



طراحی مسیر بهینه برای ربات با مفاصل انعطاف پذیر: ظرفیت حمل بار بیشینه- دامنه ارتعاشات کمینه

مارال صالحی^۱، امین نیکوبین^{۲*}

۱- مربی مهندسی کامپیوتر، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

* سمنان، کد پستی ۳۵۱۳۱۹۱۱۱، anikoobin@iust.ac.ir

چکیده- در این مقاله طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتور با مفاصل انعطاف پذیر ارائه می شود، به گونه ای که ماکزیمم ظرفیت حمل بار بین دو نقطه داده شده در فضای کاری توسط ربات حمل شود و همزمان ارتعاشات ناشی از انعطاف پذیری مفاصل در طول مسیر نیز کاهش یابد. روش حل بر اساس حل غیر مستقیم مسأله کنترل بهینه می باشد. به این منظور با تعریف مناسب تابع هدف و استخراج معادلات دینامیکی سیستم در فرم فضای حالت، تابع همیلتونین سیستم محاسبه می شود و با استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگن شرایط لازم بهینگی استخراج می شود. به منظور کاهش ارتعاشات در طول مسیر، متغیرهای حالت مناسب تعریف می شود و اصلاحی در قانون کنترل بهینه انجام می گیرد به گونه ای که تغییرات ناگهانی در کنترل اعمالی حذف شود. در ادامه به منظور بررسی کارایی روش، شبیه سازی برای یک ربات دو درجه آزادی انجام می گیرد. به این منظور بعد از استخراج معادلات، در مرحله اول مسأله ماکزیمم ظرفیت حمل بار بدون در نظر گرفتن ارتعاشات حل می شود، و در مرحله دوم با اصلاح تابع هدف، مسیر بهینه با ظرفیت حمل بار بیشینه و دامنه ارتعاشات کمینه بدست می آید و در آخر بحث و بررسی روی نتایج ارائه می شود.

کلیدواژگان: منیپولاتور، مفصل انعطاف پذیر، طراحی مسیر بهینه، اصل ماکزیمم پونتریاگن، ماکزیمم ظرفیت حمل بار.

Optimal trajectory planning of flexible joint manipulator: Maximum load carrying capacity-minimum vibration

M. Salehi^{1*}, A. Nikoobin²

1- Instructor, Faculty of Math., Statistics and Computer Science, Semnan Univ., Semnan, Iran

2- Assist. Prof., Faculty of Mech. Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran

* P.O.B. 3513119111, Semnan, Iran. anikoobin@iust.ac.ir

Abstract- In this paper, optimal trajectory planning of flexible joint manipulator in point-to-point motion is presented in which besides the determining the maximum load carrying capacity, the vibration amplitude is also reduced. The solution method is on the base of the indirect solution of optimal control problem. For this purpose, an appropriate objective function is defined, dynamic equations are derived in state space form, Hamiltonian function is developed and necessary optimality conditions are obtained by using the Pontryagin maximum principle. In order to reduce the vibration of the end effectors during the path, an appropriate state variables are defined and the control law is improved to omit the suddenly variation in applied torque. Then, in order to illustrate the power and efficiency of the proposed method, a number of simulation tests are performed for a two-link manipulator. To this end, after deriving the equation in details, two simulations are performed. In the first case, determining the maximum load without considering the vibration is solved, in the second simulation, optimal trajectory with maximum load and minimum vibration is obtained. Finally discussions on the obtained results are presented.

Keywords: Manipulator, Flexible joint, Trajectory Planning, Pontryagin Maximum Principle, Maximum Load Carrying Capacity

۱- مقدمه

انعطاف‌پذیری در مفاصل ربات‌ها، از خاصیت الاستیک شفت موتور و المان‌های انتقال قدرت مثل گیربکس، تسمه و پولی ناشی می‌شود. در حقیقت می‌توان گفت که هر منیپولاتوری دارای مفاصل انعطاف‌پذیر است و فرض صلب بودن مفاصل یک فرض ساده شونده می‌باشد. اثر انعطاف‌پذیری در مفاصل وقتی که ربات با سرعت و شتاب‌های بالا حرکت می‌کند و یا بار سنگینی را حمل می‌کند، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند [۱].

مسئله طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتورهای مختلف مورد توجه بسیاری از محققان بوده است و کارهای بسیاری در این زمینه انجام گرفته است. از جمله کارهای اخیر، می‌توان به طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتورهای صنعتی به منظور کمینه کردن جرک و زمان طی مسیر [۲]، طراحی مسیر بهینه برای کمینه کردن انرژی [۳]، طراحی مسیر بهینه برای ربات متحرک غیرهولونومیک [۴]، طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتور با لینک انعطاف‌پذیر [۵]، مفصل انعطاف‌پذیر [۶] و منیپولاتور با لینک و مفصل انعطاف‌پذیر [۷] اشاره کرد.

به منظور بالا بردن قابلیت عملکرد ربات‌ها، محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار دینامیکی منیپولاتورها یکی از مسائل مطرح در علم رباتیک می‌باشد که در دو دهه گذشته مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. ماکزیمم ظرفیت حمل بار در حرکت نقطه به نقطه، ماکزیمم باری است که یک منیپولاتور بین دو نقطه داده شده در فضای کاری می‌تواند حمل کند. اگر معادلات دینامیکی سیستم در فضای حالت نوشته شود، آنگاه مسئله به این صورت تعریف می‌شود که برای رسیدن از حالت اولیه به حالت نهایی، مسیر و گشتاور به گونه‌ای یافت شود که بتوان حداکثر بار را بین این دو نقطه حمل کرد. بدین ترتیب مسئله تعیین ظرفیت حمل بار بین دو نقطه به صورت یک مسئله بهینه‌سازی مسیر در می‌آید [۸].

در زمینه محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار برای ربات‌های صلب و انعطاف‌پذیر تاکنون تحقیقات مختلفی انجام گرفته است. کورایم و باسو با اعمال قیدی تحت عنوان قید دقت، ماکزیمم ظرفیت حمل بار در امتداد یک مسیر مشخص را برای منیپولاتور با مفاصل انعطاف‌پذیر بدست آوردند [۹]، سپس در کار بعدی، آنها مسئله را برای منیپولاتور با پایه متحرک گسترش دادند [۱۰]، اما در این کارها طراحی مسیر بهینه

مطرح نبوده است و با حل دینامیک معکوس سیستم، بار ماکزیمم در امتداد مسیر داده شده بدست می‌آید. از سال ۱۹۸۸ تا ۲۰۰۶ در زمینه تعیین مسیر بهینه با بار ماکزیمم کارهای مختلفی انجام گرفته است، از جمله برای ربات با لینک صلب سه درجه آزادی [۱۱] و شش درجه آزادی [۱۲]، ربات همکار [۱۳]، ربات با درجات آزاد اضافی [۱۴] و ربات پایه متحرک با لینک انعطاف‌پذیر [۱۵]. ولی در هیچ یک انعطاف‌پذیری مفاصل در نظر گرفته نشده است. در سال ۲۰۰۸ نیکوبین و همکاران، با ارائه یک روش جدید مبتنی بر حل غیرمستقیم مسئله کنترل بهینه، ماکزیمم ظرفیت حمل بار را برای یک ربات با مفصل انعطاف‌پذیر ارائه کردند [۱۶]. در این روش به خطی کردن معادلات [۱۴، ۱۵]، مشتق‌گیری نسبت به گشتاور و بار و همچنین محدود کردن جواب‌ها در یک فرم خاص [۱۲]، نیاز نیست. در روش غیرمستقیم بر خلاف روش‌های مستقیم که مسئله بهینه‌سازی را به یک مسئله بهینه‌سازی پارامتری تبدیل می‌کنند و سپس روش‌هایی مثل ژنتیک الگوریتم، تجمع پرندگان و غیره برای حل آن به کار گرفته می‌شود، بر اساس حساب تغییرات است و شرایط لازم بهینگی از اصل ماکزیمم پونترباگن استخراج می‌شود. بنابراین روش غیرمستقیم یک حل دقیق از مسئله بهینه‌سازی را ارائه می‌دهد.

در کار قبلی [۱۶] بحث یافتن مسیر بهینه با ماکزیمم بار قابل حمل برای یک ربات با مفصل انعطاف‌پذیر مورد توجه قرار گرفته است ولی ارتعاشات ناشی از انعطاف‌پذیری در مسیر بهینه لحاظ نشده است. در مقاله حاضر با تعریف مناسب متغیرهای حالت و تابع هدف، و اصلاحی که در تابع کنترل در ابتدا و انتهای مسیر اعمال می‌شود، مسیر بهینه به گونه‌ای محاسبه می‌شود که علاوه بر ماکزیمم شدن بار، ارتعاشات ناشی از انعطاف‌پذیری نیز به حداقل برسد. به این منظور متغیرهای حالت به صورت اختلاف بین موقعیت موتور و لینک و اختلاف بین سرعت زاویه‌ای موتور و لینک تعریف می‌شوند. همچنین تابع کنترل به گونه‌ای اصلاح می‌شود که تغییر ناگهانی در آن حذف شود و ربات در ابتدا و انتهای حرکت، یک حرکت یکنواخت و هموار را داشته باشد. در این مقاله با انتخاب تابع هدف مناسب، تابع همیلتونین تشکیل می‌شود و شرایط لازم برای بهینگی از اصل ماکزیمم پونترباگن استخراج می‌شود. معادلات بدست آمده یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را

محركها، $D(q) \in R^{n \times n}$ ماتریس اینرسی منیپولاتور، $C(q, \dot{q}) \in R^n$ نیروهای کریولیس و جانب مرکز و $G(q) \in R^n$ اثرات جاذبه را توصیف می کنند. ماتریس قطری $K = \text{diag}[k_{r1}, \dots, k_{rm}]$ سفتی است که انعطاف پذیری مفاصل را مدل می کند و $J = \text{diag}[J_{r1}, \dots, J_{rm}]$ ماتریس قطری متناظر با اینرسی موتورها است.

۲-۲- استخراج معادلات در فرم فضای حالت

در این قسمت فرم فضای حالت معادلات دینامیکی که در بخش قبل به دست آمد، با توجه به تابع هدف مورد نظری که باید کمینه شود، استخراج می شود. با تعریف متغیرهای حالت طبق معادله (۳) فرم فضای حالت بر اساس معادله (۴) استخراج می شود.

$$\begin{aligned} X_1 &= q_2; X_2 = \dot{q}_2; \\ X_3 &= q_1 - q_2; X_4 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \dot{X}_2 = J^{-1}(U + KX_3) \\ \dot{X}_3 &= X_4 \\ \dot{X}_4 &= -J^{-1}(U + KX_3) - D^{-1}(X_1, X_3) \\ &\quad (C(X_1, X_2, X_3, X_4) + G(X_1, X_3) + KX_3) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن توابع $N \in R^n$ و $Z \in R^{n \times n}$ در معادله (۵) تعریف می شود.

$$\begin{aligned} N &= -D^{-1}(X_1)[C(X_1, X_2) + G(X_1)] \\ Z(X_1) &= D^{-1}(X_1) \end{aligned} \quad (5)$$

حال با تعریف های زیر معادله (۴) را می توان به فرم خلاصه معادله (۶) نوشت.

$$\begin{aligned} F &= [F_1^T, \dots, F_4^T]^T, \quad X = [X_1^T, \dots, X_4^T]^T \\ \dot{X} &= F(X, U) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $U \in R^n, X \in R^{4n}$ و $F \in R^{4n}$ می باشد.

۳-۲- بیان مسأله کنترل بهینه

اگر $\bar{U}$ کنترل قابل قبول در بازه زمانی $t \in [t_0, t_f]$ باشد و $Y = [Y_1^T, Y_2^T]^T$ و $Y_2 = [X_2^T, X_4^T]^T, Y_1 = [X_1^T, X_3^T]^T$ باشد، مسأله بهینه سازی یافتن $U^*(t) \in \bar{U}$ به طوری که سیستم داده شده در رابطه (۴) تابع هدف (۷) را مینیمم کند.

$$J_o(U) = \frac{1}{2} \|e_p(t_f)\|_{W_p}^2 + \frac{1}{2} \|e_v(t_f)\|_{W_v}^2 + \int_{t_0}^{t_f} L(Y, U) dt \quad (7)$$

ایجاد می کند که با تکنیکهای عددی قابل حل می باشد. سپس الگوریتمی برای بدست آوردن بار ماکزیمم بر مبنای حل مسأله مقدار مرزی ارائه می شود. شبیه سازی برای یک ربات دو لینکی با مفصل انعطاف پذیر در حالات مختلف انجام می گیرد و کارایی و قابلیت های روش پیشنهادی، نشان داده می شود.

۲- فرمولاسیون مسأله

۲-۱- مدل دینامیکی منیپولاتور با مفصل انعطاف پذیر

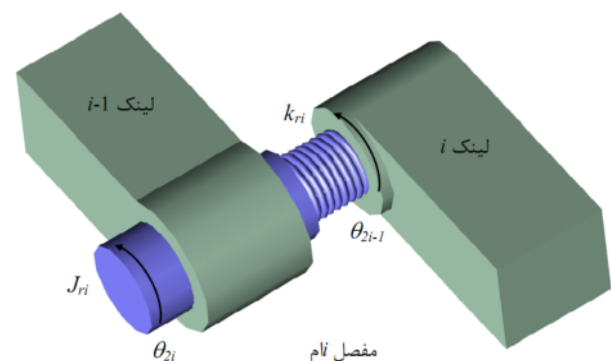
برای مدل کردن یک منیپولاتور با مفاصل انعطاف پذیر علاوه بر اینکه موقعیت لینکها باید در نظر گرفته شود، موقعیت محركها نیز باید در نظر گرفته شود. زیرا بر خلاف رباتهای صلب، موقعیت محركها از طریق دینامیک المانهای انعطاف پذیر به موقعیت لینکها وابسته می باشد. انعطاف پذیری در مفاصل به صورت یک فنر پیچشی خطی با ثابت k_{ri} مدل می شود، همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است.

اگر تعداد لینکهای منیپولاتور n باشد، موقعیت لینک i ام با θ_{2i-1} و موقعیت محرك i ام با θ_{2i} ، $i=1, 2, \dots, n$ نشان داده می شود. این زوایا در برداری به صورت معادله (۱) مرتب می شوند.

$$Q = [\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_{2n-1}, \theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2n}]^T = [q_1^T, q_2^T]^T \quad (1)$$

با استفاده از این نام گذاری و اعمال یک سری فرضیات ساده شونده مدل دینامیکی یک منیپولاتور با مفاصل انعطاف پذیر با استفاده از معادله (۲) بدست می آید [۱].

$$\begin{aligned} D(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) + G(q_1) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= U \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۱- شماتیک مدل مفصل انعطاف پذیر

که در آن $U \in R^n$ نیروهای تعمیم یافته اعمالی توسط

مقادیر کنترل بهینه $U^*(t)$ به ازای ماکزیمم ظرفیت حمل بار، m_p^* ، با اعمال قیود گشتاور موتورها می باشد. اصل مینیمم پونتریاگن را به این صورت می توان بیان کرد که، برای مسیر بهینه $X^*(t), U^*(t)$ و ماکزیمم ظرفیت حمل بار، m_p^* ، در بازه زمانی $t \in [t_0, t_f]$ ، یک بردار ضرائب لاگرانژ غیر صفر، $\psi^*(t)$ وجود دارد، به طوری که معادلات (۱۳) تا (۱۶) در پروسه حل بهینه باید برآورده شود.

$$\dot{X}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(X^*, U^*, \psi^*, m_p^*, t) \quad (13)$$

$$\dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial X}(X^*, U^*, \psi^*, m_p^*, t) \quad (14)$$

$$H(X^*, U^*, \psi^*, m_p^*) \leq H(X^*, \psi^*, \bar{U}, \bar{m}_p) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & [\psi^*(t_0)]^T \delta X_0 + \left[\frac{\partial \eta(X_f^*)}{\partial X} - \psi^*(t_f) \right]^T \delta X_f \\ & + \left[H^*(t_f) + \frac{\partial \eta(X_f^*)}{\partial t} \right] \delta t_f = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

در روابط نماد (*) مقادیر بهینه را نشان می دهد و $X_0 = X(t_0), X_f = X(t_f)$ می باشد. $\bar{U}$ و $\bar{m}_p$ به ترتیب بر کلیه کنترل های قابل قبول و جرم های قابل قبول دلالت دارد. η در معادله (۱۶) با معادله (۱۷) داده می شود.

$$\eta(x_f) = \frac{1}{2} \|e_p(t_f)\|_{W_p}^2 + \frac{1}{2} \|e_v(t_f)\|_{W_v}^2 \quad (17)$$

با تعریف $\psi = [\psi_1^T \psi_2^T]^T$ ، معادلات (۱۳) تا (۱۶) بازنویسی می شوند:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z \end{bmatrix} U \quad (18)$$

$$\dot{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L^T}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} [N + ZU]^T \psi_2 \\ \frac{\partial L^T}{\partial X_2} + \psi_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} [N]^T \psi_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$0 = \frac{\partial L^T}{\partial U} + Z^T (X_1) \psi_2 \quad (20)$$

$$\delta x_0 = \delta x_f = \delta t_f = 0 \quad (21)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) شرایط لازم برای مینیمم موضعی تابع معیار را نشان می دهند، به طوری که حل آنها یک کاندید برای حل بهینه ایجاد می کند. از آنجا که برای مقادیر کنترل

که پارامترهای آن در معادله های (۸) و (۹) تعریف می شود.

$$e_p(t_f) = Y_1(t_f) - Y_{1f}, e_v(t_f) = Y_2(t_f) - Y_{2f} \quad (8)$$

$$L(Y, U) = \frac{1}{2} \|Y_1\|_{W_1}^2 + \frac{1}{2} \|Y_2\|_{W_2}^2 + \frac{1}{2} \|U\|_R^2 \quad (9)$$

در این معادلات t_0 و t_f زمان های اولیه و نهایی معلوم می باشند و $L(\cdot)$ یک تابع مشتق پذیر هموار بر حسب مقادیر گشتاورها و حالت ها می باشد. W_p, W_v, W_1 و W_2 ماتریس های وزنی $2n \times 2n$ متقارن مثبت نیمه معین و R ماتریس های وزنی $n \times n$ متقارن مثبت معین می باشند. معیار عملکرد تعریف شده با معادلات (۷) تا (۹) روی کل بازه حرکتی مینیمم می شود. بر اساس متغیرهای حالت تعریف شده در معادله (۳)، ترم های $\|Y_1\|_{W_1}^2$ و $\|Y_2\|_{W_2}^2$ علاوه بر مینیمم کردن موقعیت و سرعت زاویه ای موتورها، اختلاف بین موقعیت و سرعت زاویه ای موتورها و لینک ها را نیز کمینه می کند، که این یک حرکت با نوسانات کمتر را نتیجه می دهد.

شرایط مرزی در ابتدا و انتهای مسیر بر اساس معادله (۱۰) تعریف می شود.

$$\begin{aligned} Y_1(0) &= Y_{10}, Y_2(0) = Y_{20}, Y_1(t_f) = Y_{1f}, \\ Y_2(t_f) &= Y_{2f} \end{aligned} \quad (10)$$

که موقعیت و سرعت در نقطه شروع و انتها را نشان می دهد. از آنجا که موتور هر مفصل دارای منحنی عملکرد مشخصی است و در یک محدوده مشخصی کار می کند، معادله (۱۱) نتیجه می شود.

$$\bar{U} = \{U^- \leq U \leq U^+\} \quad (11)$$

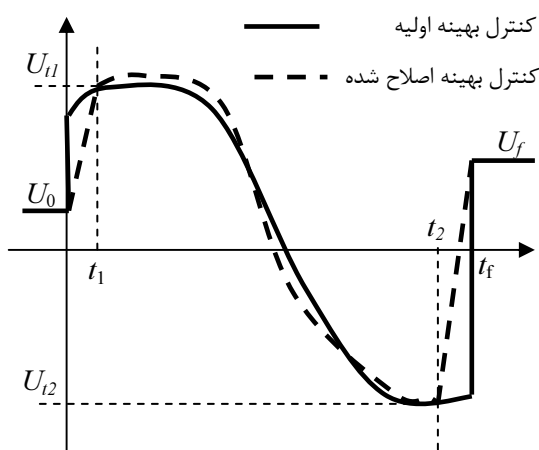
بنابراین اگر $\bar{U}$ کنترل قابل قبول در بازه زمانی $t \in [t_0, t_f]$ باشد، به ازای یک بار m_p مشخص، مسأله کنترل بهینه یافتن $U^*(t) \in \bar{U}$ است، به گونه ای که تحت روابط (۶)، (۱۰) و (۱۱)، $J_0(U)$ در معادله (۷) مینیمم شود.

۲-۴- شرایط لازم برای بهینگی

روش انتخاب شده برای حل مسأله کنترل بهینه، روش غیرمستقیم است. در این روش با تعریف بردار ضرائب لاگرانژ $\psi \in R^{2n}$ ، تابع همیلتونین طبق معادله (۱۲) تعریف می شود.

$$H(X, U, \Psi, m_p, t) = L(X, U, m_p) + \psi^T(t) F(X, U, m_p) \quad (12)$$

در اینجا هدف اصلی بدست آوردن مسیر بهینه $X^*(t)$ و



شکل ۲ نمای شماتیک از نحوه اصلاح قانون کنترلی

به منظور اصلاح این مشکل، روشی که در ادامه توضیح داده می‌شود را می‌توان به کار برد. در ابتدا باید کنترل بهینه اولیه محاسبه شود. سپس با انتخاب یک بازه زمانی کوچک در ابتدا و انتهای مسیر، مقادیر کنترل U_{l1} و U_{l2} در زمان‌های t_1 و t_2 برای مسیر بهینه اولیه بدست می‌آید. سپس تابع کنترل اصلاح شده به صورت معادله (۲۴) مجدداً محاسبه می‌شود.

$$U = \begin{cases} U_0 + \frac{U_{l1} - U_0}{t_1} t & t < t_1 \\ U_a & t_1 < t < t_2 \\ U_{l2} + \frac{U_f - U_{l2}}{t_f - t_2} (t - t_2) & t > t_2 \end{cases} \quad (24)$$

در این رابطه U_a از معادله (۲۲) جایگذاری می‌شود. از آنجا که حالات اولیه و نهایی و همچنین زمان نهایی ثابت می‌باشند، معادله (۱۶) به معادله (۲۱) کاهش می‌یابد و شرایط مرزی آن با معادله (۲۵) بیان می‌شوند.

$$X_1(0) = X_{10}, X_2(0) = X_{20} \\ X_1(t_f) = X_{1f}, X_2(t_f) = X_{2f} \quad (25)$$

روابط (۱۸) تا (۲۵) سه سری رابطه را نشان می‌دهد، (i) معادلات (۱۸) و (۱۹) مدل دینامیکی، (ii) معادله (۲۴)، شرایط بهینگی و (iii) معادله (۲۱) یا (۲۵) که شرایط مرزی را بیان می‌کنند. به ازای یک m_p معلوم، معادله (۲۴) در معادلات (۱۸) و (۱۹) جایگذاری می‌شود. معادلات (۱۸) و (۱۹)، $8n$ معادله دیفرانسیل معمولی را تشکیل می‌دهند. معادله (۲۵) نیز $8n$ شرط مرزی را بیان می‌کند که از این شرایط مرزی، $4n$ تا در $t = t_0$ و $4n$ تا در $t = t_f$ تعریف

(گشتاور) حدود ماکزیمم و مینیمم تعریف شده است، از معادله (۱۵) در جایی که کنترل در محدوده قابل قبول باشد، از اصل مینیمم پونت‌ریاگن، رابطه (۲۲) نتیجه می‌شود.

$$U_a = \begin{cases} U^+ & U > U^+ \\ U & U^- < U < U^+ \\ U^- & U < U^- \end{cases} \quad (22)$$

در این رابطه مقدار U از حل معادله (۲۰) بدست می‌آید و محدوده‌های بالا و پایین گشتاور بر اساس مشخصه سرعت-گشتاور موتورهای الکتریکی جریان مستقیم با معادله (۲۳) تعریف می‌شود.

$$U^+ = K_1 - K_2 X_2, U^- = -K_1 - K_2 X_2 \quad (23)$$

که:

$$K_1 = [\tau_{s1} \ \tau_{s2} \ \dots \ \tau_{sn}]^T, \ K_2 = \text{diag} \left[\frac{\tau_{s1}}{\omega_{m1}} \ \dots \ \frac{\tau_{sn}}{\omega_{mn}} \right]$$

و τ_{si} گشتاور حد اشباع موتور i ام و ω_{mi} حداکثر سرعت موتور در حالت بی باری می‌باشد. در عمل به منظور ساده‌سازی، مقادیر ماکزیمم و مینیمم گشتاور موتورها ثابت در نظر گرفته می‌شود. یک مشکلی که در این تابع کنترل وجود دارد این است که مقدار کنترل اعمالی در ابتدا و انتهای مسیر با مقدار کنترل مورد نیاز که سیستم در حالت تعادل استاتیکی باید داشته باشد متفاوت است. این باعث می‌شود که به سیستم در ابتدای حرکت به یک‌باره یک مقدار گشتاور زیادی اعمال شود و در همان ابتدای حرکت تکان شدیدی به سیستم وارد شود. در انتهای حرکت نیز همین گونه است و یک تغییر گشتاور ناگهانی وجود دارد. این موضوع در شکل ۲ نشان داده شده است. خط پر کنترل بهینه اولیه را نشان می‌دهد. در این شکل U_0 و U_f مقادیر کنترل در حالت تعادل استاتیکی در ابتدا و انتهای مسیر می‌باشند. اگر ربات در صفحه افق حرکت داشته باشد، در این حالت نیروهای ناشی از جاذبه صفر خواهد بود و این مقادیر صفر می‌شوند.

همان‌طور که از شکل دیده می‌شود در زمان t_0 و t_f تغییر ناگهانی تابع کنترل وجود دارد. این پدیده علاوه بر این که کنترل سیستم را دچار مشکل می‌کند و در ابتدا و انتهای مسیر تکان شدیدی ایجاد می‌کند، برای ربات‌های با مفاصل انعطاف‌پذیر می‌تواند موجب تحریک ارتعاشات و افزایش شدید دامنه ارتعاشات در طول مسیر شود.

در این الگوریتم بار ماکزیمم به ازای یک سری ماتریس جریمة داده شده محاسبه می‌شود. روش حل بر مبنای افزایش بار از مقدار مینیمم آن می‌باشد تا اینکه بار ماکزیمم بدست آید. الگوریتم حل ارائه شده دارای دو حلقه می‌باشد. یکی بار را افزایش می‌دهد و دیگری طول پرش آن را تنظیم می‌کند، به گونه‌ای که سرعت رسیدن به جواب و هم دقت آن تضمین شود. به ازای $m_p \leq m_{p\max}$ رسیدن به دقت مطلوب e در حل مسأله مقدار مرزی امکان‌پذیر است اما به محض این که $m_p > m_{p\max}$ شد، مقدار خطا، $|X(t_f) - X_f|$ ، به یک‌باره افزایش می‌یابد یا همگرایی در حل مسأله انجام نمی‌گیرد. به ازای $m_{p\max}$ خطای نهایی کمتر از ε است و موتورهای بیشترین ظرفیت شان را اعمال می‌کنند. در این شرایط حمل باری بیشتر از $m_{p\max}$ اعمال گشتاوری بیشتر از حدود گشتاور را ایجاب می‌کند اما این امکان‌پذیر نیست چون که قیود گشتاور در هر تکرار در حل مسأله مقدار مرزی برآورده می‌شوند. با این توضیحات مقدار خطا به دقت مطلوب همگرا نخواهد شد.

۳- استخراج معادلات برای منیپولاتور دو لینکی

در این بخش جزئیات استخراج معادلات دینامیکی، شرایط بهینگی و قانون کنترل بهینه برای یک منیپولاتور دو لینکی با مفاصل انعطاف‌پذیر (شکل ۴)، ارائه می‌شود. در این شکل L_1 و L_2 طول لینک‌ها، L_{c1} و L_{c2} مرکز جرم هر لینک، m_1 و m_2 جرم لینک‌ها، I_1 و I_2 ممان اینرسی جرمی هر لینک نسبت به مرکز جرم آن و m_p بار حمل شده در پنجه می‌باشد. همچنین J_{r1} و J_{r2} ممان اینرسی جرمی موتورها، و k_{r1} و k_{r2} سفتی پیچشی فنر معادل در مفاصل می‌باشد.

۳-۱- استخراج معادلات دینامیکی

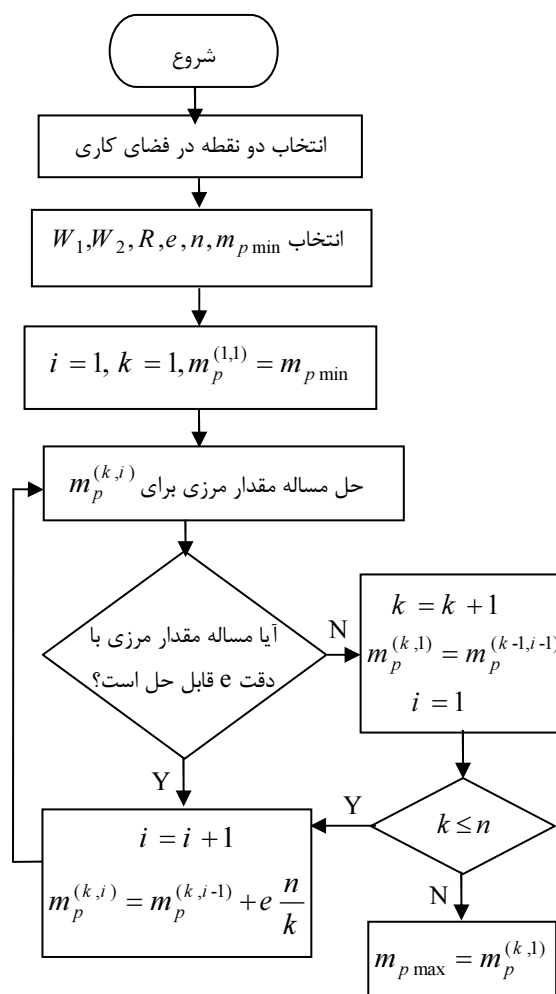
به منظور استخراج معادلات در حالتی که متغیرهای حالت طبق معادله (۳) در نظر گرفته شده باشد، متغیرهای حالت باید طبق معادله (۲۶) انتخاب شوند.

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_3 - \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_7 \end{bmatrix}, \\ X_2 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

می‌شود. برای حل این مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای، روش‌های مختلفی وجود دارد. در این مقاله از دستور `bvp4c` در نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

۲-۵- محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار

در این بخش روش محاسبه بار ماکزیمم و مسیر بهینه متناظر در حرکت نقطه به نقطه برای یک منیپولاتور صلب ارائه می‌شود. الگوریتم محاسبه بار در شکل ۳ نشان داده شده است. در ابتدا دو نقطه داده شده در فضای کاری پنجه که موقعیت ابتدایی و انتهایی منیپولاتور را نشان می‌دهد، انتخاب می‌شوند. از رابطه سینماتیک معکوس مقادیر زاویه هر لینک در شرایط ابتدا و انتها محاسبه می‌شود. انتخاب ماتریس‌های جریمة W_1, W_2, R و مقادیر m_p مینیمم، e و n که میزان دقت در محاسبه m_p و تعداد تکرار را نشان می‌دهد.



شکل ۳ الگوریتم محاسبه ماکزیمم ظرفیت حمل بار

$$-Pd_{11}(C_2 + k_{r2}x_7 + G_2) \quad (29)$$

که در آن $P = 1/(d_{11}d_{22} - d_{12}^2)$ و $C_i, i, j = 1, 2$ از معادله (27) جایگذاری می‌شود. برای این منیپولاتور دو لینکی ماتریس‌های جرم به اساس معادله (30) انتخاب می‌شوند.

$$W_1 = \text{diag}(w_1, w_3, w_5, w_7)$$

$$W_2 = \text{diag}(w_2, w_4, w_6, w_8)$$

$$R = \text{diag}(r_1, r_2) \quad (30)$$

بنابراین برای محاسبه تابع هدف با جایگذاری (30) در (9)، رابطه (31) نتیجه می‌شود.

$$L = 0.5 \times (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + w_1 x_1^2 + w_3 x_3^2 + w_5 x_5^2 + w_7 x_7^2 + w_2 x_2^2 + w_4 x_4^2 + w_6 x_6^2 + w_8 x_8^2) \quad (31)$$

سپس با در نظر گرفتن بردار شبه حالت‌ها به صورت $\psi = [x_9 \ x_{10} \dots \ x_{16}]^T$ از معادله (12) تابع همیلتونین محاسبه خواهد شد.

$$H = 0.5 \times (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + w_1 x_1^2 + w_3 x_3^2 + w_5 x_5^2 + w_7 x_7^2 + w_2 x_2^2 + w_4 x_4^2 + w_6 x_6^2 + w_8 x_8^2 + x_9 \dot{x}_1 + x_{10} \dot{x}_2 + x_{11} \dot{x}_3 + x_{12} \dot{x}_4 + x_{13} \dot{x}_5 + x_{14} \dot{x}_6 + x_{15} \dot{x}_7 + x_{16} \dot{x}_8) \quad (32)$$

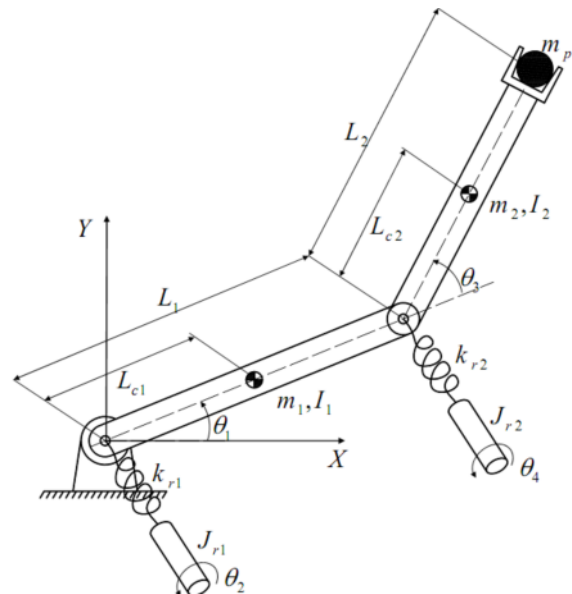
که در آن $\dot{x}_i, i = 1, 2, \dots, 8$ از رابطه (29) جایگذاری می‌شود. حال برای محاسبه معادلات مربوط به شبه حالت‌ها، طبق معادله (14) با مشتق‌گیری از تابع همیلتونین نسبت به حالت‌ها معادله (33) بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 &= -w_1 x_1, \dot{x}_{10} = -w_2 x_2 - x_9, \dot{x}_{11} = -w_3 x_3, \\ \dot{x}_{12} &= -w_4 x_4 - x_{11}, \dot{x}_{14} = -w_6 x_6 - x_{13}, \\ \dot{x}_{16} &= -w_8 x_8 - x_{15} \\ \dot{x}_{13} &= -w_5 x_5 + Pk_{r1}(x_{14}d_{22} - x_{16}d_{12}) - \frac{k_{r1}(x_{10} - x_{14})}{J_{r1}} \\ \dot{x}_{15} &= -w_7 x_7 + Pk_{r2}(x_{16}d_{11} - x_{14}d_{12}) - \frac{k_{r2}(x_{12} - x_{16})}{J_{r1}} \end{aligned} \quad (33)$$

با مشتق‌گیری از تابع همیلتونین نسبت به مقادیر کنترل نیز قانون کنترل بهینه در بازه قابل قبول، $U^- < U < U^+$ استخراج می‌شود:

$$U_1 = \frac{x_{14} - x_{10}}{r_1 J_{r1}}, U_2 = \frac{x_{16} - x_{12}}{r_2 J_{r2}} \quad (34)$$

در نتیجه با اعمال محدودیت موتورها، قانون کنترل بهینه طبق معادله (22) می‌شود:



شکل ۴ منیپولاتور دو لینکی با مفاصل انعطاف پذیر

طبق این متغیرهای جدید انتخاب شده، ماتریس اینرسی D و بردارهای C و G در معادله (2) استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_1 + a_2 + 2a_3 \cos(x_3 + x_7) \\ d_{12} &= a_2 + a_3 \cos(x_3 + x_7), d_{22} = a_2 \\ C_1 &= -a_3 \sin(x_3 + x_7)(2(x_2 + x_6)(x_4 + x_8) + (x_4 + x_8)^2) \\ C_2 &= a_3 \sin(x_3 + x_7)(x_2 + x_6)^2 \\ G_2 &= ga_5 \cos(x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ G_1 &= g(a_4 \cos(x_1 + x_5) + a_5 \cos(x_1 + x_5 + x_3 + x_7)) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن مقادیر $a_1, \dots, a_5$ از معادلات (28) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} a_1 &= I_1 + m_1 L_{c1}^2 + (m_2 + m_p) L_1^2; \\ a_2 &= I_2 + m_2 L_{c2}^2 + m_p L_2^2 \\ a_3 &= L_1(m_2 L_{c2} + m_p L_2); \\ a_4 &= m_1 L_{c1} + (m_2 + m_p) L_1; \\ a_5 &= m_2 L_{c2} + m_p L_2 \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین فرم فضای حالت معادلات طبق معادله (4) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_2 &= \frac{(U_1 + k_{r1}x_5)}{J_{r1}}, \dot{x}_4 = \frac{(U_2 + k_{r2}x_7)}{J_{r2}} \\ \dot{x}_6 &= \frac{-(U_1 + k_{r1}x_5)}{J_{r1}} + (C_1 + k_{r1}x_5 + G_1) \\ &\quad - Pd_{22} + Pd_{12}(C_2 + k_{r2}x_7 + G_2) \\ \dot{x}_8 &= \frac{-(U_2 + k_{r2}x_7)}{J_{r2}} + Pd_{12}(C_1 + k_{r1}x_5 + G_1) \end{aligned}$$

در حالت بعدی بار ماکزیمم به ازای توابع هدف مختلف بدست آمده و نشان داده می شود که می توان مسیرهای متنوع با مشخصات مختلفی یافت که در همگی بار ماکزیمم حمل می شود. در حالت سوم به منظور بررسی اثر انعطاف پذیری مفاصل روی مقدار بار ماکزیمم، شبیه سازی برای مقادیر مختلف سختی و یک حالت صلب انجام می گیرد. در حالت چهارم مسیر بهینه با کمترین میزان ارتعاشات به ازای یک بار معلوم در پنجه بدست می آید و نهایتاً در شبیه سازی آخر مسیر بهینه بار ماکزیمم- ارتعاشات مینیمم بدست می آید و نتایج ارائه می شود.

۴-۱- مسیر بهینه با کمترین ارتعاشات

در این بخش مسیر بهینه با کمترین میزان ارتعاشات بین دو نقطه داده شده در فضای کاری ربات، به ازای یک تابع هدف داده شده بدست می آید. از آنجا که حرکت در صفحه افق می باشد، شتاب جاذبه برابر صفر در نظر گرفته می شود. در زمان $t=0$ پنجه در موقعیت $p_0 = (1, 0)$ و در زمان نهایی $t=1s$ در نقطه $p_f = (0, 1.73)$ می باشد. در زمان شروع و پایان حرکت زاویه موتور و لینک در هر مفصل برابر است و سرعت زاویه ای موتورهای و لینکها نیز برابر صفر می باشد. دقت مطلوب در حل مسأله مقدار مرزی دو نقطه ای و محاسبه بار ماکزیمم به ترتیب برابر $\varepsilon = 0.001$ و $e = 0.01$ در نظر گرفته می شود. ماتریس های جریمه دقت نیز برابر $W_p = W_v = \text{diag}(1)$ انتخاب می شوند.

در این حالت از معادلات (۲۶) تا (۳۴) استفاده می شود. کلیه پارامترهای منیپولاتور مطابق جدول ۱ می باشد، به غیر از مقدار سختی فنرها که در اینجا برابر $k_{r1} = k_{r2} = 10000 \text{ N/m}$ در نظر گرفته می شود. مقدار بار حمل شده در پنجه نیز 2 kg می باشد. نقاط ابتدا و انتهای حرکت پنجه مانند حالت قبل می باشد بنابراین شرایط مرزی طبق حالت های داده شده در رابطه (۲۶) بر اساس معادله (۳۷) بدست خواهند آمد.

$$\begin{aligned} x_{10} &= 60^\circ, x_{30} = -120^\circ; \\ x_{1f} &= 120^\circ, x_{3f} = -60^\circ \\ x_{20} &= x_{40} = x_{50} = x_{60} = x_{70} = x_{80} = 0 \\ x_{2f} &= x_{4f} = x_{5f} = x_{6f} = x_{7f} = x_{8f} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

شبیه سازی در دو حالت انجام می گیرد. در حالت اول مسیر بهینه با کمترین تلاش (گشتاور) بدست می آید، بنابراین

$$U_{a1} = \begin{cases} U_1^+ & \frac{-x_{14}}{r_1 J_{r1}} \geq U_1^+ \\ \frac{-x_{14}}{r_1 J_{r1}} & U_1^- < \frac{-x_{14}}{r_1 J_{r1}} < U_1^+ \\ U_1^- & \frac{-x_{14}}{r_1 J_{r1}} \leq U_1^- \end{cases}$$

$$U_{a2} = \begin{cases} U_2^+ & \frac{-x_{16}}{r_2 J_{r2}} \geq U_2^+ \\ \frac{-x_{16}}{r_2 J_{r2}} & U_2^- < \frac{-x_{16}}{r_2 J_{r2}} < U_2^+ \\ U_2^- & \frac{-x_{16}}{r_2 J_{r2}} \leq U_2^- \end{cases} \quad (35)$$

که در آن حدود کنترل برای هر موتور، از رابطه (۲۳) بدست می آید.

$$\begin{aligned} U_1^+ &= k_{11} - k_{12}x_6; \quad U_1^- = -k_{11} - k_{12}x_6 \\ U_2^+ &= k_{21} - k_{22}x_8; \quad U_2^- = -k_{21} - k_{22}x_8 \end{aligned} \quad (36)$$

با جایگذاری مقادیر کنترل از روابط (۳۴) تا (۳۶) در ۱۶ معادله دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده در (۲۹) و (۳۳)، این معادلات فقط بر حسب حالت ها و شبه حالت ها خواهند بود که با ۱۶ شرط مرزی داده شده، یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه ای می سازند. این مسأله بدست آمده با استفاده از دستور bvp4c در نرم افزار متلب قابل حل است.

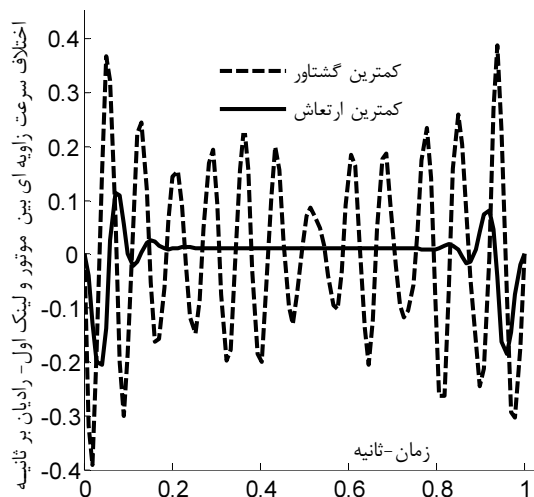
۴- شبیه سازی برای منیپولاتور دولینکی

در این بخش شبیه سازی برای یک منیپولاتور دولینکی با مفاصل انعطاف پذیر که مشخصات آن در جدول ۱ آورده شده، ارائه می شود. شبیه سازی ها در پنج حالت انجام می گیرد. در حالت اول بار ماکزیمم به ازای یک تابع هدف مشخص بدست می آید.

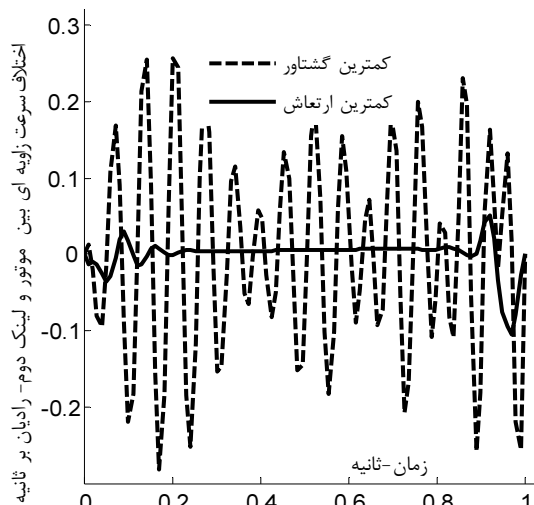
جدول ۱ پارامترهای شبیه سازی

پارامتر	مقدار	واحد
طول لینکها	$L_1 = L_2 = 1$	m
جرم	$m_1 = 2, m_2 = 2$	kg
ممان اینرسی لینکها	$I_1 = I_2 = 0.166$	kg m ²
ماکزیمم سرعت بدون بار	$\omega_{s1} = \omega_{s2} = 5.6$	Rad/s
گشتاور حد اشباع موتور	$\tau_{s1} = \tau_{s2} = 104$	Nm
ثابت فنر	$k_{r1} = k_{r2} = 1000$	N/m
ممان اینرسی موتورها	$J_{r1} = J_{r2} = 2$	kg m ²

این اتفاق در مورد اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک که در شکل ۶ آورده شده نیز به خوبی نمایان است. در شکل ۷ نمودار سرعت زاویه موتورها نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، سرعت موتور در حالت مینیمم ارتعاش نسبت به حالت مینیمم گشتاور بسیار یکنواخت‌تر می‌باشد. در شکل ۸ نمودار گشتاور موتورها در این دو حالت نشان داده شده است. در این حالت از قانون کنترل اصلاح شده (۲۴) استفاده شده است. گشتاور حالت کمترین ارتعاش، در ابتدا و انتهای مسیر با یک شیب مشخصی به سمت صفر می‌رود. این کار باعث می‌شود، در ابتدای مسیر گشتاور زیادی به سیستم اعمال نشود و دامنه ارتعاشات به یکباره افزایش نیابد.

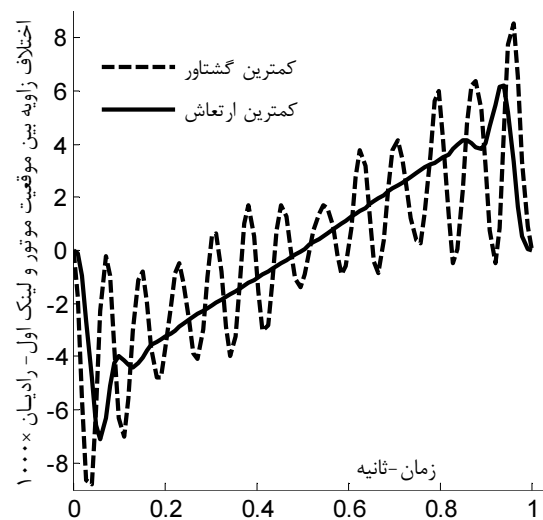


شکل ۶- الف اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک اول

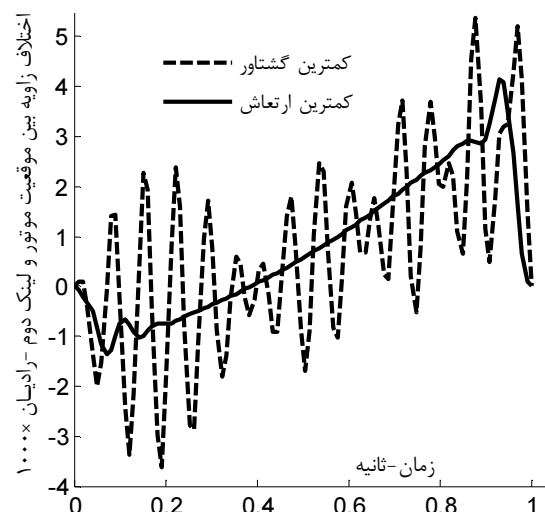


شکل ۶- ب اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک دوم

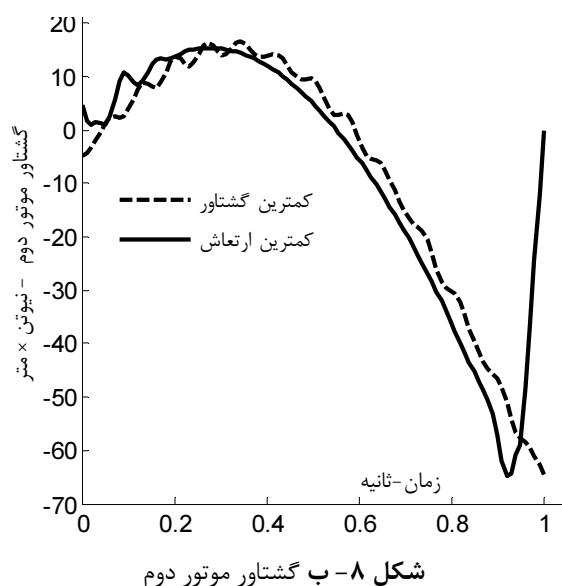
ماتریس‌های وزنی به این صورت در نظر گرفته می‌شوند: $W_1=[0]$, $W_2=[0]$, $R=\text{diag}(0.00961)$ در حالت دوم مسیر بهینه با کمترین میزان ارتعاشات بدست می‌آید که ماتریس‌های جریمه عبارتند از: $W_1=\text{diag}(1)$, $W_2=\text{diag}(1,1,100,100)$ و $R=\text{diag}(0.00961)$ در شکل‌های ۵- الف و ب اختلاف زاویه بین موتور و لینک‌ها که معادل حالت‌های x_7 و x_5 می‌باشند برای دو مسیر بهینه نشان داده شده است. در کلیه شکل‌های مربوط به موقعیت زاویه‌ای، محور عمودی بر حسب رادیان و برای سرعت زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه می‌باشد. همان‌طور که دیده می‌شود دامنه نوسانات برای مسیر مینیمم ارتعاش به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است.



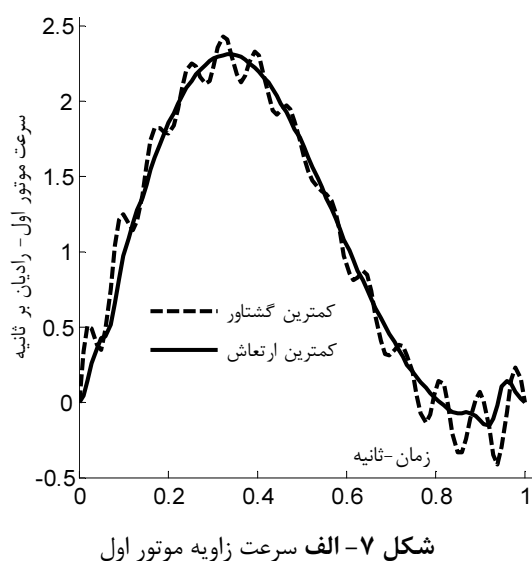
شکل ۵- الف اختلاف زاویه بین موتور و لینک اول



شکل ۵- ب اختلاف زاویه بین موتور و لینک دوم



شکل ۸- ب گشتاور موتور دوم



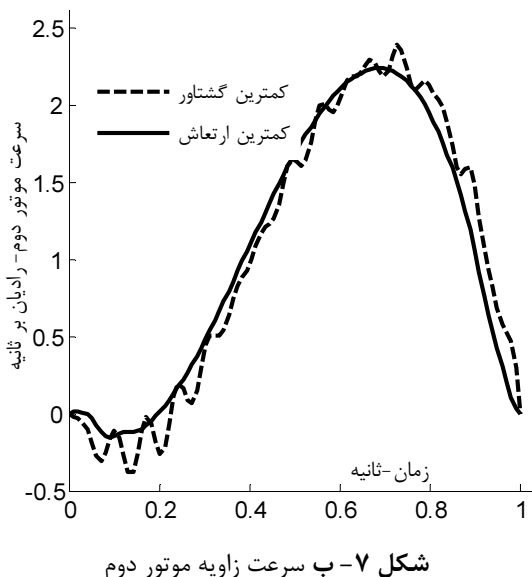
شکل ۷- الف سرعت زاویه موتور اول

در انتهای مسیر نیز به همین صورت گشتاور تا مقدار صفر به آرامی کاهش می‌یابد تا سیستم کاملاً متوقف شود. این تغییرات گشتاور در 0.05 ثانیه ابتدا و انتهای مسیر اعمال می‌شود. در کلیه شکل‌های مربوط به گشتاور موتورها، محور عمودی بر حسب نیوتن متر می‌باشد.

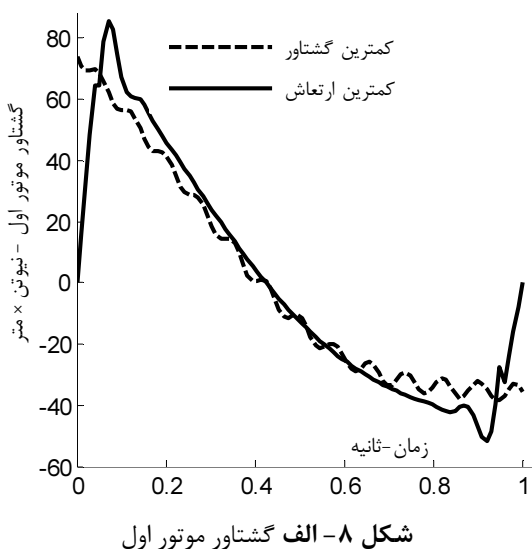
۴-۲- محاسبه مسیر بهینه بار ماکزیمم- ارتعاش مینیمم

در این بخش مسیر بهینه بار ماکزیمم با حداقل ارتعاشات، بدست آورده می‌شود. به منظور مقایسه جواب با حالتی که ارتعاشات کاملاً آزاد هستند، شبیه‌سازی در دو حالت انجام می‌شود. کلیه پارامترهای منیپولاتور و شرایط مرزی همانند حالت قبل می‌باشد، به غیر از مقدار سختی فنرها که در اینجا برابر $k_{r1}=k_{r2}=5000 \text{ N/m}$ در نظر گرفته می‌شود و حدود گشتاور که ثابت فرض می‌شود.

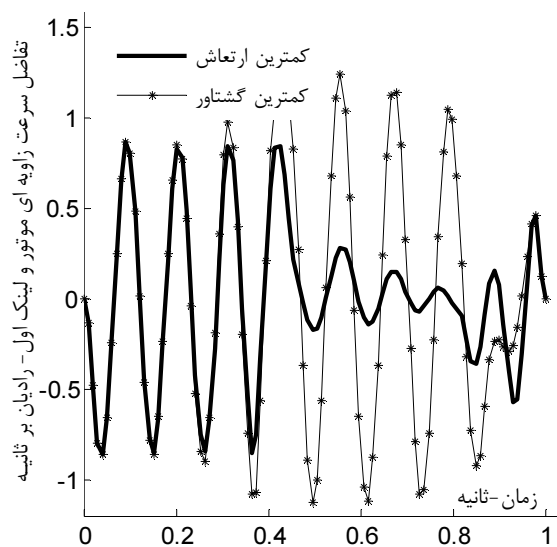
برای حالت اول تابع هدف با کمترین گشتاور انتخاب می‌شود، بنابراین ماتریس‌های جریمه عبارتند از: $W_1=W_2=[0]$ و $R=\text{diag}(0.00961)$. مقدار بار ماکزیمم بدست آمده در این حالت 11.3kg می‌باشد. در حالت دوم تابع هدف با کمترین ارتعاش مانند حالت قبل به صورت $W_1=\text{diag}(1)$ و $W_2=\text{diag}(1,1,100,100)$ و $R=\text{diag}(0.00961)$ انتخاب می‌شود. ماکزیمم بار بدست آمده در این حالت 11.1kg می‌باشد. همان‌طور که انتظار می‌رفت در حالت دوم که کاهش دامنه ارتعاشات نیز به تابع هدف اضافه شد، مقداری از بار



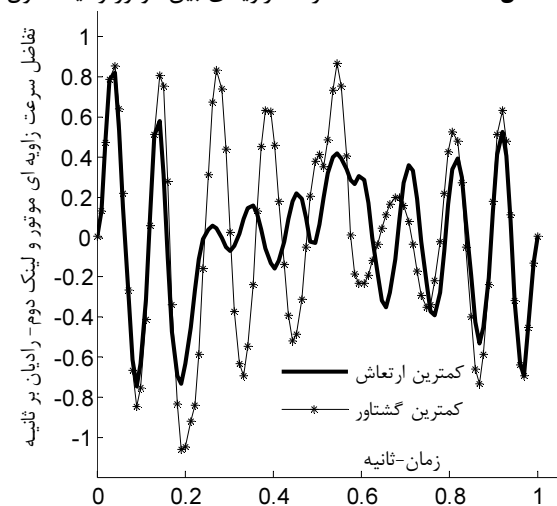
شکل ۷- ب سرعت زاویه موتور دوم



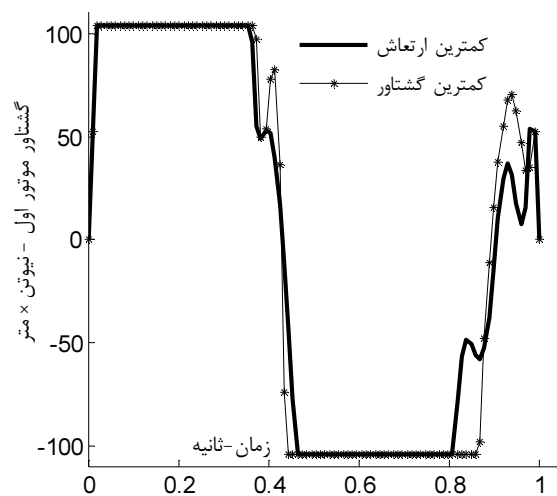
شکل ۸- الف گشتاور موتور اول



شکل ۹- الف اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک اول



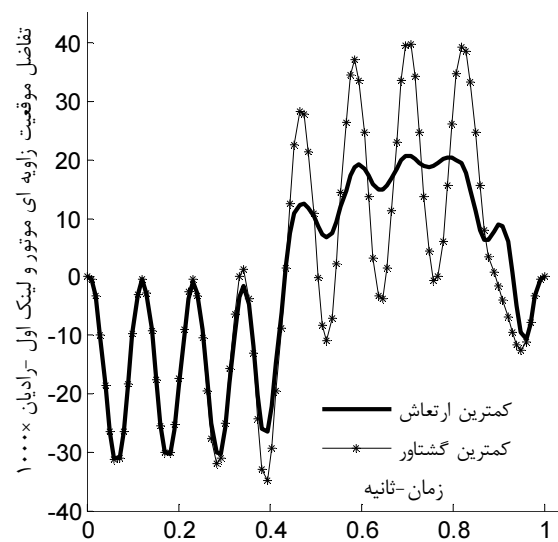
شکل ۱۰- ب اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک دوم



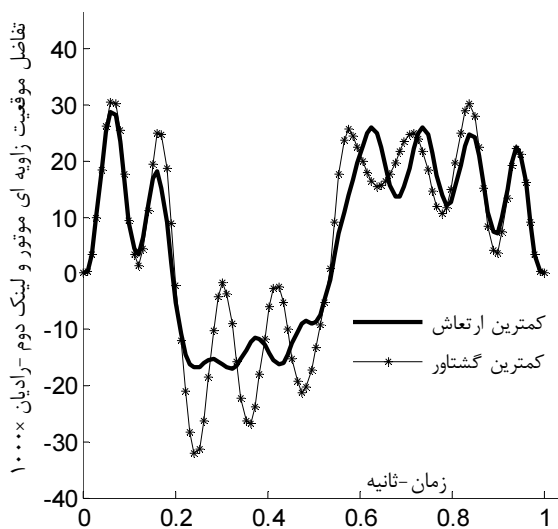
شکل ۱۱- الف گشتاور موتور اول

ماکزیمم کاسته شده است، چون که دو خواسته مختلف هم‌زمان نمی‌توانند مقادیر نهایی خود را داشته باشند. همان‌طور که در شکل‌های ۹ و ۱۰ دیده می‌شود دامنه ارتعاشات برای حالت کمترین ارتعاش بسیار کمتر می‌باشد، در حالی که مقدار بار بدست آمده فقط 0.2kg کمتر است.

در شکل ۹- الف و ب اختلاف موقعیت زاویه‌ای بین موتور و لینک برای مفصل اول و دوم نشان داده شده است. در شکل ۱۰ اختلاف سرعت زاویه‌ای بین موتور و لینک آورده شده است. در شکل ۱۱ نمودار گشتاور موتورها در این دو حالت نشان داده شده است.



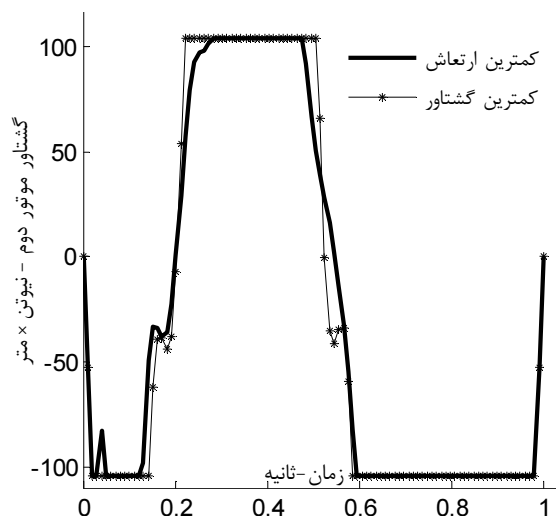
شکل ۹- الف اختلاف موقعیت زاویه‌ای بین موتور و لینک اول



شکل ۹- ب اختلاف موقعیت زاویه‌ای بین موتور و لینک دوم

۶- مراجع

- [1] Spong M.W., "Modeling and control of elastic joints robots", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, No. 6, 1987, pp. 310-319.
- [2] Gasparetto A., Zanotto V., "Optimal trajectory planning for industrial robots", *Advances in Engineering Software*, Vol. 41, No. 4, 2010, pp. 548-556
- [3] Gregory J., Olivares A., Staffetti E., "Energy-optimal trajectory planning for robot manipulators with holonomic constraints", *Systems & Control Letters*, Vol. 61, No. 2, 2012, pp. 279-291.
- [4] Korayem M.H., Nazemizadeh M., Ghaffarpour H., "Optimal path planning of nonholonomic mobile robots using optimal control method and verification of the method via experimental tests of the Scout mobile robot", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 2, 2012, pp. 87-94. (In Persian)
- [5] Boscaroli P., Gasparetto A. "Model-based trajectory planning for flexible-link mechanisms with bounded jerk", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 29, No. 4, 2013, pp. 90-99.
- [6] Bianco L., Piazzzi A., Consolini L., Gerelli O., Guarino C., "Flexible joints control: A minimum-time feed-forward technique", *Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, 2009, pp. 348-356.
- [7] Korayem M.H., Rahimi H.N., Nikoobin A., "Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 7, 2012, pp. 3229-3244.
- [8] Korayem M.H., Nikoobin A., "Formulation and Numerical Solution of Robot Manipulators in Point-to-Point Motion with Maximum Load Carrying Capacity", *Scientia Iranica*, Vol. 16, No. 1, 2009, pp. 101-109.
- [9] Korayem M.H., Basu A., "Dynamic load carrying capacity for robotic manipulators with joint elasticity imposing accuracy constraints", *Robotic and Autonomous Sys.*, Vol. 13, 1994, pp. 219-229.
- [10] Korayem M.H., Ghariblu H., Basu A., "Dynamic load-carrying capacity of mobile-base flexible joint manipulators", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 25, 2005, pp. 62-70.
- [11] Wang L.T., Ravani B., "Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators-Part 2", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, 1988, pp. 53-61.
- [12] Wang C-Y.E., Timoszyk W.K., Bobrow J.E., "Payload maximization for open chained manipulator: Finding motions for a Puma 762 robot", *IEEE Transactions on Robotics and*



شکل ۱۱- ب گشتاور موتور دوم

همان‌طور که دیده می‌شود نمودارهای گشتاور در دو حالت تقریباً به هم نزدیک بوده و مقادیر گشتاور در ابتدا و انتهای مسیر با یک شیب مشخصی به سمت صفر می‌روند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله طراحی مسیر بهینه برای منیپولاتور با مفاصل انعطاف‌پذیر با بیشترین ظرفیت حمل بار و کمترین دامنه ارتعاشات در طول مسیر، بین دو نقطه داده شده در فضای کاری ارائه شد. در این روش با اصلاحی که در تعریف متغیرهای حالت و تابع هدف انجام شد، با انتخاب مناسب ماتریس‌های وزنی، میتوان دامنه ارتعاشات در طول مسیر را کاهش داد. همچنین تابع کنترل در ابتدا و انتهای مسیر به گونه‌ای اصلاح شد که تغییر ناگهانی در کنترل اعمالی حذف شود. شبیه‌سازی‌ها برای دو حالت مسیر بهینه با کمترین ارتعاش و مسیر بهینه با بیشترین ظرفیت حمل بار- کمترین دامنه ارتعاش انجام گرفت. در هر دو شبیه‌سازی به خوبی تأثیر روش پیشنهادی در کاهش دامنه نوسانات مشاهده شد. همان‌طور که انتظار می‌رفت مقدار ظرفیت قابل حمل در مسیر بهینه با بیشترین ظرفیت حمل بار- کمترین دامنه ارتعاش، نسبت به حالت مسیر بهینه با بیشترین ظرفیت حمل بار، یک کاهش جزئی داشت اما دامنه نوسانات به مقدار قابل توجهی کاهش یافت.

- [15] Gariblu H., Korayem M.H., "Trajectory optimization of flexible mobile manipulators", *Robotica*, Vol. 24, No. 3, 2006, pp. 333-335.
- [16] Korayem M.H., Nikoobin A., "Maximum Payload for Flexible Joint Manipulators in Point-to-Point Task Using Optimal Control Approach", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 37, 2008, pp. 1045-1060.
- [13] Zhao Y.S., Lu L., Zhao T.S., Du Y.H, Huang Z., "The novel approaches for computing the dynamic load-carrying capacity of multiple cooperating robotic manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, 1998, pp. 637-643.
- [14] Yue S., Tso S.K., Xu W.L., "Maximum dynamic payload trajectory for flexible robot manipulators with kinematic redundancy", *Mechanism and Machine theory*, Vol. 36, 2001, pp. 785-800.