



تحلیل سه بعدی ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته های استوانه ای کامپوزیتی با تقویت کننده های متعامد تحت بار محوری و فشار

کامران دانشجو^۱، رضا معدولیت^{۲*}، مصطفی طالبی توتی^۳

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، iust.ac.ir@madoliat

چکیده- در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه ای کامپوزیتی دوار، با تقویت کننده های متعامد تحت بار محوری یکنواخت و فشار، با تئوری سه بعدی لایه ای مورد مطالعه قرار گرفته است. تقویت کننده ها با فواصل مساوی از یکدیگر قرار گرفته اند و دارای هندسه و جنس یکسانی می باشند. اتصال تقویت کننده ها بر سطح خارجی پوسته بوده و به قصد مدلسازی ریاضی تقویت کننده ها از روش المان جداگانه استفاده شده است. معادلات حرکت با نگرش انرژی و براساس اصل همپلتون حاصل می گردند. در استخراج معادلات حرکت از تئوری سه بعدی الاستیسیته استفاده شده و اثرات نیروی کریولیس، شتاب جانب به مرکز و کشش حلقوی اولیه در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری سه بعدی لایه ای، بر روی معادلات حرکت و شرایط مرزی در راستای ضخامت جداسازی صورت گرفته است. شرایط مرزی پوسته در دو سر تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از روش حاضر با نتایج سایر محققان و نتایج تحلیل عددی مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. در نهایت تاثیر هندسه و نوع تقویت کننده ها، سرعت دورانی و مقدار نیروی محوری و فشار داخلی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای تقویت شده مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلیدواژگان: پوسته استوانه ای دوار، تقویت کننده های طولی و محیطی، تئوری سه بعدی الاستیسیته، سرعت بحرانی، تئوری لایه ای

Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure

K. Daneshjou¹, R. Madoliat^{2*}, M. Talebitooti³

1- Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

3- PhD Student, Mech. Eng., Iran Univ. Sci. & Tech., Tehran, Iran

* P. O. B. 16846-13114 Tehran, madoliat@iust.ac.ir

Abstract- In this paper, an approximate solution using layer-wise theory for the vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells with ring and stringer stiffeners under axial load and pressure is presented. The cylindrical shells are stiffened with uniform interval and it is assumed that the stiffeners have the same material and geometric properties and cylindrical shell reinforced by outer stiffeners while stiffeners are treated as discrete elements. The equations of motion are derived by the Hamilton's principle. In deriving the governing equations three-dimensional elasticity theory are used and the study includes the effects of the Coriolis and centrifugal accelerations and the initial hoop tension. The layer-wise theory is used to discretize the equations of motion and the related boundary conditions through the thickness of the shells. The edges of the shell are restrained by simply supported boundary conditions. The presented results are compared with those available in the literature and also with the FE results and excellent agreement is observed. Finally, the results obtained include the relationship between frequency characteristics of stiffened cylindrical shell and different geometry of stiffeners, stiffener type, rotating velocities, amplitude of pressure and amplitude of axial load.

Keywords: Rotating Cylindrical Shell, Ring and Stringer Stiffeners, Three-Dimensional Elasticity Theory, Critical Speed, Layer-wise Theory

۱- مقدمه

پوسته های استوانه ای دوار در بسیاری از کاربردهای صنعتی از قبیل روتور توربین گاز، سانتریفیوژها، کوره های پخت سیمان و سیستم های دوار استفاده می شود. برای بالابردن سفتی پوسته از تقویت کننده استفاده می شود. پوسته های استوانه ای، که با المان هایی از نوع تیر تقویت شده اند، به صورت گسترده ای در سازه های مکانیکی از قبیل موشک، زیردریایی، خشک کننده های دوار و مخازن سوخت هواپیما استفاده می شوند. در اکثر این موارد پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است دچار ارتعاش و کمانش و خستگی شود. بنابراین شناخت خصوصیات این سازه ها از جمله فرکانس طبیعی و بار کمانش اجتناب ناپذیر است. از طرفی، با توجه به نیاز روزافزون طراحی سازه های سبک وزن با استحکام بالا، لازم است که نسبت استحکام به وزن این سازه ها تا حد امکان بالا باشد تا سازه طراحی شده از نظر مصرف مواد، انرژی و هزینه بهینه باشد. از جمله راه های رسیدن به این هدف، تقویت بهینه پوسته با المان های تقویت کننده محیطی و طولی و همچنین استفاده از مواد مرکب می باشد.

مصطفی و علی [۱] از روش انرژی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه ای تقویت شده، با در نظر گرفتن خمیدگی، کشیدگی و پیچیدگی تقویت کننده، استفاده کردند. نگ و لم [۲] ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوسته های ایزوتروپیک دوار تحت بار محوری ثابت را تحلیل کردند. ژاهو، لیو و نگ [۳] ارتعاشات پوسته های کامپوزیتی دوار با تقویت کننده های متعام را بررسی کردند. جعفری و باقری [۴] با روش های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه ای ایزوتروپیک با تقویت کننده های محیطی پرداختند و نتایج حاصل از سه روش فوق را با هم مقایسه کردند. خرمی و حسینی هاشمی [۵] با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر^۱ و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه ای ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. در زمینه ارتعاشات پوسته مطالعات انجام گرفته با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیته در مقایسه با دیگر تئوری ها، به دلیل پیچیدگی آن و در نظر گرفتن هر شش جزء میدان تنش و کرنش، بسیار کم می باشد. از جمله این تحقیقات می توان به

مقاله نلسون [۶] در زمینه ارتعاشات پوسته استوانه ای با طول نامحدود اشاره کرد. همچنین برای استوانه با طول محدود می توان کارهای هاتچنسون و الازهری [۷] و لیس [۸] را نام برد که با استفاده از روش ریلی ریتز این مسئله را مورد بررسی قرار دادند. ملک زاده و همکارانش [۹] با استفاده از تئوری لایه ای و استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه ای کامپوزیتی پرداختند. در ادامه علی بیگلر [۱۰] به مطالعه خصوصیات استاتیکی و ارتعاشاتی پوسته کامپوزیتی با لایه هایی دارای زاویه الیاف ۰ و ۹۰ درجه^۲ با استفاده از تئوری سه بعدی لایه ای الاستیسیته و استفاده از فضای حالت به همراه روش دیفرانسیل کوادراچر پرداخت. همچنین کنی و علی بیگلر [۱۱]، با استفاده از تئوری سه بعدی و روش تحلیلی، ارتعاشات پوسته استوانه ای چندلایه با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، تحلیل دینامیکی پوسته های استوانه ای کامپوزیتی دوار تقویت شده تحت اثر بار محوری ثابت و فشار، با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در دوسر، با استفاده از تئوری سه بعدی لایه ای، مطالعه می شود. برای استخراج معادلات متشکله حاکم بر پوسته از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می شود. تاثیر پارامترهای مختلف نظیر سرعت دورانی پوسته، میزان بار محوری، فشار و نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی بررسی شده است. اثر تقویت کننده ها با استفاده از روش جداگانه وارد معادلات شده و در نهایت نتایج حاصله با نتایج موجود در مقالات دیگر محققان و همچنین نتایج حاصل از تحلیل عددی توسط نرم افزار اباکوس^۳ مقایسه شده که دارای همخوانی مناسبی می باشد.

۲- تئوری مسئله

۲-۱- هندسه مسئله

پوسته استوانه ای کامپوزیتی با تقویت کننده های متعام، با سرعت زاویه ای Ω به دور محور تقارن طولی، مورد بررسی واقع شده است. سیستم مختصات متعام (x, θ, z) بر سطح مرجع بر روی لایه میانی پوسته قرار دارد. مطابق شکل ۱، در تئوری لایه ای، پوسته به N_l لایه دلخواه فرضی تقسیم می شود. شعاع

2. Cross-ply
3. Abaqus

1. Differential Quadrature Method

همچنین، رابطه ماتریس سفتی انتقال یافته با ماتریس سفتی ماده به صورت زیر است.

$$[\bar{C}] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (4)$$

که در رابطه فوق $[T]$ ماتریس انتقال از مختصات ماده به مختصات اصلی و به صورت زیر می باشد.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$m = \cos \alpha, \quad n = \sin \alpha$$

در رابطه فوق α زاویه بین الیاف لایه کامپوزیتی و جهت مختصه x دستگاه مختصات می باشد. همچنین $[C]$ ماتریس سفتی در دستگاه مختصات ماده می باشد و برای یک لایه کامپوزیتی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C_{11} = E_{11} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{22} = E_{22} \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{\Delta}$$

$$C_{33} = E_{33} \frac{1 - \nu_{21}\nu_{12}}{\Delta}$$

$$C_{12} = C_{21} = E_{11} \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta}$$

$$C_{13} = C_{31} = E_{22} \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}$$

$$C_{23} = C_{32} = E_{33} \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12}$$

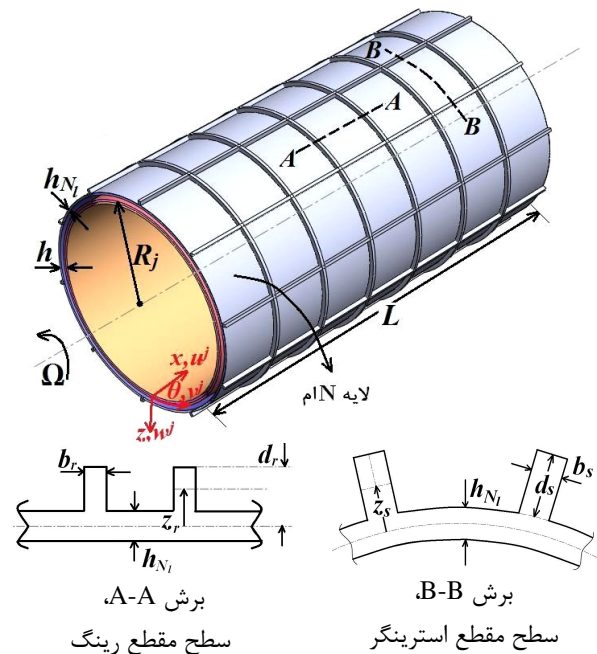
$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (7)$$

که در رابطه فوق E_{ij} مدول الاستیسیته، G_{ij} مدول برشی و ν_{ij} نسبت های پوسان برای لایه کامپوزیتی می باشند.

در تئوری سه بعدی الاستیسیته رابطه کرنش-جابجایی برای پوسته استوانه ای به صورت ماتریسی زیر بیان می شود [۱۰].

$$\{\varepsilon\} = [D] \{\chi\} \quad (8)$$

ثابت R_j برای لایه j ام و جابجایی های u^j و v^j به ترتیب در جهات x ، θ و z در نظر گرفته می شود. پوسته دارای طول L و ضخامت h و تقویت کننده ها به صورت مستطیل شکل دارای ارتفاع $d_{s/r}$ و پهنای $b_{s/r}$ می باشند. فاصله مرکز سطح تقویت کننده ها تا سطح خارجی پوسته با $z_{s/r}$ مشخص می گردد.



شکل ۱ هندسه و نمادگذاری پوسته استوانه ای تقویت شده

۲-۲- تئوری سه بعدی الاستیسیته

طبق تئوری سه بعدی الاستیسیته، رابطه تنش-کرنش برای پوسته چندلایه به صورت زیر بیان می شود.

$$\{\sigma\} = [\bar{C}] \{\varepsilon\} \quad (1)$$

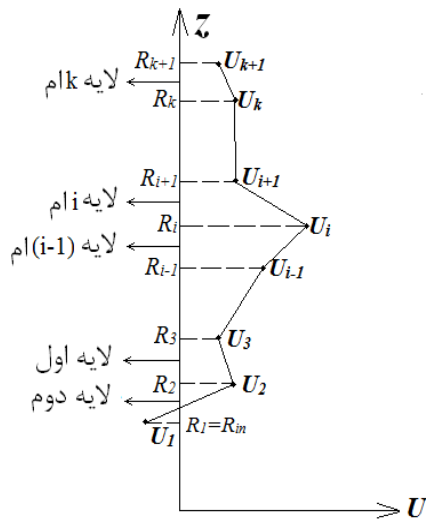
که در رابطه فوق مولفه های تنش و کرنش به صورت زیر است.

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{x\theta}\}$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{x\theta}\} \quad (2)$$

و ماتریس سفتی کاهش یافته $[\bar{C}]$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$



شکل ۲ نمایش تغییر شکل ها بر طبق تئوری لایه ای

در رابطه (۱۳) z_j فاصله سطح پایینی لایه j ام از سطح مرجع پوسته می باشد و $U^j, V^j, W^j, U^{j+1}, V^{j+1}, W^{j+1}$ مختصات عمومی لایه j ام می باشند.

میدان جابه جایی تعریف شده در رابطه (۱۲) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می گردد.

$$\{u^j\} = [N] \{d^j\} \quad (14)$$

که $\{d^j\}$ به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{d^j\}^T = \{U^j V^j W^j U^{j+1} V^{j+1} W^{j+1}\} \quad (15)$$

و ماتریس $[N]$ در پیوست ب آورده شده است.

با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۸)، بردار کرنش به صورت زیر قابل بیان است.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\} \quad (16)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$[B] = [D][N] \quad (17)$$

۲-۳-۲ انرژی پوسته

انرژی کرنشی کششی و خمشی لایه j ام پوسته به وسیله رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$U_\varepsilon^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\} R_j d\theta dx dz \quad (18)$$

در اثر چرخش پوسته نیروی گریز از مرکز در پوسته ایجاد خواهد شد که با نوشتن رابطه تعادل در جهت شعاعی المانی از

که اپراتور دیفرانسیلی D بردار کرنش و بردار جابه جایی برای لایه j ام به صورت زیر تعریف می گردد.

$$[D^j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\chi^T = \{u^j, v^j, w^j\} \quad (10)$$

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{x\theta}\} \quad (11)$$

۲-۳-۳ استخراج معادلات حرکت

۲-۳-۱-۱ تئوری لایه ای

میدان جابه جایی برای j امین لایه از پوسته مورد نظر، با فرض شرط مرزی تکیه گاه ساده در دو سر، به صورت زیر تعریف می شود [۱۲].

$$\begin{aligned} u^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_x^j(z) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) \\ v^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_\theta^j(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \\ w^j &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_z^j(z) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

در این تئوری جزء جابه جایی در راستای ضخامت، ϕ ، به صورت تابع های تکه ای درونیاب لاگرانژین تعریف می شود که توابعی پیوسته اند که مشتق آنها ناپیوسته می باشد. در این تئوری تعداد زیرقسمت ها در راستای ضخامت، j ، می تواند مساوی و یا بیشتر از تعداد لایه ها باشد و جزء جابه جایی در راستای ضخامت می تواند تابع چند جمله ای خطی و یا مرتبه بالاتر باشد (شکل ۲). بنابراین، تابع ϕ به صورت زیر تعریف می شود [۱۳].

$$\begin{aligned} \phi_x^j(z) &= \alpha U^j + \beta U^{j+1} \quad ; \quad \beta = \frac{z - z_j}{h} \\ \phi_\theta^j(z) &= \alpha V^j + \beta V^{j+1} \\ \phi_z^j(z) &= \alpha W^j + \beta W^{j+1} \quad ; \quad \alpha = 1 - \beta \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۵) و همچنین با جاگذاری رابطه های (۱) و (۱۲) و (۱۶) در رابطه (۱۸)، بخش اول انرژی جنبشی T_1^j و همچنین انرژی کرنشی و خمشی پوسته به صورت زیر قابل بیان است.

$$T_1^j = \frac{1}{2} \{d\}^T [M_{sh}^j] \{d\}$$

$$U_\varepsilon^j = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_1^j] \{d\} \quad (26)$$

$[M_{sh}^j]$ و $[K_1^j]$ به ترتیب ماتریس جرم و ماتریس سفتی لایه j ام پوسته می باشند که به صورت زیر قابل حصول هستند.

$$M_{sh}^j = \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j^2 & 0 & 0 & \alpha_j \beta_j \\ \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j \beta_j & 0 & 0 & \beta_j^2 \end{bmatrix} R_j dz \quad (27)$$

$$K_1^j = \iiint_{vol} K_{rs}^1 R^j d\theta dx dz \quad (28)$$

درایه های $(r, s = 1 \dots 6)$ ، K_{rs}^1 در رابطه (۲۸) در پیوست الف آورده شده است.

۳-۳-۲- انرژی تقویت کننده ها

در روش تحلیلی حاضر فرض بر این است که پوسته و تقویت کننده ها به صورت یکپارچه می باشند. به قصد برقراری رابطه بین جابه جایی تقویت کننده ها و پوسته و در نظر گرفتن خروج از مرکزیت تقویت کننده ها، میدان جابه جایی هر نقطه از تقویت کننده به فاصله z از سطح خارجی پوسته در جهت های x ، θ و z به صورت رابطه (۲۹) تعریف می شود.

$$u_s = u_{N_i+1} - z \frac{\partial w_{N_i+1}}{\partial x}$$

$$v_s = v_{N_i+1} - \frac{z}{R_{N_i}} \frac{\partial w_{N_i+1}}{\partial \theta}$$

$$w_s = w_{N_i+1} \quad (29)$$

در رابطه فوق، $(u_{N_i+1}, v_{N_i+1}, w_{N_i+1})$ جابه جایی سطح خارجی پوسته می باشد. بدین ترتیب، کرنش استرینگر در جهت طولی و کرنش رینگ در جهت محیطی به صورت زیر به دست می آید.

پوسته نیروی کشش حلقوی در اثر این چرخش به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$N_j^\theta = \rho_j R_j \Omega^2 \quad (19)$$

انرژی کرنشی ایجاد شده در پوسته در اثر این کشش حلقوی به صورت زیر بیان می گردد [۳].

$$U_j^h = \int_{vol} \frac{N_j^\theta}{2R_j^2} \left\{ \left(\frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial \theta} + w_j \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial \theta} - v_j \right)^2 \right\} R_j d\theta dx dz \quad (20)$$

به علاوه، کار انجام شده بر روی پوسته در اثر نیروی محوری و فشار به صورت زیر قابل محاسبه است [۲].

$$U_j^{Na} = -\frac{N_a}{2} \times \iiint_{vol} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} \right)^2 \right] R_j dx d\theta dz \quad (21)$$

$$U_j^P = -\frac{P}{2} \iiint_{vol} \left[\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} + w_j \right) w_j \right] R_j d\theta dx dz \quad (22)$$

انرژی جنبشی پوسته دوار به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho(z) \vec{V} \cdot \vec{V} R_j d\theta dx dz \quad (23)$$

بردار سرعت در رابطه فوق برای هر نقطه از پوسته دوار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{V} = \dot{u}^j \vec{i} + \dot{v}^j \vec{j} + \dot{w}^j \vec{k} + (\Omega \vec{i} \times w^j \vec{k}) + (\Omega \vec{i} \times v^j \vec{j}) \quad (24)$$

با جاگذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۲۳)، انرژی جنبشی لایه j ام پوسته به صورت زیر قابل بیان است.

$$T^j = \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[\underbrace{(\dot{u}^j)^2 + (\dot{v}^j)^2 + (\dot{w}^j)^2}_{T_1^j} \right] R_j d\theta dx dz$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[2\Omega(v\dot{w} - w\dot{v}) \right] R_j d\theta dx dz$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_{vol} \rho \left[\Omega^2(v^2 + w^2) \right] R_j d\theta dx dz \quad (25)$$

T_3^j

که در رابطه فوق N_s تعداد تقویت کننده های طولی و $G_{sk} J_{sk}$ سختی پیچشی تقویت کننده طولی k ام می باشد. همچنین انرژی کرنشی تقویت کننده های محیطی با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش و پیچش به صورت زیر بیان می شود.

$$U_r = \sum_{k=1}^{N_r} \frac{1}{2} E_{rk} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} \varepsilon_{rs}^2 dA_{rk} d\theta + \sum_{k=1}^{N_r} \frac{1}{2} G_{rk} J_{rk} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R_N^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right)^2 (R_N + d_s / 2) d\theta \quad (36)$$

که در این رابطه $G_{rk} J_{rk}$ سختی پیچشی تقویت کننده حلقوی است.

۲-۳-۴- اصل همیلتون

در این تحقیق، به قصد به دست آوردن معادلات حرکت از اصل همیلتون استفاده شده است. با جایگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۵) و سپس اعمال اصل همیلتون و همچنین جداسازی ضرایب δU^j ، δW^j ، δV^j ، δU^{j+1} ، δW^{j+1} و δV^{j+1} تمام انرژی های پوسته به صورت ماتریسی قابل بیان است و می توان ماتریس های سفتی و ژیروسکوپی را از آنها استخراج نمود. شکل ماتریسی این انرژی ها در پیوست ب آورده شده است. همچنین با جاگذاری رابطه (۱۲) در روابط (۳۲)، (۳۳)، (۳۴)، (۳۵) و (۳۶) و اعمال اصل همیلتون و جداسازی ضرایب δU_{N_l+1} ، δW_{N_l+1} و δV_{N_l+1} تمام انرژی های تقویت کننده ها به فرم ماتریسی $[K^s]$ ، $[M^s]$ و $[G^s]$ دوباره نویسی می شوند که درایه های این ماتریس ها نیز در پیوست ب آورده شده است.

۲-۴- روش حل مسئله

انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته با جمع کردن انرژی جنبشی و پتانسیل هر کدام از لایه ها به دست می آید و با برهم گذاری ماتریس های سفتی، جرم و ژیروسکوپ پوسته و تقویت کننده ها و مرتب کردن آنها بر حسب مرتبه فرکانس طبیعی ω ، رابطه مقدار ویژه فرکانسی پوسته تقویت شده به فرم ماتریسی زیر حاصل می گردد.

$$\{[M]\omega^2 + [G]\omega + [K]\}\{\delta\} = 0 \quad (38)$$

$$\varepsilon_{sx} = \frac{\partial u_{N_l+1}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_{N_l+1}}{\partial x^2} \quad (30)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{R_{N_l}} \left(\frac{\partial v_{N_l+1}}{\partial \theta} - \frac{z}{R_{N_l}} \frac{\partial^2 w_{N_l+1}}{\partial \theta^2} + w_{N_l+1} \right) \quad (31)$$

با استفاده از تئوری المان جداگانه به قصد مدل کردن تقویت کننده ها، انرژی جنبشی استرینگرها و رینگ ها به صورت زیر بیان می شود.

$$T_s = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{N_s} \int_0^L \int_{A_{sk}} [\dot{u}_s^2 + \dot{v}_s^2 + \dot{w}_s^2 + 2\Omega(v_s \dot{w}_s - w_s \dot{v}_s) + \Omega^2(v_s^2 + w_s^2)] dA_{sk} dx \quad (32)$$

$$T_r = \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N_r} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} [\dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2 + 2\Omega(v_r \dot{w}_r - w_r \dot{v}_r) + \Omega^2(v_r^2 + w_r^2) \left(R_N + \frac{d_s}{2} \right)] dA_{rk} d\theta \quad (33)$$

به دلیل هندسه تقویت کننده ها، انرژی کرنشی به وجود آمده در اثر نیروی گریز از مرکز تنها در تقویت کننده های حلقوی قابل ذکر است و مقدار این انرژی در تقویت کننده های طولی قابل صرف نظر کردن است. بنابراین انرژی کرنشی در تقویت کننده های محیطی در اثر کشش حلقوی ناشی از دوران به صورت زیر قابل بیان می باشد [۳].

$$U_{rh} = \frac{N_\theta}{2R_N^2} \sum_{k=1}^{N_r} \int_0^{2\pi} \int_{A_{rk}} \left\{ \left(\frac{\partial u_s}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial \theta} + w_s \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial \theta} - v_s \right)^2 \left(R_N + \frac{d_s}{2} \right) \right\} dA_{rk} d\theta \quad (34)$$

که در رابطه فوق، N_r و A_{rk} به ترتیب تعداد تقویت کننده های محیطی و سطح مقطع k امین تقویت کننده محیطی را نشان می دهد و همچنین $N_\theta = \rho_r \Omega^2 \left(R_N + \frac{z_s}{2} \right)$

انرژی کرنشی تقویت کننده های طولی با در نظر گرفتن اثرات کشش، خمش و پیچش به صورت زیر قابل بیان است.

$$U_s = \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} E_{sk} \int_0^L \int_{A_{sk}} \varepsilon_{ss}^2 dA_{sk} dx + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} G_{sk} J_{sk} \int_0^L \frac{1}{R_N^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right)^2 dx \quad (35)$$

در رابطه (۳۸) داریم:

$$[K] = [K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K^s]$$

$$[M] = [M^{sh} + M^s]$$

$$[G] = [G^{sh} + G^s]$$

$$\{\delta\}^T = \{U^1 V^1 W^1 U^2 V^2 W^2 \dots U^{n_l+1} V^{n_l+1} W^{n_l+1}\} \quad (39)$$

رابطه (۳۸)، فرم غیراستاندارد رابطه مقدار ویژه می باشد. با بازنویسی آن به صورت زیر، فرم استاندارد رابطه مقدار ویژه فرکانسی حاصل می گردد [۱۴].

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \omega \right) \begin{Bmatrix} \delta \\ \omega \delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

در این رابطه، I ماتریس یک به ابعاد $3(N_l+1) \times 3(N_l+1)$ می باشد. با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس $[A^*]^{-1}[B^*]$ از رابطه (۴۰)، $2(N_l+1)$ مقدار برای ω_i حاصل می شود. دو مقدار کوچک این مقادیر انتخاب می شوند که یکی از آن ها با فرکانس طبیعی موج پیش رونده و دیگری با فرکانس طبیعی موج پس رونده مطابقت دارد.

۳- بحث بر روی نتایج

در نمایش نتایج نشان داده شده در شکل ها، خطوط توپر نماینده فرکانس طبیعی موج پس رونده و خطوط خط چین نماینده فرکانس طبیعی موج پیش رونده می باشند. همچنین سرعت دورانی دارای واحد اندازه گیری دور بر ثانیه می باشد. خصوصیات مکانیکی مواد استفاده شده برای پوسته در این تحقیق در جدول ۱ و خصوصیات مکانیکی و هندسی تقویت کننده ها در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۱ خصوصیات مکانیکی پوسته

مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون	مدول برشی (GPa)	دانسیته (kg/m ³)
۷/۶	۰/۳	۲/۹۲	۱۶۰۰
$E_{11}=125$	$\nu_{12}=0/4$	$G_{11}=5/9$	
$E_{22}=10$	$\nu_{13}=0/2$	$G_{13}=3$	۱۶۴۳
$E_{33}=10$	$\nu_{23}=0/2$	$G_{23}=5/9$	

جدول ۲ خصوصیات هندسی و مکانیکی تقویت کننده ها

نوع تقویت کننده	استرینگر	رینگ
ارتفاع (mm)	۸	۸
پهنا (mm)	۲	۲
مدول یانگ (GPa)	۷۰	۷۰
ضریب پواسون	۰/۳	۰/۳
دانسیته (kg/m ³)	۲۷/۷	۲۷/۷

به قصد بررسی صحت تحلیل صورت گرفته، نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در ادبیات موضوع مقایسه می شود. در مورد اول، به قصد مقایسه فرکانس طبیعی پوسته جدارنازک بدون تقویت کننده، تعداد تقویت کننده ها در تحقیق حاضر صفر در نظر گرفته شده و نتایج پارامتر فرکانسی $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$ با نتایج به دست آمده از تئوری کلاسیک مرجع [۱۵] مقایسه گردیده و در جدول ۳ آورده شده است.

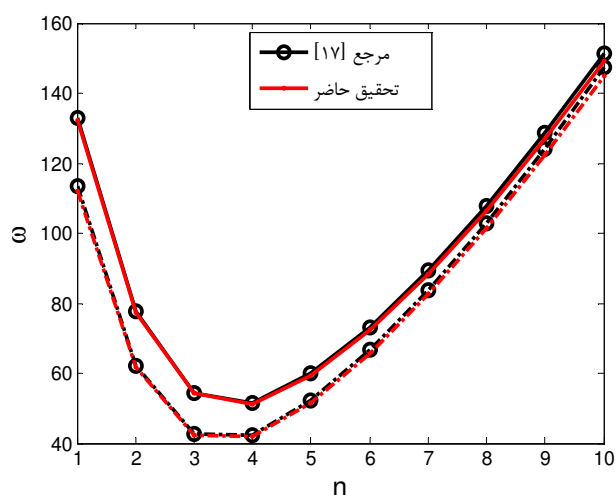
در دومین مقایسه، پارامتر فرکانسی $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho(1+\nu)/E}$ و $\bar{\omega} = (\omega h/\pi) \sqrt{\rho/G}$ برای پوسته استوانه ای ایزوتروپیک غیردوار جدارضخیم حاصل شده از تحقیق حاضر و مرجع [۱۶]، در جدول ۴ آورده شده است. نتایج برای نسبت های مختلف h/R و h/L ارائه شده است که نشان از کارآمدی روش لایه ای در مدل کردن پوسته جدارضخیم دارد.

جدول ۳ مقایسه $\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$ پوسته استوانه ای با شرایط مرزی تکیه گاه ساده ($m=1$, $h/R=0.002$, $L/R=1$)

Ω (rps)	n	داتل [۱۵]	فلوگه [۱۵]	ساندرز [۱۵]	تحقیق حاضر
۰/۱	۱	۱/۰۶۱۴۳	۱/۰۶۱۴۲	۱/۰۶۱۴۲	۱/۰۶۱۳۸
	۲	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۴۲۱	۰/۸۰۳۹۷
	۳	۰/۵۹۸۴۸	۰/۵۹۸۴۷	۰/۵۹۸۴۷	۰/۵۹۸۱۹
	۴	۰/۴۵۰۲۸	۰/۴۵۰۲۶	۰/۴۵۰۲۶	۰/۴۴۹۹۹
	۵	۰/۳۴۵۳۹	۰/۳۴۵۳۵	۰/۳۴۵۳۵	۰/۳۴۵۱۱
	۶	۰/۲۷۰۹۱	۰/۲۷۰۸۴	۰/۲۷۰۸۴	۰/۲۷۰۶۲
	۷	۰/۲۱۷۷۴	۰/۲۱۷۶۴	۰/۲۱۷۶۳	۰/۲۱۷۴۵
	۱	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۲۷۲	۱/۰۶۰۰۷
	۲	۰/۸۰۵۶۷	۰/۸۰۵۶۶	۰/۸۰۵۶۶	۰/۸۰۲۵۴
	۳	۰/۵۹۹۸۲	۰/۵۹۹۸۱	۰/۵۹۹۸۱	۰/۵۹۹۶۴
۱/۰	۴	۰/۴۵۱۵۳	۰/۴۵۱۵۱	۰/۴۵۱۵۰	۰/۴۴۸۹۹
	۵	۰/۳۴۶۶۲	۰/۳۴۶۵۸	۰/۳۴۶۵۸	۰/۳۴۴۴۱
	۶	۰/۲۷۲۲۵	۰/۲۷۲۱۹	۰/۲۷۲۱۸	۰/۲۷۰۲۹
	۷	۰/۲۱۹۳۶	۰/۲۱۹۲۶	۰/۲۱۹۲۵	۰/۲۱۷۶۰

در چهارمین مقایسه که در شکل ۳ نشان داده شده است، به بررسی فرکانس طبیعی حاصل از این روش و مرجع [۱۷] برای پوسته استوانه ای با تقویت کننده های متعامد پرداخته شده است. پوسته مربوطه، کامپوزیتی، دارای چیدمان $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ و تقویت شده با ۱۰ رینگ و استرینگر می باشد. علت پایین تر بودن فرکانس طبیعی نتایج تحلیل حاضر و نتایج مرجع [۱۷] اختلاف بین تئوری های به کار برده شده می باشد.

در آخرین مقایسه که نتایج آن در جدول ۷ و شکل ۴ آورده شده است، مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای ایزوتروپیک غیردوار با تقویت کننده های متعامد حاصل از روش تحلیلی حاضر و تحلیل عددی با استفاده از نرم افزار اجزای محدود اباکوس صورت گرفته است. در این نرم افزار برای مدل کردن پوسته و تقویت کننده ها به ترتیب از المان های S8R و C3D20R استفاده شده است. علت بزرگ تر بودن فرکانس طبیعی حاصل از روش تحلیلی نسبت به نتایج تحلیل نرم افزار اجزای محدود در مدل کردن تقویت کننده ها نسبت به پوسته می باشد. در مدل تحلیلی، جابه جایی تقویت کننده ها بر اساس جابه جایی سطح خارجی پوسته تعریف شده است، در حالی که در نرم افزار اجزای محدود این جابه جایی بر اساس جابه جایی سطح میانی پوسته می باشد. به همین خاطر سفتی پوسته در مدل تحلیلی بیشتر و فرکانس طبیعی حاصل نیز بزرگ تر خواهد بود.



شکل ۳ تغییرات فرکانس بر حسب شماره مود، مقایسه نتایج حاضر و مرجع [۱۷] ($L=5m$, $R=1m$, $h=6mm$, $[0,90,0]$, $N_r=10$, $N_s=10$, $m=1$)

جدول ۴ مقایسه پارامتر فرکانسی $\bar{\omega}$ برای پوسته ایزوتروپیک ($m=1$, $\nu=0.3$)

$\bar{\omega} = (\omega h / \pi) \sqrt{\rho / G}$			$\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho(1+\nu) / E}$		
$h/R=0.4$		$n=2$	$L/R=1$		
h/L	لوی [۱۶]	تحقیق حاضر	h/R	لوی [۱۶]	تحقیق حاضر
0.1	0.0621	0.0621	1	1.0623	1.0625
0.1	0.0745	0.0745	2	0.8825	0.8829
0.2	0.1249	0.1251	3	0.8095	0.8101
0.4	0.2719	0.2724	4	0.8989	0.8996
0.6	0.4415	0.4420	5	1.1220	1.1228
0.8	0.6254	0.6262	1	1.1889	1.1896
1.0	0.8170	0.8178	2	1.1010	1.1019
			3	1.1977	1.1983
			4	1.4897	1.4951
			5	1.9140	1.9212

در مورد سوم، به قصد بررسی صحت مدل سازی تقویت کننده ها، مقایسه ای بین نتایج حاصل از تحلیل حاضر و نتایج مراجع [۱] و [۳] برای پوسته تقویت شده با استرینگر صورت گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته و استرینگر در جدول ۵ و مقایسه فرکانسی در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۵ خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته تقویت شده برای مقایسه نتایج جدول ۶

شعاع	ضخامت	طول	ارتفاع	پهنای	مدول	ضریب
پوسته	پوسته	پوسته	استرینگر	استرینگر	یانگ	پواسون
(m)	(mm)	(m)	(mm)	(mm)	(GPa)	
0.242	0.65	0.609	7.02	2.554	68.9	0.3

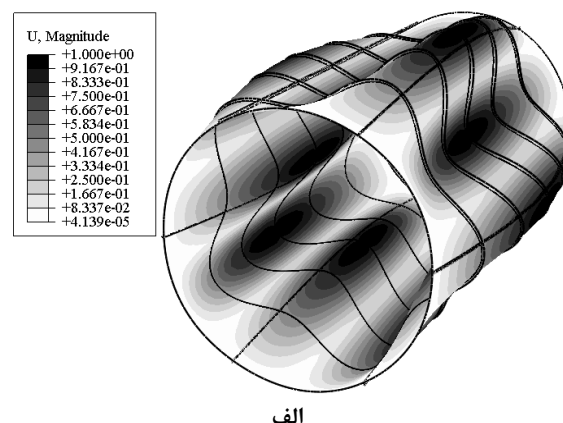
جدول ۶ مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای با ۶۰ استرینگر خارجی

شماره مود	مصطفی و	ژاها و	تحقیق
محیطی	علی [۱]	همکارانش [۳]	حاضر
۱	۱۱۴۱	۱۱۴۷	۱۱۴۳
۲	۶۷۴	۶۷۶	۶۶۹
۳	۴۲۷	۴۲۹	۴۲۱
۴	۲۹۶	۲۹۹	۲۸۱
۵	۲۲۵	۲۳۱	۲۰۹
۶	۱۸۸	۱۹۸	۱۸۲

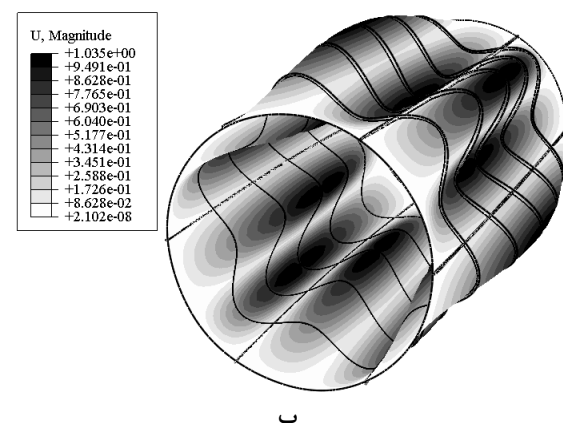
جدول ۷ فرکانس پوسته استوانه ای ایزوتروپیک تقویت شده، مقایسه

نتایج حاضر با نتایج حاصل از نرم افزار اباکوس ($L=2m$, $R=0.5m$, $h=2mm$, $m=1$, $\Omega=0$, $N_s=6$, $N_r=5$)

شماره مود محیطی	تحقیق حاضر	تحلیل عددی اباکوس
۲	۱۸۸/۳۵	۱۸۸/۴۹
۳	۱۰۰/۳۱	۱۰۰/۱۷
۴	۷۶/۵۲۳	۷۶/۰۴۲
۵	۸۹/۶۳۳	۸۸/۹۱۲
۶	۱۲۱/۶۷۴	۱۲۰/۲۸
۷	۱۶۴/۰۳۸	۱۵۹/۲۹



الف



ب

شکل ۴ نمایش شکل مودهای پوسته استوانه ای با تقویت کننده های

متعامد حاصل از تحلیل عددی در نرم افزار اباکوس؛ الف)

$(m,n)=(1,6)$ ب) $(m,n)=(1,5)$

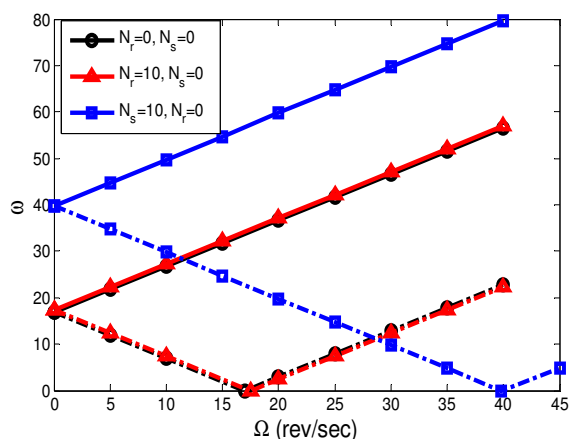
تطابق بین نتایج در تمام موارد مقایسه های صورت گرفته،

نشان از دقت و صحت روش ارائه شده برای پوسته استوانه ای تقویت شده دارد.

شکل ۵ تاثیر نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده، در حالی که مساحت سطح مقطع تقویت کننده ثابت است، را بر روی فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده غیردوار نشان می دهد. نتایج در مودهای مختلف محیطی، در حالی که مود طولی ۱ است، به دست آمده اند. با توجه به شکل، مشخص می شود که فرکانس طبیعی با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده در تمام مودهای محیطی به جز مود اول افزایش می یابد. کاهش نامحسوس فرکانس در مود اول در نتیجه برتری اثر اینرسی تقویت کننده ها بر اثر سفتی آن ها می باشد.

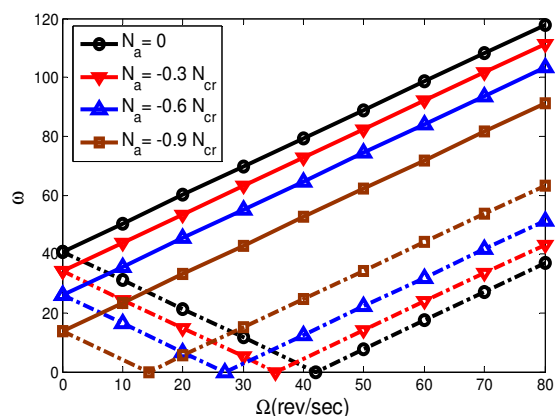
در شکل ۶، تاثیر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته تقویت شده و پوسته بدون تقویت کننده در مودهای محیطی مختلف نشان داده شده است. سرعت دورانی در تمام مودها باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود که این اثر در مودهای محیطی بالاتر از مود پایه محسوس تر است. اما اختلاف بین فرکانس طبیعی دو موج پس رونده و پیش رونده ناشی از سرعت دورانی در مودهای ابتدایی بارزتر می باشد. همچنین، اثر افزایشی فرکانس طبیعی ناشی از سرعت دورانی در پوسته تقویت شده کمتر می باشد که علت آن سفتی بیشتر این پوسته در مقابل پوسته بدون تقویت کننده می باشد. شایان ذکر است استفاده از تقویت کننده و همچنین افزایش سرعت دورانی باعث تعویض مود پایه و پایین تر آمدن آن می شود.

پدیده سرعت بحرانی را می توان در شکل ۷ مشاهده کرد. سرعت بحرانی به سرعتی گفته می شود که در آن سرعت، فرکانس طبیعی موج پیش رونده پوسته دوار به صفر می رسد. این سرعت با نقطه برخورد منحنی فرکانسی موج پیش رونده با محور افقی مطابقت دارد. در این سرعت کوچک ترین نامیزانی موجود در پوسته باعث بروز پدیده رزونانس و جابه جایی های شدید در پوسته می گردد. در شکل ۷ اثر رینگ و استرینگر را بر سرعت دورانی می توان مشاهده کرد. با توجه به شکل، پرواضح است که اثر رینگ در افزایش سرعت بحرانی نامحسوس و استرینگر باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود. باید توجه داشت که پدیده سرعت بحرانی در پوسته استوانه ای زمانی اتفاق می افتد که مود طولی و مود محیطی دارای مقدار ۱ باشند که در این مود نیز اثر تقویت کننده های طولی در بالابردن سفتی پوسته بیشتر می باشد. شایان ذکر است که همیشه افزایش سرعت بحرانی مطلوب طراح نمی باشد.



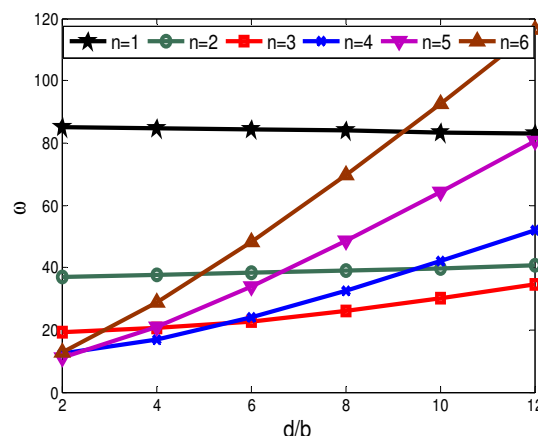
شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب سرعت دورانی، بررسی اثر نوع تقویت کننده بر سرعت بحرانی ($R=1.5m$, $L=2\pi R$, $h=3mm$, $m=n=1$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, Carbon-Epoxy, $N_a=-0.9 N_{cr}$)

در شکل ۸ اثر بار محوری ثابت بر سرعت بحرانی پوسته تقویت شده نشان داده شده است. در این شکل منظور از N_{cr} بار کماتش کلی پوسته تقویت شده می باشد و بار اعمالی بر پوسته به منظور پیشگیری از کماتش باید کسری از این مقدار باشد. بار کماتش کلی پوسته را می توان از رابطه (۴۰) با حذف ترم هایی که شامل Ω و ω می باشد و حل مسئله مقدار ویژه به دست آورد. با توجه به این شکل، مشخص می شود که افزایش بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت بحرانی می شود که حساسیت این کاهش با افزایش بار فشاری بیشتر می شود.

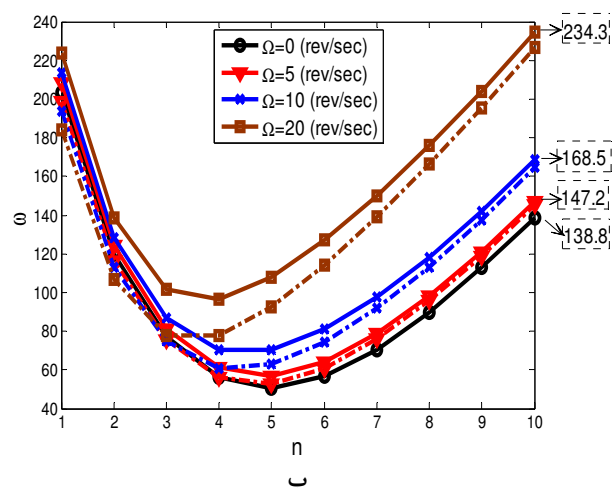
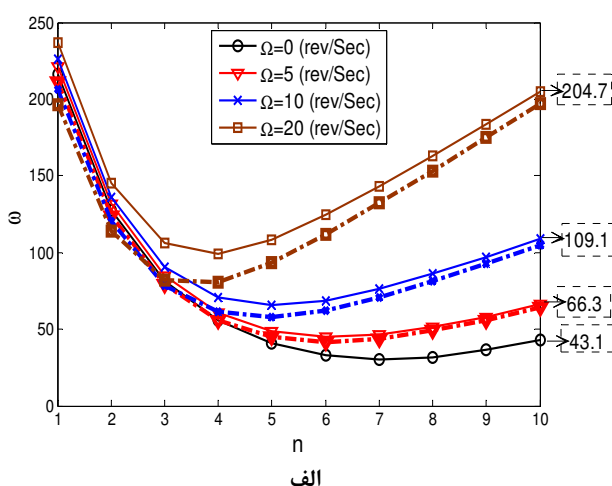


شکل ۸ حساسیت سرعت بحرانی به بار محوری فشاری ($R=1.5m$, $L=2\pi R$, $h=3mm$, $m=n=1$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, Carbon-Epoxy, $N_s=N_r=4$)

در شکل ۹ اثر فشار داخلی و خارجی بر سرعت بحرانی پوسته استوانه ای تقویت شده نشان داده شده است. در این شکل



شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته بر حسب نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده ها در مودهای مختلف ($L=5m$, $R=1m$, $h=1mm$, $m=1$, $N_s=N_r=10$, $\Omega=0$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$)



شکل ۶ تغییرات فرکانس بر حسب شماره مود در سرعت های دورانی مختلف؛ الف) $N_r=0$, $N_s=5$ ب) $N_r=10$, $N_s=0$ ($L=3m$, $R=1m$, $h=3mm$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, $m=1$, Carbon-Epoxy)

۳- اثر سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی در پوسته بدون تقویت کننده در قیاس با پوسته تقویت شده بیشتر است. همچنین، افزایش سرعت دورانی و تعداد تقویت کننده ها باعث کاهش شماره مود پایه می گردد.

۴- استفاده از استرینگر باعث افزایش سرعت بحرانی می گردد، در حالی که استفاده از رینگ تاثیر محسوسی بر سرعت بحرانی پوسته استوانه ای تقویت شده ندارد.

۵- افزایش فشار خارجی و بار محوری فشاری باعث کاهش سرعت بحرانی می گردد و حساسیت این سرعت به بار و فشار با مقدار بزرگ تر، بیشتر می باشد.

۵- پیوسته ها

۱-۵ پیوست الف

درایه های ماتریس سفتی رابطه (۲۶) به صورت زیر می باشد.

$$K_{11}^1 = \left[C_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 + C_{55} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right)^2 + \frac{C_{66} n^2 \alpha_j^2}{R_j^2} \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱})$$

$$K_{12}^1 = \left(-\frac{(C_{66} + C_{12})}{R_j} n \frac{m\pi}{L} \alpha_j^2 \right) \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲})$$

$$K_{13}^1 = \left[-(-C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{m\pi}{L} \alpha_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m\pi}{L} \alpha_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۳})$$

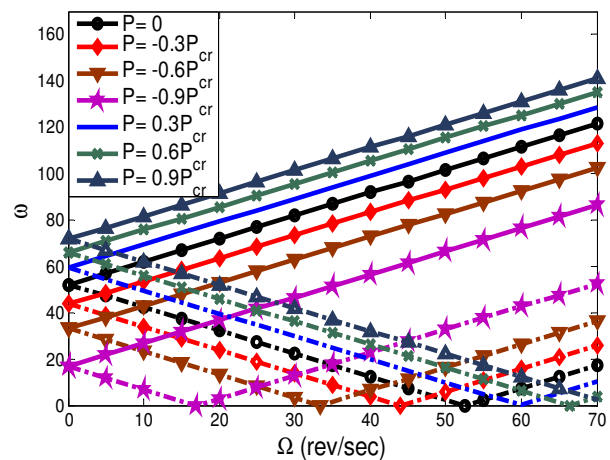
$$K_{14}^1 = \left[C_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j + C_{55} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) + \frac{C_{66} n^2 \beta_j \alpha_j}{R_j^2} \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۴})$$

$$K_{15}^1 = \left[-(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m\pi}{L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۵})$$

$$K_{16}^1 = \left[-(C_{55} + C_{13}) \frac{m\pi}{L} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m\pi}{L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۶})$$

$$K_{21} = K_{12} \quad (\text{الف-۷})$$

منظور از P_{cr} فشار خارجی می باشد که باعث کماتش پوسته می شود و مانند بار کماتش محوری به دست می آید. با توجه به شکل، مشخص می شود که با افزایش فشار داخلی، سرعت بحرانی پوسته افزایش می یابد که اثر افزایشی آن در فشارهای داخلی بالا کاهش می یابد و با افزایش فشار خارجی بر پوسته، سرعت بحرانی پوسته کاهش می یابد و حساسیت سرعت بحرانی به فشار خارجی در فشار با مقدارهای بالا بیشتر است. همچنین، اثر افزایشی و کاهش فشار و بار محوری در تمام سرعت های دورانی بر فرکانس طبیعی پوسته قابل پیش بینی است.



شکل ۹ حساسیت سرعت بحرانی به فشار داخلی و خارجی
($L=10m$, $R=1m$, $h=3mm$, $m=n=1$, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$,
Carbon-Epoxy, $N_s=N_r=4$)

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق، با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیته و تئوری لایه ای، به تحلیل ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته استوانه ای کامپوزیتی دوار با تقویت کننده های متعامد پرداخته شد. همچنین، اثرات سرعت دورانی، شماره مود محیطی، نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده ها، بار محوری و فشار بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردید. برخی از نتایج این تحقیق به صورت زیر ارائه می گردد.

- ۱- بررسی نتایج این اطمینان را حاصل می کند که تئوری لایه ای از کارآمدی مناسبی در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه ای تقویت شده برخوردار است.
- ۲- با افزایش نسبت ارتفاع به پهنای تقویت کننده ها، فرکانس طبیعی در تمام مودهای محیطی به جز مود اول افزایش می یابد.

$$K_{34}^1 = K_{43}^1 \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$K_{35}^1 = \left[(C_{22} + C_{44}) \frac{n \alpha_j \beta_j}{R_j^2} + (C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$K_{36}^1 = \left[(C_{22} + C_{44} n^2) \frac{\beta_j \alpha_j}{R_j^2} + C_{33} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + C_{55} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \beta_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۸})$$

$$K_{41} = K_{14} \quad (\text{الف-۱۹})$$

$$K_{42} = \left[-\frac{(C_{66} + C_{12})}{R_j} n \frac{m \pi}{L} \alpha_j \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۰})$$

$$K_{43}^1 = \left[-(C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{m \pi}{L} \beta_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m \pi}{L} \alpha_j \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۱})$$

$$K_{44}^1 = \left[C_{11} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 + C_{55} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right)^2 + \frac{C_{66}}{R_j^2} n^2 \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$K_{45} = \left[-(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$K_{46}^1 = \left[-(-C_{55} + C_{13}) \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \frac{m \pi}{L} \beta_j - \frac{C_{12}}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j^2 \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۲۴})$$

$$K_{51}^1 = K_{15}^1 \quad (\text{الف-۲۵})$$

$$K_{52}^1 = K_{25}^1 \quad (\text{الف-۲۶})$$

$$K_{53}^1 = K_{35}^1 \quad (\text{الف-۲۷})$$

$$K_{54}^1 = K_{45}^1 \quad (\text{الف-۲۸})$$

$$K_{22}^1 = \left[(C_{22} n^2 + C_{44}) \frac{\alpha_j^2}{R_j^2} + C_{44} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right)^2 + C_{66} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۸})$$

$$K_{23}^1 = \left[(C_{22} + C_{44}) \frac{n}{R_j^2} \alpha_j^2 + (-C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۹})$$

$$K_{24}^1 = \left[-(C_{66} + C_{12}) \frac{n}{R_j} \frac{m \pi}{L} \beta_j \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$K_{25}^1 = \left[(C_{22} n^2 + C_{44}) \frac{\beta_j \alpha_j}{R_j^2} + C_{44} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) + C_{66} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \beta_j \alpha_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \beta_j - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$K_{26}^1 = \left[(C_{22} + C_{44}) \frac{n}{R_j^2} \beta_j \alpha_j + (C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$K_{31}^1 = K_{13}^1 \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$K_{32}^1 = K_{23}^1 \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$K_{33}^1 = \left[(C_{22} + C_{44} n^2) \frac{\alpha_j^2}{R_j^2} + C_{33} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + C_{55} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 \alpha_j^2 + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \alpha_j \right] \frac{\pi L}{2} \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\begin{aligned}
K_{62}^1 &= K_{26}^1 & (\text{الف-۳۲}) \\
K_{63}^1 &= K_{36}^1 & (\text{الف-۳۳}) \\
K_{64}^1 &= K_{46}^1 & (\text{الف-۳۴}) \\
K_{65}^1 &= K_{56}^1 & (\text{الف-۳۵}) \\
K_{66}^1 &= \left[(C_{22} + C_{44}n^2) \frac{\beta_j^2}{R_j^2} + C_{33} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \right)^2 \right. \\
&\quad + C_{55} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \beta_j \\
&\quad \left. + \frac{C_{23}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial Z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} & (\text{الف-۳۶}) \\
K_{55}^1 &= \left[(C_{22}n^2 + C_{44}) \frac{\beta_j^2}{R_j^2} + C_{44} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial z} \right)^2 \right. \\
&\quad + C_{66} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \beta_j^2 - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \\
&\quad \left. - \frac{C_{44}}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} & (\text{الف-۳۹}) \\
K_{56}^1 &= \left[(C_{22} + C_{44}) \frac{n\beta_j^2}{R_j^2} \right. \\
&\quad \left. + (-C_{44} + C_{23}) \frac{n}{R_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial z} \beta_j \right] \frac{\pi L}{2} & (\text{الف-۳۰}) \\
K_{61}^1 &= K_{16}^1 & (\text{الف-۳۱})
\end{aligned}$$

۵-۲- پیوست ب

$$[N] = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \cos \frac{m\pi x}{L} \cos(n\theta + \omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta \cos \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱})$$

$$U_h^j = \pi \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} + L} \int_0^{\frac{h}{2}} \left[\begin{array}{cccccc} \frac{n^2 N_{\theta}^2 A^2}{R_j^2} & 0 & 0 & \frac{n^2 N_{\theta}^2 BA}{R_j^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} F^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 F^2 & \frac{2nN_{\theta} F^2}{R_j^2} & 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} \\ 0 & \frac{2nN_{\theta} F^2}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} F^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF \\ \frac{n^2 N_{\theta}^2 BA}{R_j^2} & 0 & 0 & \frac{n^2 N_{\theta}^2 B^2}{R_j^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & 0 & \frac{(n^2+1)N_{\theta} H^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 H^2 & \frac{2nN_{\theta} H^2}{R_j^2} \\ 0 & \frac{2nN_{\theta} HF}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} HF}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 HF & 0 & \frac{2nN_{\theta} H^2}{R_j^2} & \frac{(n^2+1)N_{\theta} H^2}{R_j^2} - \rho(z)\Omega^2 H^2 \end{array} \right] dx dz$$

$$K_{22}^j$$

(ب-۲)

$$U_{N_a}^j = -N_a \pi \lambda^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 & AB & 0 & 0 \\ 0 & F^2 & 0 & 0 & FH & 0 \\ 0 & 0 & F^2 & 0 & 0 & FH \\ AB & 0 & 0 & B^2 & 0 & 0 \\ 0 & FH & 0 & 0 & H^2 & 0 \\ 0 & 0 & FH & 0 & 0 & H^2 \end{bmatrix}}_{K_3^j} dz \quad (3-ب)$$

$$U_P^j = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^2 A^2 & 0 & 0 & Pn^2 BA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pn^2 BA & 0 & 0 & Pn^2 B^2 \end{bmatrix}}_{K_4^j} dx dz \quad (4-ب)$$

$$T_2^j = \frac{\pi L}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\alpha_j^2 & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\alpha_j^2 & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j^2 \\ 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j\alpha_j & 0 & 0 & -2\rho(z)\Omega\beta_j^2 & 0 \end{bmatrix}}_{G_{sh}^j} dz \quad (5-ب)$$

$$T_3^j = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 F^2 & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 H^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 HF & 0 & 0 & -\rho(z)\Omega^2 H^2 \end{bmatrix}}_{K_5^j} dx dz \quad (6-ب)$$

۶- مراجع

که در روابط فوق داریم:

- [1] Mustafa B. A. J., Ali R., "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Computer and Structures*, Vol. 32, 1989, pp. 355-363.
- [2] Ng T. Y., Lam K. Y., "Vibration and Critical Speed of a Rotating Cylindrical Shell Subjected to

$$A = \alpha_j \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad B = \beta_j \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$F = \alpha_j \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad H = \beta_j \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7-ب)$$

- [11] Shell using State Space Differential Quadrature Method", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, 2009, pp. 738-747.
- [۱۲] کنی عبدالحمید، علی بیگلو اکبر، "بررسی ارتعاشات پوسته استوانه ای چندلایه با لایه پیزوالکتریک"، هشتمین همایش انجمن هوافضای ایران، اصفهان، ۱۳۸۸.
- [13] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd Ed., Boca Raton, Florida, CRC press, 2004.
- [14] Setoodeh A. R., Tahani M., Selahi E. "Hybrid Layerwise-Differential Quadrature Transient Dynamic Analysis of Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Pressure", *Compos. Struct.*, Vol. 93, 2011, pp. 2663-2670.
- [15] Ng T. Y., Hua L., Lam K. Y., "Generalized Differential Quadrature for Free Vibration of Rotating Composite Laminated Conical Shell with Various Boundary Conditions", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 45, 2003, pp. 567-587.
- [16] Lam K. Y., Loy C. T., "Analysis of Rotating Laminated Cylindrical Shells by Different Thin Shell Theories", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, 1995, pp. 23-35.
- [17] Loy C. T., Lam K. Y., "Vibration of Thick Cylindrical Shells on the Basis of Three-Dimensional Theory of Elasticity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 4, 1999, pp. 719-737.
- [18] Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R., "Free Vibrations of Rotating Composite Conical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 80, No. 3, 2010, pp. 201-215.
- Axial Loading", *Applied Acoustics*, Vol. 56, 1999, pp. 273-282.
- [3] Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y., "Vibration of Rotating Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, 2002, pp. 529-545.
- [4] Jafari A. A., Bagheri M., "Free Vibration of Rotating Ring Stiffened Cylindrical Shells with Non-Uniform Stiffener Distribution", *J Sound Vib*, Vol. 296, 2006, pp. 353-376.
- [۵] خرمی کمیل، حسینی هاشمی شاهرخ، "تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM)"، *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۱، شماره ۲، ۱۳۹۰، صص ۹۳-۱۰۶.
- [6] Nelson R. B., Dong S. B., Kakra, R. D., "Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Circular Cylinders", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, pp. 429-444.
- [7] Hutchinson J. R., El-Azhari S. A., "Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 641-646.
- [8] So J. Y., Leissa A. W., "Free vibrations of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional Analysis", *Journal of vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 89-95.
- [9] Malekzadeh P., Farid M., Zahedinejad P., "A Three- Dimensional Layerwise-Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, 2008, pp. 450-458.
- [10] Alibeigloo A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical