



توسعه الگوریتم ضمنی برای گلر کین گستته مرتبه بالا جهت حل جریان تراکم پذیر با استفاده از روش های نیوتن-کرایلف

وحید بدرخانی¹، امیر نجات^{2*}، مجتبی طحانی³

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

3- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

*تهران، nejat@ut.ac.ir، 1439955963،صندوق پستی

چکیده

در این مقاله، روش المان محدود-گلر کین گستته برای جریان تراکم پذیر لزج و غیرلزج به صورت ضمنی با استفاده از الگوریتم نیوتن-کرایلف با هدف افزایش دقت محاسبات، سرعت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این راستا برای جریان غیرلزج، اعمال لزج مصنوعی در نواحی دارای گرادیان شدید باعث افزایش کیفیت نتایج حل بخصوص در مراتب بالا می شود. همچنین در جریان لزج نیز استفاده از روش گستته سازی گلر کین گستته متراکم برای جمله های بیضوی باعث بهبود نتایج شده است. برای افزایش سرعت محاسبات و نرخ همگرایی نیز حل گرهای خطی همراه با شروع مجدد و ماتریس های پیش شرط ژاکوبی بلوكی و فاکتور گیری تجزیه ناقص مثلثی برای حل ماتریس ژاکوبین گذراشی صوت غیرلزج و زیرصوت آرام لزج بررسی شده است. همچنین برای تکمیل مباحثت، هموار کننده چند شبکه ای با شرایط ویژه برای تمامی ماتریس های پیش شرط اعمال می شود. از طرفی در تمامی جریان های اشاره شده با افزایش مرتبه حل، نرخ همگرایی کاهش می باید که برای بطریف کردن این مشکل از مراتب پایین تر به عنوان شرایط اولیه مراتب بالا و یک فاز میانی برای انتقال محاسبات از فضای مرتبه پایین به بالا استفاده شده است. همچنین استفاده از گام زمانی محلی برای بهبود نرخ همگرایی پیشنهاد می شود. به این ترتیب، روش عددی ارائه شده به عنوان یک الگوریتم کارآمد برای شبیه سازی جریان مرتبه بالا به خصوص جریان گذرای صوت غیرلزج و جریان لزج پیشنهاد می گردد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 دی 1395

پذیرش: 21 بهمن 1395

ارائه در سایت: 21 اسفند 1395

کلید واژگان:

گلر کین گستته

جریان تراکم پذیر لزج و غیرلزج

الگوریتم نیوتن-کرایلف

پیش شرط سازی

هموار کننده چند شبکه ای

Development of implicit Algorithm for High-order discontinuous Galerkin methods to solve compressible flows using Newton-Krylov methods

Vahid Badrkhani¹, Amir Nejat^{2*}, Mojtaba Tahani¹

1- Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran

2- School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

*P.O.B. 1439955963, Tehran, Iran, nejat@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 14 January 2017

Accepted 09 February 2017

Available Online 11 March 2017

Keywords:

Discontinuous Galerkin
Compressible viscous and inviscid flow
Newton-Krylov Algorithm
Preconditioning
Multigrid smoother

ABSTRACT

In this paper, an implicit finite element-discontinuous Galerkin method for compressible viscous and inviscid flow is developed using Newton-Krylov algorithm with the objective of increasing the accuracy and convergence rate. For inviscid flows, an artificial viscosity is implemented in sharp gradient flow regions especially at high-order cases, increasing the accuracy of the solution. Moreover, for viscous flows, the accuracy is improved by using compact discontinuous Galerkin discretization method for elliptical terms. To reduce the computing CPU time and increase the convergence rate, an iterative Krylov type preconditioned linear solver is applied. For preconditioning, restarting, Block-Jacobi and block incomplete-LU factorization are employed for solving the linear system of the Jacobian matrix. The Jacobian matrix is constructed via finite difference perturbation technique. In this context, the performance of preconditioning matrix for three types of flow regimes of inviscid subsonic, inviscid transonic and viscous laminar subsonic are studied. In addition to complete the discussions, multigrid smoother with special conditions is applied for all preconditioning matrices. To improve the solver performance for higher order discretization, a lower order solution may be used as higher orders initial condition. Therefore, a middle phase is needed to transfer calculations from low to high order discretized domain and then the final Newton phase is continued. In addition, local time stepping is implemented to improve the rate of convergence. Consequently, the presented numerical method can be used as an efficient algorithm for high-order Discontinuous Galerkin flow simulation, especially for transonic inviscid and laminar viscous flows.

Please cite this article using:

V. Badrkhani, A. Nejat, M. Tahani, Development of implicit Algorithm for High-order discontinuous Galerkin methods to solve compressible flows using Newton-Krylov methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 281-292, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

1- مقدمه

چاونت و سالازو^[5] نشان دادند که استفاده از روش گلرکین گسسته همراه با گسسته‌سازی مرتبه اول پیشرو به صورت نامشروع ناپایدار است. آنان ثابت کردند که هنگامی این روش با گسسته‌سازی اویلر پایدار است که نسبت $\Delta t/\Delta x^3$ از مرتبه $(\sqrt{x})^0$ باشد. در واقع برای این متغیر عدد کوانت^۳ (CFL) می‌باشد. بسیار پایین نگه داشته شود. از طرفی دیگر کوکبرن و شو^[4] نشان دادند که پایداری روش مذکور دارای شرط عدد کوانت به صورت $(1 + 2P)/(2P + 1) \leq \text{CFL}$ است. همانطور که ملاحظه می‌شود، همچنان پایداری ضعیفی نسبت به سایر روش‌های عددی مانند تفاضل و حجم-محدود وجود دارد. همچنین از کارهای اخیر در استفاده از این روش برای جریان‌های دوفازی تراکم‌پذیر در محیط‌های متخلخل و به همراه شرط مرزی ترکیبی (رابین) می‌توان به^[6] اشاره کرد. در این تحقیق از روش پنالتی داخلی برای تخمین جملات بیضوی استفاده شده است.

یکی دیگر از کارهای برجسته در حل معادلات جریان سیال تراکم‌پذیر توسط باسی و ریبی برای جریان غیرلزج^[7] و جریان لزج^[8] ارائه گردید. در این کارها ایده استفاده از توابع پایه لاغرانژی به همراه گسسته‌سازی زمانی رانگ-کوتا به کار برده شد. همچنین برای شبیه‌سازی جمله لزجت یک متغیر جدید تعریف شده و معادله مرتبه دوم به دو معادله مرتبه اول تبدیل شدند که به صورت همزمان حل می‌گردند. برای محاسبه شار لزجت روی مرزهای المان از یک میانگین‌گیری ساده استفاده شده است. بعدها کوکبرن و همکارانش^[9] در مقاله خود نشان دادند که میانگین‌گیری ساده دارای همگرایی پایینی بوده و آنان روش مناسبتری را تحت عنوان روش گلرکین گسسته‌محلي^۴ (LDG) ارائه کردند. آنان با معرفی پارامترهای حفظ پایداری، سرعت همگرایی روش را افزایش دادند. پرسون و پریر^[10] اصلاحی را بر روش گسسته‌سازی محلی ارائه دادند که از همسایه‌های درجه اول استفاده می‌کرد و به این ترتیب همگرایی را بهتر می‌سازد. این روش نیز به روش گلرکین گسسته تراکم^۵ (CDG) معروف گردید.

با بررسی تاریخچه این روش می‌توان دریافت که به علت حجم بالای متغیرها، محقادان بیشتر به سمت استفاده از روش‌های گسسته‌سازی صریح روی اوردند. اما مطالعات انجام شده در همان ابتدا آشکار نمود که به دلیل لزجت مصنوعی بسیار پایین این روش خصوصاً در گسسته‌سازی مرتبه بالا، محدوده پایداری با گسسته‌سازی صریح بسیار انگشتی بوده و برای نیل به یک روش کارآمد احتیاج به استفاده از الگوریتم‌های ضمنی است. اولین افرادی که از گسسته‌سازی ضمنی همراه با الگوریتم‌های سریع حل دستگاه استفاده نمودند، باسی و ریبی^[11] بودند. از جمله دیگر روش‌های ضمنی گلرکین گسسته می‌توان به این الگوریتم نیمه‌ضمنی دلخسی و فیستاور^[12] و همچنین الگوریتم رانگ-کوتای ضمنی تا مرتبه چهار برای جریان سیال تراکم‌پذیر توسعه باسی و ریبی^[13] اشاره نمود. پرسون و پریر^[14] یک الگوریتم ضمنی دو مرحله‌ای را به عنوان پیش‌شرط برای کمینه‌سازی کلی باقیمانده^۶ (GMRES) برای حل دستگاه خطی در هر گام زمانی ارائه کردند. آنان اشاره نمودند که ساختار ماتریس به دست آمده از این نوع گسسته‌سازی یک ساختار بلوکی بوده که براساس آن می‌توان الگوریتم‌های حل مناسبی ارائه نمود. یکی از کارهای برجسته اخیر در زمینه بررسی همگرایی روش گلرکین گسسته در مسائل حالت پایدار توسط دیوسادی و دارموفال^[15] ارائه شد. آنان از الگوریتم حل ضمنی نیوتن-کرایلف با شروع-مجدد همراه با پیش‌شرط‌های

در حیطه دینامیک سیالات محاسباتی، بسیاری از روش‌های ارائه شده از مرتبه اول یا دوم می‌باشند. دلیل انتخاب این روش‌ها، سادگی برنامه‌نویسی و اعمال آن‌ها برای بسیاری از مسائل صنعتی است^[1]. اما از دیدگاه توریک، استفاده از روش‌های مرتبه بالا بسیار کارآمدتر است^[2]. زیرا همانطور که می‌دانیم، خطای قطع، τ ، با اندازه شبکه، h ، به صورت $\tau \sim h^P$ رابطه داشته که P مرتبه دقت روش عددی به کاررفته است. بهاین ترتیب، خطای قطع با افزایش دقت روش عددی به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

اگرچه روش‌های تفاضل-محدود و حجم-محدود به راحتی به کد تبدیل می‌شوند، اما برای رسیدن به دقت مرتبه بالا در این روش‌ها می‌باشد از استنسیل گسسته‌سازی نسبتاً بزرگی استفاده نمود که این امر باعث اختلال در نتایج، خصوصاً در نزدیکی نواحی با گرادیان‌های شدید مانند شوک و نقاط اکسترم می‌شود. بنابراین استفاده از روش‌های عددی که خاصیت محلی بیشتری دارند برای این نواحی مناسب‌تر است.

برای رسیدن به روش عددی جامع تر که هم در هندسه‌های پیچیده قابلیت مناسب داشته و هم دارای خاصیت محلی در نواحی ناپیوستگی باشد، مارا به سمت استفاده از روش‌های المان-محدود سوق می‌دهد. در واقع روش‌های المان-محدود خانواده وسیع‌تری از روش‌های عددی مانند تفاضل-محدود و حجم-محدود می‌باشند، به طوری که می‌توان با انتخاب توابع وزنی مناسب، هردو روش مذکور را از روش المان-محدود به دست آورد.

نسل جدیدی از روش‌های المان-محدود با خاصیت گسستگی در حل به وجود آمدند که امکان انفال تطبیقی را به خوبی فراهم می‌نمایند. همچنین به علت مجزا بودن میدان در مرزهای المان، شرط پایستاری به طور مستقیم اعمال خواهد شد که این مطلب این روش را تبدیل به یک روش پایستار و در عین حال محلی می‌سازد. از میان روش‌های المان-محدود، روش گلرکین تطابق بسیار مناسبی با مسائل مکانیک سیالات عددی داشته و به این سبب، نوع گلرکین روش‌های المان-محدود گسسته یا به عبارتی دیگر روش گلرکین گسسته^۱ (DG) انتخاب شده است.

روشن گلرکین گسسته بواسطه شرط پذیرش دو مقدار متفاوت در دو طرف وجه یک سلول، قابلیت بیشتری از روش گلرکین پیوسته در محاسبه ناپیوستگی‌ها دارد. از طرف دیگر در روش گلرکین گسسته به خاطر افزایش انجام عملیات محاسباتی به ازای هر سلول هزینه محاسباتی آن برای هر سلول بیشتر از روش‌های حجم کنترلی می‌باشد. همگرایی روش‌های گلرکین گسسته نیز از همگرایی روش‌های حجم کنترلی به خاطر وجود درایه‌هایی از مرتبه‌های متفاوت در ساختار ماتریس ژاکوبی نسبت به روش‌های حجم کنترلی ضمنی، بیشتر خواهد بود. به همین خاطر توسعه روش‌های حجم همگرایی برای روش‌های گلرکین گسسته موضوع بحث این مقاله می‌باشد.

اولین نسخه روش گلرکین گسسته در زمینه مکانیک سیالات محاسباتی توسعه کوکبرن و شو در طی مقالات مختلف^[4,3] به ترتیب از یک مسئله هذلولوی یک بعدی تا جریان اویلر دو بعدی همراه با شوک در شبکه بی‌سازمان انجام شد. این افراد ایده استفاده از گسسته‌سازی زمانی رانگ-کوتای مرتبه بالا همراه با حفظ همواری میدان به وسیله یک روش محدود کننده شیب^۲ (TVB) را در گسسته‌سازی گلرکین پیاده‌سازی نمودند. به علت حجم بالای متغیرهای میدان در این روش و برقراری ارتباط پیچیده‌تر بین گره‌های میدان، این افراد استفاده از روش‌های صریح را پیشنهاد کردند. از طرفی دیگر

³Courant Friedrichs Lewy⁴Local Discontinuous Galerkin⁵Compact Discontinuous Galerkin⁶Generalized minimal residual method¹Discontinuous Galerkin
²Total Variational Bounded

حال با اعمالتابع آزمون در رابطه (1)، انتگرال‌گیری روی تمام المان‌ها و استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز (حالت ضعیف^۷ المان محدود) رابطه (3) به دست می‌آید:

$$\sum_{k \in T_h} \int_k^0 v_k \partial_t u_k dx + \mathcal{R}_h(u_h, v_h) = 0 \quad (3)$$

که در رابطه بالا جمله $\mathcal{R}_h(u_h, v_h)$ به صورت رابطه (4) و (5) تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}_h(u_h, v_h) = \sum_{k \in T_h} [\mathbb{E}_k(u_h, v_h) + \mathbb{V}_k(u_h, v_h)] \quad (4)$$

$$\mathbb{E}_k(u_h, v_h) = - \int_k^0 v_i \partial_i F_{ki} dx + \int_{\partial_k}^0 v_k^+ \hat{F}_{ki}(u_h^+, u_h^-) \hat{n}_i ds \quad (5)$$

در رابطه (4) جمله $\mathbb{V}_k(u_h, v_h)$ بیانگر جمله لزجت می‌باشد که در این تحقیق از روش CDG برای این جمله و روش رو^۸ برای تخمین شار عبوری غیرلزج رابطه (5)، استفاده شده است. همچنین علاوه^۹ (۰) و (۰) مقادیر داخل و بیرون در مرز المان مورد نظر و \hat{n} مقدار بردار نرمال عمود بر سطح به سمت بیرون المان را بیان می‌کنند.

حال می‌توان همانند گسسته‌سازی معادلات برای تخمین بردار جواب $u_h(x, t)$ ، نیز از یک ترکیب خطی تابع چند جمله‌ای (x, v_{h_i}) ، تحت عنوان تابع پایه در فضای v_h^p استفاده کرد. با انتخاب تابع پایه و آزمون یکسان روش گلرکین گسسته شکل می‌گیرد.

در این راستا بردار جواب از طریق رابطه (6) به دست می‌آید:

$$u_h(x, t) = \sum_i U_{h_i}(t) v_{h_i}(x) \quad (6)$$

در رابطه بالا، U_h قسمتی از بردار جواب (تنها تابعی از زمان) می‌باشد. همچنین توابع لاغرانژ به عنوان تابع چند جمله‌ای انتخاب شده است. برای توضیحات تکمیلی در مورد نحوه گسسته‌سازی گلرکین گسسته می‌توان به مرجع [18] اشاره کرد.

با جایگذاری رابطه (6) در روابط بیان شده، رابطه (7) به دست می‌آید:

$$\mathcal{M}_h \frac{dU_h}{dt} + \mathcal{R}_h(U_h(t)) = 0 \quad (7)$$

در رابطه بالا R_h با قیمانده غیرخطی معادلات گسسته‌سازی شده است که به صورت $R_h(U_h)_i = \mathcal{R}_h(u_h, v_{h_i})$ تعریف می‌شود. همچنین ماتریس \mathcal{M}_h ، ماتریس جرمی بوده و طبق رابطه (8) قابل محاسبه است:

$$\mathcal{M}_{h_{ij}} = \int_k^0 v_{h_i} v_{h_j} dx \quad (8)$$

با گسسته‌سازی زمانی رابطه (7) و انجام یک سری عملیات ریاضی، رابطه (9) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_h^{m+1} = U_h^m - \left(\frac{1}{\Delta t} \mathcal{M}_h + \frac{\partial R_h}{\partial U_h} \right)^{-1} R_h(U_h^m) \quad (9)$$

حال با افزایش گام زمانی و گذشت زمان، رابطه بالا به حالت پایدار^{۱۰} معادلات ناویر استوکس تبدیل می‌شود.

$$(U_h^{m+1} - U_h^m) \left(\frac{\partial R_h}{\partial U_h} \right) = R_h(U_h^m) \quad (10)$$

در واقع با گذشت زمان یا به عبارت دیگر $\Delta t = \infty$ رابطه (10) به دست می‌آید. برای حل این رابطه از روش‌های کرایلف استفاده می‌شود که در ادامه به طور مفصل بیان خواهد شد.

جمله $\frac{\partial R_h}{\partial U_h}$ یکانگر ماتریس ژاکوبی می‌باشد و از مهمترین ویژگی‌های آن بدوضع و تنک بودن است. در این تحقیق از ساختار فشرده

گوناگون استفاده نمودند. برای رسیدن به یک آرایش سه‌قطري در شبکه بی‌سازمان از مسیرهایی با بیشترین ارتباط^۱ در جریان استفاده کردند.

نمونه دیگری از کارهای اخیر در زمینه همگرایی به کمک الگوریتم نیوتن-کرایلف در روش‌های حجم-محدود مرتبه بالا می‌توان به کار نجات و الیورگویچ^{۱۲} پس از بررسی روش‌های مختلف پیش‌شرط برای الگوریتم GMRES دریافتند که استفاده از تفاضل-محدود مرتبه اول ماتریس ژاکوبین همراه با مرتب بالای جایگذاری^{۱۳} در روش تجزیه ناقص^{۱۴} (ILU) نتیجه مناسبی برای همگرایی تا مرتبه چهار به دنبال دارد. همچنین استفاده از تعداد زیرفضای ثابت در الگوریتم GMRES برای رسیدن به محدوده خطای دلخواه در هر تکرار کافی به نظر نمی‌رسد و در واقع استفاده از رهیافت چند مرحله‌ای مناسب است.

برای افزایش سرعت همگرایی و کارآمد کردن حلگر در نواحی جریان همراه ناپیوستگی، از جمله‌های لزجت مصنوعی استفاده شده است. این جمله‌های لزجت مصنوعی سبب ایجاد درایه‌هایی با اندازه‌هایی با مرتبه‌ای متفاوت از دیگر درایه‌های ماتریس که مربوط به جمله‌های غیر لزج هستند، می‌شود. در نتیجه ماتریس ژاکوبین بد وضعی بیشتر پیدا می‌کند و پیش‌شرط‌سازی آن از اهمیت بسزایی برخورده است. نوآوری مقاله حاضر در اعمال جملات لزجت مصنوعی در گسسته‌سازی ضمنی معادلات جریان تراکم‌پذیر و نحوه پیش‌شرط‌سازی ماتریس ژاکوبین حاصل این گسسته‌سازی برای جریان‌های لرج و حاوی شوک می‌باشد.

حلگر مورد نظر در محیط گرافیکی لینوکس^{۱۵} با زبان برنامه‌نویسی C++ همراه کتابخانه دیجیتالی^{۱۶} (برای حلگرهای خطی) ایجاد شده است. همچنین شبکه‌بندی‌های بی‌سازمان ایجاد شده توسط نرم‌افزارهای تولید شبکه گمبیت، به عنوان ورودی حلگر تولید می‌شود و تمامی نتایج در سیستمی با مشخصات اینتل i7 CPU-1.73GHz و حافظه 4.00 GB شده است.

2- روش عددی

معادلات حاکم برای جریان ناویر-استوکس تراکم‌پذیر، وابسته به زمان، حالت دو بعدی و به صورت اندیسی طبق رابطه‌های (1) و (2) بیان می‌شود:

$$\partial_t u_k + \partial_i F_{ki}(u, \nabla u) = 0, k \in [1, n_s] \quad (1)$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho E \end{pmatrix}, F_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ v_j (\rho E + p) \end{pmatrix}, F_j^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \\ v_i \sigma_{ij} + q_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

که در آن u_k و $F_{ki}(u, \nabla u)$ به ترتیب نمایانگر k -ام ترکیب بردار پایستار^{۱۷}، شار عبوری لرج^{۱۸} و غیرلزج^{۱۹} برای معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی طبق رابطه (2) هستند. م چگالی سیال، v_i بردار سرعت در راستای i و E مقدار انرژی کل سیال در واحد جرم می‌باشد. اندازه بردارهای پایستار^{۲۰} m_i در حالت دو بعدی و سه بعدی به ترتیب 4 و 5 است (البته معادلات توربالنس را شامل نمی‌شود).

برای گسسته‌سازی معادلات ناویر-استوکس به شیوه گلرکین گسسته، از المان‌های مثلثی T_h در فضای حساباتی Ω روی المان k و تخمین جواب از طریق یک تابع چند جمله‌ای v_h^p با درجه p با استفاده می‌شود. در این راستا u_h تخمین جواب در این فضا و $v_h \in \mathbb{V}_h^{n_s}$ یک تابع آزمون^{۲۱} می‌باشد.

¹ Line of maximum coupling

² Fill-in

³ Incomplete Lower Upper

⁴ Linux

⁵ Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation

⁶ Test function

جواب می‌باشد. به عبارت دیگر با داشتن حدس اولیه (نسبتاً مناسب) x_0 ، یک فضای جواب تقریبی به صورت $\mathcal{K}x_0 + \mathcal{L}$ برای جواب نهایی و به تبع آن یک فضای بردار باقیمانده به صورت $A\mathcal{K}x = \mathcal{L}$ تشکیل داده شده و سعی می‌شود تمامی مولفه‌های بردار باقیمانده در این فضای صفر گردد. برای این منظور می‌باشد بردار باقیمانده بر فضای ساخته شده آن عمود گردد، به عبارتی دیگر \mathcal{L}^\perp در این حالت جواب از ترکیب خطی پایه‌های زیرفضای کرایلف به دست می‌آید، که $x = x_0 + V_m y_m$ از حل مسئله کمینه‌سازی حاصل می‌شود (شکل ۱).

روش GMRES از این لحاظ بسیار ارزشمند است که هیچ فرضی درباره ساختار ماتریس و همچنین وضعیت مقادیر ویژه آن نشده است. بنابراین این روش به خوبی برای جریان سیال تراکم‌پذیر که اساساً ماتریس‌های ژاکوبین آن‌ها بسیار بد وضع و پراکنده هستند مناسب می‌باشد. اما در ماتریس‌های بد وضع، تعداد محاسبه پایه‌های کرایلف به تدریج افزایش می‌باشد. در مواردی که حدس اولیه مناسب در اختیار نباشد، انجام عملیات معتمادسازی کامل مقرن به صرفه نیست. یک راه برای به صرفه کردن توسط ساد و شولتر [21] موسوم به الگوریتم شروع-مجدد (GMRES(m)) است. الگوریتم مذکور با انجام ناقص معتمادسازی در مرحله m از مرحله، میزان نرم خطای را محاسبه می‌نماید. اگر مقدار مطلوب حاصل نشده باشد، برای جلوگیری از افزایش فوق خطی محاسبات، پایه اولیه جدید برابر $v_1 = r_m / \|r_m\|$ انتخاب شده و فرآیند معتمادسازی مجدد تکرار می‌گردد.

1-1-3- همگرایی الگوریتم GMRES

مزایای الگوریتم GMRES این است که شرط معین-مثبت بودن برای ماتریس ژاکوبی ضروری نیست. ولی با توجه به مفهوم عدد شرط ماتریس، هرچه این عدد بزرگ‌تر باشد میزان تغییرات جواب نسبت به تغییرات بردار سمت راست دستگاه حساس‌تر است. در اعداد شرط نسبتاً بزرگ، تغییر کوچکی در بردار سمت راست که می‌تواند عمدتاً ناشی از خطای گردکردن باشد، می‌تواند اثر زیادی روی جواب نهایی گذاشته و مسیر همگرایی را تغییر دهد و یا حتی مختلط نماید. در این حالت اندازه پایه جدید معتمد شده، صفر می‌شود و الگوریتم دیگر قادر به یافتن جواب دقیق‌تر در فضای کرایلف نیست. در این راستا برای کاهش عدد شرط ماتریس از ماتریس‌های پیش-شرط استفاده می‌شود.

3-2- ماتریس پیش‌شرط

ماتریس ژاکوبین برخاسته از خطی‌سازی معادلات گستته‌سازی شده جریان توسط روش گلرکین گستته، اغلب دارای اعداد شرط بالا بوده و نیاز به پیش‌شرط‌سازی دارند. عمل پیش‌شرط‌سازی می‌باشد در هر مرحله از تشکیل هریک از زیر‌فضاهای کرایلف انجام گردد.

در تشکیل ماتریس پیش‌شرط، به دو مورد باید توجه کرد: مورد اول انتخاب ماتریس پیش‌شرط نزدیک به ماتریس اصلی با حذف پیچیدگی‌های موجود در درایه‌های مربوط به گستته‌سازی مرتبه بالا می‌باشد. این موضوع می‌تواند با تشکیل ماتریس‌های مرتبه پایین به خوبی انجام شود ولی متأسفانه این موضوع به علت بهم‌خوردن تعادل ابعادی در روش گلرکین گستته امکان‌پذیر نمی‌باشد. مورد دوم انتخاب ماتریس پیش‌شرط معادل همان ماتریس ژاکوبین و حل تقریبی (ILU) می‌باشد. قابل ذکر است این موضوع تطبیق خوبی با روش گلرکین گستته دارد [15,14]. همچنین بازارایی مناسب

ردیف پراکنده^۱ برای ذخیره درایه‌های ماتریس ژاکوبین [20] و از روش معکوس کاتھیل-مک‌کی^۲ برای کاهش پهنای باند ساختار ماتریس استفاده شده است. این عمل در ساختار کد محاسباتی به صورت بازارایی^۳ اندیس درایه‌های ماتریس، نه بر روی مقادیر آن، انجام می‌شود.

محاسبه ماتریس ژاکوبی یکی از مهمترین قسمت‌های روش‌های ضمنی بخصوص الگوریتم نیوتن-کرایلف است. در این مقاله از روش اختلاف محدود طبق رابطه (11) برای محاسبه آن استفاده شده است:

$$\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{R_j(U_i + \epsilon) - R_j(U_i)}{\epsilon} \quad (11)$$

همچنین رابطه (11) طبق الگوریتم زیر به ازای تمامی المان‌های میدان به صورت زیر اجرا می‌شود:

```
for j=1 to K
    for i=neighbors of element j
         $U_{i,\text{per}} = U_i + \epsilon$ 
        if  $U_i \in BC$ 
             $U_{i,\text{per}}^{BC} = BC(U_{i,\text{per}})$ 
             $U_i^{BC} = BC(U_i^{BC})$ 
             $RHS_{\text{per}}^{BC} = R_j(U_{i,\text{per}}^{BC})$ 
             $RHS^{BC} = R_j(U_i^{BC})$ 
             $\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{RHS_{\text{per}}^{BC} - RHS^{BC}}{(U_{i,\text{per}} - U_i)}$ 
        Else
             $RHS = R_j(U_i)$ 
             $RHS_{\text{per}} = R_j(U_{i,\text{per}})$ 
             $\frac{\partial R_j}{\partial U_i} \approx \frac{RHS_{\text{per}} - RHS}{(U_{i,\text{per}} - U_i)}$ 
        end if
    end for
end for
```

در الگوریتم بالا K تعداد تمامی المان‌های میدان می‌باشد. مقدار $\epsilon = 10^{-8}$ یا هم مرتبه جذر خطای ماشین برای این پارامتر در نظر گرفته شود. همچنینتابع BC مقادیر مولفه‌های میدان را در المان‌های مرزی محاسبه می‌کند.

3- حلگرهای فوق خطی دستگاه معادلات

در واقع شالوده اصلی الگوریتم‌های نیوتن-کرایلف برایه الگوریتم حل بهینه دستگاه‌های خطی شده معادلات (رابطه (10)) در تکرارهای غیرخطی می‌باشد. روش‌های کرایلف از لحاظ محاسباتی هزینه‌بر بوده و طبیعی است که پیچیدگی و بد وضعی ماتریس خطی شده سبب افزایش تعداد تکرارهای غیرخطی روش نیوتن کرایلف می‌گردد که نهایتاً زمان محاسبات را افزایش می‌کند. قابل توجه خواهد داد [20,17,14].

3-1- الگوریتم GMRES: روشی مناسب برای حل جریان سیال
روش GMRES به دنبال یافتن جوابی از فضای اصلی $\mathbb{R}^{n \times n}$ در ناحیه‌ای محدود شده و مناسب $V \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ تحت عنوان زیرفضای کرایلف می‌باشد به طوری که $n \ll m$ می‌باشد. پایه‌های تشکیل‌دهنده زیرفضا برهم عمود می‌باشند و با حل یک مسئله کمینه‌سازی یک جواب مناسب برای دستگاه معادلات به دست می‌آید. این روش در واقع یک روش تصویرسازی برفضای

¹ Compressed sparse row

² Reverse Cuthill-McKee

³ Reordering

سمت صفر، افزایش می‌یابد. در این راستا یک الگوریتم ILU(k) تعیین می‌کند که هر گاه سطح اهمیت یک درایه از مقدار k بیشتر شود، آن را از درایه‌های ماتریس تجزیه شده حذف نماید. برای این خانواده از تجزیه ناقص، الگوهای (2)، ILU(3) و (3) ILU(2) بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌است. قابل ذکر است که همان تجزیه کامل LU را به دست خواهد داد.

2-2-3- روش ژاکوبی بلوك

این روش با انتخاب تنها درایه‌های بلوك قطر اصلی و حذف تمامی درایه‌های غیر-قطری، یک دستگاه ساده را برای حل پیش‌شرط ارائه می‌دهد. اما از طرف دیگر با حذف درایه‌های غیر-قطری، در واقع اتصال بین نقاط در ساختار گسسته‌سازی حل از میان برداشته شده و سیستم معادلات از هم گسسته می‌شود. رابطه (12) نحوه به دست آوردن ماتریس ژاکوبی را نشان می‌دهد:

$$\tilde{A}_{ij}^l = \begin{cases} A_{ij}, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

اما این روش در برخی موارد دارای بازدهی مناسبی است، اما در مسائل کلی تر با شرایط سخت‌تر، همگرایی بسیار ضعیفی را از خود نشان می‌دهد. این روش در مرحله اول حل (مرحله راهاندازی) مناسب است.

4- روش نیوتن-کرایلف

هدف تمامی توسعه‌دهنده‌های حلگرهای عددی، کاهش هزینه محاسبات و افزایش دقت حل می‌باشد. با اعمال یک روش گسسته‌سازی از مرتبه بالاتر می‌توان به هدف دوم دست یافت. با این حال به طور عملی این قضیه زمانی امکان‌پذیر است که اگر و تنها اگر هزینه محاسباتی قابل مقایسه با هزینه استفاده از مرتبه دوم باشد.

1-4- روش‌های نیوتن: همگرایی محلی

مسئله اصلی را می‌توان به زبان ریاضی و خلاصه به صورت زیر بیان نمود: given $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, find $x_* \in \mathbb{R}^n$ such that $F(x_*) = 0$ (13) با این فرض کهتابع F به صورت پیاپی مشتق‌پذیر باشد. هدف یک روش نیوتنی پیدا کردن ریشه رابطه (13) است. این مطلب با تعریف تقریب تابع^۳ حول جواب x_c به شکل زیر دنبال می‌گردد:

$$F(x_c + p) = F(x_c) + \int_{x_c}^{x_c+p} J(z) dz \quad (14)$$

برای به دست آوردن تقریب نزدیک به جواب، انتگرال رابطه (14) با خطی‌سازی به صورت $p \cdot J(x_c) + \int_{x_c}^{x_c+p} J(z) dz$ تقریب زده می‌شود که p میزان اغتشاش نسبت به حل اصلی x_c است:

$$M_c(x_c + p) = F(x_c) + J(x_c) \cdot p \quad (15)$$

که M_c مدلی از مسئله اصلی می‌باشد. در یک تکرار نیوتنی، به دنبال جواب s^N هستیم به گونه‌ای که $M_c(x_c + s^N) = 0$ باشد. برای این منظور، می‌بایست معادله زیر برای گام زمانی N حل شود:

$$J(x_c)s^N = -F(x_c) \quad (16)$$

که x_+ جواب به روز شده برای گام بعدی نسبت به گام فعلی است. از آنجا که انتظار نمی‌رود x_+ برابر با جواب نهایی x_* باشد، اما تقریب خوبی از آن به شمار می‌رود، الگوریتم فوق می‌بایست تا رسیدن به جواب نهایی تکرار گردد.

2-4- استراتژی حل

در روش ضمنی‌سازی نیوتن-کرایلف مسئله به دو مرحله راهاندازی (مسئله

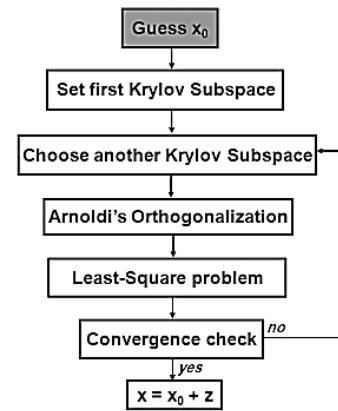


Fig. 1 GMRES Algorithm

شکل 1 مراحل الگوریتم GMRES

ماتریس پیش‌شرط می‌تواند مقدار پهنه‌ای باند داده‌ها را کاهش داده که منجر به کاهش تولید درایه‌های اضافی خواهد شد. بنابراین حل دقیق‌تری از حل تقریبی پیش‌شرط‌سازی به دست می‌آید و این امر به افزایش همگرایی، کمک شایانی خواهد کرد.

3-2-1- فاکتورگیری مثلثی ناقص (ILU)

در ابتدا فاکتورگیری کامل بلوك مثلثی را به صورت $A = LU$ در نظر می‌گیریم که در آن L ماتریس پایین-مثلثی و U ماتریس بالا-مثلثی است. با انجام عمل تجزیه و به دست آوردن ماتریس‌ها، با عملیات کاهش پیشرو^۱ و جایگزینی پسرو می‌توان دستگاه معادلات پیش‌شرط را حل نمود. یک راه برای کاهش محاسبات و حافظه، استفاده از فاکتورگیری مثلثی ناقص ILU است. ساده‌ترین راه این است که هرگاه در طول انجام عمل تجزیه، درایه غیرصفری تولید گردد و در الگوی اصلی ماتریس A وجود ندارد، صرف‌نظر از اندازه آن در فرآیند فاکتورگیری حذف می‌گردد. این روش پایه‌ای ترین حد تجزیه ناقص مثلثی است که با نماد ILU(0) مشخص می‌شود. نسخه بلوكی حالت فوق را می‌توان به صورت الگوریتم زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &\leftarrow A, \tilde{L} \leftarrow I \\ \text{for } j=1 \text{ to } n-1 \\ &\quad \text{for neighbors } i < j \text{ of element } j \\ \tilde{L}_{ij} &\leftarrow \tilde{U}_{ij} \tilde{U}_{jj}^{-1} \\ \tilde{U}_{ii} &\leftarrow \tilde{U}_{ii} - \tilde{L}_{ik} \tilde{U}_{ki} \\ &\quad \text{for neighbors } k < i \text{ of element } j \text{ and } i \\ \tilde{U}_{ik} &\leftarrow \tilde{U}_{ik} - \tilde{L}_{ij} \tilde{U}_{jk} \\ &\quad \text{end for} \\ &\quad \text{end for} \\ \text{end for} \end{aligned}$$

روش ILU(0) در بسیاری از موارد جواب خوبی برای دستگاه پیش‌شرط‌سازی تولید می‌کند. اما در شرایطی مخصوصاً در گسسته‌سازی‌های مرتبه بالا و یا در تکرارهای انتهایی الگوریتم نیوتن-کرایلف که نیاز به دقیق‌تر بودن حل پیش‌شرط است، الگوی پیچیده‌تری نیاز می‌باشد. در این راستا روش‌های مختلفی تاکنون ارائه شده‌اند. یک روش بر پایه الگوی تکه‌داری مقادیر اضافی بر اساس سطح اهمیت آن‌ها است که به اختصار LOF² نامیده می‌شود. در این روش ابتدای عمل فاکتورگیری، برای هر درایه غیر صفر مقدار LOF=1 و برای هر درایه صفر مقدار LOF=∞ در نظر گرفته می‌شود. در طی عمل فاکتورگیری اندازه سطح LOF با کاهش اندازه آن به

¹ Forward reduction
² Level of fill

4-2-2- مرحله نیوتون

در مرحله قبل بیشتر رفتارهای گذرای یک مسئله غیرخطی دینامیک سیالات محاسباتی از حل میدان جریان حذف شد و خصوصیات عدمه پایا در دامنه حل ظاهر گردیده است. بنابراین نتیجه خطی‌سازی باقی‌مانده‌های غیرخطی برای یافتن جواب پایا معقول به نظر می‌رسد و فرض کردن مقدار بزرگ و یا بینهایت گام زمانی، راه حل را به سمت همگرایی درجه دوم سوق می‌دهد. دستگاه معادلات در این مرحله به طور کامل حل می‌شود و دقت جواب تاثیر بهسزایی در نرخ همگرایی خواهد داشت.

5- نتایج

در این فصل به ارائه نتایج حاصل از روش عددی در سه جریان زیرصوت غیر لزج، گذرای صوت لزج و زیرصوت آرام لرج پرداخته خواهد شد. همچنین باید توجه داشت در روش‌های گلرکین گسسته با افزایش تعداد شبکه، زمان محاسبه به صورت فوق خطی افزایش می‌یابد. در این راستا برای شبیه‌سازی یک مسئله کاربردی و سه بعدی (مانند بال هواپیما و ...) بایستی از تعداد شبکه کمتر و مرتبه بالا استفاده شود.

5-1- جریان زیرصوت غیرلزج

اولین جریان مورد بررسی، جریان زیر صوت غیرلزج یا به عبارت دیگر معادله اویلر می‌باشد. در این راستا ابتدا برای تعیین میزان دقت حل، از مسئله‌ای با حل دقیق استفاده می‌شود.

5-1-1- جریان آیزنتروپیک چرخشی^۱

نمونه مورد بررسی برای اعتبارسنجی جریان در شرایط زیرصوت غیرلزج استفاده از جریان آیزنتروپیک چرخشی با حل دقیق رابطه زیر می‌باشد:

$$u = 1 - \beta e^{(1-r^2)} \frac{y - y_0}{2\pi} \quad (19)$$

$$v = \beta e^{(1-r^2)} \frac{x - x_0}{2\pi} \quad (20)$$

$$\rho = \left(1 - \left(\frac{\gamma - 1}{16\gamma\pi^2}\right)\beta^2 e^{2(1-r^2)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (21)$$

$$p = \rho^\gamma \quad (22)$$

که هرکدام از ضریب‌ها به صورت 5 , $y_0 = 0$, $\beta = 5$, $x_0 = 5$, $\gamma = 1.4$ و $r = \sqrt{(x-t-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ تعیین می‌شوند. از حل دقیق به عنوان شرایط اولیه و برای تخمین شرایط مرزی از مقادیر آن در این نواحی استفاده می‌شود. برای تخمین مرتبه حل و نرخ همگرایی از سه شبکه‌بندی با اندازه المان‌های $h/2$ و $h/4$ استفاده شده است و شکل ۲ شبکه‌بندی با اندازه المان h و کانتور چگالی با مرتبه $N=8$ در لحظه ۱.۷ ثانیه پس از حل را نشان می‌دهد که ورتوکس حاصل با گذشت زمان از نقطه (۵,۰) در حال حرکت به طرف دیواره سمت راست می‌باشد.

همچنین شکل ۳ نرخ همگرایی جریان را در مرتبه‌های مختلف حل نشان می‌دهد که برای این منظور با قیاس زمانه L^2 برای مقادیر چگالی و معادله اول مونتوم محاسبه می‌شود و همانطور که مشخص است مرتبه حل به صورت $O(h^{N+1/2})$ به دست می‌آید که برای این نوع جریان مقدار بهینه محسوب می‌شود.

5-1-2- جریان حول ایرفویل NACA0012، زیرصوت غیرلزج

در این قسمت، جریان زیرصوت غیرلزج، شامل ایرفویل NACA0012 طبق

غیرخطی) و مرحله نیوتونی (مسئله خطی) تقسیم می‌شود. هر مرحله شرایط و ویژگی‌های منحصر به فردی دارد که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود.

4-2-1- مرحله راهاندازی

با تنظیم مناسب و ارائه یک حدس اولیه مناسب، می‌توان از روش‌های نیوتونی یک همگرایی فوق خطی را دریافت نمود. این هدف مستلزم ارائه یک مرحله اولیه مناسب است. در این مرحله در واقع یک راهاندازی اولیه برای تکرارهای نیوتونی انجام می‌شود. همچنین به علت تقریب‌هایی که در این مرحله اعمال می‌شود، دیگر انتظار یک همگرایی سریع و فوق خطی را نخواهیم داشت.

تنظیم CFL در یک الگوریتم ضمنی در واقع هدایت یک حل غیرخطی از دیدگاه کلی است. این مرحله می‌تواند به صورت تدریجی با تنظیم گام زمانی مصنوعی و عدد کورانت [22] و یا به صورت پله‌ای [17, 16] اعمال شود. از جمله سایر الگوریتم‌های تنظیم CFL می‌توان به روش‌های تاریخچه‌ای [23] اشاره کرد که کاربرد خوبی خصوصاً در هنگام استفاده از محدودگرهای دارا می‌باشدند.

استفاده از نرم تغییرات بردار با قیمانده (R) یا هر مشخصه مطلوب از میدان برای کنترل گام‌های به روزسازی بسیار مفید می‌باشد. در این راستا روش‌های تنظیم عدد شرط پایداری کورانت یا همان CFL توسعه یافته‌اند. از میان این روش‌ها، روش توسعه-کاهنده^۱ برای تنظیم مقدار CFL بسیار پرکاربرد و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$CFL^{n+1} = aCFL^n \left(\frac{\|R^{k-1}\|}{\|R^k\|} \right)^b \quad (17)$$

در این رابطه (17) ضریب‌های a و b به صورت تجربی تنظیم می‌گردند. عموماً برای رسیدن به یک حل حالت پایا، دقت گسسته‌سازی زمانی اهمیت پایینی دارد. بنابراین می‌توان علاوه بر تنظیم پارامتر کلی CFL، به صورت محلی و برای هریک از نقاط میدان حل، گام زمانی را به صورت مصنوعی تغییر داد تا در نهایت با سرعت بیشتری به حل نهایی دست یافت. این امر بدینهی است زیرا که اساساً مقیاس زمانی هر نقطه از میدان برای انتخاب یک استراتژی خاص از حل اولیه تا حل نهایی یکسان نمی‌باشد و این اجزه را به ما می‌دهد که در جایی که تغییرات شدید نیست، گام زمانی را تا بالاترین حد امکان در نظر بگیریم. بنابراین در یک الگوریتم گام زمانی مصنوعی می‌توان یک گام زمانی محلی زیر تعریف نمود:

$$\Delta t_i^{n+1} = CFL^{n+1} \frac{\Delta x_i}{L(\|\lambda_i\|)} \quad (18)$$

که در آن Δx_i اندازه المان i ام میدان،تابع L تعریفی از نرم سرعت محلی مشخصه‌های جریان سیال تراکم‌پذیر λ است. گام بعدی تعیین تلوارنس الگوریتم GMRES یا به عبارت دیگر دقت حل دستگاه معادلات می‌باشد. از آن جایی که در این مرحله از یک خطی‌سازی تقریبی استفاده شده است، حل دقیق دستگاه معادلات در تسريع همگرایی تاثیری نداشته و صرفاً هزینه محاسبات را افزایش می‌دهد. از این رو دستگاه معادلات در هر تکرار به طور تقریبی حل می‌شود. منطقی به نظر می‌رسد که دستگاه معادلات به اندازه کسری از باقی‌مانده غیرخطی حل گردد (tolerance = $C \times \text{Res}(U)$, $C \ll 1$). استفاده از این رویکرد از صرف هزینه اضافی جلوگیری می‌کند.

¹ Switched Evolution Relaxation

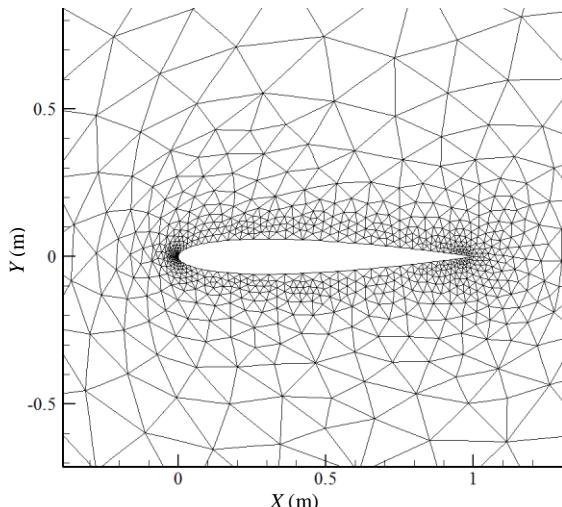


Fig. 4 Medium unstructured grid with 1865 elements

شکل 4 شبکه‌بندی بی‌سازمان متوسط با 1865 المان

از روش حجم محدود با تعداد 10694 سلول و از مرتبه دو استفاده شده است. شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای مرز دورست، 128 برابر وتر ایرفویل می‌باشد. شایان ذکر است مقادیر این دو ضریب آبرودینامیک به این شرط مرزی حساس می‌باشد و این در صد خطا ایجاد شده، ناشی از فاصله در نظر گرفته برای شرط مرزی دوردست می‌باشد. همچنین جدول 1 مقادیر این ضرایب را در مراتب مختلف چند جمله‌ای نشان می‌دهد.

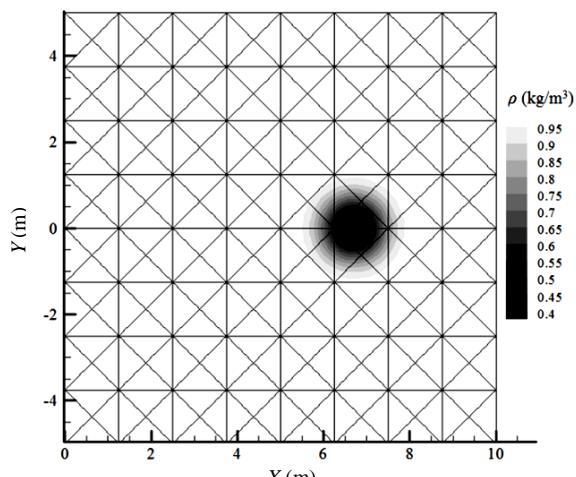
همچنین برای سنجش نمودار ماخ روی ایرفویل با تعداد المان 1865 و در سه مرتبه مختلف طبق شکل 5 ارائه شده است. در این شکل نمودار حاصله با نمودار گزارش شده توسط لیانگ و همکاران [25] مقایسه می‌شود. همانطور که در این نمودار مشخص است با افزایش مرتبه حل نمودار ماخ روی ایرفویل دقیق‌تر شده و به نمودار مرجع نزدیک‌تر می‌شود.

یکی از پارامترهای مهم در روش‌های ضمنی توجه به تعداد تکرارهای انجام شده برای دستیابی به حل نهایی است. در روش‌های نیوتن کرایلف هدو تکرار، شامل حل دستگاه (تکرار خطی) و حل کلی جریان (تکرار غیرخطی) حائز اهمیت است. شکل 6 نحوه همگرایی حل در شبکه‌بندی با تعداد 1865 المان را در مراتب N=1-3 با ماتریس‌پیش‌شرط ILU(0) نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است با انتخاب مناسب ماتریس پیش‌شرط و گام زمانی در مرحله خطی نرخ همگرایی از مرتبه دو می‌باشد. بنابراین از بزرگترین مزیت روش‌های کرایلف - همگرایی فوق خطی، مرتبه دو - به طور کامل استفاده شده است. البته در این قسمت از مراتب پایین‌تر به

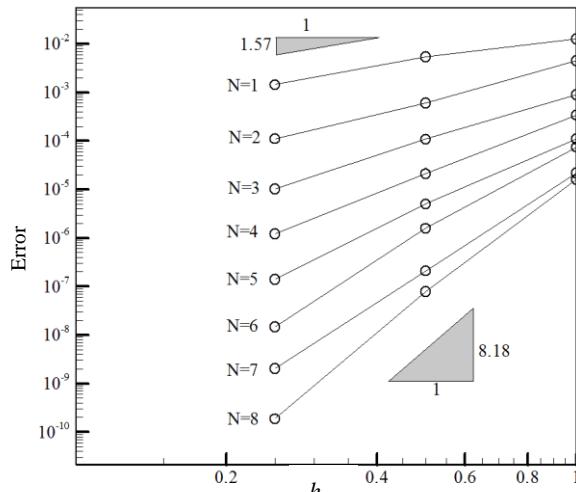
جدول 1 مقادیر ضریب برآ و پسا در شبکه‌بندی و درجه چندجمله‌ای مختلف

Table 1 Lift and Drag in different grid and degree of the polynomial

ضریب برآ	ضریب پسا	نمونه حل
0.0023539	0.2978	مرتبه دو
0.0081896	0.3304	مرتبه سه
0.0084564	0.3326	مرتبه چهار
0.0017013	0.3217	مرتبه دو
0.0005817	0.3250	مرتبه سه
0.0002951	0.3255	مرتبه چهار
0.0008331	0.3212	مرتبه دو
0.0003191	0.3255	مرتبه سه
0.0002853	0.3253	مرتبه چهار



شکل 2 شبکه‌بندی با اندازه المان h و کانتور چگالی در جریان آبرونتروپیک چرخشی



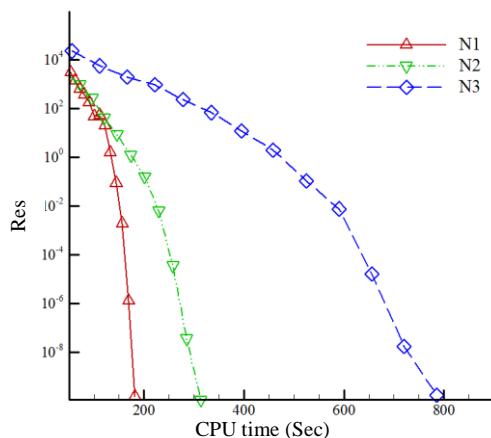
شکل 3 نرخ همگرایی در مراتب مختلف چگالی برای جریان آبرونتروپیک چرخشی

رابطه (23) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین مشخصات این جریان شامل سرعت صوت در شرایط آزاد و زاویه حمله 2 درجه و شرایط مرزی دوردست به اندازه 25 برابر وتر ایرفویل می‌باشد.

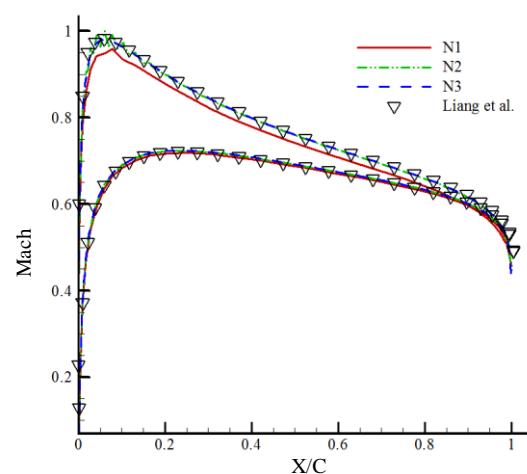
$$y = \pm 0.6(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1036x^4) \quad (23)$$

برای تخمین دقت حل، از ضرایب آبرودینامیکی پسا و برآ استفاده شده است. تمامی ضرایب و پارامترها در سه شبکه‌بندی بی‌سازمان شامل شبکه درشت (404 المان)، متوسط (1865 المان) و ریز (3432 المان) محاسبه شوند. طبق شکل 4 شبکه‌بندی حول ایرفویل در نواحی دارای انحنای شدید (ابتدا و انتهای ایرفویل) دارای تمرکز باشد و برای تخمین مرز خمیده از حل دقیق مرزها استفاده شده است.

همانطور که قبل اشاره شد برای تعیین دقت حل از ضریب آبرودینامیکی پسا در سه شبکه‌بندی مختلف به ازای مراتب مختلف محاسبه می‌شود. البته باید به این نکته توجه کرد که برای محاسبه میزان خطای این پارامتر از مقدار گزارش شده در مرجع [24] استفاده شده است، که در این مرجع مقادیر ضریب پسا 0.0004 و برآ 0.3289 بیان شده است. همچنین در این گزارش



شکل 7 زمان اجرا جریان زیرصوت لزج در تعداد المان 1865



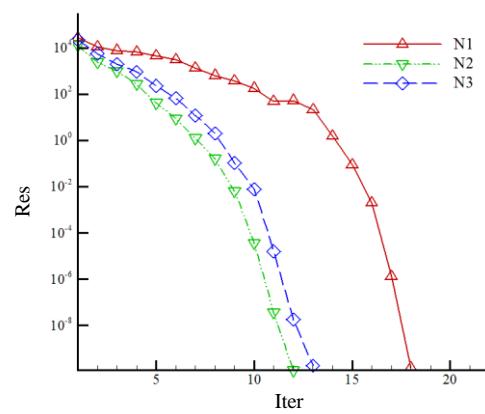
شکل 5 نمودار عدد ماخ حول ایرفویل برای جریان زیرصوت غیرلزج

به طور مثال ممکن است یک ماتریس پیش شرط موجب کاهش تعداد تکرارهای حلگر خطی شود ولی در حالت کلی باعث افزایش زمان اجرا گردد. همچنین در بعضی از جریانات زمان اجرا اهمیت چندانی پیدا نکرده و دستگاه حل به حدی بدوضیح می شود که ناگزیر هستیم از ماتریس های پیش شرط قوی حتی با زمان اجرا طولانی استفاده کنیم. جدول 2 عملکرد هر کدام از ماتریس های پیش شرط برای شبکه بندی متوسط را نشان می دهد. زمان اجرا در این جدول بر حسب دقیقه می باشد و تعداد تکرارها (Iter) و تعداد تکرارهای خطی (GMRES) نیز مشخص شده است. همانطور که در جدول مشخص است هنگام استفاده از ماتریس چند شبکه ای حل و تکرارهای خطی هموار کننده ماتریس های پیش شرط تعداد تکرارهای خطی باشد و تعداد تکرارهای خطی با کاهش داده است. ولی در نقطه مقابل زمان اجرا افزایش می یابد. البته با توجه به اینکه در این نوع جریان ماتریس ژاکوبی چندان بدوضیح نیست منطقی به نظر می رسد از ماتریس های پیش شرط بدون هموار کننده استفاده شود.

5-2- جریان گذرای صوت غیرلزج

جریان گذرای صوت، همواره به خاطر داشتن ماهیت دو نوع جریان از نمونه های سنجش بسیاری از حلگرهای بوده است. به خصوص در روش های ضمنی همانند روش نیوتن-کرایلف، اعمال محدودگر باعث افزایش عدد شرط ماتریس ژاکوبی شده و نرخ همگرایی به شدت کاهش می یابد. در تحقیق حاضر برای حل این مشکل از لزجت مصنوعی برای محدود کردن نواحی با گرادیان شدید و ماتریس های پیش شرط مناسب استفاده شده است.

برای شبیه سازی این جریان از ایرفویل NACA0012 با مشخصات $M=0.8$ و زاویه حمله 1.25° درجه استفاده می شود. در این مشخصات جریان یک شوک قوی در روی ایرفویل و یک شوک ضعیف در زیر آن تشکیل



شکل 6 نرخ همگرایی جریان زیرصوت غیرلزج

عنوان شرایط اولیه مراحل بالاتر استفاده می شود. همانطور که از این شکل مشخص است با افزایش مرتبه حل میزان تکرارهای خطی در مرحله خطی افزایش چندانی پیدا نمی کند ولی تعداد تکرارهای غیرخطی در صورتی که از مرتبه های پایین تر برای شرایط اولیه استفاده نشود افزایش پیدا خواهد کرد.

زمان حل نیز مهمترین پارامتر سنجش الگوریتم های ضمنی می باشد. (شکل 7) زمان اجرا برای جریان زیرصوت اویلر با استفاده از ماتریس پیش شرط (0) ILU(0) در مرتبه های مختلف را نشان می دهد. با توجه به این نمودار می توان دریافت که با افزایش مرتبه با وجود استفاده از مرتبه پایین به عنوان شرایط اولیه و افزایش نه چندان تعداد تکرارهای خطی و غیرخطی ولی زمان اجرا افزایش می یابد. از دلایل این موضوع می توان به ساخت ماتریس پیش شرط و حل دستگاه خطی اشاره کرد. زیرا همانطور که قبل اشاره شده بود اغلب ماتریس های پیش شرط استفاده شده با افزایش مرتبه حل زمان اجرای آن ها غیرخطی افزایش پیدا می کند.

بنابراین پرداختن به زمان حل در تمامی شبیه سازی ها الزامی است.

جدول 2 تأثیر ماتریس های پیش شرط مختلف برای جریان زیرصوت غیرلزج

Table 2 Effect of different precondition matrixes for inviscid subsonic flow

	MG-ILU(2)			MG-ILU(0)			MG-Block			ILU(2)			ILU(0)			Block			مرتبه
	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	
3.8	18	18	4.1	33	19	53.2	921	21	2.9	480	18	3.0	1390	18	47.0	18134	18	N=1	
7.1	12	12	7.1	22	12	61.4	737	12	5.8	370	12	5.2	708	12	41.4	13124	12	N=2	
27.8	13	13	18.4	25	13	79.3	910	13	16.7	377	13	13.1	723	13	62.3	16442	13	N=3	

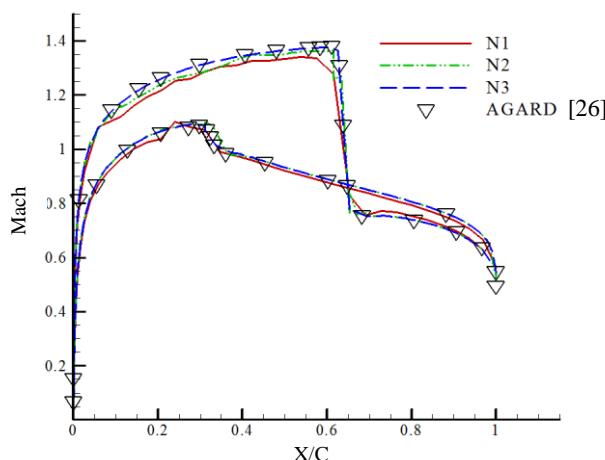


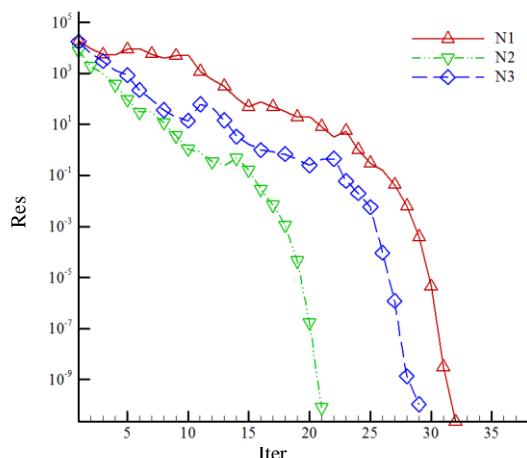
Fig. 10 Mach number of flow around an airfoil

شکل 10 نمودار عدد ماخ حول ایرفویل به ازای مرتبه های مختلف

جدول 3 ضرایب آبیودینامیکی برای جریان گذرای صوت غیرلزج

Table 3 Aerodynamic coefficients for inviscid transonic flow

نمونه حل	ضریب برآ	ضریب خطا	ضریب پسا	درصد خطا
مرتبه دو	0.3375	2.85	0.0243	9.95
مرتبه سه	0.3406	1.96	0.0233	5.43
مرتبه چهار	0.3442	0.92	0.0227	2.71
AGARD [26]	0.3474	0.00	0.0221	0.00



شکل 11 نرخ همگرایی جریان گذرای صوت غیرلزج

شکل 11 نرخ همگرایی جریان گذرای صوت غیرلزج

مراتب بالاتر استفاده می شود. ماتریس پیش شرط (ILU(0)) با تعداد شروع مجدد حلگر خطی 120 و ماکریتم تعداد تکرار 6000 لحاظ شده است.

در واقع گام زمانی قبل از تشکیل و مشخص شدن محل شوک محدود نگه داشته شده (CFL=200) سپس از طریق رابطه (17) افزایش پیدا می کند. با خطا شدن جریان و تشخیص محل شوک محدودگر ثابت نگه داشته شده و مانع از تاثیرپذیری آن از شرایط جریان می شود. البته در این حالت باید به این نکته توجه کرد در صورتی که محدودگر زودتر ثابت نگه داشته شود باعث وگرایی جریان یا دقت پایین حل خواهد شد. در این نمونه مورد بررسی، زمانی که جریان در آستانه ورود به مرحله خطی می باشد یا به عبارت دیگر میزان باقیمانده غیرخطی از مرتبه (1) شود، محدودگر ثابت نگه داشته می شود.

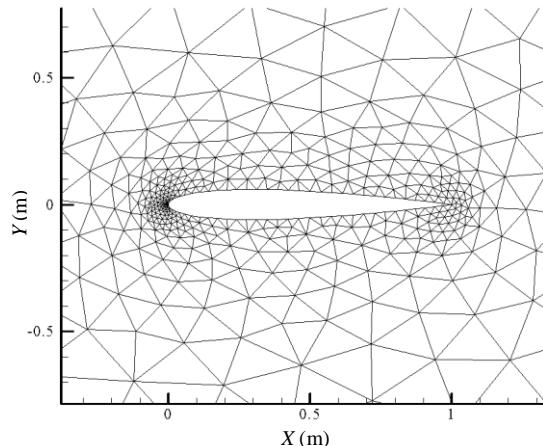
می شود. شکل 8 نتایج حاصله در شبکه بندی درشت با تعداد 1298 المان و بدون تمرکز شبکه در محل شوک را نشان می دهد.

همچنین در شکل 9 کانتور عدد ماخ بهارای N=3 می باشد که با وجود شبکه بندی درشت، شوک در سطح بالایی و زیرین ایرفویل با تیزی مناسبی تشکیل شده است.

یکی از عمدۀ مشکلات روش های المان-محدود هنگام استفاده از محدودگرها در جریان های گذرای صوت، عدم افزایش دقت حل با وجود افزایش مرتبه حل می باشد. به عبارت دیگر ضخامت شوک به اندازه المان های در گیر وابسته است و افزایش مرتبه حل تاثیری در دقت حل نخواهد گذاشت. در شکل 10، با افزایش مرتبه حل میزان خطای نمودار عدد ماخ حول سطح ایرفویل، به خصوص در محل شوک کاهش می یابد، زیرا میزان لزجت اعمالی در محل شوک با مرتبه حل رابطه معکوس داشته و با افزایش مرتبه حل، کاهش می یابد. در این جریان از نتایج AGARD [26] با 39×39 المان و تمرکز شبکه در محل شوک برای اعتبارسنجی استفاده شده است.

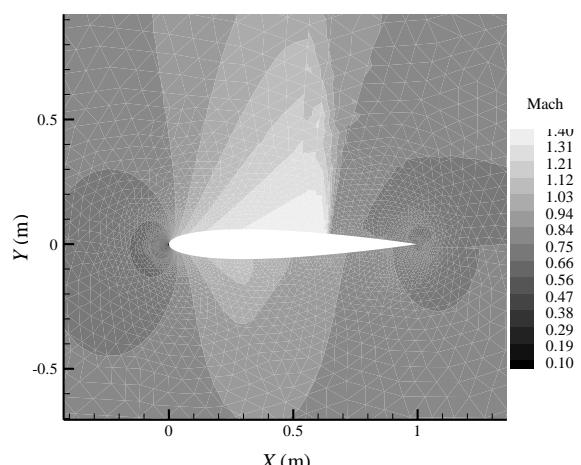
همچنین برای سنجش دقت حل دو ضریب آبیودینامیکی برآ و پسا بیان می شود. جدول 3 دو ضریب آبیودینامیکی را با سایر حل های موجود مقایسه می کند که درصد خطای در این نوع شبکه بندی منطقی به نظر می رسد.

شکل 11 و 12 نحوه همگرایی حل به ازای مراتب N=1-3 را نشان می دهد که همانند جریان قابلی از حل مراتب پایین به عنوان شرایط اولیه



شکل 8 شبکه بندی جریان گذرای صوت با 1298 المان

شکل 8 شبکه بندی جریان گذرای صوت با 1298 المان



شکل 9 کانتور عدد ماخ برای جریان گذرای صوت

شکل 9 کانتور عدد ماخ برای جریان گذرای صوت

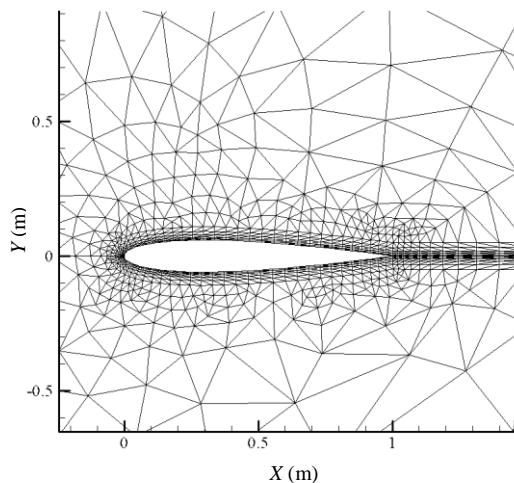
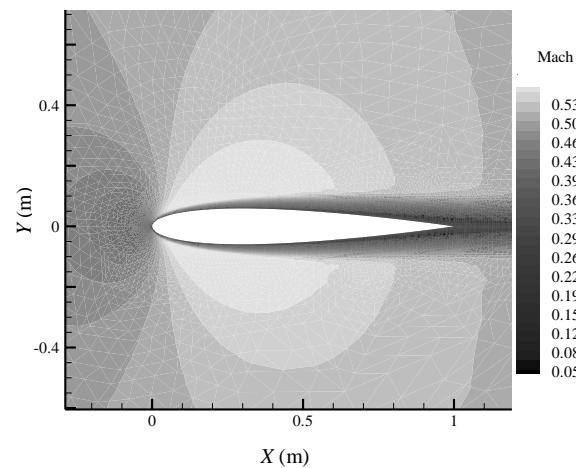


Fig. 13 Applied grid for viscous laminar subsonic flow

شکل 13 شبکه بندی استفاده شده برای جریان زیرصوت، آرام لزج

Fig. 14 Mach contour of viscous laminar subsonic flow in order of N=3
شکل 14 کانتور عدد ماخ برای جریان زیرصوت آرام لزج در مرتبه N=3

را نشان می دهد. با توجه به این جدول، با افزایش مرتبه حل مقادیر ضریب پسا و نقطه جداپاش دقیق تر شده و به حل های معیار نزدیکتر می شود. البته در این حالت به عملت نبود یک مرجع مطمئن برای مقایسه از سه منبع با روش های مختلف استفاده شده است. بنابراین به علت تعدد منابع، بیان مرتبه حل جریان منطقی به نظر نمی رسد.

شکل 16 نرخ همگرایی این جریان با ماتریس پیش شرط (0) ILU(0) و در مرتب چندجمله ای N=1-3 را نشان می دهد. در این حالت نیز همانند روند گذشته، از مراتب کمتر به عنوان شرایط اولیه مراتب بالا استفاده شده است. از آنجایی که در این جریان دو دسته معادله برای تخمین جمله بیضوی استفاده می شود با افزایش مرتبه حل حجم محاسبات بهیکاره افزایش می بارد (شکل 17). همچنین به علت بروز پیش شرط بودن ماتریس ژاکوبی تعداد تکرارهای حلگر

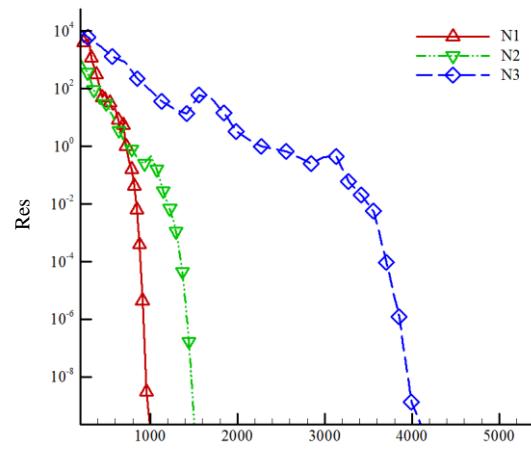


Fig. 12 Run time for inviscid transonic flow with different orders

شکل 12 زمان اجرا جریان گذرای صوت غیرلزج با مراتب مختلف

در جدول 4 تاثیر استفاده از سه ماتریس پیش شرط مختلف در کنار هموار چندجمله ای گزارش شده است. طبق جدول 4، استفاده از ILU(2) نسبت به ILU(0) بین 79 تا 67 درصد در تعداد تکرارهای خطی و 22 درصد زمان اجرا در مرتبه N=3 و ماتریس پیش شرط MG-ILU(2) نسبت MG-ILU(0) بین 59 تا 64 درصد تعداد تکرارهای خطی و بین 16 تا 20 درصد زمان اجرا را کاهش داده است. همچنین با توجه به شکل 11 و 12 در مرحله خطی نرخ همگرایی فوق خطی می باشد و تعداد تکرارها در مرحله خطی با تعداد تکرارها برای جریان زیرصوت کاملاً یکسان و همانند می باشد که حاکی از عدم تاثیرگذاری محدودگر در نرخ همگرایی می باشد.

5-3- جریان زیرصوت آرام لزج

معادله ناویراستوکس به علت داشتن جمله های بیضوی و ساختار بدوضوع ماتریس ژاکوبی یکی از زمینه های چالش انگیز در روش های گلرکین گسسته ضمنی محسوب می شود. همچنین روش گلرکین گسسته در این نوع جریان به شبکه بندی و مشخصات جریان بسیار وابسته است.

نمونه مورد بررسی شبکه بندی شکل 13 با تعداد 2086 المان حول ایرفویل NACA0012، با مشخصات جریان M=0.5 و Re=5000 و زاویه حمله صفر درجه می باشد که از شرط موزی دوردست برای ورودی جریان و عدم لغزش-آدیاباتیک ببروی دیواره استفاده شده است.

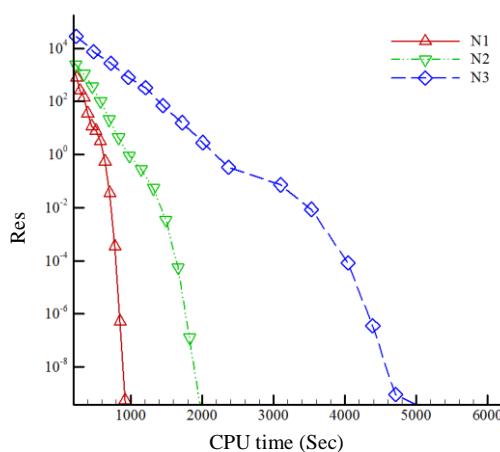
همچنین شکل 14 کانتور عدد ماخ در مراتب مختلف چندجمله ای برای روش CDG را نشان می دهد. در این شکل نیز با افزایش مرتبه چند جمله ای تغییرات کانتور ماخ مشخص است. در شکل 15 نیز گردابه های تشکیل شده در انتهای ایرفویل به ازای مرتبه N=3 نمایان است. تشکیل این دو گردابه سیار اهمیت دارد زیرا ممکن است در مرحله خطی در صورت تخمین اشتباه جمله های بیضوی هیچکدام از این گردابه ها تشکیل نشوند.

جدول 5 تمامی پارامترهای سنجش برای این جریان در سه مرتبه حل

جدول 4 تاثیر ماتریس های پیش شرط مختلف برای جریان گذرای صوت غیرلزج

Table 4 Effect of different precondition matrixes for inviscid transonic flow

	MG-ILU(2)			MG-ILU(0)			MG-Block			ILU(2)			ILU(0)			Block			مرتبه
	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	GMRES	زمان	تکرار	
25.1	33	33	19.8	81	33	89.2	4003	33	19.2	320	33	17.0	1119	33	-	-	-	N=1	
26.5	21	21	31.6	58	21	112.2	5450	25	24.9	297	21	25.2	910	21	-	-	-	N=2	
57.2	29	29	72.1	79	29	230.1	6770	31	53.7	181	29	68.9	875	29	-	-	-	N=3	



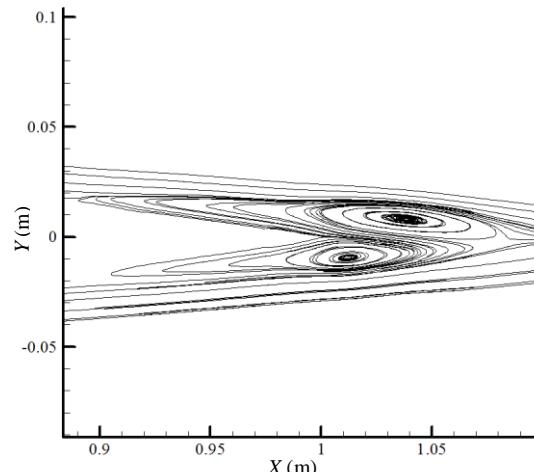
شکل ۱۷ زمان اجرا جریان زیرصوت لزج در مراتب مختلف

استفاده از حلگرهای خطی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در واقع در این سری از جریان‌ها به علت ماهیت فیزیکی جریان، داخل و بیرون لایه مرزی، درایه‌های ماتریس ژاکوبی از مرتبه‌های مختلف می‌باشند. در نتیجه حل دستگاه در مرحله خطی دارای نرخ همگرایی کمتری بوده و حتی در بعضی مواقع، با کمترین خطابی مانع از همگرایی حل می‌شود (جدول ۶). هموار کننده چند شبکه‌ای یکی از مناسب‌ترین ماتریس‌های پیش‌شرط برای معادله ناویراستوکس می‌باشد ولی در مواردی که به طور صحیح مقادیر ورودی آن تعیین نشود تاثیر عکسی خواهد گذاشت. در این تحقیق برای این پیش‌شرط، از نوع V چرخه‌ای [15] و تکرارهای ۹۰، ۱۱۵ و ۴۰ برای تکرارهای داخلی در نظر گرفته شده است. میزان 10^{-10} برای همگرایی باقیمانده غیرخطی و سه مرتبه کمتر از این باقیمانده برای باقیمانده خطی برای هر تکرار در نظر گرفته شده است.

برای دست‌یابی به نرخ همگرایی سریع در این نوع جریان باید از ماتریس‌های پیش‌شرط مناسبی استفاده شود که ارتباط بین المان‌ها در داخل لایه مرزی و ناحیه غیرلزج را در برگیرد. به عبارت دیگر در روش بلوك ژاکوبی ارتباط بین تمامی المان‌ها را در نظر نمی‌گیرد در نتیجه حلگر خطی در این حالت متوقف می‌شود. طبق جدول ۶، استفاده از ILU(2) نسبت به MG(0) تا 93 درصد در تعداد تکرارهای خطی و ماتریس پیش‌شرط- MG ILU(0) نسبت به MG-ILU(2) بین 71 تا 79 درصد تعداد تکرارهای خطی و تا 25 درصد زمان اجرا را کاهش داده است. نکته جالب، عدم همگرایی روش توسعه (0) در مرتبه $N=3$ می‌باشد که برخلاف آن توسط ماتریس پیش‌شرط (2) حلگر در این مرتبه همگرایی بسیار مناسبی دارد.

۶- نتیجه‌گیری

در بسیاری از روش‌های المان محدود مرتبه بالا با افزایش مرتبه گسسته‌سازی در جریان گذراي صوت، دقت حل در محل گسستگی افزایش چندانی پیدا نمی‌کند و نرخ همگرایی کاهش می‌یابد. در این مقاله برای

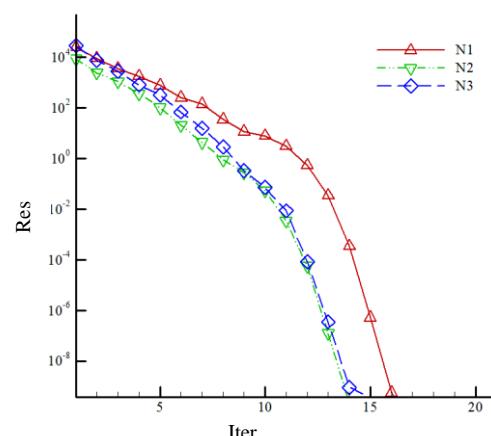


شکل ۱۵ گردابه تشکیل شده برای جریان زیر صوت آرام در انتهای ایرفویل

جدول ۵ مقایسه ضرایب آیرودینامیکی برای جریان زیر صوت آرام لزج

Table 5 Comparison of aerodynamic coefficients for viscous laminar subsonic flow

نمونه حل	ضریب فشاری پسای	ضریب جدایش نقطه لزجت پسای	ضریب جدایش
مرتبه دو	0.0210	0.0322	0.803
مرتبه سه	0.0228	0.0329	0.805
مرتبه چهار	0.0225	0.0334	0.820
ARC2D [27]	0.0221	0.0321	0.824
Mavriplis [28]	0.0229	0.0332	0.814
Radespiel [29]	0.0224	0.0330	0.814



شکل ۱۶ نرخ همگرایی جریان زیر صوت آرام در مراتب مختلف چندجمله‌ای

برای دست‌یابی به جواب مطلوب افزایش چشمگیری دارد.

نرخ همگرایی روش گلرکین گسسته برای معادله ناویر استوکس با

جدول ۶ تأثیر ماتریس‌های پیش‌شرط مختلف برای جریان زیر صوت لزج

Table 6 Effect of different precondition matrixes for viscous subsonic flow

مرتبه	MG-ILU(2)			MG-ILU(0)			MG-Block			ILU(2)			ILU(0)			Block		
	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان	GMRES	تکرار	زمان
14.7	16	16	19.1	56	20	142.1	3126	20	13.3	663	16	16.3	7886	17	-	-	-	N=1
30.9	14	14	40.4	56	18	176.9	3072	18	29.9	477	14	33.1	6847	14	-	-	-	N=2
69.1	17	15	92.7	82	20	367.5	4578	22	67.6	548	15	-	-	-	-	-	-	N=3

- method for elliptic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 4, pp. 1806–1824, 2008.
- [11] F. Bassi, S. Rebay, Numerical evaluation of two discontinuous galerkin methods for the compressible navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, No. 1-2, pp. 197–207, 2002.
- [12] V. Dolejsi, M. Holík, J. Hozman, Efficient solution strategy for the semi implicit discontinuous galerkin discretization of the navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 11, pp. 4176–4200, 2011.
- [13] F. Bassi, A. Crivellini, D. Di Pietro, S. Rebay, An implicit high-order discontinuous galerkin method for steady and unsteady incompressible flows. *Computers & Fluids*, Vol. 36, No. 10, pp. 1529–1546, 2007.
- [14] P. O. Persson, J. Peraire, Newton-gmres preconditioning for discontinuous galerkin discretizations of the navier-stokes equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 30, No. 6, pp. 2709–2733, 2000.
- [15] T. Dolsady, D. Darmofal, Preconditioning methods for discontinuous galerkin solutions of the navier-stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 11, pp. 3917–3935, 2009.
- [16] A. Nejat, C. Ollivier-Gooch, A high-order accurate unstructured finite volume newton-krylov algorithm for inviscid compressible flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 4, pp. 2582–2609, 2008.
- [17] A. Nejat, C. Ollivier-Gooch, Effect of discretization order on preconditioning and convergence of a high-order unstructured newton-gmres solver for the euler equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 4, pp. 2366–2386, 2008.
- [18] V. Esfahanian, A. Nejat, B. Baghapour, High-order cubic spline boundary representation for discontinuous Galerkin simulation of compressible inviscid flows, *20th AIAA CFD Conference*, AIAA Paper 2011-3838, 2011.
- [19] B. Baghapour, V. Esfahanian, A. Nejat, A framework for curved boundary representation in 2D discontinuous galerkin euler solver, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 693–702, 2014.
- [20] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, *Siam*, pp. 102–183, 2003.
- [21] Y. Saad, M. Schultz, Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, No. 3, pp. 856–869, 1986.
- [22] CH. Michalak, C. Ollivier-Gooch, Globalized matrix-explicit newton-gmres for the high-order accurate solution of the euler equations, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 7, pp. 1156–1167, 2010.
- [23] V. Venkatakrishnan, Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters, *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, No. 1, pp. 120–130, 1995.
- [24] D. L. De Zeeuw, A Quadtree-Based Adaptively –Refined Cartesian-Grid Algorithm for Solution of the Euler Equations, PhD thesis, Aerospace Engineering and Scientific Computing in the University of Michigan, 1993.
- [25] C. Liang, A. Jameson, Z. Wang, Spectral difference method for compressible flow on unstructured grids with mixed elements, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 8, pp. 2847–2858, 2009.
- [26] Test Case for Invicid Flow Fields, Technical Report AR-211, Advisory Group for Aerospace Research and Development (AGARD), NATO., 1985.
- [27] C. Ollivier-Gooch, Solution of the Navier-Stokes Equations on Locally-Refined Cartesian Meshes Using State-Vector Splitting, PhD thesis, Stanford University, 1993.
- [28] D. J. Mavriplis, A. Jameson, L. Martinelli, Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes, ICASE Report No. 89-11, NASA Langley Research Center, 1989.
- [29] R. Radespiel, A cell-vertex multigrid method for the Navier-Stokes equations, NASA TM-101557, 1989.

افزایش دقت حل در محل شوک و افزایش نرخ همگرایی از لجه مصنوعی استفاده گردیده است. این موضوع باعث افزایش دقت حل (با وجود ثابت بودن تعداد شبکه) و افزایش نرخ همگرایی (همگرایی فوق خطی در مرحله خطی) شد. همچنین در این تحقیق برای کاهش تعداد تکرارهای غیرخطی از روش افزایش گام زمانی محلی براساس شرایط فیزیکی میدان استفاده شد. استفاده از ماتریس‌های پیش‌شرط برای روش گلرکین گسسته به علت هم‌مرتبه نبودن درایه‌های ماتریس ژاکوبین ناشی از گسسته‌سازی معادلات، بسیار حائز اهمیت بوده و عملآ تاثیر اساسی بر سرعت همگرایی داشته است. در این راستا استفاده از ماتریس‌های پیش‌شرط (ILU(2) و MG-ILU(2)) نرخ همگرایی در جریان زیر صوت غیرلرج 65 درصد، گذرای صوت 79 و زیرصوت آرام را تا 93 درصد کاهش داده است. بهنظر می‌رسد استفاده از ماتریس پیش‌شرط فاکتور گیری مرتبه بالا می‌تواند مشکل همگرایی ماتریس‌هایی با عدد شرط بالا را برطرف کند.

7- مراجع

- J. Anderson, *Fundamentals of aerodynamics*, Vol. 2. McGraw-Hill NewYork, pp. 81–147, 2001.
- J. Ekaterinaris, A. High-order accurate, low numerical diffusion methods aerodynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 41, No. 3, pp. 192–300, 2005.
- C. B. Cockburn, CH. W. Shu, TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. general framework, *Mathematics of Computation*, Vol. 52, No. 186, pp. 411–435, 1989.
- B. Cockburn, CH. W. Shu, The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 141, No. 2, pp. 199–224, 1998.
- G. Chavent, G. Salzano, A finite-element method for the 1-D water flooding problem with gravity, *Journal of Computational Physics*, Vol. 45, No. 3, pp. 307 – 344, 1982.
- M. Jamei, H. Ghafouri, A discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media using modified MLP slope limiter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 185–195, 2015. (in Persian)
- F. Bassi, S. Rebay, High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 138, No. 2, pp. 251–285, 1997.
- F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 2, pp. 267–279, 1997.
- B. Cockburn, G. Kanschat, I. Perugia, D. Schötzau, Super convergence of the local discontinuous galerkin method for elliptic problems on cartesian grids, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 1, pp. 264–285, 2000.
- J. Peraire, P. O. Persson, The compact discontinuous galerkin (cdg)