با مرتبه 3، 4 و 6 و بدون در نظر گرفتن شتاب اشباع صورت گرفته‌است ($\hat{h}_0$ = 10 ,$\hat{b}$ = 0.05). همچنین، لازم به ذکر است که مقدار شتاب و نرخ‌شتاب اولیه برای کلیه نمودارها، صفر در نظر گرفته شده‌است. همانطور که از این نمودارها مشاهده می‌شود، قانون هدایت بهینه برای سیستم کنترل مرتبه دوم (SOOG) مجموعا خطای نهایی کمتری نسبت به دو قانون هدایت دیگر دارد. علاوه بر آن، خطای نهایی قانون هدایت بهینه برای سیستم ایده‌آل نسبت به دو قانون دیگر در مجموع بیشتر بوده و عملکرد نسبتا ضعیفی را در رساندن وسیلهٔ پروازی به خط‌دید در سیستم‌های با مرتبه‌ی بالا نشان می‌دهد. همچنین با مقایسه این سه شکل می‌توان اثر افزایش مرتبه سیستم کنترلی را بر عملکرد قانون هدایت مشاهده نمود. با افزایش مرتبه سیستم کنترل از 3 به 6، خطای نهایی در زمان‌های نهایی کوچک بیشتر شده و قوانین هدایت، توانایی رسیدن به خط‌دید را در زمان نهایی کوچک نخواهند داشت. برای افزایش دقت، نیاز به افزایش ضریب وزنی است که آن هم محدودیت‌هایی دارد و حتی ممکن است سبب افزایش خطا و ناپایداری شود. با توجه به این‌که قانون هدایت خط‌دید بهینه مرتبه اول در مرجع [18] با هدایت خط‌دید ساده (با بهره‌ی ثابت) که از حل بهینه پایا نتیجه شده، مقایسه شده‌است؛ لذا نتایج مذکور در مقاله‌ی حاضر دیگر تکرار نشده‌است.

در ادامه، مقایسه سه قانون هدایت و بررسی عملکرد آن‌ها با اعمال سیستم کنترلی مرتبه 6 (n = 6) در کد شبیه‌سازی انجام خواهدشد. در شکل 8 ضریب وزنی بی‌بعد به مقدار bT^4 = 0.8 افزایش می‌یابد. این افزایش سبب می‌شود که خطای نهایی قوانین هدایت بهینه افزایش یابد تا حدی که قانون هدایت مرتبه صفر (ZLOG)، دیگر توانایی قراردادن وسیله پروازی بر روی خط‌دید (و صفر کردن فاصله خطا) حتی در زمان‌های نهایی بزرگ را ندارد. به عنوان مثال در زمان نهایی بی‌بعد برابر 4، مقدار خطایی نهایی قانون هدایت ZLOG برابر با 4، برای قانون هدایت FOOG برابر با 1.6 و برای قانون هدایت SOOG برابر با 0.3 است. همانطور که پیش‌تر اشاره شد، بطور معمول با تنظیم ضریب وزنی می‌توان سرعت قرارگیری وسیله پروازی بر روی خط‌دید را تنظیم نمود ولی این افزایش، علاوه بر افزایش تلاش کنترلی، سبب افزایش خطای نهایی در اعمال قوانین هدایت ذکر شده بر سیستم‌هایی با مرتبه بالاتر می‌شود. برای بررسی دقیق‌تر اثر ضریب وزنی، خطای فاصله نهایی برحسب ضریب وزنی بی‌بعد به ازای t_f/T = 5 در شکل 9 ترسیم شده‌است. با توجه به شکل 8، مقایسه در زمان نهایی بی‌بعد 5 که نشان‌دهندهٔ یک مقدار اختلاف کمتر از میانگین در فاصله خطا بین دو قانون هدایت بهینه مرتبه اول و مرتبه دوم بوده و مقایسه‌ای منصفانه خواهد بود. با

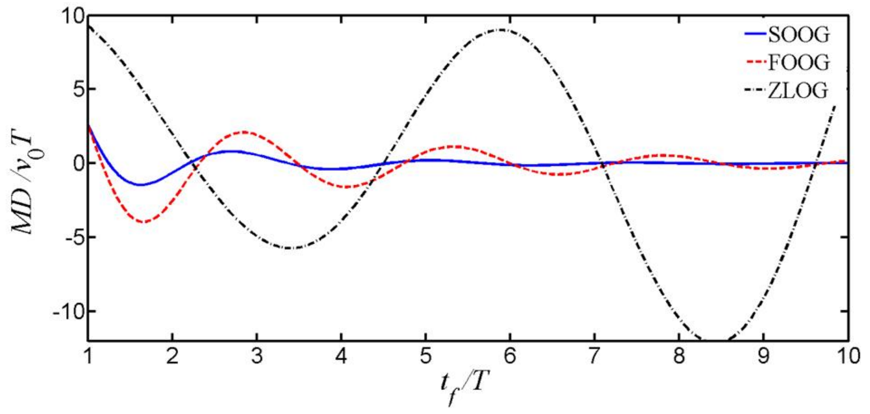


Fig. 8 Normalized miss distance vs normalized final time for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.8, n = 6)

شکل 8 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.8, n = 6)

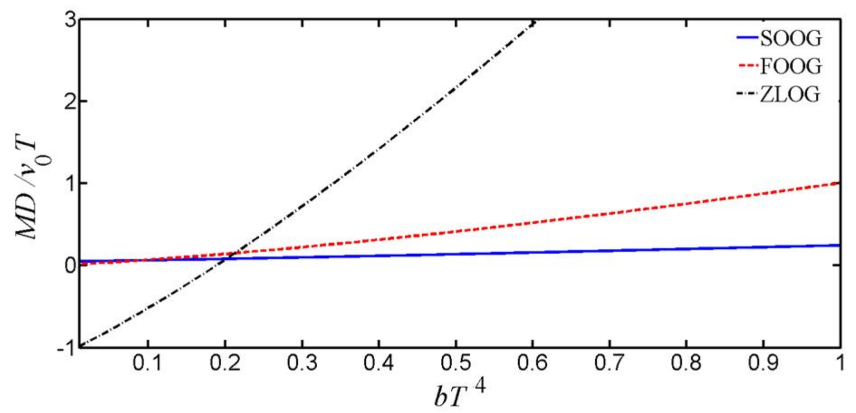


Fig. 9 Normalized miss distance vs normalized weighting factor for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, t_f/T = 5, n = 6)

شکل 9 خطای نهایی بی‌بعد برحسب ضریب وزنی بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, t_f/T = 5, n = 6)

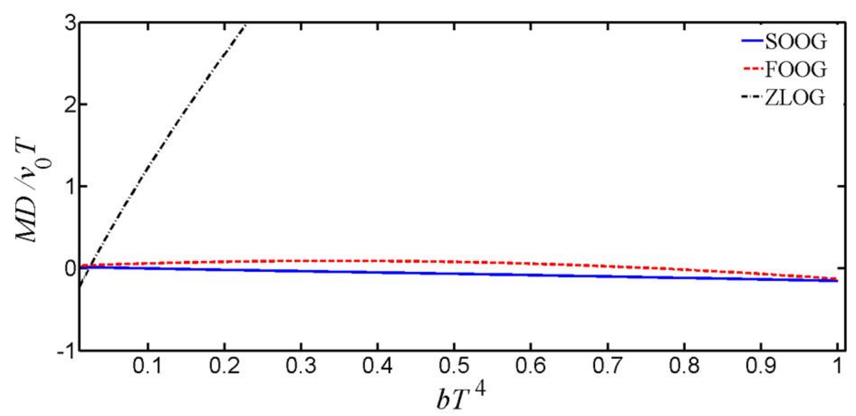


Fig. 10 Normalized miss distance vs normalized weighting factor for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, t_f/T = 5, n = 6)

شکل 10 خطای نهایی بی‌بعد برحسب ضریب وزنی بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, t_f/T = 6, n = 6)

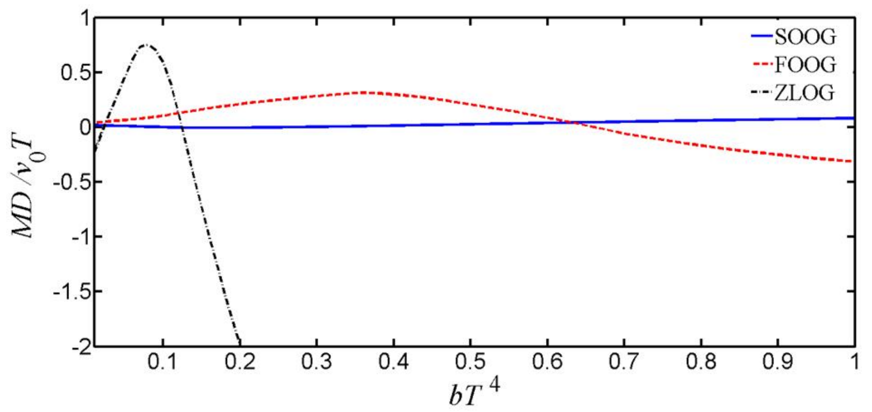


Fig. 11 Normalized miss distance vs normalized weighting factor for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, t_f/T = 5, n = 6)

شکل 11 خطای نهایی بی‌بعد برحسب ضریب وزنی بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, t_f/T = 6, n = 6)

توجه به شکل 9، افزایش ضریب وزنی می‌تواند باعث عدم جواب‌گویی قانون هدایت بهینه مرتبه صفر و مرتبه اول شود. البته لازم به ذکر است خطای قانون هدایت بهینه مرتبه دوم نیز با افزایش ضریب وزنی افزایش می‌یابد، اما نسبت به قانون هدایت بهینه مرتبه اول دارای خطای نسبتا کمتری است و مقاومت بیشتری نسبت به افزایش ضریب وزنی دارد. بنابراین در افزایش و انتخاب ضریب وزنی محدودیت وجود دارد و نمی‌توان به دلخواه آن را افزایش داد. در شکل 10، خطای فاصله نهایی برحسب ضریب وزنی بی‌بعد به ازای $t_f/T = 6$ رسم شده‌است. با توجه به شکل 8، تفاوت فاصلهٔ خطا بین دو قانون هدایت بهینه مرتبه اول و دوم به ازای زمان نهایی مذکور در حالت بدون شتاب اشباع ناچیز است که البته میزان آن بستگی به مقادیر اولیه دارد. در ادامه نشان داده خواهدشد که به ازای $t_f/T = 6$ با اعمال شتاب اشباع، تفاوت فاصله خطای دو قانون هدایت بهینه مرتبه اول و دوم بطور قابل توجهی افزایش خواهد یافت.

هم‌اکنون، اثر شتاب اشباع در خطای نهایی اعمال و بررسی می‌شود که نتایج آن در شکل‌های 11 تا 14 ملاحظه می‌شود. با اعمال شتاب اشباع، همانطور که در شکل 11 مشاهده می‌شود؛ اختلاف بین دو قانون هدایت بهینه مرتبه اول و مرتبه دوم به ازای $t_f/T = 6$ افزایش قابل توجهی می‌یابد. بطور مثال، مقدار خطای نهایی بی‌بعد به ازای ضریب وزنی 0.2 برای قانون هدایت ZLOG برابر با 2، برای قانون هدایت FOOG برابر با 0.2 و برای قانون هدایت SOOG برابر با 0/004 است. با در نظر گرفتن مقدار 0.4ثانیه برای ثابت زمانی و سرعت عمودی اولیه 10 متر بر ثانیه، مقدار خطای نهایی این سه قانون به ترتیب برابر با 8، 1.6 و 0.016 متر می‌شود.

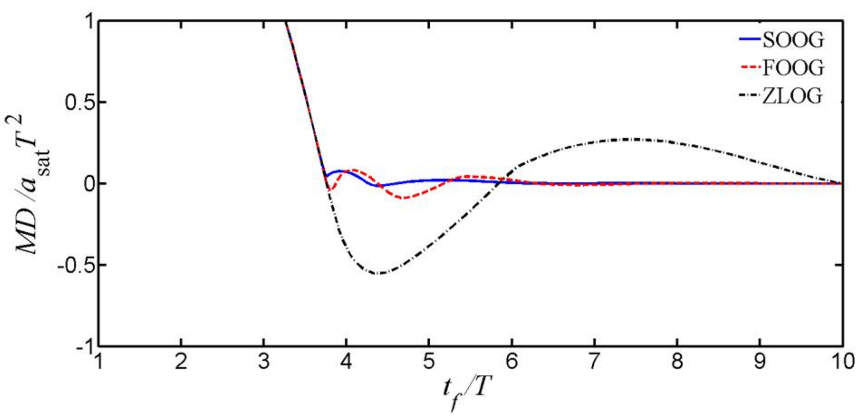


Fig. 12 Comparison of normalized miss distance of the three guidance laws for the third normalizing factor ($h_0/a_{\text{sat}}T^2$ = 2, $v_0/a_{\text{sat}}T$ = 0.5, bT^4 = 0.05, n = 6)

شکل 12 مقایسه خطای نهایی بی‌بعد با استفاده از فرم سوم بی‌بعدسازی ($h_0/a_{\text{sat}}T^2$ = 2, $v_0/a_{\text{sat}}T$ = 0.5, bT^4 = 0.05, n = 6)

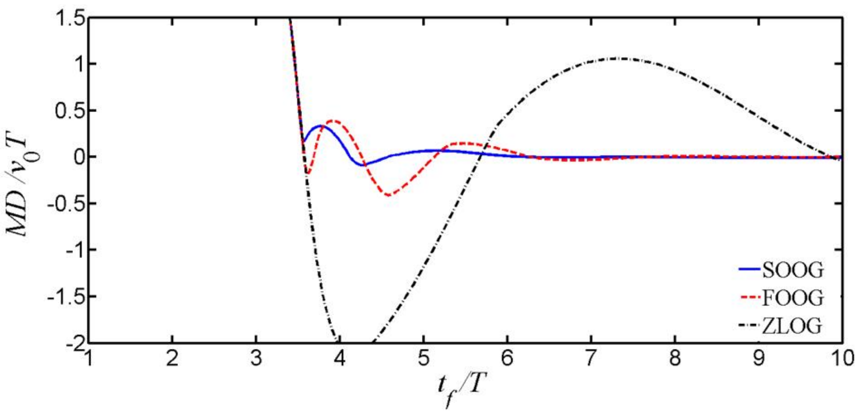


Fig. 13 Normalized miss distance vs normalized final time for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, bT^4 = 0.05, n = 6)

شکل 13 خطای نهایی بی‌بعد برحسب زمان نهایی بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, bT^4 = 0.05, n = 6)

در شکل 12 از پارامتر بی‌بعد کننده $A = a_{\text{sat}}$ برای دسته سوم از سناریوها استفاده شده‌است. در این شکل، در حالتی که زمان بی‌بعد کمتر از حدود 4 باشد، به علت اشباع شتاب، مقادیر خطای نهایی سه قانون هدایت، مشابه یکدیگر می‌شود. اگر زمان نهایی بیشتر از زمان ذکر شده (یا شتاب اشباع بزرگ‌تر) باشد، عملکرد سه قانون هدایت متفاوت شده و مقدارخطای فاصله نهایی قانون هدایت بهینه مرتبه دوم در مجموع از دو قانون هدایت دیگر کمتر می‌شود. بطور نمونه، به ازای زمان نهایی بی‌بعد 5، مقدار خطای نهایی بی‌بعد در قانون هدایت مرتبه صفر برابر با 0.38، برای قانون هدایت مرتبه اول برابر با 0.04 و برای قانون هدایت مرتبه دوم برابر با 0.02 است. در صورتی که این مقایسه با مقادیر بعددار انجام شود؛ به ازای ثابت زمانی 0.4 و شتاب اشباع 10g، مقدار زمان نهایی برابر با 2.5 ثانیه و مقدار خطای نهایی برای سه قانون به ترتیب برابر با 15.2، 1.6 و 0.8 متر است. با تغییر مقادیر اولیه و استفاده از پارامتر بی‌بعد کننده $A = v_0/T$ در شکل 13 نتایجی مشابهی حاصل می‌شود.

در شکل 14، مقایسه مقادیر خطای نهایی سه قانون هدایت بهینه با تغییر مقدار شتاب اشباع به ازای زمان نهایی بی‌بعد 6 و ضریب وزنی بی‌بعد 0.05 ترسیم شده‌است. با توجه به این شکل می‌توان مشاهده نمود که خطای نهایی هدایت بهینه مرتبه دوم نسبت به مرتبه اول بهبود یافته‌است. مقدار این بهبود بستگی به مقادیر پارامترهای بابعد دارد. بعلاوه همانطور که از شکل 14 مشاهده می‌شود، به ازای شرایط مفروض، خطای هدایت بهینه مرتبه اول نسبت به میزان شتاب اشباع، به یک حالت شبه ماندگار می‌رسد.

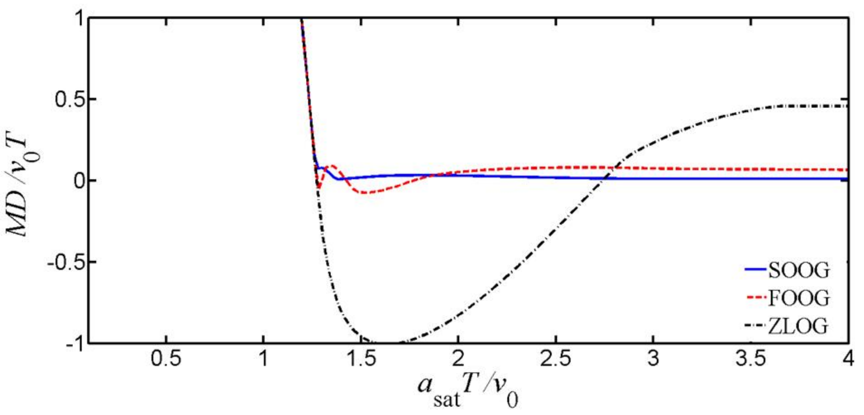


Fig. 14 Normalized miss distance vs normalized acceleration limit for the three guidance laws (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, t_f/T = 6, n = 6)

شکل 14 خطای نهایی بی‌بعد برحسب شتاب اشباع بی‌بعد برای سه قانون هدایت (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, t_f/T = 6, n = 6)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.45.1]

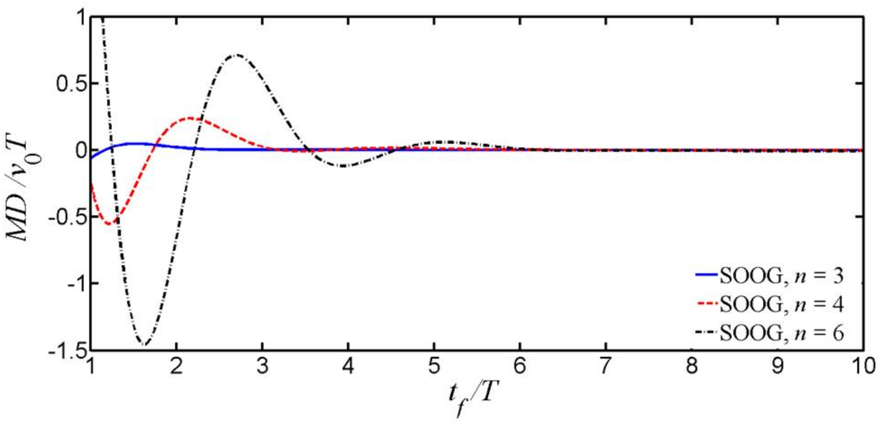


Fig. 15 Normalized miss distance under second-order optimal guidance using third-, fourth- & sixth-order control systems (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05)

شکل 15 خطای نهایی بی‌بعد برای هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم با اعمال بر سیستم کنترلی مرتبه 3، 4 و 6 (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05)

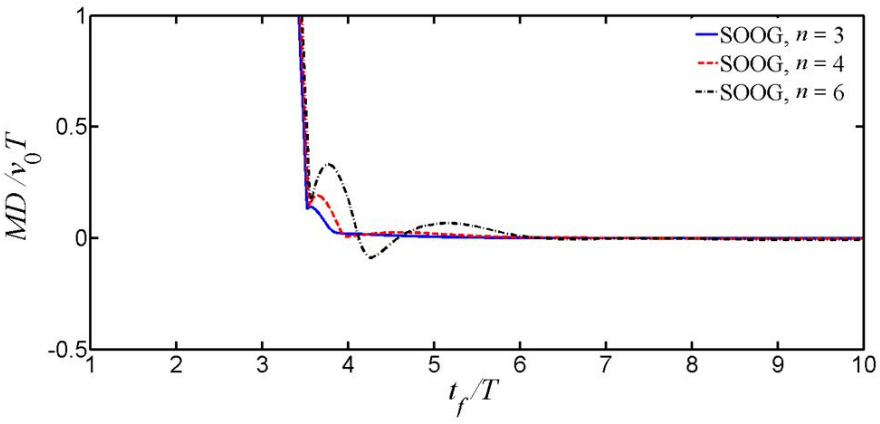


Fig. 16 Normalized miss distance under second-order optimal guidance with acceleration limit (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, n = 3,4,6)

شکل 16 خطای نهایی بی‌بعد برای هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم با محدودیت شتاب (h_0/v_0T = 10, bT^4 = 0.05, $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4, n = 3,4,6)

در شکل 15 و 16 اثر افزایش مرتبه سیستم کنترل در خطای نهایی قانون هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم به ترتیب بدون در نظر گرفتن محدودیت شتاب و با در نظر گرفتن شتاب اشباع بی‌بعد $a_{\text{sat}}T/v_0$ = 4 بررسی شده‌است. همانطور که از شکل 15 مشاهده می‌شود در زمان‌های نهایی کوچک با افزایش مرتبه سیستم کنترل از 3 تا 6 خطای قانون هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم نیز افزایش می‌یابد. این موضوع با در نظر گرفتن شتاب اشباع نیز برقرار است. البته وقتی زمان نهایی بی‌بعد کمتر از حدود 3.5 باشد، به ازای مقادیر مفروض، مقادیر خطای نهایی به علت اشباع شتاب، مشابه یکدیگر می‌شود.

همانطور که ملاحظه شد، استفاده از هدایت بهینه مرتبه دوم می‌تواند در مجموع خطای نهایی را نسبت به هدایت بهینه مرتبه اول کاهش دهد. این میزان بهبود در خطا، در حالتی که زمان‌های نهایی کوچک است و خطای اولیه نسبتا زیاد و قابلیت مانور وسیله پروازی بالا باشد؛ قابل توجه خواهد بود. بطور نمونه می‌توان به کاربرد ضدزره در مناطق شهری و پرتاب از سکوی متحرک بدون پایدارسازی نشانه‌روی اشاره نمود.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، قانون هدایت خطدید بهینه برای سیستم کنترل مرتبه دوم به‌صورت حلقه‌بسته و بی‌بعد استخراج گردید. در مسئله هدایت بهینه مذکور، زمان نهایی و موقعیت نهایی مشخص و معین در نظر گرفته شده‌است. همچنین روابط با استفاده از سه فرم بی‌بعد شده و ضرایب قانون هدایت و نتایج شبیه‌سازی عددی به‌صورت بی‌بعد ارائه شده‌است. هر یک از این فرم‌های بی‌بعدسازی برای تحلیل عملکرد دسته‌ای از مسائل می‌تواند مناسب و کاربردی باشد. عملکرد قانون هدایت استخراج‌شده در شبیه‌سازی عددی با قوانین هدایت خطدید بهینه مرتبه صفر و مرتبه اول، با/بدون در نظر گرفتن محدودیت شتاب مقایسه شده‌است. لازم به ذکر است که به منظور مقایسه منصفانه بین سه قانون هدایت مذکور، سیستم کنترل وسیله پروازی در شبیه‌سازی، بصورت مرتبه سوم، چهارم و ششم در نظر گرفته شده‌است. نتایج شبیه‌سازی برای مدل جرم نقطه‌ای نشان می‌دهد که فاصله خطای نهایی به ازای هدایت خطدید بهینه مرتبه دوم، در محدوده‌های مشخصی نسبت به قانون هدایت مرتبه اول کاهش می‌یابد. بطور کلی، فاصله خطای قانون هدایت بهینه مرتبه دوم به ازای زمان‌های پرواز کوتاه به ویژه در وسایل پروازی با قابلیت مانوری زیاد، کمتر از دو قانون هدایت دیگر است. لازم به ذکر است که برای محاسبه دستور شتاب، تخمین شتاب جانبی و نرخ آن برای وسیله پروازی با فناوری موجود، از دقت بالایی برخوردار بوده و با فرکانس بالایی قابل نمونه‌برداری و فیلتراسیون است. البته ارزیابی دقیق قوانین هدایت مذکور، مستلزم انتخاب روش تخمین متغیرهای حالت و شدت حضور نویز و میزان عدم قطعیت در شبیه‌سازی پرواز شش درجه آزادی است.

6- فهرست علائم

a شتاب وسیله ($\mathrm{ms^{-2}}$)
A پارامتر بی‌بعد کننده ($\mathrm{ms^{-2}}$)
b ضریب وزنی ($\mathrm{s^{-4}}$)
h فاصله از خطدید (m)
J نرخ شتاب ($\mathrm{ms^{-3}}$)
s متغیر حوزه لاپلاس
t زمان (s)
T ثابت زمانی سیستم کنترل (s)
u دستور شتاب ($\mathrm{ms^{-2}}$)
v مولفه سرعت در جهت عمود بر خطدید ($\mathrm{ms^{-1}}$)
$\vec{X}$ بردار حالت

علائم یونانی

$\mathcal{H}$ تابع هامیلتونی
$\mathcal{L}^{-1}$ تبدیل لاپلاس معکوس
$\vec{\lambda}$ بردار کمک حالت (بردار لاگرانژ)
$\mathfrak{J}$ تابع هزینه
τ زمان بی‌بعد
Φ ماتریس انتقال حالت

زیرنویس‌ها

0 نمایانگر مقدار اولیه
f نمایانگر مقدار نهایی
sat نمایانگر مقدار اشباع

7- پیوست الف: محاسبه ماتریس انتقال حالت

ماتریس انتقال حالت ماتریس سیستم (11) با استفاده از رابطه (13) به دست می‌آید. برای محاسبه ماتریس انتقال حالت، ابتدا معادله مشخصه استخراج می‌شود:

$$\left|s\mathrm{I} - A_p\right| = s^8 - 8s^6 + 16s^4 + 16\hat{b} = 0 \qquad (32)$$

معادله مشخصه (32) با تغییر متغیر $z = s^2$ تبدیل به معادله جبری مرتبه

چهارم می‌شود که حل آن با استفاده از روابط مرجع [19] قابل استخراج است. معادله مشخصه (32) به ازای $\hat{b} > 0$ بصورت زیر قابل تفکیک است:

$$|s\mathrm{I} - A_p| = (s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 - 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2) \times (s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2)(s^2 - 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2) \qquad (33)$$

که در آن ($i = 1,2$)،

$$\omega_i = \sqrt[4]{2D(D + 2(-1)^i)} \qquad (34)$$

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2 + D(-1)^i}{\omega_i^2}\right)} \qquad (35)$$

$$D = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \sqrt{4 + 3\hat{b}}\cos\left(\frac{\hat{b}\sqrt{3(1 + \hat{b})}}{8 + 9\hat{b}}\right)} \qquad (36)$$

لازم به ذکر است که مقدار D با استفاده از رابطه (36) همیشه حقیقی و بزرگتر از 2 است (به ازای $\hat{b} > 0$). بنابراین با توجه به روابط (34) و (35) ω_1 و ω_2 همیشه مثبت و حقیقی است. همچنین با شرایط مفروض، مقدار ζ_1 و ζ_2 حقیقی و بین صفر و یک خواهدبود. رفتار پارامترهای مذکور برحسب ضریب وزنی بی‌بعد در شکل 17 ترسیم شده‌است.

در ادامه، با حل تحلیلی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه، ماتریس انتقال حالت محاسبه می‌شود. برای این منظور، ماتریس انتقال حالت در فضای لاپلاس بصورت رابطه (37) نوشته می‌شود:

$$\Phi(s) = \frac{M_1 s^7 + M_2 s^6 + M_3 s^5 + M_4 s^4 + M_5 s^3 + M_6 s^2 + M_7 s + M_8}{s^8 - 8s^6 + 16s^4 + 16\hat{b}} \qquad (37)$$

که در آن،

$$\begin{cases} M_1 = \mathrm{I}_{8\times 8} \\ M_2 = A_p \\ M_3 = A_p^2 - 8M_1 \\ M_4 = A_p M_3 \\ M_5 = A_p M_4 + 16M_1 \\ M_6 = A_p M_5 \\ M_7 = A_p M_6 \\ M_8 = A_p M_7 \end{cases} \qquad (38)$$

$$\frac{M_1 s^7 + M_2 s^6 + M_3 s^5 + M_4 s^4 + M_5 s^3 + M_6 s^2 + M_7 s + M_8}{s^8 - 8s^6 + 16s^4 + 16\hat{b}} = \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} + \frac{C_3 s + C_4}{s^2 - 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2} + \frac{C_5 s + C_6}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2} + \frac{C_7 s + C_8}{s^2 - 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2} \qquad (39)$$

که در آن،

$$C_1 . C_{d_1} = 2\zeta_1\omega_1^7(-16 + k_{1p})M_1 + \omega_1^6(k_1 + k_{2p})M_2 + \zeta_1\omega_1^3 k_3 M_3 + \omega_1^2(\omega_1^2 k_4 + k_5)M_4 - 2\zeta_1\omega_1^3 k_8 M_5 - \omega_1^2(k_4 - 4\omega_1^2 k_6)M_6 + 4\zeta_1\omega_1^3 k_7 M_7 - (k_1 + k_{3p})M_8 \qquad (40)$$

$$C_2 . C_{d_1} = -\omega_1^8(k_1 + k_{2p})M_1 - \zeta_1\omega_1^5 k_3 M_2 - \omega_1^4(\omega_1^2 k_4 + k_5)M_3 + 2\zeta_1\omega_1^5 k_8 M_4 + \omega_1^4(k_4 - 4\omega_1^2 k_6)M_5 - 4\zeta_1\omega_1^5 k_7 M_6 + \omega_1^2(k_1 + k_{3p})M_7 + 2\zeta_1\omega_1(-16 + k_{4p})M_8 \qquad (41)$$

$$C_3 . C_{d_1} = 2\zeta_1\omega_1^7(-16 + k_{1p})M_1 - \omega_1^6(k_1 + k_{2p})M_2 + \zeta_1\omega_1^3 k_3 M_3 - \omega_1^2(\omega_1^2 k_4 + k_5)M_4 - 2\zeta_1\omega_1^3 k_8 M_5 + \omega_1^2(k_4 - 4\omega_1^2 k_6)M_6 + 4\zeta_1\omega_1^3 k_7 M_7 + (k_1 + k_{3p})M_8 \qquad (42)$$

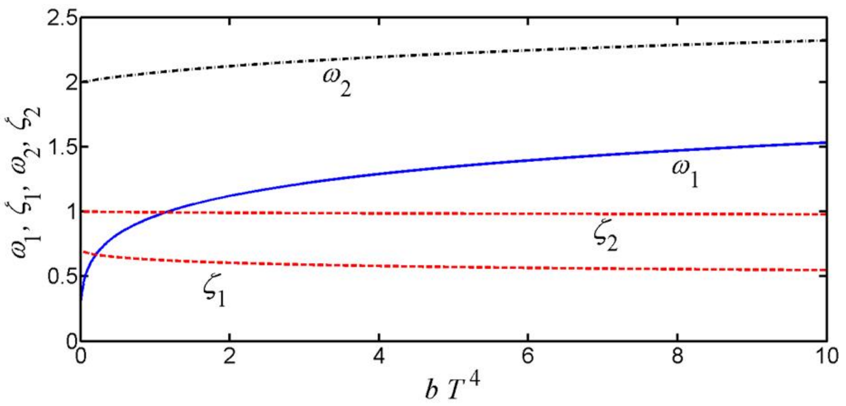


Fig. 17 The behavior of characteristic equation parameters vs normalized weighting factor

شکل 17 رفتار پارامترهای معادله مشخصه برحسب ضریب وزنی بی‌بعد

$$C_4 . C_{d_1} = \omega_1^8(k_1 + k_{2p})M_1 - \zeta_1\omega_1^5 k_3 M_2 + \omega_1^4(\omega_1^2 k_4 + k_5)M_3 + 2\zeta_1\omega_1^5 k_8 M_4 - \omega_1^4(k_4 - 4\omega_1^2 k_6)M_5 - 4\zeta_1\omega_1^5 k_7 M_6 - \omega_1^2(k_1 + k_{3p})M_7 + 2\zeta_1\omega_1(-16 + k_{4p})M_8 \qquad (43)$$

$$C_5 . C_{d_2} = 2\zeta_2\omega_2^7(-16 + k_{5p})M_1 + \omega_2^6(k_1 + k_{6p})M_2 - \zeta_2\omega_2^3 k_3 M_3 + \omega_2^2(\omega_2^2 k_4 - k_5)M_4 + 2\zeta_2\omega_2^3 k_8 M_5 - \omega_2^2(k_4 + 4\omega_2^2 k_6)M_6 - 4\zeta_2\omega_2^3 k_7 M_7 - (k_1 + k_{7p})M_8 \qquad (44)$$

$$C_6 . C_{d_2} = -\omega_2^8(k_1 + k_{6p})M_1 + \zeta_2\omega_2^5 k_3 M_2 - \omega_2^4(\omega_2^2 k_4 - k_5)M_3 - 2\zeta_2\omega_2^5 k_8 M_4 + \omega_2^4(k_4 + 4\omega_2^2 k_6)M_5 + 4\zeta_2\omega_2^5 k_7 M_6 + \omega_2^2(k_1 + k_{7p})M_7 + 2\zeta_2\omega_2(-16 + k_{8p})M_8 \qquad (45)$$

$$C_7 . C_{d_2} = 2\zeta_2\omega_2^7(-16 + k_{5p})M_1 - \omega_2^6(k_1 + k_{6p})M_2 - \zeta_2\omega_2^3 k_3 M_3 - \omega_2^2(\omega_2^2 k_4 - k_5)M_4 + 2\zeta_2\omega_2^3 k_8 M_5 + \omega_2^2(k_4 + 4\omega_2^2 k_6)M_6 - 4\zeta_2\omega_2^3 k_7 M_7 + (k_1 + k_{7p})M_8 \qquad (46)$$

$$C_8 . C_{d_2} = \omega_2^8(k_1 + k_{6p})M_1 + \zeta_2\omega_2^5 k_3 M_2 + \omega_2^4(\omega_2^2 k_4 - k_5)M_3 - 2\zeta_2\omega_2^5 k_8 M_4 - \omega_2^4(k_4 + 4\omega_2^2 k_6)M_5 + 4\zeta_2\omega_2^5 k_7 M_6 - \omega_2^2(k_1 + k_{7p})M_7 + 2\zeta_2\omega_2(-16 + k_{8p})M_8 \qquad (47)$$

همچنین،

$$C_{d_1} = 4\zeta_1\omega_1^3\{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^4 + 8\omega_1^2\omega_2^2 \times [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\zeta_1^2\zeta_2^2) + 2\omega_1^2\omega_2^2(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2]\} \qquad (48)$$

$$C_{d_2} = 4\zeta_2\omega_2^3\{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^4 + 8\omega_1^2\omega_2^2 \times [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\zeta_1^2\zeta_2^2) + 2\omega_1^2\omega_2^2(\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^2]\} \qquad (49)$$

و

$$\begin{aligned} k_1 &= -16 - 2(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^2\omega_2^2) \\ k_2 &= \omega_1^2\zeta_2^2 + \zeta_1^2\omega_2^2 \\ k_3 &= 4\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 - 2\omega_1^2\zeta_2^2 - \omega_2^2 + 2\zeta_1^2\omega_2^2) \\ k_4 &= (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \\ k_5 &= 4\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2\zeta_2^2 - \zeta_1^2\omega_2^2) \\ k_6 &= \zeta_1^2\omega_1^2 - \zeta_2^2\omega_2^2 \\ k_7 &= \omega_1^2 - 2\zeta_1^2\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2\zeta_2^2\omega_2^2 \\ k_8 &= \omega_1^4 - \omega_2^4 \\ k_{1p} &= 2\omega_1^4 + 4\omega_2^4(1 - 2\zeta_1^2)^2 \\ k_{2p} &= 4\omega_2^2\left(k_2 + 2\zeta_1^2\omega_2^2(1 - 2\zeta_1^2)\right) \\ k_{3p} &= 4\omega_1^2\left(-k_6 + 4\zeta_1^2\omega_1^2(1 - \zeta_1^2)\right) \\ k_{4p} &= 2\omega_2^4 + 4\omega_1^4(1 - 2\zeta_1^2)^2 \\ k_{5p} &= 4\omega_1^2\left(k_2 + 2\zeta_2^2\omega_1^2(1 - 2\zeta_2^2)\right) \\ k_{6p} &= 4\omega_2^2\left(k_6 + 4\zeta_2^2\omega_2^2(1 - \zeta_2^2)\right) \\ k_{7p} &= k_6 + 2\zeta_2^2\omega_2^2(1 - 2\zeta_2^2) \end{aligned} \qquad (50)$$

$$k_{8p} = 2\omega_1^4 + 4\omega_2^4(1 - 2\zeta_2^2)^2 \tag{51}$$

با استفاده از روابط تبدیل معکوس لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\Phi_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_1 s + C_2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}\right\} = \mathrm{e}^{-\zeta_1\omega_1 t}\left(C_1\cos(\omega_{d_1}t) + \frac{(C_2 - C_1\zeta_1\omega_1)\sin(\omega_{d_1}t)}{\omega_{d_1}}\right) \tag{52}$$

$$\Phi_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_3 s + C_4}{s^2 - 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}\right\} = \mathrm{e}^{\zeta_1\omega_1 t}\left(C_3\cos(\omega_{d_1}t) + \frac{(C_4 + C_3\zeta_1\omega_1)\sin(\omega_{d_1}t)}{\omega_{d_1}}\right) \tag{53}$$

$$\Phi_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_5 s + C_6}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}\right\} = \mathrm{e}^{-\zeta_2\omega_2 t}\left(C_5\cos(\omega_{d_2}t) + \frac{(C_6 - C_5\zeta_2\omega_2)\sin(\omega_{d_2}t)}{\omega_{d_2}}\right) \tag{54}$$

$$\Phi_4(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_7 s + C_8}{s^2 - 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}\right\} = \mathrm{e}^{\zeta_2\omega_2 t}\left(C_7\cos(\omega_{d_2}t) + \frac{(C_8 + C_7\zeta_2\omega_2)\sin(\omega_{d_2}t)}{\omega_{d_2}}\right) \tag{55}$$

که در آن،

$$\omega_{d_i} = \omega_i\sqrt{1 - \zeta_i^2}\ , \quad i = 1{,}2 \tag{56}$$

در نتیجه، ماتریس انتقال حالت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t) + \Phi_4(t) \tag{57}$$

8- مراجع

[1] N. A. Shneydor, *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control,* Chichester, England , pp. 11-14,Horwood Publishing,1998.

[2] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance,* Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, 6th Ed., AIAA, 2012.

[3] G. T. Lee, and J. G. Lee, Improved Command to Line-of-Sight for Homing Guidance, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* Vol. 31, No. 1, pp. 506-510, 1995.

[4] S. M. Malaek, and A. R. Kosari, Novel minimum time trajectory planning in terrain following flights, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* Vol. 43, No. 1, pp. 2-12, 2007.

[5] P. B. Sujit, and S. Saripalli, J. b. Sousa, Unmanned Aerial Vehicle Path Following, A Survey and Analysis of Algorithms for Fixed-Wing UAVs, *IEEE Control Systems Magazine,* Vol. 34, No. 1, pp. 42-59, 2014.

[6] I. J. Ha, S. Chong, Design of a CLOS Guidance Law via Feedback Linearization, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* Vol. 28, No. 1, pp. 51-63, 1992.

[7] M. R. Arvan, B. Moshiri, Optimal Fuzzy Controller Design for an Anti-Tank Missile, *International Conference on Intelligent and Cognitive Systems,* Tehran, Iran, pp. 123-128, 1996 (in Persianفارسی).

[8] C. M. Lin, C. F. Hsu, Y. J. Mon, Self-Organizing Fuzzy Learning CLOS Guidance Law Design*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,* Vol. 39, No. 4, pp. 1144-1151, 2003.

[9] T. Soleymani, F. Saghafi, Fuzzy Trajectory Tracking Control of An Autonomous Air Vehicle, *The 2nd International Conference on Mechanical and Electronics Engineering (ICMEE),* Kyoto, Japan, 2010.

[10] L. Y. Yuan, S. Y. Li, Missile Guidance Law Design Using Nonlinear Robust Output Regulation and T-S Model, *The 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA 2007,* Harbin, China 2007.

[11] L. Fiorentini, A. Serrani, Adaptive Restricted Trajectory Tracking for a Non-Minimum Phase Hypersonic Vehicle Model, *Automatica,* Vol. 48, No. 7, pp. 1248–1261, 2012.

[12] K. Yang, Path Following Control Performance Comparison for an Rotary Wing Unmanned Aerial Vehicle, *the 10th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI),* Ramada Plaza Jeju Hotel, Jeju, Korea, October 31-November 2, 2013.

[13] S. H. Pourtakdoust, H. Nobahari, Line-of-Sight Guidance Law Optimization for Ground-to-Air Missiles, *the First Conference of Aerospace industries Organization,* Tehran, Iran, 2000, (in Persian فارسی).

[14] A. Ratnoo, P. B. Sujit, M. Kothari, Adaptive Optimal Path Following for High Wind Flights, *18th International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress,* Milan, Italy, pp. 12,985–12,990, Aug. 28–Sept. 2, 2011.

[15] J. Guo, et al., Design of Automatic Steering Controller for Trajectory Tracking of Unmanned Vehicles Using Genetic Algorithms, *IEEE Transactions on Vehicular Technology,* Vol. 61, No. 7, pp. 2913–2924, 2012.

[16] H. Nobahari, S. H. Pourtakdoust, An Optimal Fuzzy Two-Phase CLOS Guidance Law Design Using Ant Colony Optimization, *The Aeronautical Journal,* Vol. 111, No. 4, pp. 621-636, 2007.

[17] I. Rusnak, L. Meir, Modern Guidance Law for High-Order Autopilot, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 14, No. 5, pp. 1056-1058, 1991.

[18] S. H. Jalali-Naini, S. H. Sajjadi, First-Order Optimal Line-of-Sight Guidance for Stationary Targets, *Scientia Iranica Transaction B,* (in Press)(Darft is available on Scientia Website).

[19] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables,* Schaum's Outline Series, 3rdedition, NY, McGraw-Hill, 2009.