مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1393، دوره 14، شماره 9، ص‌ص 65-72

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ترموالاستیک نانو پوسته‌های کروی تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی

جمال رنجبر[1]، اکبر علی‌بیگلو[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، 14115143، abeigloo@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 29 اردیبهشت 1393
پذیرش: 04 تیر 1393
ارائه در سایت: 30 شهریور 1393

کلید واژگان:
حل تحلیلی
شوک حرارتی
تئوری الاستیسیته غیر محلی
روش تبدیل دیفرانسیلی

چکیده

در این پژوهش، روشی تحلیلی برای بررسی رفتار ترموالاستیک نانو پوسته کروی تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری محیط پیوسته غیر محلی ارائه شده است. پوسته به صورت جامدی الاستیک، همگن و همچنین ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل حاکم، با استفاده از تبدیل لاپلاس و نیز به کارگیری روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) صورت گرفته است. مجهولات معادله بازگشتی استخراج شده با استفاده شرایط مرزی، در حوزه لاپلاس تعیین شده‌اند. نتایج به دست آمده، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس سریع (FLIT) از حوزه لاپلاس به حوزه زمانی تبدیل شده‌اند. برای صحه‌گذاری روش ارائه شده، نتایج عددی با نتایج موجود در مقالات مرتبط مقایسه گردیده است. نتایج به دست آمده، از دقت قابل قبولی نسبت به نتایج به دست آمده در پژوهش‌های پیشین برخوردار است. همچنین، اثر پارامتر غیر محلی و نیز ضخامت پوسته در جابجایی شعاعی و همچنین تنش‌های شعاعی و محیطی نقاط مختلف پوسته تحت شوک دمایی مورد بررسی قرار گرفته است. روش تحلیلی ارائه شده، زمینه مناسبی برای بررسی رفتار گذرای ترموالاستیک در پوسته‌های کروی تحت بارهای دمایی و مکانیکی مختلف فراهم می‌کند.

Nonlocal elasticity theory for thermo-elastic analysis of nanoscale spherical shell subjected to thermal shock

Jamal Ranjbar, Akbar Alibeigloo*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran, abeigloo@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 May 2014
Accepted 25 June 2014
Available Online 21 September 2014

Keywords:
Analytical Solution
Thermal Shock
Nonlocal Elasticity Theor
Differential Transforms Method

ABSTRACT

In this paper, an analytical method is presented to study thermo-elastic behavior of nanoscale spherical shell subjected to thermal shock based on nonlocal elasticity theory. The shell is considered as elastic, homogeneous and isotropic solid. The nonlocal differential equation of motion is derived in terms of radial displacement. The analytical solution of equation of motion is obtained by Laplace transform and differential transform method (DTM). Mechanical boundary conditions are used to obtain unknown parameters that get in recurrence equation in Laplace domain. The results in Laplace domain is transferred to time domain by employing the fast inverse Laplace transform method (FLIT). Accuracy of obtained results is evaluated by well-known similar articles. The results have a good agreement in comparison with published data in pervious literatures. Also, the effects of nonlocal parameter and wall thickness of shell on the dynamic characteristics of nanoscale spherical shell are studied in various points across the thickness of shell under thermal shock. The present analytical method provides an appropriate field for analysis of times histories of radial and hoop stresses in a nanoscale shells subjected to various time dependent thermo-mechanical loads.

1- مقدمه

نانوپوسته‌های کروی و نانوذرات یک لایه و چند لایه مانند نانوپوسته‌ها و نانوذرات کروی ساخته شده از طلا، در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی و صنعتی از جمله نانوپزشکی، تصویربرداری از نانومواد و نانوکامپوزیت‌ها، تجزیه و کاتالیز و همچنین نانوفوتونیک مورد استفاده قرار می‌گیرد [2،1]. محققان بررسی‌های مختلفی پیرامون نانو پوسته‌های کروی انجام داده‌اند. در حالت کلی، تحقیقات و مطالعات بر روی نانو ذرات به دو روش انجام می‌شود: مطالعات تجربی و آزمایشگاهی و مطالعات نظری و محاسباتی. به دلیل هزینه‌های بالای مطالعات و تحقیقات تجربی مواد در مقیاس نانو، مطالعات نظری و آزمایشگاهی از اهمیت بیشتری برخوردار است.

مطالعات نظری و محاسباتی به دو دسته کلی شبیه‌سازی اتمی و شبیه‌سازی به کمک مکانیک محیط پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند. به دلیل زمان‌بر

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
J. Ranjbar, A. Alibeigloo, Nonlocal elasticity theory for thermo-elastic analysis of nanoscale spherical shell subjected to thermal shock , *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 9, pp. 65-72, 2014 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]

بودن، شبیه‌سازی اتمی پیچیده‌تر و دشوارتر است.

دو تئوری پرکاربرد در شبیه‌سازی به کمک مکانیک محیط پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد: تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک و تئوری مکانیک محیط پیوسته غیر محلی. با توجه به لزوم در نظر گرفتن اثر اندازه در مواد با مقیاس نانو، تئوری مکانیک محیط پیوسته (الاستیسیته) غیر محلی که نخستین بار بوسیله ارینگن [3] پیشنهاد شد، قابل قبول‌تر و پرکاربردتر می‌باشد.

بررسی رفتار زمانی و پاسخ گذرای پوسته‌های کروی یکی مهم‌ترین مسائل تکنولوژیکی در بسیاری از صنایع و علوم می‌باشد [4]. محققان بسیاری رفتار تابع زمان پوسته‌های کروی را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. وانگ و همکاران [5] به بررسی انتشار امواج تنشی ناشی از بارهای دینامیکی در پوسته کروی اورتوتروپ چند لایه پرداختند. دای و وانگ [6] اثر شوک حرارتی و بارهای الکتریکی را بر انتشار امواج تنشی کره پیزوالکتریک چند لایه بررسی کرده‌اند. وو و چاو [7] پاسخ زمانی کره الاستیک را تحت دو بار مکانیکی ضربه‌ای که به صورت تابع پله تعریف شدند، مطالعه کردند. ووانگ و دینگ [8] با استفاده از معادله انتگرالی نوع دوم وولترا نسبت به تابع زمان، به بررسی پاسخ زمانی مسأله تلفیقی مغناطیس- الکتریسیته- الاستیک پوسته کروی با فرض تقارن کروی و تحت بار ناگهانی پله واحد پرداختند. اواوتاو و ایشیهارا [9] حل دقیق برای تعیین تنش‌های حرارتی مسأله تلفیقی مغناطیس- الکتریسیته- الاستیک پوسته کروی چند لایه ارائه دادند. اثر بارهای حرارتی و مکانیکی متناوب بر پوسته کروی ایزوترپ جانبی بوسیله کمیجانی و همکاران [10] مورد بررسی قرار گرفت.

در سال‌های اخیر، نانوسازه‌ها از قبیل نانوتیرها، نانو میله‌ها، نانوصفحات و نانوپوسته‌ها در زمینه‌های مختلف الکترونیک و مکانیک مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با توجه به کاربردهای فراوان نانوسازه‌ها، مطالعه و بررسی رفتار آن‌ها لازم و ضروری به نظر می‌رسد. در بسیاری از کاربردها، نانولوله‌های کربنی و فولرن (C60) به ترتیب به عنوان پوسته استوانه‌ای و پوسته متقارن کروی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بهفر و نقدآبادی [11] مدل ارتعاشی فولرن چندلایه قرارداده شده در محیط الاستیک را ارائه نمودند و به بیان کاربردهای تحلیل ارتعاشی ارائه شده پرداختند. انصاری و همکاران [12] با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته غیر محلی و روش المان محدود، به بررسی ارتعاش صفحات چند لایه گرافیتی با تکیه گاه‌های مختلف پرداختند. علی‌بیگلو [13] روشی تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد نانوصفحات با تکیه گاه‌های ساده ارائه نموده است. طالبیان و همکاران [14] بدون درنظر گرفتن اثر اندازه در مقیاس نانو و با استفاده تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک، به بررسی رفتار ترموالاستیک نانولوله کربنی چند لایه تحت شوک حرارتی پرداختند. سیفوری و لیاقت [15] اثر ضربه عرضی را بر رفتار دینامیکی نانوتیر تیموشنکو با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی و همچنین مدل‌سازی به روش المان محدود صریح مورد بررسی قرار دادند. بررسی ارتعاش آزاد متقارن محوری نانوپوسته کروی بوسیله زارا و همکاران [16] صورت گرفت. آن‌ها در بررسی خود از ترکیب تئوری الاستیسیته غیر محلی و تئوری پوسته‌های جدار نازک استفاده نمودند. قوانلو و فاضل‌زاده [17] ارتعاشات آزاد شعاعی نانوپوسته متقارن کروی را با استفاده تئوری الاستیسته غیر محلی و به کارگیری توابع بسل مورد بررسی قرار دادند. رهام رفیعی [18] با به کارگیری تئوری ارتعاشات و همچنین تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک به بررسی ارتعاشات غیر خطی نانولوله کربنی پرداخته است. وی در بررسی خود پیوند بین دو اتم کربن را به صورت تیر دوسرگیر مدل نموده است. ذبیح الله و همکاران [19] اثر افزایش ذرات نانو بر رفتار دینامیکی تیر کامپوزیتی را با استفاده از روش تجربی و نظری مورد بررسی قرار دادند. با توجه به بررسی های فوق، تحلیل ترموالاستیک نانو پوسته کروی تحت شوک حرارتی تاکنون ارائه نشده است.

در پژوهش حاضر، روشی تحلیلی برای تعیین میدان تنش ترموالاستیک نانوپوسته متقارن کروی تحت شوک حرارتی ارائه می‌شود. معادله حرکت حاکم با در نظر گرفتن اثر اندازه و استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی در ترم‌های جابجایی استخراج و سپس حل آن با استفاده روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) و به کارگیری تبدیل لاپلاس انجام شده است. برای بررسی ترموالاستیک تابع زمان، پاسخ‌های میدان تنش بدست آمده، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس (FLIT) به حوزه زمانی تبدیل می-شوند. پژوهش پیش‌رو را می‌توان به عنوان نخستین پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه تحلیل ترموالاستیک غیر محلی نانوساختارها دانست. یکی تفاوت‌های اساسی این پژوهش با پژوهش‌های یاد شده، توانایی آن در بررسی نانوپوسته‌های مختلف تحت بارگذاری‌های ترمومکانیکی دلخواه است.

2- فرمول‌بندی مسأله

2-1- مروری بر تئوری الاستیسیته غیر محلی

بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی [3]، تانسور تنش در هر نقطه دلخواه مانند q از یک جسم در مقیاس نانو، نه تنها به کرنش در همان نقطه q بستگی دارد، بلکه به کرنش در تمامی نقاط جسم نیز وابسته است. معادلات پایه الاستیسیته غیر محلی برای مواد الاستیک، ایزوتروپ و همگن در غیاب نیروهای جسمی به صورت رابطه (1) است.

$$\Upsilon_{ij}(q)=\int \varphi(|q-q'|,\eta)\sigma_{ij}(q)dV \tag{1}$$

در رابطه (1)، Υ_{ij} و σ_{ij} به ترتیب بیانگر مؤلفه تانسور تنش غیر محلی Υ و تانسور تنش محلی σ در نقطه q می‌باشند. $\varphi(|q-q'|,\eta)$مدول غیر محلی می‌باشد که معرف اثرات اندازه در مقیاس‌های کوچک می‌باشد و تابع $|q-q'|$و η است. $|q-q'|$ بیانگر فاصله بین دو نقطه q و q' می‌باشد و η نیز نشان‌دهنده ثابت ماده است که به صورت رابطه (2)، تعریف می‌شود.

$$\eta=\frac{e_0 a}{L} \tag{2}$$

در رابطه (2)، a و L به ترتیب معرف مشخصه‌های طول داخل و خارج ماده می‌باشند و e_0 نیز ثابت مشخصه برای هر ماده است.

با استفاده از معادلات غیر محلی ارینگن [3]، تانسور تنش غیرمحلی Υ به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود.

$$(1-K^2\nabla^2)\Upsilon=\sigma \quad \text{و} \quad K=e_0 a \tag{3}$$

در رابطه (3)، ∇^2 و K به ترتیب عملگر لاپلاسین و پارامتر غیر محلی هستند.

با استفاده از برقراری تعادل در مومنتم خطی، معادله حرکت به فرم کلی معادله (4) به دست می‌آید که در تمامی دستگاه‌های مختصات معتبر است.

$$\nabla.\Upsilon+\mathrm{f}=\rho\ddot{\mathrm{u}} \tag{4}$$

در رابطه (4)، f بردار نیروی جسمی، u بردار جابجایی، ∇ اوپراتور گرادیان و "$\ddot{}$" نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان و ρ چگالی جسم می-باشند. با استفاده از روابط (3) و (4)، فرم کلی معادله غیر محلی حرکت را

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]

می‌توان به صورت رابطه (5) استخراج کرد.

$$\nabla.\sigma+\mathrm{f}=(1-K^2\nabla^2)\rho\ddot{\mathrm{u}} \tag{5}$$

2-2- معادلات حاکم بر مسأله

مدلی از یک پوسته کروی با شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب r_1 و r_2 در نظر گرفته شده است. با فرض حالت تقارن کروی، تنها مؤلفه غیر صفر بردار جابجایی، مؤلفه شعاعی $u(r,t)$ می‌باشد. به این ترتیب، روابط کرنش-جابجایی مطابق با رابطه (6) خواهد بود:

$$\varepsilon_r(r,t)=\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_\theta(r,t)=\frac{u(r,t)}{r} \tag{6}$$

که در این رابطه، $\varepsilon_r(r,t)$ و $\varepsilon_\theta(r,t)$ به ترتیب نشان‌دهنده کرنش‌های شعاعی و محیطی هستند. پارامترهای r، θ به ترتیب بیانگر جهت‌های شعاعی و محیطی و t نشان‌دهنده زمان است. تنش‌های ترموالاستیک در یک پوسته کروی مطابق روابط (7) و (8) تعریف می‌شود.

$$\sigma_r(r,t)=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\varepsilon_r(r,t)+2v\varepsilon_\theta(r,t)\right] -\frac{E\alpha}{1-2v}T(r,t) \tag{7}$$

$$\sigma_\theta(r,t)=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}[\varepsilon_\theta(r,t)+v\varepsilon_r(r,t)] -\frac{E\alpha}{1-2v}T(r,t) \tag{8}$$

در رابطه‌های (7) و (8)، $\sigma_r(r,t)$ ، $\sigma_\theta(r,t)$، E، α و v به ترتیب بیانگر تنش شعاعی، تنش محیطی، مدول یانگ ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون هستند.

با استفاده از رابطه (6)، می‌توان تنش‌های نوشته شده در رابطه‌های (7) و (8) را بر حسب مؤلفه جابجایی به صورت رابطه‌های (9) و (10) نوشت.

$$\sigma_r(r,t)=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}+2v\frac{u(r,t)}{r}\right] -\frac{E\alpha}{1-2v}T(r,t) \tag{9}$$

$$\sigma_\theta(r,t)=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[\frac{u(r,t)}{r}+v\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right] -\frac{E\alpha}{1-2v}T(r,t) \tag{10}$$

با استفاده رابطه (5)، معادله غیر محلی حرکت در غیاب نیروهای جسمی به صورت معادله (11) خواهد بود.

$$\frac{\partial\sigma_r(r,t)}{\partial r}+\frac{2}{r}(\sigma_r(r,t)-\sigma_\theta(r,t)) =(1-K^2\nabla^2)\left[\rho\frac{\partial^2u(r,t)}{\partial t^2}\right] \tag{11}$$

با استفاده از رابطه‌های (9) و (10)، معادله حرکت برحسب جمله‌های جابجایی را می‌توان به صورت معادله (12) استخراج کرد.

$$\frac{\partial^2u(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r(r,t)}{\partial r}\ \frac{2}{r^2}u(r,t) -\frac{1+v}{1-v}\left[\frac{\partial\alpha(r,t)}{\partial r}\times T(r,t)+\alpha(r,t)\times\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right] =\frac{(1+v)(1-2v)}{E(1-v)}(1-\mathrm{K}^2\nabla^2)\left(\rho\frac{\partial^2u(r,t)}{\partial t^2}\right) \tag{12}$$

رابطه (12) با فرض تابعیت دمایی ضریب انبساط حرارتی به دست آمده است. عملگر لاپلاسین در پوسته متقارن کروی به صورت رابطه (13) می‌باشد.

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{13}$$

شرایط اولیه معادله (12) به صورت رابطه (14) فرض شده است.

$$u(r,t)=0 \quad ,\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}=0 \quad , \quad t=0 \tag{14}$$

همچنین، شرایط مرزی مکانیکی در صفحات داخلی و خارجی به صورت رابطه (15) در نظر گرفته شده است.

$$\sigma_r(r_2,t)=-P_{\mathrm{out}}(t) \text{ و } \sigma_r(r_1,t)=-P_{\mathrm{in}}(t) \tag{15}$$

و با استفاده از رابطه (9) می‌توان رابطه (16) را نوشت.

$$\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\frac{\partial u(r_1,t)}{\partial r}+2v\frac{u(r_1,t)}{r_1}\right] -\frac{E}{1-2v}\alpha(r_1,t)\times T(r_1,t)=-P_{\mathrm{in}}(t)$$
$$\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\frac{\partial u(r_2,t)}{\partial r}+2v\frac{u(r_2,t)}{r_2}\right] -\frac{E}{1-2v}\alpha(r_2,t)\times T(r_2,t)=-P_{\mathrm{out}}(t) \tag{16}$$

در رابطه (16)، $P_{in}(t)$ و $P_{out}(t)$ به ترتیب بیانگر فشارهای هیدرواستاتیک وارد بر صفحات داخلی و خارجی هستند.

برای ساده‌سازی و تعیین نتایج پارامتری، می‌توان معادلات را به فرم بی‌بعد تبدیل کرد. پارامترهای بی‌بعد کننده معادلات به صورت رابطه (17) تعریف شده‌اند.

$$\begin{gathered}\bar{r}=\frac{r_1+r_2}{2},\ \xi=\frac{r}{\bar{r}},\ \xi_1=\frac{r_1}{\bar{r}}\ ,\ \xi_2=\frac{r_2}{\bar{r}}\ ,\\ \bar{E}=\frac{E}{E_0}\ ,\bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0}\ ,\\ \bar{\alpha}(\xi,\bar{t})=\frac{\alpha(r,t)}{\alpha_0}\ ,c_v=\sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}\ ,\\ \kappa=\frac{K}{\bar{r}}\ ,\ \bar{t}=\frac{c_v}{\bar{r}}t\ ,\\ \bar{u}(\xi,\bar{t})=\frac{u(r,t)}{T_0\bar{r}\alpha_0}\ ,\ \bar{T}(\xi,\bar{t})=\frac{T(r,t)}{T_0}\ ,\\ \bar{\sigma}_r(\xi,\bar{t})=\frac{\sigma_r(r,t)}{T_0E_0\alpha_0}\ ,\bar{\sigma}_\theta(\xi,\bar{t})=\frac{\sigma_\theta(r,t)}{T_0E_0\alpha_0}\end{gathered} \tag{17}$$

در رابطه (17)، T_0،E_0،α_0 و ρ_0 به ترتیب دمای مرجع، مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و چگالی مرجع هستند و c_v پارامتر مرتبط با سرعت انتشار موج است.

با استفاده از رابطه (17)، فرم بی‌بعد معادله (12) به صورت رابطه (18) نوشته می‌شود.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

$$\frac{\partial^2\bar{u}(\xi,\bar{t})}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial\bar{u}(\xi,\bar{t})}{\partial\xi}-\frac{2}{\xi^2}\bar{u}(\xi,\bar{t})$$
$$-\frac{1+v}{1-v}[\bar{\alpha}(\xi,\bar{t})\times\frac{\partial\bar{T}(\xi,\bar{t})}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\alpha}(\xi,\bar{t})}{\partial\xi}\times\bar{T}(\xi,\bar{t})]$$
$$=\frac{(1+v)(1-2v)}{\bar{E}(1-v)}(1-\kappa^2\bar{\nabla}^2)\left(\bar{\rho}\frac{\partial^2\bar{u}(\xi,\bar{t})}{\partial\bar{t}^2}\right) \quad (18)$$

در رابطه (18)، عملگر $\bar{\nabla}^2$ به صورت رابطه (19) تعریف می‌شود.

$$\bar{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} \quad (19)$$

همچنین فرم بی‌بعد شده شرایط مرزی را می‌توان به صورت رابطه (20) بدست آورد.

$$(1-v)\frac{\partial\bar{u}(\xi_2,\bar{t})}{\partial\xi}+2v\frac{\bar{u}(\xi_2,\bar{t})}{\xi_2}-\frac{(1+v)}{(1-v)}\bar{\alpha}(\xi_2,\bar{t})\times\bar{T}(\xi,\bar{t})$$
$$=-\frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)\bar{E}}\bar{P}_{\text{out}}(\bar{t})$$
$$(1-v)\frac{\partial\bar{u}(\xi_1,\bar{t})}{\partial\xi}+2v\frac{\bar{u}(\xi_1,\bar{t})}{\xi_1}-\frac{(1+v)}{(1-v)}\bar{\alpha}(\xi_1,\bar{t})\times\bar{T}(\xi,\bar{t})$$
$$=-\frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)\bar{E}}\bar{P}_{\text{in}}(\bar{t}) \quad (20)$$

که در رابطه (20)، روابط (21) برقرارند.

$$\bar{P}_{\text{out}}(\bar{t})=\frac{P_{\text{out}}(t)}{\alpha_0E_0T_0}\ \ \bar{P}_{\text{in}}(\bar{t})=\frac{P_{\text{in}}(t)}{\alpha_0E_0T_0}\ , \quad (21)$$

3- روش حل

3-1- روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)

روش تبدیل دیفرانسیلی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، روشی تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد که بر پایه بسط تیلور استوار است. در این روش، معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی آن به یک مجموعه معادلات جبری تبدیل می‌شوند. به عنوان مثال، تابع فرضی $f(r)$ در نقطه $r=r_0$ از فضای R، تحلیلی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین می‌توان تابع $f(r)$ را به صورت سری توانی در نقطه $r=r_0$ بیان نمود. تبدیل دیفرانسیلی مشتق kام تابع $f(r)$ به صورت رابطه (22) بیان می‌شود.

$$F_k=\frac{1}{k!}(\frac{d^kf(r)}{dr^k}) \quad (22)$$

در رابطه (22)، $f(r)$ تابع اصلی و F_k تابع تبدیل یافته می‌باشد. تبدیل معکوس تابع $f(r)$ به صورت رابطه (23) بیان می‌شود.

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(r-r_0)^k \quad (23)$$

با استفاده از روابط (22) و (23)، رابطه (24) برای تابع $f(r)$ استخراج می‌شود.

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-r_0)^k}{k!}(\frac{d^kf(r)}{dr^k}) \quad (24)$$

3-2- حل معادلات حاکم بر مسأله

با استفاده از تبدیل لاپلاس نسبت به حوزه زمانی $\bar{t}$، معادله های (18) و (20) با در نظر گرفتن شرایط اولیه (معادله (14))، به ترتیب به معادله‌های (25) و (26) تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial^2U(\xi,s)}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial U(\xi,s)}{\partial\xi}-\frac{2}{\xi^2}U(\xi,s)$$
$$-\frac{1+v}{1-v}[\frac{\partial\bar{\alpha}(\xi,s)}{\partial\xi}\times\Theta(\xi,s)$$
$$+\bar{\alpha}(\xi,s)\times\frac{\partial\Theta(\xi,s)}{\partial\xi}]$$
$$=\frac{(1+v)(1-2v)}{\bar{E}(1-v)}(1-\kappa^2\bar{\nabla}^2)\left(\bar{\rho}s^2U(\xi,\bar{t})\right) \quad (25)$$

$$(1-v)\frac{\partial\bar{U}(\xi_1,s)}{\partial\xi}+2v\frac{\bar{U}(\xi_1,s)}{\xi_1}$$
$$-\frac{(1+v)}{(1-v)}\bar{\alpha}(\xi_1,s)\times\Theta(\xi_1,s)$$
$$=-\frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)\bar{E}}g_{\text{in}}(s)$$
$$(1-v)\frac{\partial\bar{U}(\xi_2,s)}{\partial\xi}+2v\frac{\bar{U}(\xi_2,s)}{\xi_2}$$
$$-\frac{(1+v)}{(1-v)}\bar{\alpha}(\xi_2,s)\times\Theta(\xi_2,s)$$
$$=-\frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)\bar{E}}g_{\text{out}}(s) \quad (26)$$

به طوری که:

$$\bar{U}(\xi,s)=\mathrm{L}(\bar{u}(\xi,\bar{t}))\ ,\ \frac{1}{s}=\mathrm{L}(H(\bar{t}))$$
$$g_{\text{in}}(s)=\mathrm{L}(\bar{P}_{\text{in}}(\bar{t}))\ ,\ g_{\text{out}}(s)=\mathrm{L}(\bar{P}_{\text{out}}(\bar{t}))$$
$$\Theta(\xi,s)=\mathrm{L}(\bar{T}(\xi,\bar{t}))\ ,\ \bar{\alpha}(\xi,s)=\mathrm{L}(\bar{\alpha}(\xi,\bar{t})) \quad (1\text{-}26)$$

L بیانگر عملگر تبدیل لاپلاس است. با توجه به حل معادلات دیفرانسیل به روش تبدیل دیفرانسیلی، اگر ضرایب $\bar{\alpha}(\xi,s)$ و $\partial\bar{\alpha}(\xi,s)/\partial\xi$ در معادله (25)، در $\xi=1$ تحلیلی باشند، می‌توان حل این معادله را به صورت جملات $\xi-1$ در سری تیلور بیان نمود. با شرط تحلیلی بودن ضرایب بیان شده می‌توان آن‌ها را به صورت سری تیلور رابطه (27) بسط داد:

$$\bar{\alpha}(\xi,s)=\Lambda_1(\xi,s)=\sum_{n=0}a_n(s)(\xi-1)^n$$
$$\frac{\partial\bar{\alpha}(\xi,s)}{\partial\xi}=\Lambda_2(\xi,s)=\sum_{n=0}b_n(s)(\xi-1)^n \quad (27)$$

بطوری که:

$$\mathrm{A}_n(s)=\frac{1}{n!}\Lambda_1^{(n)}(s,\xi=1) \quad (1\text{-}27)$$

$$\mathrm{B}_n(s)=\frac{1}{n!}\Lambda_2^{(n)}(s,\xi=1) \quad (2\text{-}27)$$

باتوجه به تحلیلی بودن معادله (25) در $\xi=1$، پاسخ این معادله را می‌توان با استفاده از بسط سری تیلور در $\xi=1$، به صورت روابط (28) و (29) نوشت.

$$\bar{U}(\xi,s)=\sum_{n=0}\phi_n(s)(\xi-1)^n \quad (28)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]

$$\Theta(\xi,s)=\sum_{n=0}\Psi_n(s)(\xi-1)^n \qquad (29)$$

با جایگذاری روابط (28) و (29) در معادله (25) و استفاده از خواص سری‌ها، رابطه بازگشتی (30) برای معادله (25) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&(n+1)(n+2)(1+\kappa^2\psi)\phi_{n+2}(s)=\\&\psi\phi_{n-2}(s)+2\psi\phi_{n-1}(s)\\&-\Big(n(n+1)(1+\kappa^2\psi)-2-\psi\Big)\phi_n(s)\\&-2(n+1)^2(1+\kappa^2\psi)\phi_{n+1}(s)\\&-(\frac{1+v}{1-v})\times\sum_{i=0}^{n}[(i-1)\Psi_{i-1}(s)+2i\Psi_i(s)\\&+(i+1)\Psi_{i+1}(s)]\mathrm{A}_{n-i}(s)\\&-(\frac{1+v}{1-v})\times\sum_{i=0}^{n}[\Psi_{i-2}(s)+2\Psi_{i-1}(s)\\&+\Psi_i(s)]\mathrm{B}_{n-i}(s)\ ,\ n\ge 0\end{aligned} \qquad (30)$$

بطوری که:

$$\phi_{-1}(s)=\phi_{-2}(s)=\Psi_{-1}=\Psi_{-2}=0 \qquad (1\text{-}30)$$

$$\psi=\frac{(1+v)(1-2v)}{(1-v)}\frac{\bar{\rho}}{\bar{E}}s^2 \qquad (2\text{-}30)$$

با بررسی و تعیین چند جمله از رابطه (30)، می‌توان بیان کرد $\phi_n(s)$ ترکیبی خطی از $\phi_0(s)$ و $\phi_1(s)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، رابطه (30) را می‌توان به فرم ساده شده رابطه (31) نوشت.

$$\phi_n=\mathrm{X}_n(s)\phi_0+\mathrm{Y}_n(s)\phi_1+\mathrm{Z}_n(s) \qquad (31)$$

در معادله (31)، $\mathrm{X}_n(s)$ ،$\mathrm{Y}_n(s)$ و $\mathrm{Z}_n(s)$ از رابطه بازگشتی (30) به دست می‌آیند و ϕ_0 و ϕ_1 ثابت‌های مجهول هستند که از شرایط مرزی (معادله (26)) محاسبه می‌شوند. بنابراین، با استفاده از روابط (28) و (31)، جابجایی شعاعی به دست آمده را می‌توان به صورت رابطه (32) در حوزه لاپلاس بیان نمود.

$$\bar{U}(\xi,s)=\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{X}_n(s)\phi_0+\mathrm{Y}_n(s)\phi_1+\mathrm{Z}_n(s)](\xi-1)^n \qquad (32)$$

در پژوهش حاضر، برای تعیین میدان تنش در حوزه زمان و تبدیل فضای لاپلاس به زمان، از روش تبدیل لاپلاس معکوس سریع (FLIT) به عنوان یک روش عددی نسبتاً دقیق استفاده شده که ترکیبی از تبدیل‌های فوریه سینوسی و کوسینوسی می‌باشد [20].

4- نتایج عددی و بحث در آن

برای بررسی رفتار ترموالاستیک نانو پوسته کروی تحت شوک حرارتی، نانو کره‌ای از جنس طلا با مشخصات بیان شده در رابطه (33) مورد بررسی قرار می‌گیرد [17].

$$E=85.45\ \mathrm{GPa}\ ,\quad \rho=19.28\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

$$v=0.42\ ,\ \alpha=14\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ\mathrm{c}} \qquad (33)$$

در این بررسی، کره با شعاع‌های داخلی مختلف و ضخامت ثابت $h=0.34$ nm در نظر گرفته می‌شود. تغییرات ناگهانی دمای پوسته به صورت اعمال اختلاف دمای متقارن کروی بعنوان مثال طبق رابطه (34) در نظر گرفته می‌شود:

$$T(r,t)=T_0H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ T_0 & t\ge 0\end{cases} \qquad (34)$$

با استفاده از رابطه (17) فرم بی‌بعد رابطه (34) به صورت رابطه (35) نوشته می‌شود:

$$\bar{T}(\xi,\bar{t})=H(\bar{t})=\begin{cases}0 & \bar{t}<0\\ 1 & \bar{t}\ge 0\end{cases} \qquad (35)$$

همچنین، سطوح داخلی و خارجی کره عاری از بارگذاری مکانیکی است:

$$P_{\mathrm{in}}(t)=0\quad ,\quad P_{\mathrm{out}}(t)=0 \qquad (36)$$

در جدول‌های 1 و 2، تعداد جملات مورد نیاز برای همگرایی پاسخ‌های جابجایی و تنش محیطی نانوکره‌ای با شرایط $\kappa=0.5, r_1/h=2.35$ نشان داده شده است. همان‌طور که در جدول‌ها نشان داده شده است، با در نظر گرفتن 8 جمله اول سری، همگرایی مناسبی ایجاد خواهد شد.

برای صحه گذاری نتایج به دست آمده از روش ارائه شده، کره‌ای همگن با مشخصات طبق در رابطه (37) و تحت بار مکانیکی ناگهانی در صفحه داخلی مطابق رابطه (38) که در مرجع [8] ارائه شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$E\approx129\ \mathrm{GPa}\ ,\ v\approx0.36\ ,c=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\ ,\kappa=0$$

$$c_v=\sqrt{\frac{c}{\rho}}\ ,\bar{t}=\frac{c_v}{r_2}t\ ,\ \frac{r_2}{r_1}=2\ ,\bar{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{c}\ ,\bar{\sigma}_\theta=\frac{\sigma_\theta}{c} \qquad (37)$$

$$P_{\mathrm{in}}(\bar{t})=H(\bar{t})\ \text{و}\ P_{\mathrm{out}}(\bar{t})=0 \qquad (38)$$

وانگ و دینگ [8] با استفاده از تعریف یک تابع و تبدیل معادله با شرایط مرزی غیر همگن به معادله‌ای با شرایط مرزی همگن و سپس به کارگیری روش جداسازی متغیرها، معادلات الاستیسیته حاکم بر کره متقارن کروی را به دو معادله انتگرالی نوع دوم وولترا (مرتبط با زمان) تبدیل کردند و با حل این دو معادله انتگرالی به بررسی رفتار کره متقارن کروی تحت شوک مکانیکی پرداختند. شکل 1، مقایسه بین نتایج حاصل از روش ارائه شده در این پژوهش را با نتایج مرجع [8] نشان می‌دهد. بطوری که دیده می شود تطابق خوبی بین نتایج پژوهش حاضر و نتایج مرجع [8] وجود دارد. همچنین در شکل 1، روند همگرایی پاسخ به دست آمده نشان دهنده سرعت همگرایی و دقت بالای روش ارائه شده است.

جدول 1 اثر تعداد جملات بر همگرایی تغییرات زمانی جابجایی شعاعی

	$\bar{t}=3$	$\bar{t}=7$
6 جمله	3/131552	1/181954
7 جمله	3/049939	1/150372
8 جمله	3/004988	1/207655
9 جمله	3/009605	1/204755

جدول 2 اثر تعداد جملات بر همگرایی تغییرات زمانی تنش محیطی

	$\bar{t}=3$	$\bar{t}=7$
6 جمله	6/141109	-19/0806
7 جمله	5/314935	-18/4547
8 جمله	4/775956	-18/461
9 جمله	4/820351	-18/5064

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار موج بصورت رابطه (39) بیان می شود که در آن λ نشان‌دهده سرعت انتشار امواج در راستای اعمال موج است.

$$\nabla^2\Omega=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} \qquad (39)$$

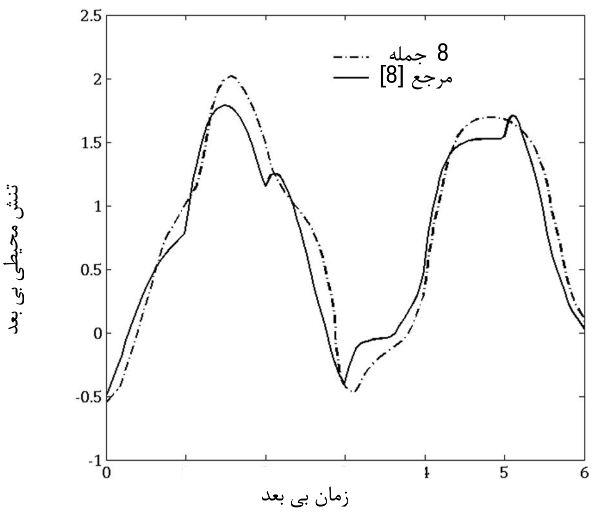
بنابراین می‌توان گفت در رابطه (18)، $\lambda=\left[\bar{E}(1-\nu)/\bar{\rho}(1+\nu)(1-2\nu)\right]\times\left[1/(1-\kappa^2\bar{\nabla}^2)\right]$ نشان‌دهنده سرعت انتشار امواج در راستای شعاع می باشد. ملاحظه می‌شود اثر اندازه در ساختارهای با مقیاس نانو، علاوه بر دامنه جابجایی‌ها و تنش‌ها، موجب تغییر در سرعت انتشار امواج ناشی از بارهای دینامیکی می‌شود.

شکل 2 بیانگر اثر پارامتر غیر محلی (κ) بر تغییرات زمانی جابجایی شعاعی نانوپوسته کروی با نسبت ضخامت به شعاع داخلی r_1/h=2.35 می‌باشد. با افزایش κ دامنه جابجایی کاهش می‌یابد اما انتشارامواج و تغییر شکل ناشی از آن، با سرعت بیشتر رخ می‌دهد.

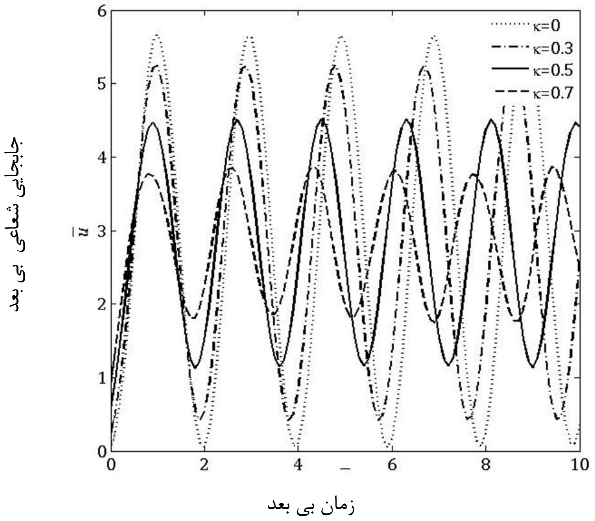
در شکل 3، تاثیر نسبت شعاع داخلی به ضخامت بر تغییرات زمانی تنش شعاعی صفحه میانی نانوپوسته کروی با فرض $\kappa=0.5$ نشان داده شده است، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، افزایش نسبت r_1/h موجب کاهش دامنه تنش می‌شود.

در شکل‌های 4 تا 6، اثر κ بر تغییرات زمانی تنش محیطی در سه نقطه شعاعی مختلف از نانوپوسته کروی با نسبت r_1/h=2.35 نشان داده شده است. با توجه به شکل‌ها، اثر κ بر تغییرات زمانی تنش محیطی در تمامی نقاط یکسان می‌باشد. افزایش κ موجب افزایش سرعت انتشار امواج تنشی و کاهش دامنه تنش می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هنگامی‌که $\kappa>0.5$، افزایش آن موجب کاهش سریع دامنه تنش نسبت به حالت $\kappa<0.5$ می‌شود. همچنین با مقایسه شکل‌های 4 تا 6 می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین مقدار تنش محیطی در شعاع داخلی رخ می‌دهد.

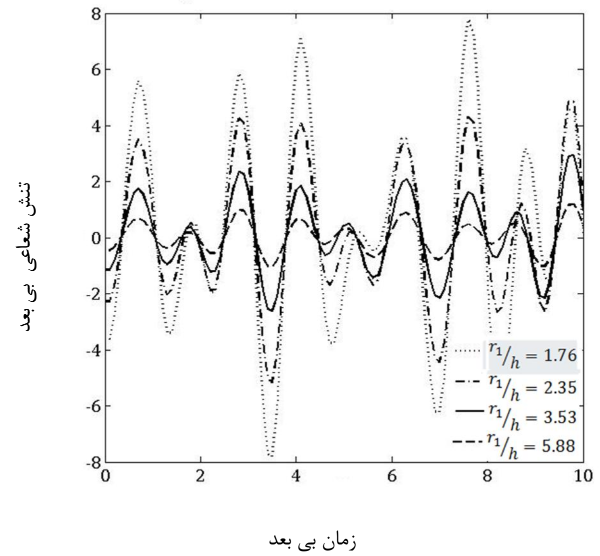
اثر نسبت r_1/h بر تغییرات زمانی تنش محیطی در شعاع داخلی در شکل 7 آمده است. افزایش نسبت r_1/h موجب کاهش سرعت انتشار امواج و دامنه تنش محیطی می‌شود. از مقایسه شکل‌های 3 و 7، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت r_1/h مقادیر تنش‌های شعاعی و محیطی کاهش می‌یابد اما سرعت کاهش دامنه تنش محیطی بسیار کمتر از تنش شعاعی می‌باشد.



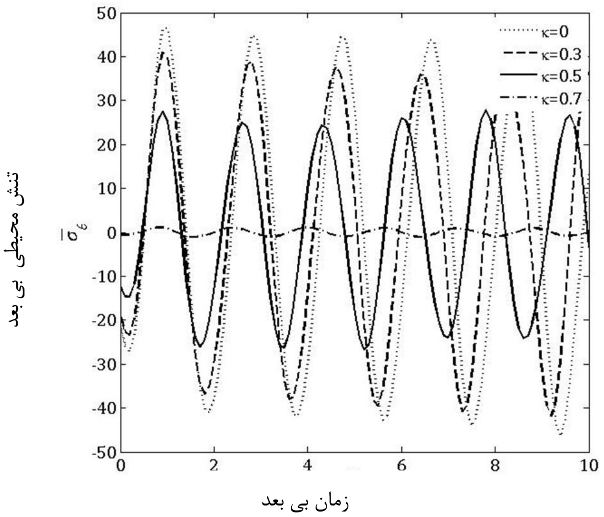
شکل 1 تغییرات زمانی تنش محیطی در صفحه داخلی



شکل 2 تغییرات زمانی جابجایی شعاعی در نقطه میانی در راستای شعاع

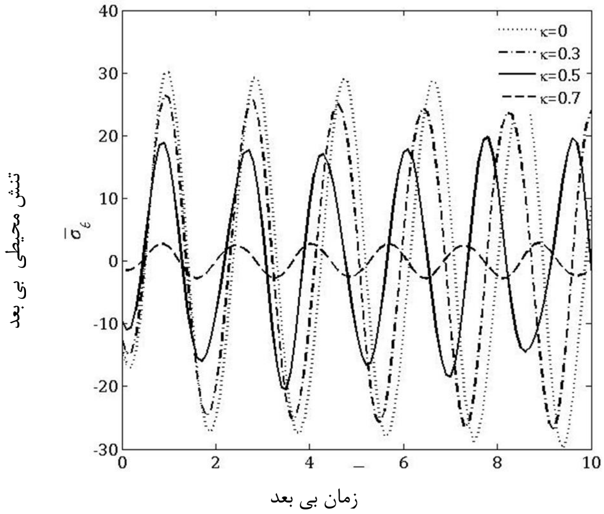


شکل 3 تغییرات زمانی تنش شعاعی در نقطه میانی در راستای شعاع

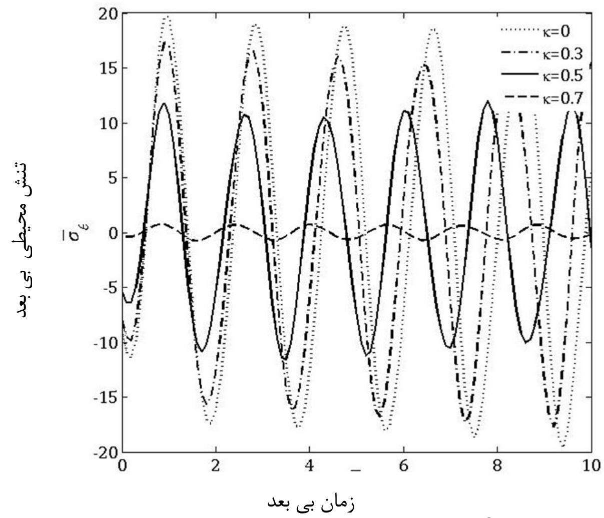


شکل 4 تغییرات زمانی تنش محیطی در صفحه داخلی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]



شکل 5 تغییرات زمانی تنش محیطی در شعاع میانی

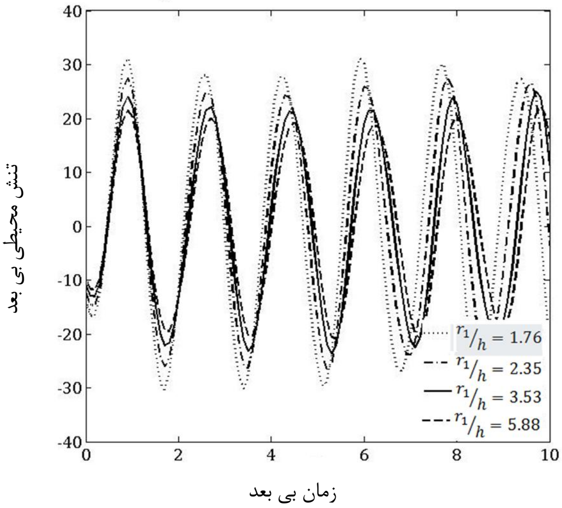


شکل 6 تغییرات زمانی تنش محیطی در سطح خارجی

5- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، با استفاده تئوری الاستیسیته غیر محلی رفتار ترموالاستیک در یک نانوکره تحت شوک حرارتی بررسی شده است. معادلات حرکت با استفاده از تبدیل لاپلاس به حوزه لاپلاس تبدیل شده است و بعد از حل معادلات با استفاده روش تبدیل دیفرانسیلی، پاسخ‌های به دست آمده با به کارگیری تبدیل لاپلاس معکوس سریع، به حوزه زمانی تبدیل شدند. در این پژوهش، اثر اندازه و همچنین اثر نسبت شعاع داخلی به ضخامت، بر پاسخ زمانی میدان‌های جابجایی و تنش مورد بررسی قرار گرفته است. به برخی از نتایج به دست آمده در ادامه اشاره می‌شود:

- پارامتر غیر محلی اثر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ساختارهای با مقیاس نانو دارد .
- در نانوپوسته‌های کروی، افزایش پارامتر غیر محلی موجب افزایش سرعت انتشار امواج و کاهش دامنه جابجایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی می‌شود.
- با افزایش نسبت r_1/h در نانوپوسته‌های کروی، دامنه تنش‌های محیطی و شعاعی کاهش می‌یابد.



شکل 7 تغییرات زمانی تنش محیطی در سطح داخلی

- بیشترین مقدار تنش محیطی در نانوپوسته کروی تحت شوک حرارتی متقارن کروی، در سطح داخلی رخ می‌دهد.

6- فهرست علایم

r	شعاع (nm)
t	زمان (s)
T	دما (K)
u	جابجایی شعاعی (nm)
σ_r	تنش شعاعی (Pa)
σ_θ	تنش محیطی (Pa)
ε_r	کرنش شعاعی
ε_θ	کرنش محیطی
E	مدول یانگ (GPa)
α	ضریب انبساط حرارتی $(\frac{1}{^\circ c})$
ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی $(\frac{g}{cm^3})$

7- مراجع

[1] K.Tachibana, S. Tachibana, Application of ultrasound energy as a new drug delivery system, *Japanese Journal of Applied Physics,* Vol. 38, No. 58, pp. 25-33, 1999.

[2] X. Cai, T. Gao, H. Hong, J. Sun, Applications of gold nanoparticles in cancer nanotechnology, *Nanotechnology, Science and Applications, International Journal of Engineerig science* , Vol. 1, pp. 17-32, 2008.

[3] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics,* Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.

[4] S. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, Coupled axisymmetric vibration of nonlocal fluidfilled closed spherical membrane shell, *Acta Mechanica,* Vol. 223, pp. 2011-2020, 2012.

[5] X. Wang, S.R. Guillow, Stress wave propagation in orthotropic laminated thick-walled spherical shells, *International Journal of Solids and Structures,* Vol.39, pp. 4027-4037, 2002.

[6] H.L. Dai, X. Wang, Stress wave propagation in laminated piezoelectric spherical shells under thermal shock and electric excitation, *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 24, pp. 263-276, 2005.

[7] S.Z. Wu, K.T. Chau, Dynamic response of an elastic sphere under diametral impacts, *Mechanics of Materials,* Vol. 38, pp. 1039-1060, 2006.

[8] H.M. Wang, H.J. Ding, Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem,

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]

European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 25, pp. 965-980, 2006.

[9] Y. Ootao, M. Ishihara, Exact solution of transient thermal stress problem of a multilayered magneto-electro-thermoelastic hollow sphere, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 36. pp. 1431-1443,2012.

[10] M. Komijania, H. Mahbadi, M.R. Eslami, Thermal and mechanical cyclic loading of thick spherical vessels made of transversely isotropic materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 107, pp. 1-11, 2013.

[11] K. Behfar, R. Naghdabadi, Nanoscale modeling of an embedded multi-shell fullerene and its application to vibrational analysis, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 44, pp. 1156-1163, 2006.

[12] R. Ansari, R. Rajabiehfard, B. Arash, Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science,* Vol. 49, pp. 831-838, 2010.

[13] A. Alibeigloo, Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity, *Acta Mech,* Vol. 222, pp. 149-159, 2011.

[14] S.T. Talebian, M. Tahani, M.H. Abolbashari, S.M. Hosseini, An analytical solution for thermal shock analysis of multiwall carbon nanotubes, *Computational Materials Science,* Vol. 61, pp. 291-297, 2012.

[15] S. Seifoori, G.H. Liaghat, Low velocity impact of a nanoparticle on nanobeams by using a nonlocal elasticity model and explicit finite element modeling, *International Journal of Mechanical Science,* Vol. 69, pp. 85-93, 2013.

[16] R. Zaera, J. Fernández-Sáez, J.A. Loya, Axisymmetric free vibration of closed thin spherical nano-shell, *Composite Structures,* Vol. 104, pp.154-161, 2013.

[17] E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh, Nonlocal elasticity theory for radial vibration of nanoscale spherical shells, *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 41, pp. 37-42, 2013.

[18] R. Rafiee, Analysis of nonlinear vibrations of acarbon nanotube using perturbation technique, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 12, No. 3, pp. 60-67, 2012. (In Persian)

[19] A. Zabihollah , M.H. Pol, A. SelkGhafari, S. Momeni, Dynamic response of laminated hybrid composite beams reinforced with high weight fraction of nano-particles, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 11, pp. 150-153, 2014. (In Persian)

[20] F.Durbin, Numerical inversion of laplace transform: An efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Computer Journal,* Vol. 17, pp. 371-376, 1974.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.9.22.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-01]