ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شناسایی غیرخطی تیر یکسرگیردار با استفاده از میرایی پاسخ ارتعاشات آزاد و حل با روش تبدیل دیفرانسیلی

سعید شکراللهی[1*]، مبین کاویان‌پور[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
2- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
* تهران، صندوق پستی 1774-15875، s_shokrollahi@mut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 26 آذر 1394
پذیرش: 01 بهمن 1394
ارائه در سایت: 26 بهمن 1394

کلید واژگان:
شناسایی غیرخطی
میرایی ارتعاشات آزاد غیرخطی
روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده
روش تکرار تغییرات توسعه‌یافته

چکیده

خطی بودن پاسخ ارتعاشی یک سیستم مکانیکی فرض ساده کننده‌ای است که برای بسیاری از مسائل واقعی ارتعاشات صادق نبوده و پاسخ سیستم با یک خطای قابل‌توجهی همراه می‌گردد. تعیین یک مدل مناسب ریاضی از مسائل غیرخطی در تحلیل ارتعاشاتی سیستم های مکانیکی بسیار ضروری و کارآمد خواهد بود. زمانیکه دامنه ارتعاشات بزرگ باشد غیرخطی از نوع هندسی به وجود می‌آید. در این مقاله شناسایی غیرخطی یک تیر باریک یکسرگیردار تحت اثر پاسخ ارتعاشات آزاد بررسی گردیده است. به دلیل نبود نیروی تحریک و اطلاعات بسیار کم از پاسخ این سیستم، روشهای شناسایی موجود ناکارآمد می‌باشند. در این پژوهش از یک رویکرد شناسایی جدید مبتنی بر ضریب تصحیح بهینه جملات دارای عدم قطعیت استفاده شده است و شناسایی با استفاده از میرایی ارتعاشات آزاد غیرخطی انجام شده است. همچنین برای حل این مسئله که شامل جملات غیرخطی هندسی و اینرسی است از روش تقریبی تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده با تقریب پد استفاده گردیده و فرکانس تشدید برای این مسئله بدست آمده است. همچنین فرکانس تشدید سیستم غیرخطی از روش تکرار تغییرات توسعه یافته نیز محاسبه شده و با فرکانس بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده مقایسه گردیده است. با مقایسه نتایج بدست آمده از روش تقریبی جدید و روش حل عددی رانگ-کوتای مرتبه 4 اعتبار روش حل اثبات گردیده است. در نهایت نتایج بدست آمده در مقایسه با نتایج آزمایش نشان دهنده دقت خوب مدل شناسایی شده برای تیر غیرخطی است.

Nonlinear identification of cantilever beam using free vibration response decay and solving with differential transform method

Saeed Shokrollahi*, Mobin Kavyanpoor

Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran
*P.O.B. 15875-1774, Tehran, Iran, s_shokrollahi@mut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 December 2015
Accepted 21 January 2016
Available Online 15 February 2016

Keywords:
Nonlinear identification
Nonlinear free vibration decay
Modified differential transform method
Generalized variational iteration method

ABSTRACT

The linearity is a simplifying assumption in most vibration problems of real mechanical systems which may lead to a considerable error in predicting the system dynamic response. Determining a suitable mathematical model for a nonlinear vibrating system is an important step in order to analyze the structural dynamics behavior efficiently. When the amplitude of vibration is large, the system is said to be geometrically nonlinear. In this paper, the nonlinear identification of a cantilever slender beam undergoing large amplitude free vibration has been investigated. Because of no excitation force in this situation and lack of information about its response, the existing identification methods are not efficient. In present research a new approach based on optimum correction factor of terms having uncertainty is used and identification has been done using nonlinear free vibration decay. In order to solve the geometrical and inertial nonlinear terms, the method of modified differential transform according to Padé approximation was used and resonant frequency determined. Also, the resonant frequency of nonlinear system is calculated by generalized variational iteration method and compared with the obtained frequency from the modified differential transform method. Comparison of the current results with those of 4^{th} order Runge-Kutta technique shows good agreement of the two approaches. Finally, obtained results compared with the experimental results showed good accuracy in identifying models for nonlinear beam.

1- مقدمه

تیر به عنوان عنصری ساده اما پر کاربرد در شاخه‌های گوناگون مهندسی از قبیل مکانیک، هوافضا و عمران به کار می‌رود. این عنصر می‌تواند به عنوان یک عضو اصلی و یا فرعی نقش مهمی را در استحکام و یکپارچگی سازه ایفا نماید، بنابراین مطالعه رفتار آن از اهمیت بسیار بالایی برخوردار بوده و به همین دلیل نیز پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه‌ی ارائه‌ی مدل مناسب و حل معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی و دینامیکی تیر، انجام شده است. یکی از مهمترین و در عین حال ساده‌ترین مدل‌ها، تیر اویلر-برنولی می‌باشد. این

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

S. Shokrollahi, M. Kavyanpoor, Nonlinear identification of cantilever beam using free vibration response decay and solving with differential transform method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 319-328, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

مدل که بر پایه‌ی فرضیات ساده کننده‌ای همچون عدم وجود تغییر شکل برشی عرضی و نیز با چشم‌پوشی از اینرسی دورانی بنا نهاده شده اساس مطالعات بسیاری از پژوهشگران بوده است.

با توجه به اهمیت بررسی پاسخ دینامیکی سازه در برخی از رشته‌های مهندسی، مطالعات در این حوزه توسعه فرآوانی یافته است. پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری خطی با شرایط مختلف مرزی و برای مواد مختلف همچون مواد کامپوزیتی، مواد مدرج تابعی و غیره به طور نسبتا جامعی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. امروزه با توجه به نیاز هرچه بیشتر صنایع مختلف بویژه صنعت هوافضا به برخورداری از سازه‌های سبکتر که به تبع آن انعطاف-پذیری هرچه بیشتر سازه را به همراه دارد مسئله‌ی تغییر شکل‌های بزرگ که نوعی رفتار غیر خطی هندسی به شمار می‌رود اهمیت جدی یافته و بنابراین رویکرد جدیدی در بررسی پاسخ غیرخطی سازه و در نظر گرفتن عوامل غیرخطی در طراحی یک سیستم مطرح شده است. نایفه و موک شرح نسبتا مفصلی از مبانی ارتعاشات غیرخطی در سیستم‌های مجزا و پیوسته ارائه نموده‌اند[1]. در [2, 3] بر روی ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های پیوسته همچون تیر مطالعات جامعی صورت گرفته است. مطالعه ارتعاشات غیرخطی تیر و به طور خاص رفتار غیر خطی هندسی که به دلیل خیزهای بزرگ اتفاق می‌افتد، مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است [4, 5]. اخیرا تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر کامپوزیتی، تیر با مشخصات مواد مدرج تابعی، تیر باریک شونده، تیر با سطح مقطع نامتقارن و غیره نیز مورد توجه بوده است [6-9]. روش‌های حل مسائل غیرخطی عموما بر پایه روشهای عددی و تقریبی همچون روش اغتشاشات [1]، روش هموتوپی [10]، روش تکرار تغییرات [11]، روش لیندستد-پوانکاره‌ی اصلاح شده [12]، روش تعادل هارمونیک [1, 13] و روش تعادل انرژی [14] می‌باشند.

روش تبدیل دیفرانسیلی [15] یک روش شبه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی می‌باشد. از این روش برای تحلیل ارتعاشات تیر تیموشینکو دارای ترک استفاده شده است [16, 17]. برای حل مسائل غیرخطی این روش با تعداد جملات پایین دچار واگرایی می‌گردد، به همین منظور در پژوهش حاضر از تبدیل لاپلاس و تقریب پد[1] [18] به منظور همگرایی در جملات پایین‌تر استفاده شده و روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده [19] توسعه داده شده است. همچنین این روش قابلیت خود را در حل مسائل ارتعاشات غیرخطی با وجود میرایی نشان داده است [20]. از سویی دیگر روش تکرار تغییرات به منظور کسب نتایج بهتر در حل مسائل ارتعاشات غیرخطی بدون میرایی توسعه یافته است [21]. قابلیت روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده در حل مسائل ارتعاشات غیرخطی میرا و سرعت همگرایی آن موجب شد تا در این مقاله از این روش به منظور کسب نتایج دقیق با سرعت همگرایی بالا برای اولین بار بر روی تیر غیرخطی استفاده شود. همچنین با رویکرد اشاره شده در [21] فرکانس تشدید تیر غیرخطی با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی اینرسی به صورت پارامتری استخراج شده و نتایج حاصل با روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح‌شده و روش حل عددی مورد مقایسه قرار گرفته است.

شناسایی غیرخطی در دینامیک سازه‌ها سابقه چندین ساله دارد، در [22] مروری بر این موضوع تا سال 2006 انجام شده است. برخی از روش‌ها در حوزه زمان و برخی در حوزه فرکانس یا ترکیبی از هر دو هستند. شناسایی می‌تواند پارامتری یا غیر پارامتری و برای سیستم یک درجه آزادی، سیستم چند درجه آزادی و سیستم پیوسته باشد. همچنین شناسایی می‌تواند بر اساس پاسخ دائم یا گذرای سیستم انجام شود [24,23].

از آنجاییکه در مواردی رفتار سازه تحت اثر شرایط کاری اهمیت پیدا می‌کند و نمی‌توان سازه را در آزمایشگاه و با تحریک مشخص به ارتعاش درآورد (ابعاد بزرگ و نیاز به تحریک بسیار قوی‌تر به عنوان مثال بال یک پرنده کاملا انعطاف پذیر با نسبت منظری بالا)، بررسی و شناسایی پارامترهای موثر در رفتار دینامیکی سازه تحت چنین شرایطی اهمیت پیدا می‌کند [25]. ارتعاشات آزاد نیز ماهیتی مشابه شرایط ذکر شده دارد. برای یک سازه همانند بال می‌توان با رهاسازی انتهای بال تحت اثر جابه‌جایی اولیه به پاسخ ارتعاشات آزاد آن دست یافت. از این رو شناسایی پارامترهای مدل غیرخطی تیر یکسر گیردار تحت اثر ارتعاشات آزاد میرا شده با جابه‌جایی‌های اولیه مختلف موضوعی است که در این مقاله به عنوان پژوهشی جدید به آن پرداخته شده است. این رویکرد الهام گرفته شده از روش میرایی تشدید غیرخطی [26] است که شناسایی را به این طریق با استفاده از ارتعاشات اجباری انجام داده است. پیش از این الگوریتم‌های شناسایی غیرخطی در حوزه دینامیک سازه مستقل از تحریک خارجی نبود، بنابراین می‌توان شناسایی غیرخطی با استفاده از میرایی ارتعاشات آزاد را یک نوآوری به حساب آورد. همچنین رویکردی جدید در فرآیند شناسایی برای اینگونه مسائل که اطلاعات کمی از آزمایش در اختیار است ارائه شده است که بر مبنای عدم قطعیت در پارامترهای غیرخطی و یافتن مقدار بهینه‌ی پارامتر است.

2- معادلات حاکم

با توجه به ابعاد تیر مورد مطالعه که ضخامت آن نسبت به سایر ابعاد بسیار کوچک است و طول نسبتا بلندی دارد، فرض اویلر-برنولی برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. مدل ریاضی استفاده شده برای این مسئله بر پایه فرضیات زیر بدست آمده‌اند:

1- از تغییر شکل برشی صرف نظر شده است؛
2- کرنش بزرگ وجود ندارد اما خیز بزرگ وجود دارد؛
3- بین تنش و کرنش قانون هوک برقرار است؛
4- از اینرسی محوری صرف نظر شده است؛
5- به دلیل کم بودن فاصله مرکز جرم از محور الاستیک تیر از اینرسی دورانی در مقابل اینرسی انتقالی صرف نظر شده است؛
6- با توجه به بالا بودن صلبیت پیچشی و خمشی جانبی در مقابل صلبیت خمشی عرضی، تنها پاسخ خمش عرضی در نظر گرفته شد؛
7- سطح مقطع، چگالی و مدول الاستیسیته در طول تیر بدون تغییر باقی می‌ماند؛

در غیاب نیروی محوری بزرگ فرض عدم انبساط برای تیر بلند و با شرایط مرزی این مسئله صادق است [2]. بر اساس رویکرد نیوتونی، معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی تیر یکسر گیردار نشان داده شده در شکل 1 با جرم بر واحد طول m، مدول الاستیسیته E، ممان اینرسی سطح I، ضریب میرایی بر واحد طول c و طول L به صورت زیر می‌باشد [2] (نحوه‌ی استخراج این معادله در پیوست (الف) ارائه شده است):

1- Padé approximants

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

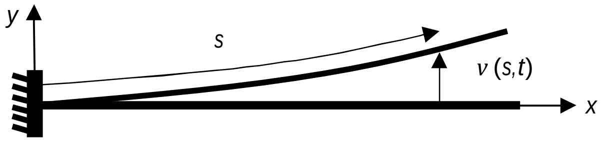

Fig. 1 Schematic of beam with large deflection
شکل 1 شماتیک تیر با جابه‌جایی بزرگ

$$m\ddot{v} + c\dot{v} = \left(\frac{v'\int_l^s \frac{m}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^s v'^2 ds\right) ds}{\sqrt{1-v'^2}}\right)' - \left(\frac{EI\left(\left(\sin^{-1} v'\right)'\right)'}{\sqrt{1-v'^2}}\right)' \tag{1}$$

در این رابطه s طول کمان، v جابه‌جایی عرضی تیر، بالانویس پرایم نشان دهنده مشتق نسبت به s و بالانویس نقطه مشتق نسبت به زمان است. اولین جمله در سمت راست معادله بالا مربوط به عامل غیرخطی اینرسی و جمله دوم ترکیبی از جمله‌های خطی و غیرخطی هندسی است که به واسطه‌ی جابه‌جایی‌های بزرگ به وجود می‌آیند. شرایط مرزی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$v(0,t) = 0, v'(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$v''(l,t) = 0, v'''(l,t) = 0 \tag{3}$$

با بسط تیلور جمله‌های غیرخطی معادله (1) رابطه زیر حاصل شده است (برای توضیحات بیشتر به پیوست (الف) رجوع شود):

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + EIv^{(4)} = \left(v'\int_l^s \frac{m}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^s v'^2 ds\right) ds + \cdots\right)' - EI\left(v'\left(v''v'\right)' + \cdots\right)' \tag{4}$$

به منظور اندازه‌گیری پاسخ ارتعاشات آزاد تیر، نیاز به اعمال شرایط اولیه است. شرایط اولیه اعمال شده برای تیر مورد مطالعه در این مسئله با جابه‌جایی اولیه انتهای تیر به وجود می‌آید. با اعمال این جابه‌جایی کل تیر به حالت شکل مود اول جابه‌جا می‌گردد و پس از رهاسازی نیز با شکل مود اول شروع به ارتعاش می‌کند. بنابراین سایر مودها با اعمال این شرایط اولیه تحریک نمی‌شوند و می‌توان مسئله را به صورت ارتعاشات یک درجه آزادی مورد مطالعه قرار داد. نتایج بدست آمده از حل این مسئله، این رویکرد را تایید می‌کند. برای حل این مسئله از روش گلرکین استفاده شده است:

$$v(s,t) = \sum_{j=1}^{N} \emptyset_j(s) q_j(t) \tag{5}$$

در این رابطه $\emptyset_j(s)$ شکل مود تیر، $q_j(t)$ مختصات تعمیم یافته و N تعداد مودهای در نظر گرفته شده است. تیر مورد مطالعه از جنس فولاد است و میرایی آن نیز ناچیز می‌باشد، به همین دلیل می‌توان فرض کرد که شکل مودهای آن به صورت شکل مود خطی غیرمیرای یک تیر یکسرگیردار به صورت زیر می‌باشد [5]:

$$\emptyset_j(s) = \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\cosh\frac{r_j s}{l} - \cos\frac{r_j s}{l} + \frac{\cos r_j + \cosh r_j}{\sin r_j + \sinh r_j}\left(\sin\frac{r_j s}{l} - \sinh\frac{r_j s}{l}\right)\right) \tag{6}$$

در این رابطه r_j ریشه‌های معادله $1+\cos(r)\cosh(r)=0$ می‌باشند؛ که مقدار آن برای مود اول 1/875 می‌باشد. با جایگذاری (5) و (6) در (4) و ضرب در $\emptyset_j(s)$ و انتگرال‌گیری در حوزه مکان (طول تیر) معادله حرکت در حوزه زمان و مکان از یکدیگر جدا می‌شوند و معادله نهایی تنها در حوزه زمان و به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d^2q}{dt^2}\left(c_1 + \left(c_2 q^2 + \cdots\right)\right) + \left(c_2 q\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \cdots\right) + c_3\frac{dq}{dt} + c_4 q + \left(c_5 q^3 + \cdots\right) = 0 \tag{7}$$

شرایط اولیه در معادله زمانی بالا با توجه به فیزیک مسئله به صورت جابه‌جایی اولیه و بدون سرعت اولیه می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$q(0) = A, \dot{q}(0) = 0 \tag{8}$$

در رابطه (7) ثوابت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c_1 = m\int_0^l \emptyset(s)^2 ds \tag{9}$$

$$c_2 = m\int_0^l \emptyset(s)\left(\emptyset'(s)\int_l^s\left(\int_0^s \left(\emptyset'(s)\right)^2 ds\right) ds\right)' ds \tag{10}$$

$$c_3 = c\int_0^l \emptyset(s)^2 ds \tag{11}$$

$$c_4 = EI\int_0^l \emptyset(s)\emptyset^{(4)}(s) ds \tag{12}$$

$$c_5 = EI\int_0^l \emptyset(s)\left(\emptyset'(s)\left(\emptyset'(s)\emptyset''(s)\right)'\right)' ds \tag{13}$$

با در نظر گرفتن شرط اولیه و حل این معادله پاسخ ارتعاشات آزاد تیر غیرخطی به دست می‌آید. برای حل معادله میرا از روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده استفاده شده است، برای بدست آوردن فرکانس تشدید نیز از روش تکرار تغییرات توسعه یافته استفاده شد.

3- حل معادلات حاکم

3-1- روش تبدیل دیفرانسیل

روش تبدیل دیفرانسیل یک تکنیک شبه عددی-تحلیلی است که بر اساس سری تیلور حول هر نقطه اختیاری در حوزه‌ی زمان فرمول‌بندی شده است [15]. با این روش، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به یک معادله بازگشتی تبدیل می‌شوند که در نهایت منجر به حل یک معادله جبری که ضرایب سری توانی پاسخ هستند، می‌گردد. این روش برای حل تقریبی ساده و مؤثر طیف وسیعی از مسائل غیرخطی مفید بوده و محاسبات با حجم زیاد و خطای گرد کردن وجود نخواهد داشت. تبدیل دیفرانسیلی تابع $q(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k q}{dt^k}\right]_{t=0} \tag{14}$$

تبدیل معکوس $F(k)$ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) t^k \tag{15}$$

برای تعداد جملات محدود $q(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n} F(k)t^k \tag{16}$$

در جدول 1 برخی از قواعد پایه‌ای روش تبدیل دیفرانسیل ارائه شده است.

3-1-1- تقریب پد

تقریب پد که به خوبی در [18] به مفاهیم آن اشاره شده، نسبت دو چند جمله‌ای است که ضرایب آن از بسط سری تیلور یک تابع بدست آمده است. تقریب پد یک سری توانی معمولی به شکل $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ به صورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \tag{17}$$

در این رابطه $P_L(x)$ و $Q_M(x)$ یک چند جمله‌ای به ترتیب حداکثر با درجه L و M هستند. با کمی محاسبات، رابطه زیر بدست می‌آید (برای جزئیات بیشتر به [18] مراجعه شود):

$$\left[\frac{L}{M}\right] = \det\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^{L} a_{j-M}x^j & \sum_{j=M-1}^{L} a_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum_{j=0}^{L} a_j x^j \end{bmatrix} \times \frac{1}{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}} \tag{18}$$

3-2- روش تکرار تغییرات توسعه یافته

ایده اصلی روش تکرار تغییرات توسعه یافته [21] با فرض وجود معادله دیفرانسیل کلی به شکل زیر:

$$Dq(t) + \mathbb{N}q(t) = e(t) \tag{19}$$

که D یک عملگر خطی، $\mathbb{N}$ یک عملگر غیرخطی و $e(t)$ یک جمله غیرهمگن کننده است. معادله (19) را می‌توان به شکل تابعی اصلاحی زیر بازنویسی کرد:

$$\chi[q(t)] = e(t) - \psi[q(t)] = h\big(q(t)\big) \tag{20}$$

در این رابطه ψ یک عملگر غیرخطی است که عوامل غیرخطی و باقیمانده عملگر خطی معادله (19) را در بر می‌گیرد. با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر نسبت به متغیر مستقل و اعمال تبدیل لاپلاس بر روی هر دو طرف معادله (20) به صورت معمول (توجه شود که $Lq(0)=0$ است) داریم:

$$P(s) \times Q(t) = H \tag{21}$$

$P(s)$ یک چند جمله‌ای با درجه بزرگترین مشتق در معادله (19) و $L[h(q(t))]=H$ است. همچنین داریم:

$$B(s) = \frac{1}{P(s)} \tag{22}$$

$$L[b(t)] = B(s) \tag{23}$$

با قرار دادن روابط (22) و (23) در (21) و با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس، رابطه تکرار بازگشتی زیر استخراج می‌شود:

$$q_{n+1}(t) = q_0(t) + \int_0^t h\big(q_n(\mu)\big)b(t-\mu)d\mu \tag{24}$$

در این رابطه $q_0(t)$ حل اولیه با یا بدون پارامتر مجهول است. در این روش، مسائل به صورت اولیه با مجهولات در دسترس تقریب زده می‌شوند، تا این مرحله وابستگی به پارامترهای کوچک وجود ندارد، بنابراین این روش می‌تواند بر روی مسائل غیرخطی قوی بدون خطی سازی یا اغتشاشات کوچک اعمال شود. این روش تقریبی به سرعت به سمت حل دقیق همگرا می‌شود.

3-3- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده

با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل بر روی معادله (7) با در نظر گرفتن تنها جملات اول بسط تیلور عبارات غیرخطی و ثوابت (9) تا (13) که مقادیر آن برای تیر فولادی به طول 30 سانتیمتر، عرض 2.5 سانتیمتر، ضخامت 0.8 میلیمتر، چگالی 7650 کیلوگرم بر متر مکعب و مدول الاستیسیته 211 گیگاپاسکال در جدول 2 ارائه شده است، رابطه بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} F(k+2) = {} & \frac{1}{\big(c_1 + c_2F^2(0)\big)(k+2)(k+1)} \times \\ & \Bigg(-c_2\Bigg(\sum_{k_2=1}^{k}\sum_{k_1=1}^{k_2}\big(F(k_1)F(k_2-k_1)(k-k_2 \\ & + 2)(k-k_2+1)F(k-k_2+2)\big)\Bigg) \\ & - c_2\Bigg(\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\big(F(k_1)(k_2-k_1+1)F(k_2 \\ & - k_1+1)(k-k_2+1)F(k-k_2+1)\big)\Bigg) \\ & - c_3(k+1)F(k+1) - c_4F(k) \\ & - c_5\Bigg(\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\big(F(k_1)F(k_2 \\ & - k_1)F(k-k_2)\big)\Bigg)\Bigg) \end{aligned} \tag{25}$$

$$F(0) = A, \dot{F}(0) = 0 \tag{26}$$

به کمک معادلات (16)، (25) و (26) حل سری زیر با در نظر گرفتن تعداد

جدول 1 برخی قواعد پایه‌ای روش تبدیل دیفرانسیل

Table 1 Some basic transformation rules of the differential transform method

تابع اصلی	تابع تبدیل شده
$\alpha u(t) \pm \beta w(t)$	$\alpha U(k) \pm \beta W(k)$
$u(t)w(t)$	$\sum_{k_1=0}^{k} U(k)W(k-k_1)$
$u(t)w(t)z(t)$	$\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2} U(k_1)W(k_2-k_1)Z(k-k_2)$
$\frac{d^p u(t)}{dt^p}$	$\frac{(k+p)!}{k!}U(k+p)$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

7 جمله بدست می‌آید:

$$q(t) = 0.0243 - 19.111t^2 + 2.511t^3 + 2327.898t^4 - 274.364t^5 - 11615.193t^6 - 53710.688t^7 \tag{27}$$

همانطورکه مشخص است، پاسخ بدست آمده پریودیک نیست. مقایسه سری بدست آمده در معادله (27) و حل عددی معادله غیرخطی (7) با روش رانگ-کوتا مرتبه 4 در شکل 2 ارائه شده است. لازم به ذکر است در این رابطه مقدار اولیه نمونه A برابر با 0.0243 است که از اندازه‌گیری جابه‌جایی استاتیکی نوک تیر در هنگام آویختن وزنه به انتهای آن و قرار دادن مقدار بدست آمده در رابطه (5) به ازای زمان صفر بدست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که همگرایی تنها در یک ناحیه بسیار کوچک اتفاق می‌افتد.

با استفاده از رویکرد تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده نتایج به صورت قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده می‌شود. بنابراین با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی سری (27) داریم:

$$L(q(t)) = \frac{0.0243}{s} - \frac{38.2221}{s^3} + \frac{15.0670}{s^4} + \frac{55869.5577}{s^5} - \frac{32923.7152}{s^6} - \frac{8.3629\times10^6}{s^7} - \frac{2.7070\times10^8}{s^8} \tag{28}$$

با استفاده از مفهوم روش شرح داده شده در [19] s با $1/t$ جایگزین می‌شود، با محاسبه تقریب پد [4/4] (و [3/3] به منظور مقایسه) و جایگزینی t=1/s روابط زیر بدست می‌آید:

$$\left[\frac{3}{3}\right] = \frac{0.0243s^2 + 0.0737s - 2.6554}{s^3 + 3.0341s^2 + 1462.9015s + 4150.2786} \tag{29}$$

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{0.0243s^3 + 0.0372s^2}{s^4 + 1.5323s^3 + 18858.5292s^2} \cdots \cdots \frac{+420.275s + 170.7490}{+8812.3486s + 2.7348\times10^7} \tag{30}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس بر روی معادلات (29) و (30) و جداکردن بخش حقیقی، پاسخ در حوزه زمان تقریبی اصلاح شده به ترتیب برابر است با:

$$q(t) = -0.0018\exp(-2.8380t) + 0.02612\exp(-0.09801t)\cos(38.2404t) - 0.00006779\exp(-0.09801t)\sin(38.2404t) \tag{31}$$

$$q(t) = -1.7106 \times 10^{-5}\exp(-0.5626t)\cos(131.4328t) + 6.1067 \times 10^{-8}\exp(-0.5626t)\sin(131.4328t) + 0.02432\exp(-0.2034t)\cos(39.7884t) + 0.0001239\exp(-0.2034t)\sin(39.7884t) \tag{32}$$

در شکل 3 معادلات بدست آمده برای مختصات تعمیم یافته با حل بدست آمده از روش عددی رانگ-کوتا مرتبه 4 به منظور مقایسه ارائه

جدول 2 مقدار ثوابت معادله (7)

Table 2 Constants values of Eq. (7)

پارامتر	مقدار	واحد
c_1	0.2182	kg/m
c_2	26.5507	kg/m
c_3	0.0922	1/ms
c_4	343.5951	Nm^2
c_5	40796.6604	Nm^2

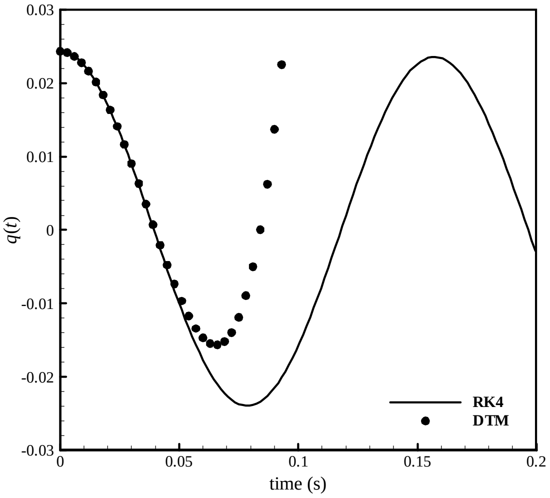

Fig. 2 The comparisons of the time responses of 4th order Runge–Kutta and differential transform method

شکل 2 مقایسه پاسخ زمانی با روش رانگ-کوتای مرتبه 4 و روش تبدیل دیفرانسیل

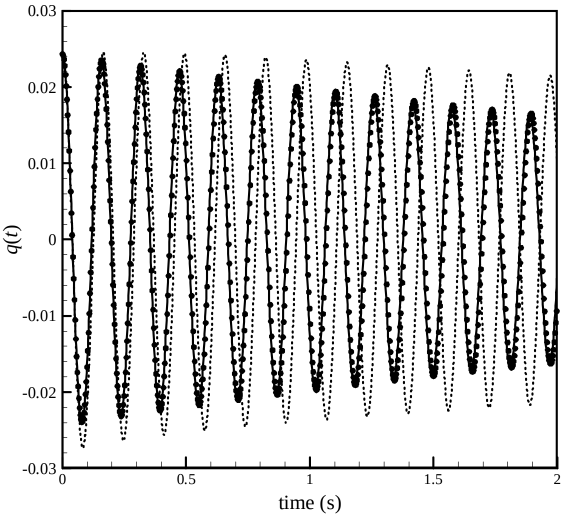

Fig. 3 The time responses (4th order Runge–Kutta (solid line), modified differential transform method (dashed line padé [3/3] and circle padé [4/4])

شکل 3 پاسخ زمانی (خط پر روش رانگ-کوتا مرتبه 4، خط تیره روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده با تقریب پد [3/3] و دایره‌ها روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده با تقریب پد [4/4])

شده‌اند. نتایج حاکی از دقت تقریب پد [4/4] نسبت به تقریب [3/3] می‌باشد.

3-4- اعمال روش تکرار تغییرات توسعه‌یافته

به منظور استخراج فرکانس تشدید نامیرای تیر غیرخطی به صورت پارامتری از روش تکرار تغییرات توسعه‌یافته استفاده شده است. برای استفاده از روش تکرار تغییرات توسعه‌یافته، معادله حرکت (7) با در نظر گرفتن جملات اول بسط تیلور عبارات غیرخطی به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\mathcal{F}(q(t)) = \omega^2 q(t) - \frac{1}{c_1}\left(c_4 q + c_5 q^3 + c_2\left(q^2\frac{d^2q}{dt^2} + q\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right)\right) \tag{33}$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

با اعمال روش تکرار تغییرات توسعه یافته، رابطه‌ی تکرار بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\omega^2q(t)=\mathcal{F}\big(q(t)\big) \tag{34}$$

که در این رابطه:

$$q_{n+1}(t)=q_0(t)+\frac{1}{\omega}\int_0^t\mathcal{F}\big(q_n(\mu)\big)\sin(\omega(t-\mu))d\mu \tag{35}$$

به منظور تخمین فرکانس زاویه‌ای ω فرض می‌شود اولین تخمین از پاسخ مسئله به صورت هارمونیک و به شکل زیر باشد:

$$q_0(t)=A\cos(\omega t) \tag{36}$$

در این رابطه A مقدار اولیه می‌باشد. با جایگذاری رابطه (36) در (34) و قرار دادن (36) و (34) در (35) حاصل برای اولین جمله ($q_1(t)$) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}q_1(t)=&\frac{-At\sin(\omega t)}{32c_1\omega}(12A^2c_5+16c_4\\&-(8A^2c_2+16c_1)\omega^2)\\&-\frac{A^3(2c_2\omega^2-c_5)}{32c_1\omega^2}(\cos(3\omega t)-\cos(\omega t))\end{aligned} \tag{37}$$

پاسخ بدست آمده به شرطی نوسانی خواهد بود که جملات غیر نوسانی که منجر به بسیار بزرگ شدن دامنه پاسخ می‌شوند، حذف گردند. این شرط با مساوی صفر قرار دادن ضریب t (جمله اول در رابطه (37)) محقق می‌گردد. با اعمال این شرط مقدار ω به عنوان فرکانس تشدید سیستم غیرخطی نامیرا به صورت رابطه پارامتری زیر بدست می‌آید (لازم به ذکر است بخش دوم رابطه (37) پاسخ نامیرا است که قابل استفاده نیست و برای پاسخ میرا از رابطه (32) استفاده می‌شود):

$$\omega=\sqrt{\frac{3A^2c_5+4c_4}{2A^2c_2+4c_1}} \tag{38}$$

در شکلهای 4 تا 6 تغییرات نسبت فرکانس سیستم غیرخطی به خطی که با پارامتر λ معرفی می‌شود، با ضرایب جملات غیرخطی c_2 و c_5 و مقدار اولیه A نشان داده شده است. در شکل‌های 5 و 6 به ترتیب پارامترهای c_5 و c_2 صفر در نظر گرفته شده است. در جدول 3 مقایسه‌ای بین فرکانس تشدید بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده (رابطه (32))، روش تکرار تغییرات (رابطه (38)) و روش رانگ-کوتا مرتبه 4 انجام شده است.

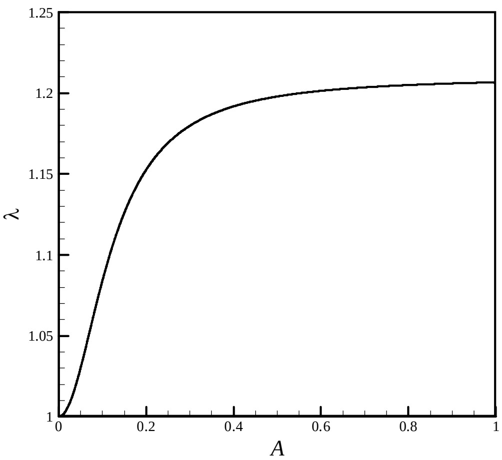

Fig. 4 Variations of nonlinear to linear resonant frequency ratio to the initial value

شکل 4 تغییرات نسبت فرکانس تشدید غیرخطی به خطی با مقدار اولیه

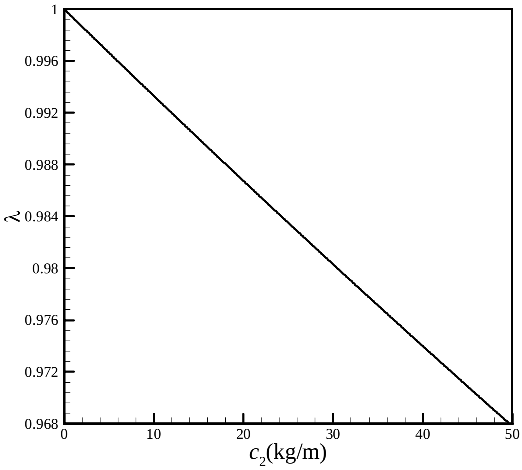

Fig. 5 Variations of nonlinear to linear resonant frequency ratio to the c_2

شکل 5 تغییرات نسبت فرکانس تشدید غیرخطی به خطی با پارامتر c_2

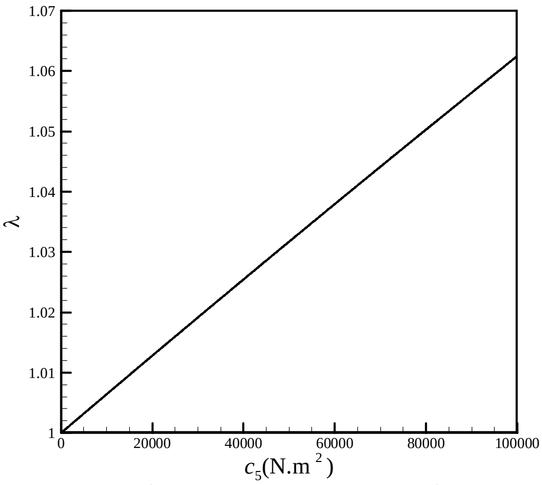

Fig. 6 Variations of nonlinear to linear resonant frequency ratio to the c_5

شکل 6 تغییرات نسبت فرکانس تشدید غیرخطی به خطی با پارامتر c_5

جدول 3 مقایسه فرکانس تشدید تیر غیرخطی با روش‌های مختلف (مقدار اولیه 0.0243)

Table 3 Comparison the resonant frequency of nonlinear beam with different methods (initial value = 0.0243)

روش	مقدار (هرتز)	درصد خطا نسبت به روش رانگ-کوتا مرتبه 4
رانگ-کوتا مرتبه 4 (تبدیل فوریه سریع پاسخ زمانی)	6.349	0
تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده	6.332	0.26
تکرار تغییرات توسعه یافته	6.366	-0.27

4- شناسایی مدل غیرخطی تیر

به منظور دستیابی به مدلی با کمترین اختلاف در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی از رویکرد شناسایی به این صورت استفاده می‌شود که ابتدا در یک مرحله ضرایب مربوط به جمله‌های خطی در معادله (7) با استفاده از آزمایش ارتعاشات خطی با دامنه پایین بدست می‌آید. در گام بعدی ضرایب مربوط به جمله‌های غیرخطی بدست خواهند آمد که c_2 و c_5 می‌باشند. با توجه به ناچیز بودن اثرات جمله‌های مرتبه بالاتر، این جمله‌ها از معادلات

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

حذف شده و اثرات آنها به صورت یک ضریب تصحیح به ضرایب c_2 و c_5 اعمال می‌گردند. بنابراین ضرایب جدید به این صورت معرفی می‌گردند:

$$c_2^* = \bar{c}_2 c_2 \quad (39)$$

$$c_5^* = \bar{c}_5 c_5 \quad (40)$$

با قراردادن معادلات (39) و (40) در (25) و دنبال کردن رویکرد تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده و اعمال تقریب پد [4/4] پاسخ زمانی تیر با ضرایب غیرخطی جدید بدست می‌آید. در نتیجه پاسخ زمانی تیر تابعی از ضرایب تصحیح $\bar{c}_2$ و $\bar{c}_5$ خواهد شد.

پیدا کردن مقادیر بهینه ضرایب تصحیح بدون بعد $\bar{c}_2$ و $\bar{c}_5$ به طوری که نتایج تئوری و آزمایش کمترین خطا را داشته باشند، مبنای روش شناسایی مورد استفاده در این پژوهش می‌باشد. نشان داده شده است که برای مود اول یک تیر غیرخطی، غیرخطی اینرسی تاثیر کمی دارد و اثر غالب ناشی از غیرخطی هندسی است [5].

بنابراین از اثرات ضریب تصحیح $\bar{c}_2$ صرف نظر می‌شود و این ضریب برابر با یک در نظر گرفته می‌شود. شناسایی به این طریق و با استفاده از پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم از این رو حائز اهمیت است که می‌تواند مبنایی برای ایجاد روشهای شناسایی غیرخطی با کمترین اطلاعات از سیستم مورد مطالعه باشد. عملیات شناسایی به این روش، مستقل از تجهیزات کامل آزمایشگاهی می‌باشد و امکان شناسایی را در حین کار سیستم فراهم می‌کند.

5- مطالعه آزمایشگاهی

مطالعه آزمایشگاهی در این مقاله بر روی تیری فولادی با مشخصات شرح داده شده در بخش 3-3 این مقاله انجام شده است. به منظور استخراج پارامترهای خطی معادله (38) آزمایش ارتعاشات با دامنه پایین انجام شد. پاسخ زمانی شتاب در انتهای تیر توسط یک سنسور پیزوالکتریک ساخت شرکت پی سی بی[1] اندازه‌گیری شد. با گرفتن تبدیل فوریه سریع از پاسخ زمانی بدست آمده از این آزمایش مقدار فرکانس طبیعی مربوط به مود اول تیر بدست آمد (شکل 7 مشاهده شود). همچنین مقدار مربوط به ضریب میرایی خطی نیز از این آزمایش بدست آمد. راه اندازی آزمایش[2] در شکل 8 ارائه شده است. مقادیر استخراج شده از آزمایش خطی در جدول 4 ارائه شده است.

به منظور انجام آزمایش رفتار غیر خطی هندسی، وزنه‌هایی به انتهای تیر آویزان گردید و سپس به طور ناگهانی رها گردید و پاسخ زمانی شتاب در انتهای آن ثبت شد. این آزمایش برای سه وزن مختلف انجام شد. حالت اول از وزنه 37 گرمی، حالت دوم وزنه 148 گرمی و حالت سوم از وزنه 222 گرمی استفاده شد.

6- نتایج و بحث

معادله حرکت تیر با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل اصلاح شده حل شد و فرکانس تشدید و پاسخ زمانی انتهای تیر بدست آمد.

سپس با دو بار مشتق گیری عددی نسبت زمان شتاب بدست آمد تا قابل مقایسه با نتایج شتاب حاصل از آزمایش باشد. نتایج بدست آمده از حل معادله حاکم در مقایسه با نتایج آزمایش نشان دهنده‌ی تاثیر زیاد پارامترهای مورد مطالعه بر روی افزایش دقت پاسخ مدل شناسایی شده می‌باشد. در شکلهای 9 و 10 به ترتیب نتایج مدل خطی با نتایج آزمایش و مدل غیرخطی

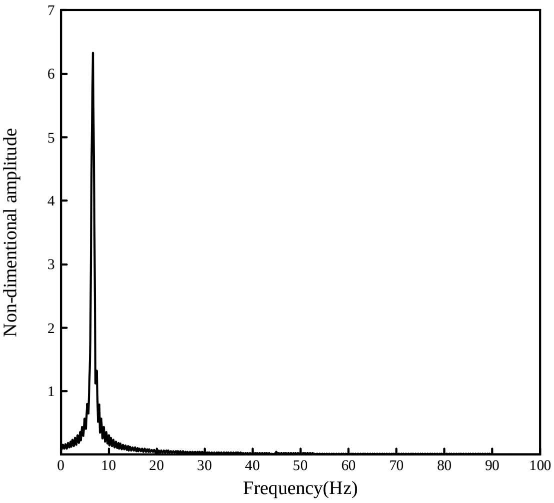

Fig. 7 FFT of linear time history

شکل 7 تبدیل فوریه سریع پاسخ زمانی خطی

Fig. 8 Test set-up (beam with initial displacement)

شکل 8 راه اندازی آزمایش (تیر با جابه‌جایی اولیه)

جدول 4 پارامترهای بدست آمده از آزمایش خطی

Table 4 The obtained parameters from the linear test

پارامتر	مقدار
فرکانس تشدید (هرتز)	6.302
میرایی (1/ms)	0.0922

شناسایی شده برای حالت سوم (وزنه 222 گرمی) ارائه شده است. همچنین با مطالعه‌ای پارامتری که بر روی فرکانس تشدید تیر غیرخطی انجام شد، نشان داده شد که در یک بازه منطقی از تغییرات شرط اولیه، فرکانس تشدید تا 20 درصد تغییرات خواهد داشت و برای مقادیر بالای شرط اولیه به عدد 20 درصد همگرا می‌گردد. همچنین نتایج بدست آمده از شکلهای 4 و 6 روند سخت شوندگی را نشان می‌دهند. البته با تغییرات منطقی مقادیر ضرایب غیرخطی اینرسی و هندسی به ترتیب 4 تا 6 درصد تغییرات در فرکانس تشدید مشاهده گردید (شکل 5 و 6 مشاهده شود) که در حالت اول روند کاهشی و در مورد دوم روند افزایشی بوده است و با توجه به اینکه فرکانس تشدید نسبت سفتی به اینرسی می‌باشد این رفتار منطقی است. نتایج بدست آمده از مدل شناسایی شده تطابق خوبی را با نتایج آزمایش در سایر شرایط اولیه نشان می‌دهد. به همین منظور نتایج بدست آمده از مدل خطی و غیرخطی شناسایی شده در شکل‌های 11 تا 14 ارائه شده است. در حالت اول با توجه به اینکه مقدار جابه‌جایی اولیه کم می‌باشد، پاسخ خطی و غیرخطی به هم نزدیک می‌باشند، اما در دو حالت دیگر این اختلاف به راحتی قابل مشاهده است. مقادیر شناسایی شده برای پارامترهای مورد نظر در جدول 5 ارائه شده است.

1- PCB
2- Test set-up

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

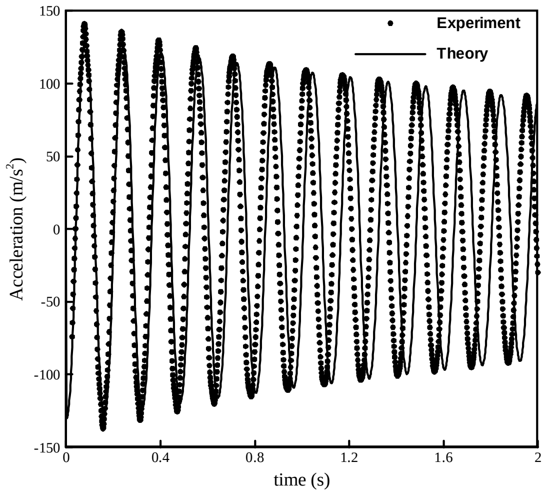

Fig. 9 Beam tip acceleration time response (initial nonlinear model - 222 gr mass)

شکل 9 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل غیرخطی اولیه - وزنه 222 گرمی)

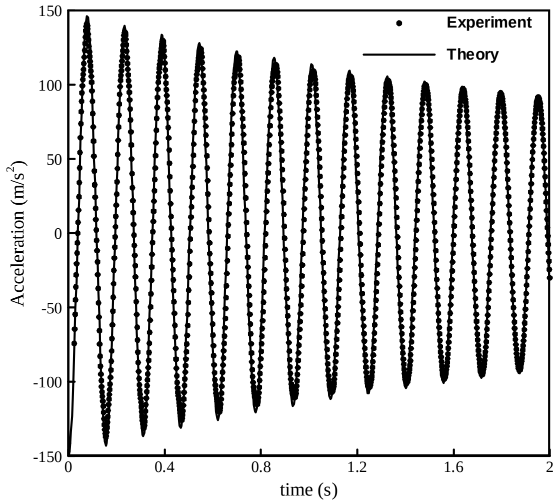

Fig. 10 Beam tip acceleration time response (the identified nonlinear model - 222 gr mass)

شکل 10 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل شناسایی شده غیرخطی - وزنه 222 گرمی)

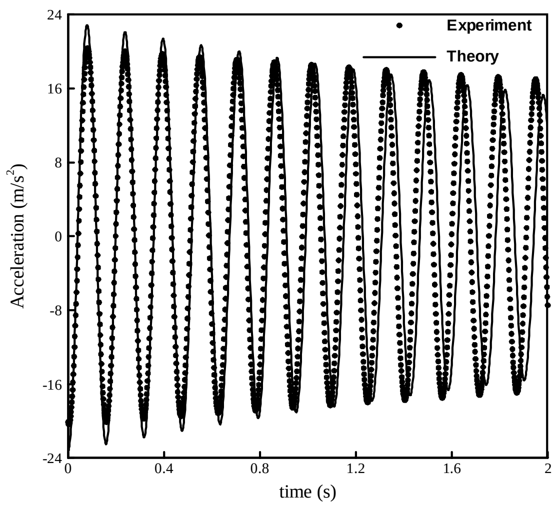

Fig. 11 Beam tip acceleration time response (initial nonlinear model - 37 gr mass)

شکل 11 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل غیرخطی اولیه - وزنه 37 گرمی)

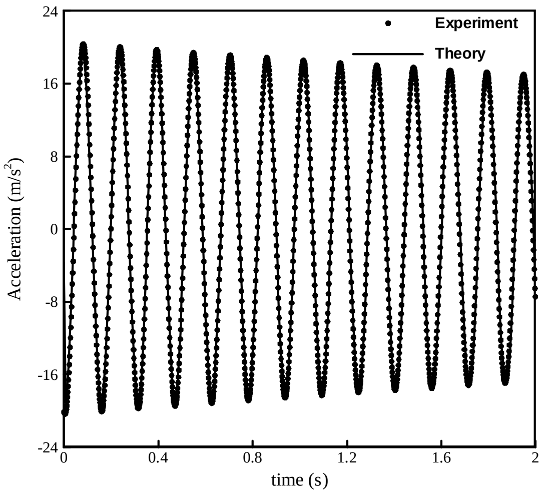

Fig. 12 Beam tip acceleration time response (the identified nonlinear model - 37 gr mass)

شکل 12 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل شناسایی شده غیرخطی-وزنه 37 گرمی)

جدول 5 پارامتر غیرخطی شناسایی شده.

Table 5 The identified nonlinear parameter

پارامتر	مقدار (بدون بعد)
$\bar{c}_5$	1.4

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مشخصه‌های دینامیکی تیر تحت اثر ارتعاشات آزاد با دامنه بزرگ بدست آمد. از رویکرد جدیدی برای شناسایی استفاده شد که با میرایی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر مشخصه‌های دینامیکی خطی و غیرخطی استخراج گردید. مشخصه‌های خطی دینامیکی تیر با استفاده از آزمایش در دامنه بسیار پایین بدست آمد. جمله ساده شده مربوط به عامل غیرخطی هندسی به عنوان یک جمله با وجود عدم قطعیت در سفتی سازه در نظر گرفته شد و با شناسایی ضریب تصحیح بهینه گام بعدی در شناسایی سیستم برداشته شد. به منظور اعتبارسنجی نتایج در سه جابه‌جایی اولیه مختلف آزمایش انجام شد. نتایج بدست آمده از مدل شناسایی شده تطابق خوبی را با نتایج آزمایش نشان دادند.

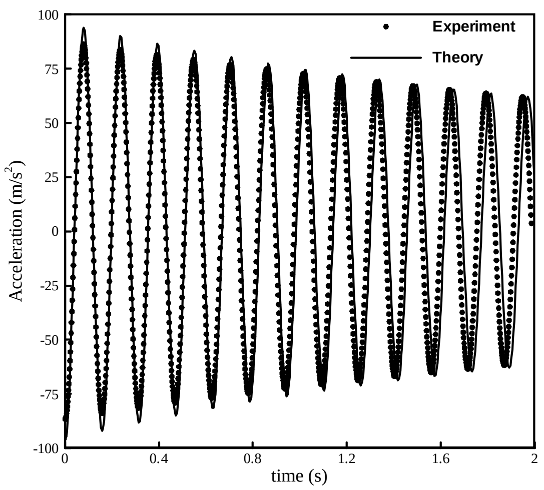

Fig. 13 Beam tip acceleration time response (initial nonlinear model - 148 gr mass)

شکل 13 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل غیرخطی اولیه - وزنه 148 گرمی)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

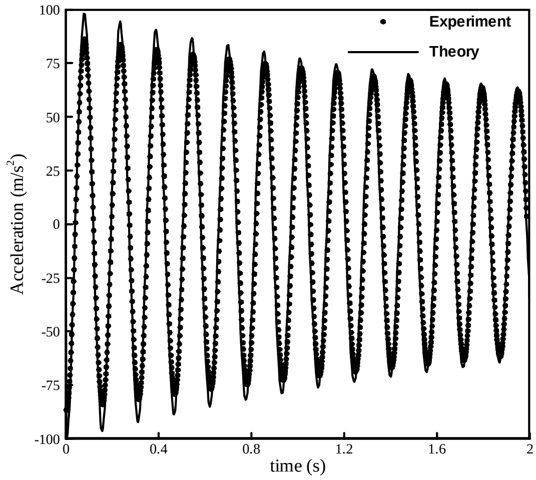

Fig. 14 Beam tip acceleration time response (the identified nonlinear model - 148 gr mass)

شکل 14 پاسخ زمانی شتاب انتهای تیر (مدل شناسایی شده غیرخطی - وزنه 148 گرمی)

این نتایج، کارآمد بودن روش شناسایی را بدون وجود اطلاعات کافی از آزمایش و تنها با پاسخ ارتعاشات آزاد تیر نشان می‌دهد.

همچنین به منظور حل معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر از روش تبدیل دیفرانسیلی اصلاح شده استفاده شد و علاوه بر پاسخ، فرکانس تشدید نیز بدست آمد. همچنین از روش تکرار تغییرات توسعه یافته فرکانس تشدید نامیرای تیر غیرخطی به صورت پارامتری و تابعی از جابه‌جایی اولیه بدست آمد که رفتاری سخت شونده را نشان می‌داد. نتایج با روش عددی مقایسه شد و دقت قابل قبولی را نشان داد.

لازم به ذکر است که ماهیت رفتار غیرخطی دینامیک مورد مطالعه ضعیف است و روش‌های مورد استفاده در این پژوهش برای غیرخطی‌های قوی نتایج درستی نخواهد داد.

8- پیوست (الف)

در این بخش نحوه‌ی استخراج رابطه (1) بر اساس رویکرد نیوتنی ارائه شده است. با اعمال قانون دوم نیوتن برای یک المان تیر همانند شکل الف 1 داریم:

$$\left(F_\xi \cos\psi\right)' - \left(F_\eta \sin\psi\right)' = m\ddot{u} \tag{الف-1}$$

$$\left(F_\xi \sin\psi\right)' + \left(F_\eta \cos\psi\right)' = m\ddot{v} \tag{الف-2}$$

$$F_\eta = -M_z'/(1+e) \tag{الف-3}$$

قید عدم انبساط به صورت رابطه (الف-4) بیان می‌گردد:

$$(1+u')^2 + v'^2 = 1 \tag{الف-4}$$

برای بدست آوردن u' با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$u' = \sqrt{1-v'^2} - 1 \approx -v'^2/2 + \cdots \tag{الف-5}$$

همچنین با توجه به فرض عدم برش عرضی، چرخش سطح مقطع تنها به دلیل خمش است و داریم:

$$\cos\psi = (1+u')/\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \tag{الف-6}$$

$$\sin\psi = v'/\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \tag{الف-7}$$

با اعمال رابطه قید بر روی هر کدام از دو رابطه فوق داریم:

$$\cos\psi = \sqrt{1-v'^2} \tag{الف-8}$$

$$\sin\psi = v' \tag{الف-9}$$

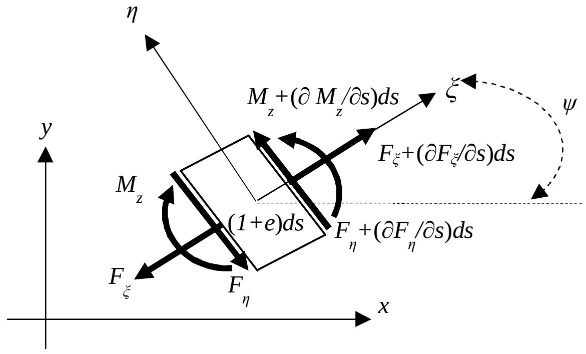

Fig. A1 The free-body diagram of nonlinear Euler-Bernoulli beam element

شکل الف-1 دیاگرام آزاد المان تیر اویلر-برنولی غیرخطی

با انتگرال گیری از روابط (الف-1) و (الف-5) نسبت به s داریم:

$$F_\xi \cos\psi - F_\eta \sin\psi = \int_L^s m\ddot{u}\, ds \tag{الف-10}$$

$$u = -\frac{1}{2}\int_0^s v'^2 ds \tag{الف-11}$$

با جایگذاری روابط (الف-8، 9 و 11) در (الف-10) F_ξ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_\xi = \frac{\int_L^s \frac{m}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^s v'^2 ds\right)ds + F_\eta v'}{\sqrt{1-v'^2}} \tag{الف-12}$$

از طرفی با در نظر گرفتن رابطه تنش-کرنش به صورت قانون هوک، رابطه انحناء-کرنش و اعمال فرض عدم انبساط (رابطه (الف-4)) F_η به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_\eta = -EI\psi'' \tag{الف-13}$$

با جایگذاری روابط (الف-9)، (الف-12) و (الف-13) در (الف-2) و کمی محاسبات جبری داریم:

$$\left(\frac{v'\int_l^s \frac{m}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^s v'^2 ds\right)ds}{\sqrt{1-v'^2}}\right)' - \left(\frac{EI((\sin^{-1}v')')'v'^2}{\sqrt{1-v'^2}}\right)' - \left(EI((\sin^{-1}v')')'\sqrt{1-v'^2}\right)' = m\ddot{v} \tag{الف-14}$$

با ساده سازی رابطه (الف-14) رابطه (1) بدست می‌آید. با در نظر گرفتن بسط تیلور جملات غیرخطی به شکل زیر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = 1 + \frac{v'^2}{2} + O(v'^4) \tag{الف-15}$$

$$\frac{v'^2}{\sqrt{1-v'^2}} = v' + O(v'^3) \tag{الف-16}$$

$$\sin^{-1} v' = v' + O(v'^3) \tag{الف-17}$$

با قرار دادن روابط (الف-15) تا (الف-17) در رابطه (الف-14) رابطه (4) بدست می‌آید.

9- مراجع

[1] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 1-38, New York: Wiley-Interscience, 1995.
[2] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, pp. 194-224, New York: Wiley-Interscience, 2004.
[3] M. Sathyamoorthy, *Nonlinear analysis of structures*, pp. 1-106, New York: CRC press, 1997.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]

[4] P. F. Pai, A. H. Nayfeh, Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 25, No. 5, pp. 455-474, 1990.

[5] P. Malatkar, *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*, PhD Thesis, Engineering Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2003.

[6] M. Baghani, H. Mazaheri, H. Salarieh, Analysis of large amplitude free vibrations of clamped tapered beams on a nonlinear elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 38, No. 3, pp. 1176-1186, 2014.

[7] M. Slimani, M. Taazount, A. Bouazzouni, Perturbed solution of free non-linear vibrations of composite beams, *Composite Structures,* Vol. 94, No. 5, pp. 1805-1813, 2012.

[8] A. Fallah, M. M. Aghdam, Nonlinear free vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation, *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 30, No. 4, pp. 571-583, 2011.

[9] M. Poorjamshidan, J. Sheikhi, S. MahjoobMoghadas, An analytic solution of transversal vibrations and frequency response of quantic non-linear beam, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 15, pp. 1-9, 2014. (in Persian فارسی)

[10] J. H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 35, No. 1, pp. 37-43, 2000.

[11] J. H. He, Variational iteration method-a kind of nonlinear analytical technique: some examples, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 34, No. 4, pp. 699-708, 1999.

[12] J. H. He, Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly non-linear oscillations e Part I: expansion of a constant, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 37, No. 2, pp. 309-314, 2002.

[13] A. Norouzzadeh, R. A. Khalkhali, M. Darvizeh, Nonlinear forced vibration of axially moving Timoshenko beam in thermal environment via the harmonic balance method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 11, pp. 137-143, 2014. (in Persian فارسی)

[14] J. H. He, Preliminary report on the energy balance for nonlinear oscillations, *Mechanics Research Communications,* Vol. 29, No. 2-3, pp. 107-111, 2002.

[15] A. Arikhoglu, I. Ozkol, Solution of difference equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 174, No. 2, pp. 1216-1228, 2006.

[16] S. Talebi, A. Ariaei, Vibration analysis of a variable cross-section cracked Timoshenko beam and their crack detection using genetic algorithm, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 13, pp. 78-89, 2014. (in Persian فارسی)

[17] M. Raeisi, A. Ariaei, Free vibration analysis of cracked rotating multi-span Timoshenko beams using differential transform method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 173-182, 2015. (in Persian فارسی)

[18] G. A. Baker, *Essentials of Padé Approximants*, pp. 100-105, London: Academic Press, 1975.

[19] S. Momani, V. S. Ertürk, Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 55, No. 4, pp. 833-842, 2008.

[20] S. Nourazar, A. Mirzabeigy, Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method, *Scientia Iranica B,* Vol. 20, No. 2, pp. 364-368, 2013.

[21] Y. Khan, H. Latifizadeh, H. Rafieipour, E. Hesameddini, Analytical approximate technique for strongly nonlinear oscillators problem arising in engineering, *Alexandria Engineering Journal* Vol. 51, No. 4, pp. 351-354, 2012.

[22] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J. C. Golinval, Past present and future of nonlinear system identification in structural dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 3, pp. 505-592, 2006.

[23] G. Kerschen, V. Lenaerts, J. C. Golinval, Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. Part I: Conditioned reverse path method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 262, No. 4, pp. 889-906, 2003.

[24] C. M. Richards, R. Singh, Identification of multi degree of freedom nonlinear systems under random excitation by the reverse path spectral method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 213, No. 4, pp. 562-697, 1998.

[25] H. Sarparast, M. R. Ashory, P. Ebadi, M. M. Khatibi, Modal parameter identification of a structure subjected to ambient load using output analysis, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 5, pp. 63-73, 2013. (in Persian فارسی)

[26] J. R. Wright, M. F. Platten, J. E. Cooper, M. Sarmast, Application of the Resonant Decay Method to the Identification of Non-linear Multi-Degree-of-Freedom Systems, in *International Conference on Acoustics, Noise and Vibration*, Montreal, Canada, 2000, pp. 461-464.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.35.0]