مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 275-283

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

اثر پارامتر ناهمگنی بر ضریب شدت تنش یک نوار ترک‌دار از جنس مواد تابعی ارتوتروپیک تحت تنش‌های حرارتی

فرزین توکلی[1]، رحمت الله قاجار[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

*تهران، صندوق پستی 19395-1999، ghajar@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 30 خرداد 1394

پذیرش: 24 شهریور 1394

ارائه در سایت: 10 آبان 1394

کلید واژگان:

مواد تابعی ارتوتروپیک

ضریب شدت تنش

ترک داخلی

روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

چکیده

در این مقاله، اثر پارامتر ناهمگنی بر ضریب شدت تنش در مواد تابعی ارتوتروپیک در نواری ترک‌دار بررسی می‌گردد. فرض می‌شود که خواص مکانیکی و حرارتی ماده وابسته به مختصه‌ی x (موازی با سطوح ترک) و تابع نمایی از x باشد. مساله برای ترک داخلی و لبه‌ای با دو روش معادلات انتگرالی و روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته حل می‌شود. بارگذاری حرارتی به گونه‌ای است که توزیع دما در نوار یکنواخت می‌باشد. به علت تغییر خواص مکانیکی و حرارتی، توزیع تنش حاصل از این بارگذاری، یکنواخت نمی‌باشد. در حل مساله با روش معادلات انتگرالی، ابتدا مساله ترموالاستیسیته بدون ترک و سپس مساله ترک هم‌دما به صورت جدا حل می‌شوند. با استفاده از این دو حل، مساله اصلی حل می‌شود. برای حل مساله‌ی ترک هم‌دما، پس از انجام تبدیلی روی معادلات بنیادی حاکم بر ماده ارتوتروپ و ساده سازی آن، معادلات ناویر با روش تبدیل فوریه حل می‌گردد. روش حل عددی مساله، روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته است که به منظور بررسی صحت نتایج روش معادلات انتگرالی فقط در یک حالت خاص در قالب نمودار آورده شده‌است. همچنین تاثیر دما برضریب شدت تنش به ازای مقادیر مختلف پارامتر ناهمگنی، مورد بررسی قرار می‌گیرد .

The effect of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor in a cracked layer in functionally graded material under thermal stresses

Farzin Tavakkoli, Rahmatollah Ghajar*

Departent of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*P.O.B. 19395-1999, Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 June 2015
Accepted 15 September 2015
Available Online 01 November 2015

Keywords:
Orthotropic FGMs
Stress Intensity Factor
Internal Crack
Generalized Differential Quadrature Element Method

ABSTRACT

In this paper, the effect of nonhomogeneous parameter in orthotropic Functionally Graded Material (FGM) in a cracked layer is investigated. It is assumed that the mechanical and thermal properties of material are dependent on x-coordinate (collinear with crack surfaces) in exponential form. The problem is solved for internal and edge crack in two ways, integral equations and generalized differential quadrature method. Thermal loading is such that temperature distribution in the layer is uniform. Because of variation in mechanical and thermal properties, stress distribution due to this loading is not uniform. In the solution of problem with integral equations method, first, thermo-elasticity problem with no cracks and then isothermal crack problem are separately solved. Afterward, with these solutions, the main problem will be solved. In order to solve isothermal crack problem, after conversion and simplifying the equations in orthotropic material, Navier's equations will be solved with the Fourier. Numerical solution of the problem is the generalized differential quadrature element method that is being presented for verification of the results of the integral equations for a specific state in the diagram format. Also, the effect of temperature on intensity factor with various values of nonhomogeneous parameter is investigated.

1- مقدمه

ترک خوردن یک سازه تحت بارگذاری حرارتی پدیده‌ای مهم در بسیاری از فرآیندهای صنعتی خصوصا در صنعت هوافضا و مهندسی هسته‌ای است. در اجزای صنعتی که تحت بارهای حرارتی‌اند تنش‌های حرارتی بزرگی در اطراف ترک موجود در سازه، ایجاد می‌شود. در دهه‌های اخیر مفهوم مواد تابعی[1] معرفی شده و کاربرد روزافزون آن در صنعت بسیار چشم‌گیر بوده است. معمولا مواد تابعی مخلوطی از فلز و سرامیک هستند و بنابراین هردو خواص مکانیکی و حرارتی را دارند. یکی از اهداف معرفی مواد تابعی کاهش تنش‌های حرارتی و ضریب شدت تنش در دماهای بسیار بالاست [2،1]. با انتخاب مناسب ثوابت ماده، می‌توان ضریب شدت تنش حرارتی را به مقدار قابل توجهی کاهش داد [3]. شکست مواد ناهمگن همسانگرد تحت تنش‌های

1- Functionally Graded Materials

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

F. Tavakkoli, R. Ghajar, The effect of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor in a cracked layer in functionally graded material under thermal stresses, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 275-283, 2015 (in Persian)

[DOI: 10.22034/mme.1394.15.11.46.2]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.46.2]

مکانیکی توسط محققین مطالعه شده است. دلاله و اردوغان مساله ترک برای ورق بی‌نهایت ناهمگن که تغییرات مدول الاستیسیته در جهت ترک به صورت نمایی بوده را بررسی کرده‌اند. نتیجه تحقیقات آن‌ها نشان داده است که میدان تنش در نوک ترک دارای تکینگی از درجه 1.2- و تاثیر تغییرات ضریب پوآسون بر ضریب شدت تنش ناچیز است [4]. ترک تحت مود ترکیبی توسط کوندا و اردوغان بررسی شده است [5]. گو و آسارو ضریب شدت تنش برای ترک نیمه بی‌نهایت در یک نوار همسانگرد از جنس مواد تابعی را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی کرده‌اند [6]. نودا و جین در 1993 [7] و نودا در 1997 [8] ضریب شدت تنش حرارتی را مورد بررسی قرار دادند با این حال به علت ماهیت فرآیند ساخت، مواد تابعی تولید شده به ندرت همسانگرد هستند [10،9]. بنابراین در مطالعه مواد تابعی اثر ناهمسانگردی بایستی مورد توجه قرار گیرد. به علت پیچیدگی مساله، تعداد تحقیقات کمی روی رفتار مواد تابعی ناهمسانگرد انجام شده‌است. آزتورک و اردوغان یک محیط بی-نهایت ناهمگن ارتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی مود اول را در 1997 [11] و مود ترکیبی را در 1999 [12] بررسی کرده‌اند. کایا و اردوغان در 1980 ضریب شدت تنش و بازشوندگی ترک[1] در یک نوار اروتوپیک همگن را برای ترک داخلی و لبه‌ای تحت شرایط بارگذاری عمومی مورد مطالعه قرار دادند [13]. ایتوو در مورد مساله ترک ترموالاستیک در نوار همگن ارتوتروپ را تحقیق نموده است [14]. اردوغان و وو [16،15] در سال‌های 1996 و 1997 و کادی‌اوغلو [17] تحقیقاتی را در مورد نواری از جنس ماده تابعی ارتوتروپیک ارائه نموده اند. همچنین در سال 2004 گوو و همکاران [18] ترک تحت مود اول شکست در نوار ارتوتروپیک از جنس مواد تابعی را مورد بررسی قرار دادند و برای   اولین بار کرنل سینگولار، در معادله انتگرالی سینگولار برای مساله ترک لبه‌ای را نیز ارائه دادند.

به دلیل نرخ بالای گرادیان تنش و جابجایی در نوک ترک، حل عددی مسائل ترک، همواره با دشواری‌هایی همراه بوده‌است. لذا بعضی از محققان روش‌های متنوعی را برای رفع این مشکل ارائه داده‌اند [20،19]. بلمن و همکاران در 1971 و 1972 روش مربعات دیفرانسیلی[2] را پیشنهاد دادند. طبق این روش مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک راستا با جمع وزن‌دار خطی مقادیر تابع در نقاط گرهی در آن راستا برابر است [22،21]. نکته مهم در روش مربعات دیفرانسیلی یافتن ضرایب وزن‌دار است که بلمن دو روش برای یافتن این ضرایب پیشنهاد داده است که با حل معادلات جبری خطی به دست می‌آید. نشان داده شده است که، چون یافتن ضرایب وزن‌دار نیازمند حل معادلات جبری خطی است، با بالا رفتن تعداد نقاط گرهی دقت این روش کاهش می‌یابد [23]. برای محاسبه ساده‌تر ضرایب وزن‌دار و رفع مشکل روش مربعات دیفرانسیلی، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته[3] توسط شوو و ریچاردز در 1992 معرفی شد [24]. یکی دیگر از مزایای این روش وابسته نبودن نتایج آن به مش‌بندی است. به طوری‌که با تعداد گره‌های کم می‌توان نتایجی با دقت بالا به‌دست آورد. با این وجود روش مربعات دیفرانسیلی برای هندسه‌های منظم و بدون ناپیوستگی که قابل توصیف در دستگاه مختصاتی کارتزین و یا متعامد هستند، کاربرد دارد. برای رفع این مشکل، چن در 1995 روشی با عنوان روش المان مربعات دیفرانسیلی[4] معرفی کرد [25]. این روش با تقسیم دامنه‌ی مساله به چند زیر دامنه[5] و یا المان، توانایی توصیف ناپیوستگی‌های هندسی و بارگذاری را دارد. در این روش پس از تقسیم‌بندی دامنه به تعدادی المان، هر المان با روش مربعات دیفرانسیلی گسسته‌سازی شده و به تعدادی گره تقسیم‌بندی می‌شود. چن در سال 2000 روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[6] را معرفی کرد [26]. در 2005 ویولا و تورنابنه با استفاده از روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم-یافته ارتعاشات کمان‌های دایروی با ضخامت متغیر را مورد بررسی قرار دادند [27]. در 2011 حسینی هاشمی و خرمی ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای نسبتا ضخیم از جنس مواد تابعی را با روش مربعات دیفرانسیلی مورد بررسی قرار دادند [28]. در سال 2013 ویولا، تورنابنه و فانتوزی از روش مشابه دیگری برای سازه‌های کامپوزیتی ترک‌دار نیز استفاده کرده‌اند [29].

2- حل تحلیلی

2-1- تبدیل روابط بنیادی ماده ارتوتروپیک

برای کاهش متغیرهای موجود در رابطه بنیادی مسائل صفحه‌ای ارتوتروپیک، تبدیل جدیدی معرفی می‌شود که تعداد ثوابت مستقل ماده را کاهش می‌دهد و موجب سادگی روابط بنیادی در این دسته از مواد می‌شود. روابط بنیادی این مواد در حالت کرنش صفحه‌ای در دستگاه مختصات x_1 و x_2 به صورت رابطه (1) است [30].

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\,\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}}(1-\nu_{13}\nu_{31}) & -\frac{1}{E_{11}}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & 0 \\ -\frac{1}{E_{22}}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & \frac{1}{E_{22}}(1-\nu_{23}\nu_{32}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

که در آن ϵ_{ij} تانسور کرنش بسیار کوچک، E_{11} و E_{22} به‌ترتیب مدول الاستیک در راستای x_1 و x_2 ، ν_{21} و ν_{12} ضرایب پواسون، σ_{ij} تانسور تنش کوشی، G_{12} مدول برشی، α_1 و α_2 به ترتیب ضریب انبساط حرارتی در راستای x_1 و x_2 و T اختلاف دمای ایجاد شده از دمایی است که در آن دما تنشی در ماده وجود ندارد. با معرفی پارامترها و دستگاه مختصاتی جدید مناسب، می‌توان روابط بنیانی حاکم بر مسائل صفحه‌ای را کاهش داد [30]. پارامترهای جدید در حالت کرنش صفحه‌ای مطابق رابطه (2) عبارتند از

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{E_{11}E_{22}}{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})}} \\ \nu &= \sqrt{\frac{(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})}{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})}} \\ \delta^4 &= \frac{E_{11}}{E_{22}}\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu_{13}\nu_{31}} \\ \kappa_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{11}E_{22}}{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})}} \\ &\times\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_{11}}-\frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_{22}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن E سفتی موثر، ν ضریب پوآسون موثر، δ^4 نسبت سفتی و κ پارامتر برشی نام دارد. دستگاه مختصات جدیدی به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود

$$x = x_1/\sqrt{\delta}\,, \qquad y = x_2\sqrt{\delta} \tag{3}$$

همچنین با تعریف

1- Crack Opening Displacement(COD)
2- Differential Quadrature (DQ)
3- Generalized Differential Quadrature (GDQ)
4- Differential Quadrature Element Method (DQEM)
5- Sub-Domain
6- Generalized Differential Quadrature Element Method(GDQEM)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.46.2]

$$\begin{gathered}E^*(x,y)=E(x_1,x_2),\quad \sigma_{xx}(x,y)=\sigma_{11}(x_1,x_2)/\delta,\\ \sigma_{yy}(x,y)=\delta\sigma_{22}(x_1,x_2),\quad \epsilon_{xx}(x,y)=\epsilon_{11}(x_1,x_2)\delta,\\ \epsilon_{xy}(x,y)=\epsilon_{12}(x_1,x_2),\quad \epsilon_{yy}(x,y)=\epsilon_{22}(x_1,x_2)/\delta,\\ \alpha_y(x,y)=\alpha_{22}(x_1,x_2)/\delta,\quad \alpha_x(x,y)=\delta\alpha_{11}(x_1,x_2),\\ k_x(x,y)=k_1(x_1,x_2)/\delta,\quad k_y(x,y)=\delta k_2(x_1,x_2)\end{gathered} \tag{4}$$

رابطه بنیادی (1) به صورت رابطه (5) ساده می‌گردد

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ 2\,\epsilon_{xy}\end{bmatrix}=\frac{1}{E^*}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(\kappa+\nu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\\ 0\end{bmatrix} \tag{5}$$

می‌توان نشان داد که معادلات تعادل، سازگاری، ناویر، تعادل انرژی و روابط کرنش- جابجایی در دستگاه مختصاتی جدید (3) با متغیرهای (4)، بدون تغییر باقی می‌مانند. تاثیر تغییر پارامتر برشی و ضریب پوآسون موثر بر ضریب شدت تنش در [9] بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که تاثیر پارامتر برشی فقط برای مقادیر $\kappa > -0.5$ بسیار زیاد و تاثیر ضریب پوآسون موثر ناچیز است. لذا به منظور ساده سازی رابطه (5) و معادل‌سازی این رابطه با قانون هوک در حالت تنش صفحه‌ای، $\kappa = 1$ و ν ثابت فرض می‌شود. بنابراین تعداد ثوابت مستقل ماده ارتوتروپیک در حالت صفحه‌ای از 4 به 2 کاهش و مسئله کرنش صفحه‌ای اروتورپیک به مسئله تنش صفحه‌ای همسان‌گرد تغییر می‌یابد.

2-2- تنش‌های حرارتی

یک نوار از جنس مواد تابعی الاستیک ارتوتروپ مطابق شکل 1 در نظر گرفته و فرض می‌شود، که مسئله تنش حرارتی، شبه تعادلی و اثرات کوپلینگ ترموالاستیک ناچیز است. حل مسئله با روش جمع آثار صورت می‌گیرد به این صورت که ابتدا مسئله انتقال حرارت یک بعدی بدون وجود ترک و سپس مسئله ترک بدون بارگذاری حرارتی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت روی سطوح ترک، تنش‌هایی برابر و مخالف با تنش‌های به‌دست آمده از حل مسئله بدون ترک، اعمال می‌گردد. فرض می‌شود. توزیع دما به‌صورت یکنواخت و ترک به صورت داخلی در فاصله $a \le x \le b$ قرار دارد. عرض نوار محدود، $0 \le x \le h$، طول و ضخامت آن بی‌نهایت و سطوح آن عاری از تنش هستند. ضخامت نامحدود تا حالت کرنش صفحه‌ای برقرار باشد. در مسئله انتقال حرارت یک بعدی در غیاب ترک، تمامی مولفه‌های تنش به جز σ_{yy} صفر می‌باشند.

خواص ماده تابعی به‌گونه‌ای است که خواص آن وابسته به x باشد. بنابراین تمامی کمیت‌های میدانی غیرصفر، مستقل از y و z هستند و شرط سازگاری را می‌توان به صورت $(d^2\,\epsilon_{yy})/(dx^2) = 0$ نوشت. لذا نتیجه می‌شود که نتیجه $\epsilon_{yy}= Ax + B$ که در آن A و B ثوابتی مجهول و از شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. با استفاده از رابطه (5) می‌توان رابطه (6) را که به صورت زیر است، محاسبه کرد.

$$\sigma_{yy}(x) = E^*(x)\left[Ax + B - \alpha_y(x)(T - T_0)\right] \tag{6}$$

نوار به صورت نامقید درنظر گرفته شده لذا شرایط مرزی به فرم رابطه (7) خواهد بود.

$$\int_0^h \sigma_{yy}(x)dx = 0,\qquad \int_0^h \sigma_{yy}(x)x\,dx = 0 \tag{7}$$

با جای‌گذاری رابطه (6) در (5) ثوابت A و B را می‌توان محاسبه کرد. نتیجه در رابطه (8) گزارش شده است.

$$A = \frac{1}{(a_{11}^2 - a_{12}a_{21})}(a_{11}b_1 - a_{12}b_2) \tag{8-الف}$$

$$B = \frac{1}{(a_{11}^2 - a_{12}a_{21})}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \tag{8-ب}$$

که در آن

$$\begin{gathered}a_{11} = \int_0^h x\,E^*(x)dx,\qquad a_{21} = \int_0^h x^2\,E^*(x)dx\\ a_{12} = \int_0^h E^*(x)dx\,,\qquad b_1 = \int_0^h E^*(x)\alpha_y(x)(T-T_0)\,dx\\ b_2 = \int_0^h x^2 E^*(x)\alpha_y(x)(T-T_0)\,dx\end{gathered} \tag{9}$$

2-3- مسئله ترک برای نوار مواد تابعی

نحوه توزیع پارامتر سفتی در ماده تابعی به صورت نمایی مطابق رابطه 10 در نظر گرفته شود

$$E(x) = E_0 \mathrm{e}^{\beta x} \tag{10}$$

u و v به ترتیب مولفه‌های میدان جابجایی در راستای x و y باشند، در این‌صورت معادلات ناویر در محیط الاستیک ناهمگن همسانگرد به صورت رابطه (11) خواهد بود [9]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \beta_1\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\end{gathered} \tag{11}$$

در روابط فوق

$$\beta_1 = \frac{2}{1-\nu}\ ,\qquad \beta_2 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{12}$$

β و E_0 ثوابت ماده اند. پارامتر β سنجه‌ای از ناهمگنی ماده می‌باشد. سه متغیر جدید ν^* و κ^* و E^* را می‌توان به‌گونه‌ای تعریف کرد که رابطه (11) که در حالت تنش صفحه‌ای است به روابط کرنش صفحه‌ای تبدیل گردد. این متغیرها در رابطه (13) ارائه شده‌اند

$$\nu = \frac{\nu^*}{1-\nu^*}\ ,\qquad \kappa^* = 3 - 4\nu^*,\qquad E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{13}$$

با قرار دادن روابط (13) در معادله ناویر درحالت تنش صفحه‌ای به معادله ناویر در حالت کرنش صفحه‌ای تبدیل می‌شود. فرض می‌گردد که تغییر مدول برشی به‌صورت نمایی با رابطه (14) مدل‌سازی شود

$$\mu(x) = \mu_0 \mathrm{e}^{\beta x},\qquad 0 \le x \le h \tag{14}$$

که در آن $\mu_0 = E^*{}_0/(2+2\nu^*)$. در این‌صورت رابطه نهایی معادله ناویر در حالت کرنش صفحه‌ای برای ماده‌ای ناهمگن با رفتار (5) به صورت روابط (15) خواهد بود [15]

$$\begin{gathered}(\kappa^*+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa^*-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} +\\ \beta(\kappa^*+1)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(3-\kappa^*)\frac{\partial v}{\partial y} = 0\end{gathered} \tag{15-الف}$$

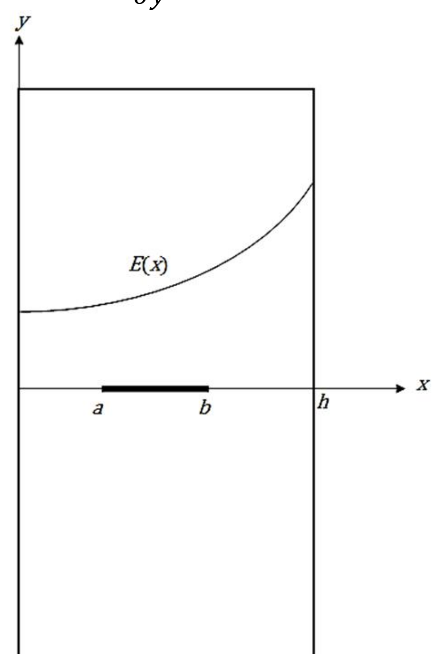

Fig. 1 An FGM layer with internal crack

شکل 1 یک نوار FGM حاوی ترک داخلی

$$(\kappa^*+1)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(\kappa^*-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+ \beta(\kappa^*-1)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \qquad \text{(15-ب)}$$

هندسه، بارگذاری و خواص ماده نسبت به محور x متقارن است. لذا فقط نیمه بالایی جسم ($0 \le y < \infty$)را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت ترک تحت مود I (مود بازشوندگی) خواهد بود. با حل معادله (15) تحت شرایط مرزی (16)

$$\sigma_{xx}(0,y)=0, \sigma_{xy}(0,y)=0, \qquad 0<y<\infty \qquad \text{(16-الف)}$$

$$\sigma_{xx}(h,y)=0, \sigma_{xy}(h,y)=0, \qquad 0<y<\infty \qquad \text{(16-ب)}$$

$$\sigma_{xy}(x,0)=0, \qquad 0\le x\le h \qquad \text{(16-ج)}$$

$$\sigma_{yy}(x,0)=p(x), \qquad a\le x\le b \qquad \text{(16-د)}$$

$$v(x,0)=0, \qquad 0\le x\le a\,, b\le x\le h \qquad \text{(16-ه)}$$

و استفاده از تبدیل فوریه، معادله انتگرالی منفرد بدست می‌آید. در این مقاله کرنل مساله ترک داخلی از مرجع [15] و کرنل ترک لبه‌ای از مرجع [18] محاسبه می‌شود. تفاوتی که در کرنل محاسبه شده در [15] و [18] وجود دارد در محاسبه بسط مجانبی کرنل در بی‌نهایت است. روابط (16- ج) و (16- ه) از تقارن مسئله نسبت به محور x به‌دست آمده‌اند. در رابطه (16-د) $p(x)$ توزیع تنش روی سطوح ترک است که از حل معادله (6) تحت شرایط مرزی (7) در $y=0$ و $a\le x\le b$ به‌دست آمده و خلاف جهت آن است.

3- حل عددی معادلات ناویر با روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

طبق روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته دامنه مساله به چند زیر دامنه یا المان تقسیم‌بندی می‌شود. شکل 2 یک المان و گره‌های مرزی، داخلی و گوشه را نشان می‌دهد. اعمال شرایط مرزی در روش المان مربعات دیفرانسیلی بسیار مهم و حساس است. اعمال شرط مرزی بر گره‌های مرزی به این صورت است که شرط پیوستگی و سازگاری در این گره‌ها در نظر گرفته می‌شود، به عبارت دیگر در گره‌های مرزی در دو المان مجاور هم، میدان جابجایی ثابت است. به دلیل این‌که گره های واقع در گوشه، روی هر دو لبه المان قرار دارند، شرط مرزی گره گوشه وابسته به شرط مرزی گره‌های مرزی مجاورش می‌باشد. در اعمال شرایط مرزی بر گوشه‌های المان روش‌های متعددی ارائه شده است. در این مقاله از روش ارائه شده در [26] برای شرایط مرزی گوشه استفاده می‌شود.

مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر تابع، که در تعدادی نقاط دامنه محاسبه شده‌اند، تقریب زد [31]. اگر تابع $f(x,y)$ با N نقطه مجزا در جهت x و M نقطه مجزا در جهت y مش‌بندی شود، طبق این روش مشتقات جزئی مرتبه اول آن به صورت روابط (17) و (18) خواهد بود

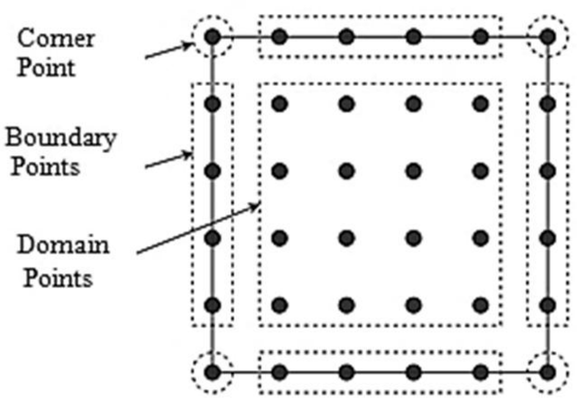

Fig. 2 An element and boundary, internal and corner points

شکل 2 یک المان و گره‌های مرزی، داخلی و گوشه

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_i\\y=y_j}}=f_x{}^{(1)}(x_i,y_j)=\sum_{K=1}^{N}a_{ik}^{x}f(x_k,y_j) \qquad \text{(17- الف)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_i\\y=y_j}}=f_y{}^{(1)}(x_i,y_j)=\sum_{K=1}^{M}a_{jk}^{y}f(x_i,y_k) \qquad \text{(17- ب)}$$

که در آن

$$a_{ij}^{x}=\frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)M^{(1)}(x_j)},\quad i\neq j$$

$$a_{ii}^{x}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}a_{ij}^{x},\quad M^{(1)}(x_i)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}(x_i-x_j) \qquad \text{(18- الف)}$$

$$a_{ij}^{y}=\frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i-y_j)P^{(1)}(y_j)},\quad i\neq j$$

$$a_{ii}^{y}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}a_{ij}^{y},\quad P^{(1)}(y_i)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}(y_i-y_j) \qquad \text{(18- ب)}$$

a_{ij}^{x} و a_{ij}^{y} به ترتیب ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه اول نسبت به x و y هستند. همچنین مشتقات جزئی مرتبه دوم مطابق رابطه (19) عبارتند از:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_i\\y=y_j}}=f_x{}^{(2)}(x_i,y_j)=\sum_{K=1}^{N}a_{ik}^{xx}f(x_k,y_j),$$

$$a_{ij}^{xx}=2\left(a_{ij}^{x}.a_{ii}^{x}-\frac{a_{ij}^{x}}{x_i-x_j}\right),\qquad a_{ii}^{xx}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}a_{ij}^{xx} \qquad \text{(19-الف)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_i\\y=y_j}}=f_y{}^{(2)}(x_i,y_j)=\sum_{K=1}^{M}a_{jk}^{yy}f(x_i,y_k),$$

$$a_{ij}^{yy}=m\left(a_{ij}^{y}.a_{ii}^{y}-\frac{a_{ij}^{y}}{y_i-y_j}\right),\qquad a_{ii}^{yy}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{M}a_{ij}^{yy} \qquad \text{(19-ب)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=x_i\\y=y_j}}=\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}a_{il}^{x}a_{jk}^{y}f(x_l,y_k) \qquad (20)$$

به‌دلیل این‌که امکان حل عددی مسئله در $0\le y<\infty$ وجود ندارد، بازه y به صورت محدود ($0\le y\le 5$) در نظر منظور می‌گردد. در این‌صورت شرایط مرزی در $y=5$ به‌صورت شرایط عاری از تنش ($\sigma_{xy}=0$ و $\sigma_{yy}=0$) خواهد بود. بنابراین، دامنه مسئله به صورت $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 5$ در نظر گرفته شده است. بازه $0\le x\le 1$ به دو زیر دامنه هر یک با $N-1$ قسمت (N گره) و بازه $0\le y\le 5$ به 2 قسمت به صورت $0\le y\le 1$ و $1\le y\le 5$ و هرکدام از زیر دامنه‌ها به $M-1$ قسمت تقسیم شده‌اند. با این کار می‌توان مش‌بندی در نقاط حوالی ترک را ریزتر و با فاصله گرفتن از ترک، مش‌بندی درشت‌تری انتخاب شود. حال فرمول روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، برای هرکدام از این زیر دامنه‌ها نوشته می‌شود. برای یک المان مشخص، با جای‌گذاری روابط (17-20) در (15) روابط (21) به‌دست می‌آیند

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{xx}u(x_k,y_j)+\sum_{k=1}^{M}a_{jk}^{yy}u(x_i,y_k)+ \frac{2}{\kappa-1}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}a_{jk}^{y}a_{il}^{x}v(x_l,y_k)+\beta\times \left[\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)\sum_{k=1}^{N}a_{ik}^{x}u(x_k,y_j)+\frac{3-\kappa}{\kappa-1} \sum_{k=1}^{M}a_{jk}^{y}v(x_i,y_k)\right]=0 \qquad \text{(21-الف)}$$

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\sum_{k=1}^{M} a_{jk}^{yy} v(x_i,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{xx} v(x_k,y_j) + \frac{2}{\kappa-1}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} a_{jk}^{y} a_{il}^{x} u(x_l,y_k) + \beta \times \left[\sum_{k=1}^{M} a_{jk}^{y} u(x_i,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} v(x_k,y_j)\right] = 0 \qquad \text{(21-ب)}$$

روابط (21)، برای $2 \le i \le N-1$ و $2 \le j \le M-1$ برقرار است. با اعمال روش مربعات دیفرانسیی تعمیم‌یافته روی شرایط مرزی، سایر معادلات به‌دست خواهند آمد. با جای‌گذاری روابط (17-20) در (16) روابط (22) حاصل می‌گردد.

$$\sum_{k=1}^{3M-2} a_{1k}^{y} u(x_i,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} v(x_k,y_1) = 0 \qquad \text{(22-الف)}$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_{1k}^{x} u(x_k,y_j) + \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\sum_{k=1}^{3M-2} a_{jk}^{y} v(x_1,y_k) = 0 \qquad \text{(22-ب)}$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_{Nk}^{x} u(x_k,y_j) + \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\sum_{k=1}^{3M-2} a_{jk}^{y} v(x_N,y_k) = 0 \qquad \text{(22-ج)}$$

$$\sum_{k=1}^{3M-2} a_{jk}^{y} u(x_N,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{Nk}^{x} v(x_k,y_j) = 0 \qquad \text{(22-د)}$$

$$\sum_{k=1}^{3M-2} a_{jk}^{y} u(x_1,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{1k}^{x} v(x_k,y_j) = 0 \qquad \text{(22-ه)}$$

$$(3-\kappa)\sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} u(x_k,y_1) + (\kappa+1) \times \sum_{k=1}^{3M-2} a_{1k}^{y} v(x_i,y_k) = \frac{\kappa-1}{\mu} p(x_i)\,, a < x_i < b \qquad \text{(22- و)}$$

$$v(x_i,y_1) = 0, \qquad 0 \le x_i \le a, b \le x_i \le h \qquad \text{(22-ز)}$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} u(x_k,y_{3M-2}) + \frac{\kappa+1}{3-\kappa} \times \sum_{k=1}^{3M-2} a_{3M-2,k}^{y} v(x_i,y_k) = 0 \qquad \text{(22-ح)}$$

$$\sum_{k=1}^{3M-2} a_{3M-2,k}^{y} u(x_i,y_k) + \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} v(x_k,y_{3M-2}) = 0 \qquad \text{(22-ط)}$$

لازم به ذکر است که در رابطه (22- و) عبارت $p(x_i)$ برابر است با منفی σ_{yy} که از رابطه (6) با ضرایب (8) به‌دست آمده است. در نهایت با حل این معادلات جبری میدان جابجایی در گره‌ها و در نتیجه میدان تنش بدست می‌آید. با داشتن میدان تنش در گره‌ها، ضریب شدت تنش نیز تعیین می‌گردد. ضرایب شدت تنش در رابطه (23) ارائه شده‌اند

$$K_I(b) = \lim_{x\to b^+}\sqrt{2(x-b)}\,\sigma_{yy}(x,0) = \sqrt{2(x_i-b)}\sigma_{yy}(x_i,0) \qquad \text{(23-الف)}$$

$$K_I(a) = \lim_{x\to a^-}\sqrt{2(a-x)}\,\sigma_{yy}(x,0) = \sqrt{2(a-x_j)}\sigma_{yy}(x_j,0) \qquad \text{(23-ب)}$$

در روابطه فوق x_i و x_j به ترتیب نزدیک‌ترین گره به نوک ترک واقع در $x=b$ و$x=a$ می‌باشند.

4-نتایج و بحث روی آن‌ها

برای بررسی و صحت سنجی مطالب فوق، یک مثال عددی حل می‌شود. در یک نوار از جنس سوپرآلیاژ زیرکونیا- رنه 41 با مشخصات جدول 1 [15] و توزیع خواص بصورت روابط (24) در نظر گرفته می‌شود

$$E(x) = E_1 e^{\beta x}, \beta h = \ln(E_2/E_1) = 0.37498 \qquad \text{(24-الف)}$$

$$\alpha(x) = \alpha_1 e^{\omega x}, \omega h = \ln(\alpha_2/\alpha_1) = 0.51283 \qquad \text{(24-ب)}$$

$$\lambda(x) = \lambda_1 e^{\eta x}, \eta h = \ln(\lambda_2/\lambda_1) = 0.37498 \qquad \text{(24-ج)}$$

دامنه مساله به چهار زیر دامنه یا المان مطابق شکل 3 تقسیم بندی و مش‌بندی داخل المان به صورت روابط (25) منظور می‌گردد:

$$x_i = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right) \quad i = 1,\dots,N \qquad \text{(25-الف)}$$

$$y_i = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{M-1}\pi\right)\right) \quad i = 1,\dots,M \qquad \text{(25-ب)}$$

چنانچه دمای نوار به اندازه $T(=20T_0, 10T_0, 5T_0)$ تغییر نماید، میدان تنش در حالت پایا از معادله (6) تعیین می‌گردد. این توزیع در شکل 4 نشان داده شده است. محور عمودی تنش حرارتی بی‌بعد شده (σ/σ_0) که در آن $\sigma_0 = E_1\alpha_1 T_0/(1-\nu)$ و T_0 دمایی است که در آن هیچ‌گونه تنشی در ماده وجود ندارد. محور افقی فاصله نسبی از محور y می‌باشد. شکل 5 نیز توزیع تنش حرارتی در حالت پایا به ازای $T(=0.05T_0, 0.5T_0)$ و $\beta = 1.6$ و $\omega = 0.7$ را نشان می‌دهد. تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد شده مود یک نسبت به $K_{I0} = \sigma_0\sqrt{\acute{a}}$ برای تنش‌های موجود در شکل 4 به صورت منحنی‌های شکل 6 ارائه شده‌اند. در این شکل، محور افقی نسبت نصف طول ترک به ضخامت نوار و محور عمودی ضریب شدت تنش بی‌بعد شده است. مرکز ترک در $c = (a+b)/2 = 0.3h$ قرار دارد و $\acute{a} = (a-b)/2$ نصف طول ترک است. تنش حرارتی در نوک ترک واقع در$x = b$ برای $T > T_0$ مطابق شکل 4 در $x = 0.54h$ بیشینه است.

از مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر مقدار طول ترک یعنی $\acute{a} = (0.54-0.3)h = 0.24h$ باشد، ضریب شدت تنش بیشینه است. این موضوع در شکل 6 کاملا مشهود است.

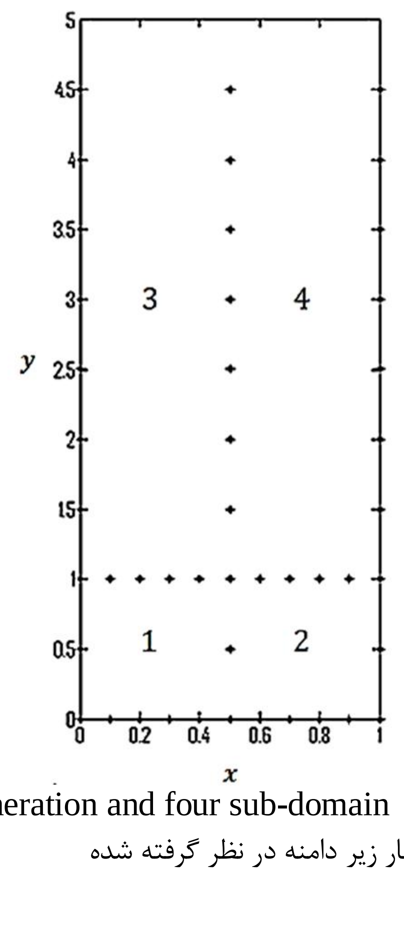

Fig. 3 Mesh generation and four sub-domain

شکل 3 مش‌بندی و چهار زیر دامنه در نظر گرفته شده

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.46.2]

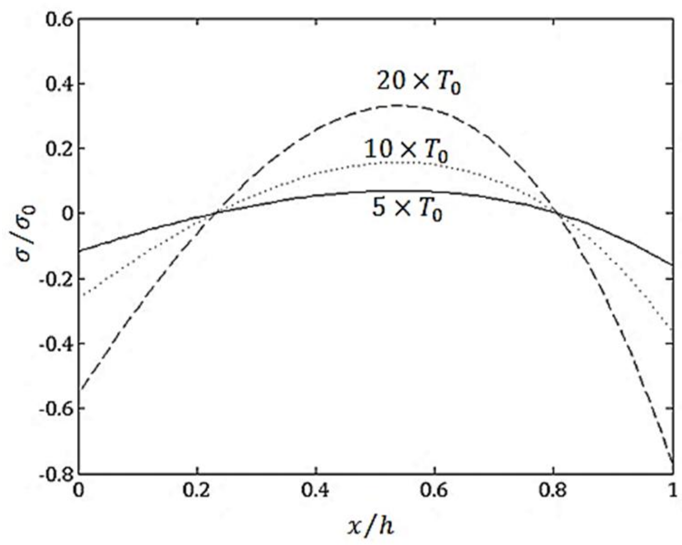

Fig. 4 Thermal stress distribution for various temperature $(T > T_0)$

شکل 4 توزیع تنش حرارتی به ازای مقادیر مختلف دما$(T > T_0)$

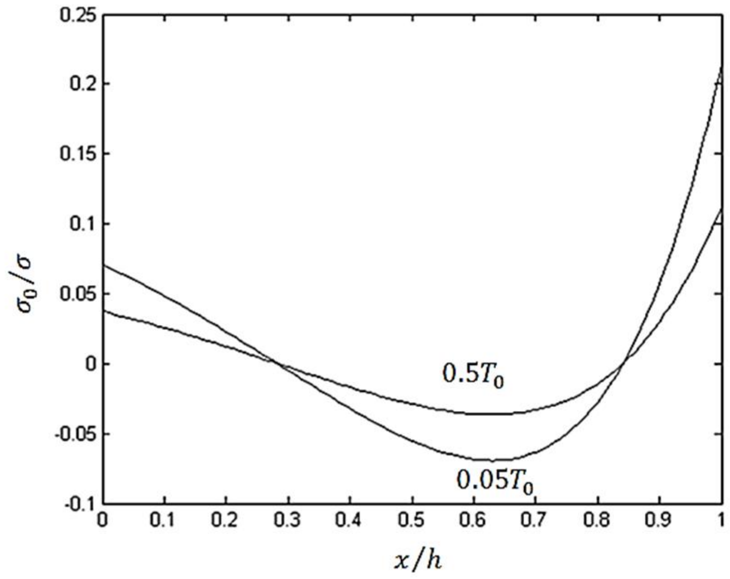

Fig. 5 Thermal stress distribution for various temperature $(T > T_0)$

شکل 5 توزیع تنش حرارتی به ازای مقادیر مختلف دما$(T < T_0)$

جدول 1 خواص مکانیکی و حرارتی زیرکونیا- رنه 41 [15]

Table 1 Mechanical and thermal properties of Zirconia-Rene 41[15]

α(1/K)	E(GPa)	ν	ماده
10×10^{-5}	151	0.33	زیرکونیا
1.67×10^{-5}	219.7	0.33	رنه 41

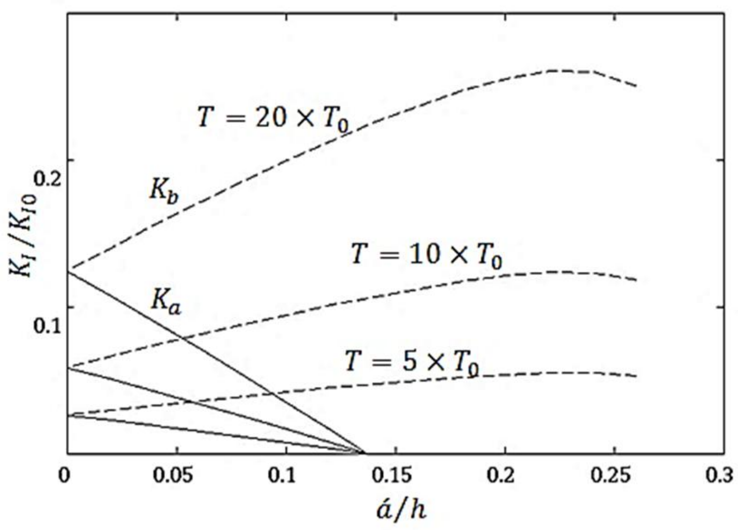

Fig. 6 Variation of mode I stress intensity factor for thermal stress distribution showed in fig. 4 for a crack in $c = (a+b)/2 = 0.3h$, K_b stress intensity factor in $x = b$, $K_a$stress intensity factor in $x = a$

شکل 6 تغییرات ضریب شدت تنش مود I برای توزیع تنش‌های ارائه شده در شکل 4 برای ترک واقع در $c = (a+b)/2 = 0.3h$ ، K_b ضریب شدت تنش در $x = b$ ، K_a ضریب شدت تنش در $x = a$

شکل 7 نمودار توزیع تنش حرارتی به ازای βهای متفاوت را نشان می‌دهد، این مقادیر برای $T = 20T_0$ رسم شده‌اند، به ازای تمامی Tهای بزرگ‌تر از T_0 رفتاری مشابه آن‌چه که در شکل 7 دیده می‌شود، نیز به دست می‌آید، ملاحظه می‌شود که با افزایش پارامتر β، بیشینه مقدار تنش افزایش می‌یابد، با توجه به شکل 7 برای $0.84 > x > 0.32$ با افزایش β تنش حرارتی افزایش خواهد یافت و برای مقادیر x خارج از این بازه افزایش β موجب کاهش تنش حرارتی می‌شود. نکته جالب توجه درباره تاثیر تغییرات β و T این است که با افزایش آن‌ها در بازه $0.84 > x > 0.32$ تنش حرارتی افزایش و در $x < 0.28$ و $x > 0.84$ تنش حرارتی کاهش می‌یابد، همچنین در بازه $0.32 > x > 0.28$ تاثیر تغییرات β و T بر تنش حرارتی عکس هم می‌باشد، بنابراین انتظار می‌رود که در $T > T_0$ اگر مرکز ترک واقع در $x = 0.3h$ و نصف طول آن، یعنی $\acute{a}$، بزرگتر از $(0.32 - 0.3)h = 0.02h$ باشد، افزایش β موجب افزایش ضریب شدت تنش و برای $0.02h > \acute{a} > 0$ افزایش β موجب کاهش ضریب شدت در نوک ترک واقع در $x = b$ شود. با توجه به مطالب فوق، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش β ضریب شدت تنش نوک ترک واقع در $x = a$ کاهش خواهد یافت.

صحت مطالب فوق در شکل 8 دیده می‌شود. در شکل 8، مرکز ترک در $c = (a+b)/2 = 0.3h$ قرار دارد و $\acute{a} = (a-b)/2$ نصف طول ترک است.

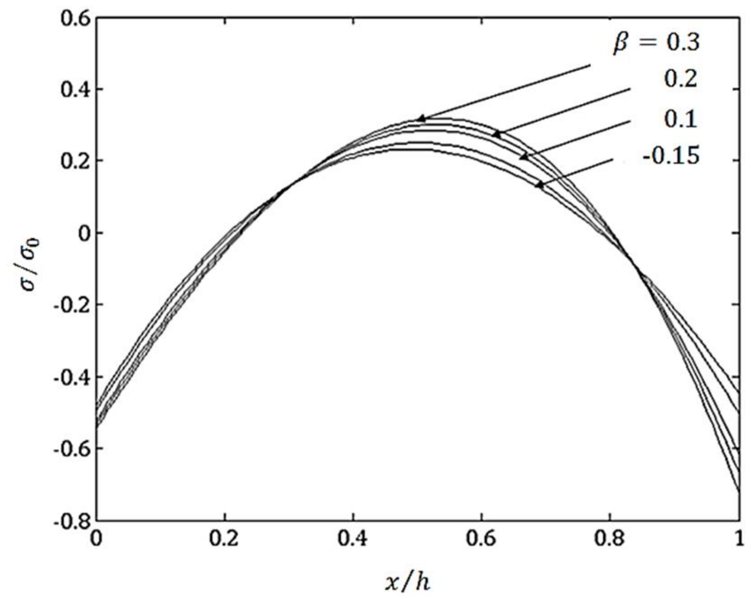

Fig. 7 Effect of nonhomogeneous parameter on thermal stress for uniform thermal distribution $T = 20T_0$

شکل7 تاثیر پارامتر ناهمگنی بر تنش‌های حرارتی برای توزیع دمای یکنواخت $T = 20T_0$

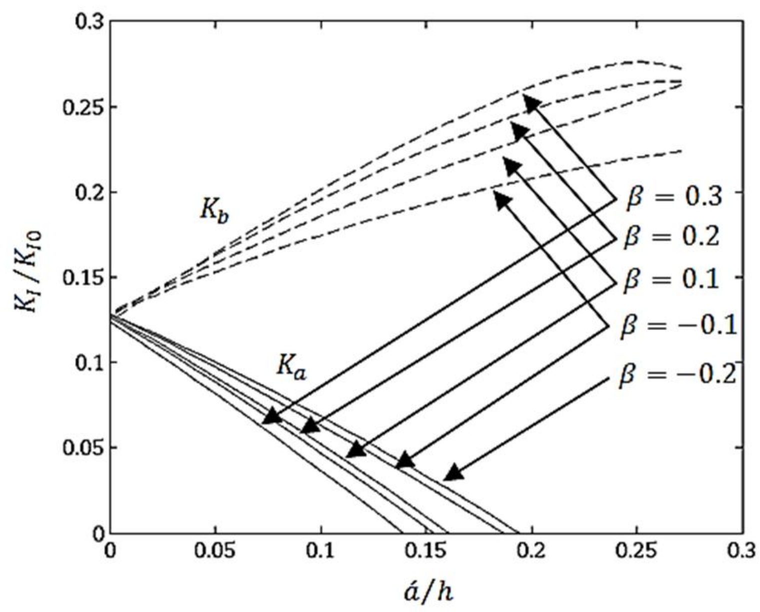

Fig. 8 Effect of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor for various crack length

شکل8 تاثیر پارامتر ناهمگنی بر ضریب شدت تنش برای طول ترک‌های متفاوت

ل 9 تغی ر از $\beta = 0.1$ تا و 10، از $\beta = -0.1$ تا $\beta = -0.4$ برای تـرک واقـع در a 0.2 و $b = 0.4$ رسـم شده است این شکل‌ها خط‌چین نشان دهنده‌ی K_{Ib} و خطوط پر نشـان - دهنده‌ی K_{Ia} است. در شکل‌های 9 و 10، کاملا مش و ت که با افـزایش پارامتر β، ضریب شدت تنش در ن ک ت ک واقع در $x = b$ افزایش و ضریب شدت تنش در نوک ترک واقع در $x = a$ کاهش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما و با افزایش β، ضریب شدت تنش روندی صعودی دارد.

به منظور بررسی صحت نتایج ارائه شده توسط معادلات انتگرالی، مساله در یک حالت خاص با روش روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم یا ه حل می‌شود.شکل 11 نتایج محاسبه ضریب شدت تـنش نـوک تـرک $x = b$ بـا فرانس ت یافته را نشان می‌دهـد. در ایـن شـکل $a = 0.2$ و $b = 0.4$ و $T = 10T_0$ است. نتایج حـل ایـن مسـاله بـا روش معادلات انتگرالی در شکل 9 آمده ارائه شده اسـت. بـرای بررسـی همگرایـی روش المان مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته دو روش وجـود دارد. یـک روش این است که تعداد المان‌ها زیاد شود درحالی‌که تعداد گره‌ها در المان‌ها ثابت باشد و روش دیگر این‌است که تعداد گره‌ها زیاد شود در حالی‌که تعداد المان-ها ثابت باشد. در این مقاله همگرایی با روش دوم با در نظر گرفتن چهار المان مطابق شکل 3 صورت گرفته‌است. همگرایی به‌این صورت انجام گرفتـه اسـت که تعداد گره‌ها در هر المان ابتدا 5 سپس 8 و در انتهـا 11 در نظـر گرفتـه شده‌است. در شکل 11 خط چین نشان‌دهنده نتایج بـه دسـت آمـده از حـل معادلات انتگرالی است. همچنین در این شکل نتایج به‌دست آمده بـا درنظـر گرفتن 5 گره با علامت ستاره، 8 گره با علامت دایره و 11 گـره بـا علامـت مثلث نشان داده شده‌است. در این شکل مشهود است کـه بـا افـزایش تعـداد گره‌ها به 11 نتایج حل عددی و حل مساله با معادلات انتگرالی تطابق دارد.

ش ک ! سر د نش بـی‌بعـد شـده بـرای تـرک لبـه‌ای بـه ازای $\beta = \ln(5)$ و $\omega = \ln(2)$ را برای تنش‌های ارائه شـده در شـکل 5 نشـان شکل دیر ضریب شدت تـنش بـی‌بعـد شـده بـه ازای $\beta = \ln(5)$ و $\omega = \ln(2)$ برای ترک داخلی ارائه شده‌است. مقایسه مقادیر بدست آمده از تحقیق حاضر با داده های اردوغان که در شکل‌هـای 12 و 13 ارائه شده اند حاکی از دقت قابل قبول روش ارائه ش ا توجـه بـه کل‌های 12 و 13 می‌توان نتیجه گرفت که برای $0 < T < T_0$ با ا T ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. به طوری‌که در حالت حدی $T/T_0 \to 0$ ضریب شدت تنش به صفر میل می‌کند. از طرفی با مقایسه دو نمـودار ارائـه ده در شکل‌های 12 و 13 در یک دمای ثابت، دیده می‌شود که بـا افـزایش β ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله تغییرات ضریب شدت تنش مود اول، به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر ناهمگنی در مواد ارتوتروپیک تحت تنش‌های حرارتی بررسی شده-است. مساله مورد نظر نواری ترک‌دار از جنس مواد تابعی ارتوتروپیک با طول محدود و با ضخامت و عرض نامحدود است. برای حل مساله ابتدا با معرفی دستگاه مختصاتی جدید و تغییر متغیر، ثوابت مستقل ماده ارتوتروپیک از 4 به 2 کاهش یافت به طوری‌که روابط بنیانی حاکم بر مساله ارتوترپیک به روابط بنیانی مساله ایزوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای کاهش یافت. سپس معادلات انتگرالی حاکم بر مساله با کرنل ارائه شده در [15] برای ترک داخلی و کرنل ارائه شده در [18] برای ترک لبه‌ای حل شده است. در یک حالت خاص به منظور صحه‌گذاری روابط از روش المان مربعات دیفرانسیلی

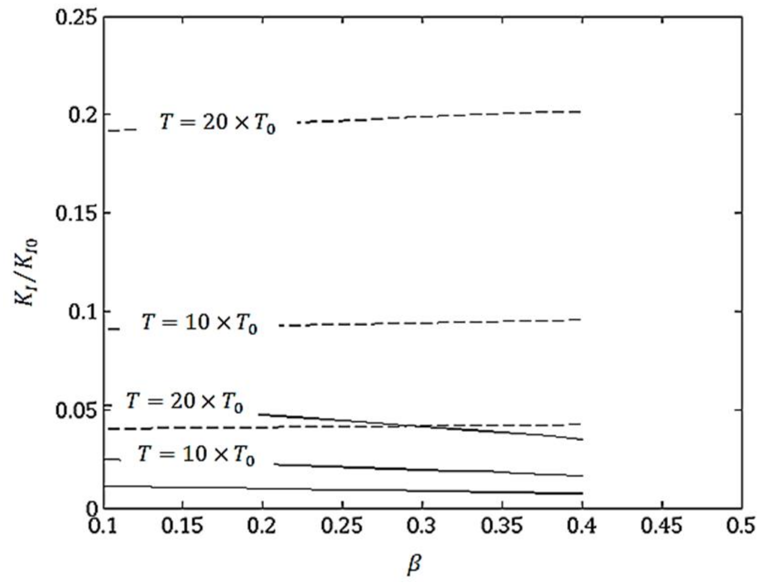

Fig. 9 Effect of variation of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor for various temperature $h = 1$ ،$C = 0.3h$, $\acute{a} = 0.1$ (β positive)

شکل9 تاثیر تغییرات پارامتر ناهمگنی بر ضریب شدت تنش در دماهای متفاوت با $h = 1$ ،$C = 0.3h$ و $\acute{a} = 0.1$ (β مثبت)

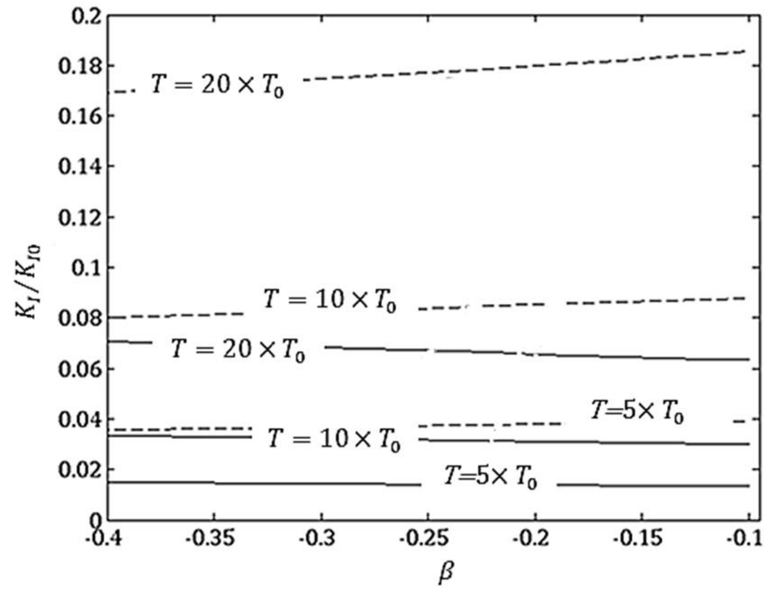

Fig. 10 Effect of variation of nonhomogeneous parameter on stress intensity factor for various temperature $h = 1$ ،$C = 0.3h$, $\acute{a} = 0.1$ (negative β)

شکل 10 تاثیر تغییرات پارامتر ناهمگنی بر ضریب شدت تنش در دماهای متفـاوت $h = 1$ ،$C = 0.3h$ و $\acute{a} = 0.1$ (β مثبت)

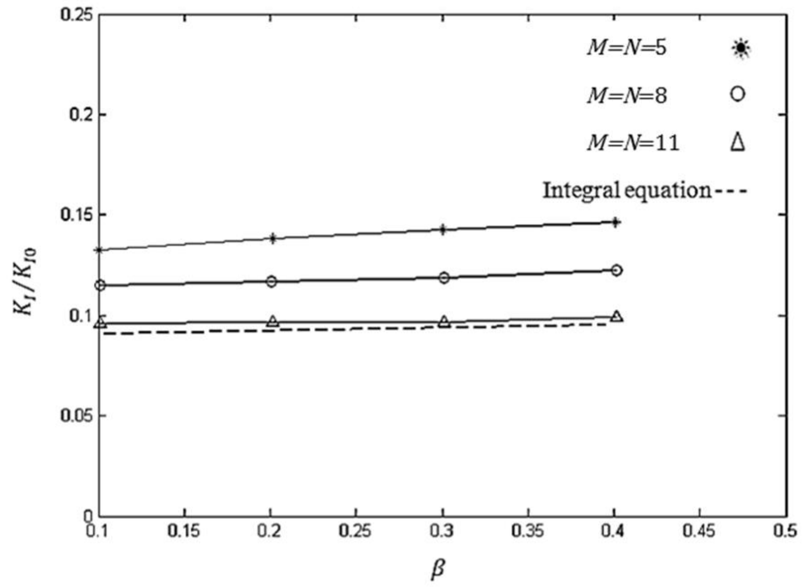

Fig. 11 Nondimensional stress intensity factor for internal crack with GDQEM

شکل 11 ضریب شدت تنش بی بعد برای ترک داخلی با روش GDQEM استفاده شده است.

نتایج نشان می‌دهد که:

1. تاثیر کرنل ارائه شده در [18] بر ضریب شدت تنش در مسائل ترک لبه‌ای بسیار ناچیز است

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.46.2]

2. تاثیر پارامتر ناهمگنی برضریب شدت تنش به موقعیت نوک ترک بستگی دارد.
3. بسته به موقعیت نوک ترک و دمای حالت پایدار، تاثیر β روی ضریب شدت تنش متفاوت است. در $T > T_0$ برای نوک ترک در $0.32 < x/h < 0.84$ ، افزایش β موجب افزایش K_I و در سایر نقاط موجب کاهش K_I می‌شود.
4. افزایش دما باعث افزایش تنش در $0.28 < x/h < 0.84$ و کاهش تنش در سایر نقاط می‌باشد. بنابراین ضریب شدت تنش بی‌بعد شده با افزایش دما در نقاط نوک ترک بین 0.28 تا 0.84 افزایش و در سایر نقاط کاهش می‌یابد و بالعکس.
5. تاثیر پارامتر β روی ضریب شدت تنش برای تغییر دماهای کم ناچیز است. به عبارت دیگر افزایش تغییر دما، تاثیر پارامتر β روی ضریب شدت تنش را افزایش می‌دهد.
6. نتایج نشان می‌دهد که روش المان مربعات دیفرانسیلی با تعداد گره بسیار کم، دقت بالایی دارد.

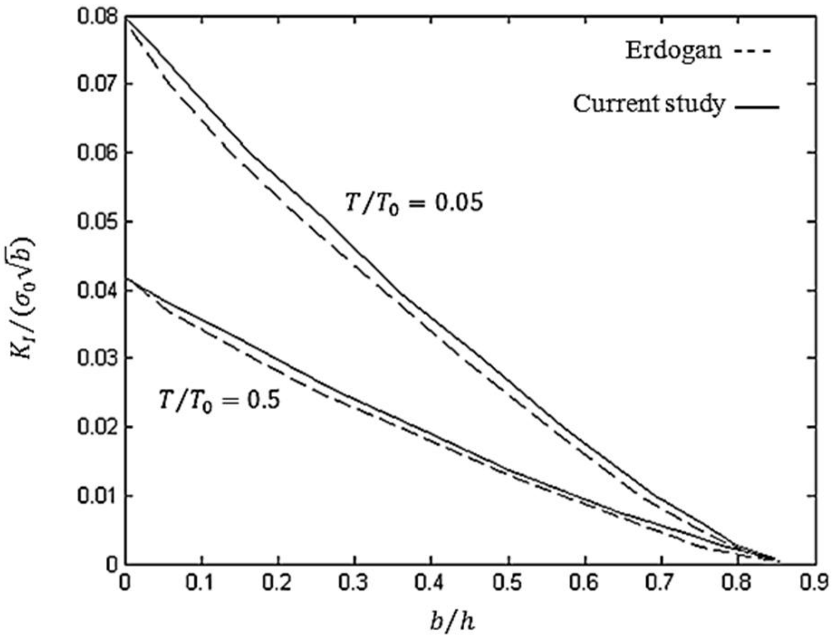

Fig 12. Nondimensional Stress intensity factor foe edge crack with $\omega = \ln(2)$, $\beta = \ln(5)$

شکل 12 ضریب شدت تنش بی‌بعد شده برای ترک لبه‌ای به ازای $\beta = \ln(5)$ و $\omega = \ln(2)$

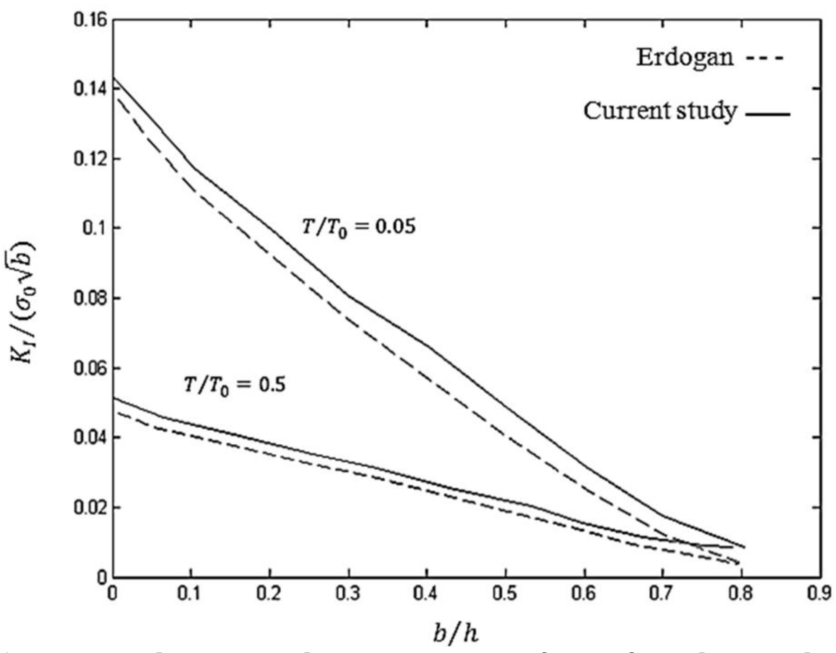

Fig 13. Nondimensional Stress intensity factor foe edge crack with $\omega = \ln(2)$, $\beta = \ln(10)$

شکل 13 ضریب شدت تنش بی‌بعد شده برای ترک لبه‌ای به ازای $\beta = \ln(10)$ و $\omega = \ln(2)$

6- مراجع

[1] N. Noda, T. Tsuji, Steady thermal stresses in a plate of functionally gradient material. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A,* Vol. 57, No. 533, pp. 98-103, 1991.

[2] Y. Arai, K. Kobayashi, M. Tamura. Elastic-plastic thermal stress analysis for optimum design of FGM. *Proc. Fourth National Symposium on Functionally Gradient Materials,* pp. 19-30, 1991.

[3] Z.H. Jin, N. Noda. Minimization of thermal stress intensity factor for a crack in a metal-ceramic mixture. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials,* Vol. 34, pp. 47-54, 1993.

[4] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics.* Vol.50, No. 14, pp. 609-631, 1983.

[5] N. Konda, F. Erdogan, The mixed mode crack problem in a homogeneous elastic plane, *Engineering Fracture Mechanic,* Vol. 47, pp. 533-545, 1994.

[6] P. Gu, R.J. Asaro, Cracks in functionally graded materials. *International Journal of Solids Structures,* Vol. 34, No. 1, pp. 1-17, 1997.

[7] N. Noda, Z.H. Jin. Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of functionally gradient material. *International Journal Solids Structure.* Vol. 30, No. 10, pp. 39-56, 1993.

[8] N. Noda. Thermal stress intensity for functionally graded plate with an edge crack. *Journal of Thermal Stress,* Vol. 20, pp. 273-387.

[9] W.A. Kaysser, B. Ilschner, FGM research activities in Europe, *MRS Bulletin,* Vol. 20, No. 1, pp. 22–26, 1995.

[10] S. Sampath, H. Herman, N. Shimoda, T. Saito, Thermal spray processing of FGMs. *MRS Bulletin,* Vol. 20, No. 1, pp. 27-31, 1995.

[11] M. Ozturk, F. Erdogan, Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium. *International Journal of Engineering Science,* Vol.40, pp. 869-883, 1997.

[12] M. Ozturk, F. Erdogan, The mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium. *International Journal of Fracture,* Vol.*98,* pp. 243-261, 1999.

[13] J. Chen, Z.X. Liu, Z.Z. Zou, Transient internal crack problem for a nonhomogeneous orthotropic strip(Mode I), *International Journal of Engineering and Science,* Vol.40, pp. 1761–1774, 2002.

[14] S. Itou, Thermal stress intensity factors of an infinite orthotropic layer with a crack. *International Journal of Fracture,* Vol. 103, pp. 279–291, 2000

[15] F. Erdogan, B.H. Wu, Crack problem in finctionally graded material layers under thermal stresses, *Journal of Thermal Stresses,* Vol. 19, pp. 237-265, 1996.

[16] F. Erdogan, B.H. Wu, The surface crack problem for a plate with functionally graded plate, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 64, pp. 449-456, 1997.

[17] S. Itou, Thermal stress intensity factors of an infinite orthotropic layer with a crack. *International Journal of Fracture,* Vol. 103, pp. 279–291, 2000.

[18] L.C. Gou, L.Z. Wu, T. Zeng, L. Ma, Mode I crack problem for a functionally graded orthotropic strip, *European Journal of Mechanics and Solids,* Vol. 23, pp. 219-234, 2004.

[19] E. Viola, N. Fantuzzi and A. Marzani, On the stress intensity factors of cracked beams for structural analysis. *Key Engineering Materials,* Vol. 229, pp. 143-163, 2013.

[20] Y. Li, E. Viola, Size effect investigation of a central interface crack between two bonded dissimilar materials. *Composite Structures,* Vol. 105, PP. 90-107, 2014.

[21] R. E. Bellman, J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Application,* Vol. 3, pp. 235-238, 1971.

[22] R. E. Bellman, B. G. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics,* Vol. 10, pp. 40-52, 1972.

[23] F. Civan, C.M. Sliepcevich, Differential quadrature for multidimensional problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 101, pp. 423-443, 1984.

[24] C. Shu, B.E. Richards, Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids,* Vol. 15, pp.791-798, 1992.

[25] C.N. Chen, A differential quadrature element method, *In: Proceeding of the 1st international Conference on Engineering Computation and Computer Simulation,* Vol. 1, pp. 25-34, 1995.

[26] C.N. Chen, A generalized differential quadrature element method, *Journal of Computional Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 188, pp. 553-566,2000.

[27] E. Viola, F. Tornabne, Vibration analysis of damaged circular arches with varying cross-section, *Structural Integrity and Durability,* Vol. 1, pp. 155-169, 2005.
[28] SH. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of free vibration of moderately thick cylindrical shells made of functionally graded materials using differential quadrature method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol.11, pp. 93-106, 2011. (in Persian فارسی)
[29] E. *Viola,* F. Tornabene, N. Fantuzzi. Generalized differential quadrature finite element method for cracked composite structures of arbitary shape, *Composite Structures,* Vol. 106, pp.815-834, 2013.
[30] S. Krenk, On the elastic constants of plane orthotropic elasticity. *Journal of Composite Materials,* Vol.13, pp. 108-117, 1979.
[31] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering,* Springer, pp. 29-35, 2000.