



تحلیل پایداری ارتعاشات روتورهای نامیزان با استفاده از روش کرین

حامد زارعی¹، محمدرضا قضاوی خوراسگانی^{2*}، اصغر نجفی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه نیرو، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115143، ghazavim@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 31 تیر 1394

پذیرش: 09 مهر 1394

ارائه در سایت: 07 آذر 1394

کلید واژگان:

روتور

کرین

پایداری

ادغام فرکانسی

نامیزان

چکیده

در این تحقیق به بررسی و تعیین محدوده پایداری روتور نامیزان، پرداخته شده است. از نظریه کرین برای اولین بار در این مسئله برای تعیین معیار پایداری استفاده شده است. در این حالت دیسک دارای شش درجه آزادی است و امکان کوپل شدن همه مودها وجود دارد. اثر پارامتر انحراف زاویه‌ای وارد معادلات حرکت شده است. از روش لاگرانژ برای به دست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. علامت کرین هر یک از مودهای حرکتی مشخص شده است تا امکان وقوع ادغام فرکانسی بین مودها معلوم شود. از نمودار کمپل برای بررسی صحت نظریه کرین استفاده شده است. اثر استهلاک و نامیزانی بر پایداری بررسی شدند. نواحی پایدار و ناپایدار بر حسب متغیرهای مؤثر رسم شده است. نتایج حل عددی معادلات غیرخطی با نتایج به دست آمده از حل کرین و نمودارهای پایداری مقایسه شده است. مشخص شد که افزایش نامیزانی باعث قوی‌تر شدن کوپلینگ و بیشتر شدن ناپایداری می‌شود. روتور استوانه‌ای دارای ناپایداری بیشتری نسبت به روتور دیسکی است. بیشترین یا بزرگترین بازه ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که ممان اینرسی قطبی و عرضی دیسک برابر باشد. هر چه روتور به یاتاقان‌ها نزدیک‌تر شود ناپایداری‌ها به سمت سرعت‌های بیشتر جابجا می‌شوند. افزایش جرم باعث انتقال ناپایداری‌ها به سمت سرعت‌های کمتر می‌شود.

Stability analysis of the vibrations of unbalanced rotors with Krein's method

Hamed Zare'i¹, Mohammad-Reza Ghazavi^{1*}, Asghar Najafi²

1-Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

2-Rotating Equipment Department, Niroo Research Institute, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115143 Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 22 July 2015
Accepted 01 October 2015
Available Online 28 November 2015

Keywords:

Rotor
Krein
Stability
Frequency coalescence
Unbalance

ABSTRACT

In this research, the stable regions of an unbalanced rotor are specified. Krein's theorem is applied to this system for the first time. In this case, the disk has six degrees of freedom and coupling between all dynamic modes might be observed. The effect of the skew angle is observable in equations of motion. The equations of motion are derived using Lagrange's equations. Krein's signature of each mode is calculated in order to find possibility of frequency coalescence. Campbell diagrams are used to verify Krein's theorem. The damping and unbalancing effect on the system stability are studied. For all effective parameters, the stable and unstable zones are computed. Numerical analysis for the nonlinear governing equations is applied to compare the results. It was observed that, growth of the unbalancing makes the coupling more powerful and increases instability. Cylindrical rotor has more instability than disk-shaped rotor. When the polar moment of inertia is equal to the diametral moment of inertia, the maximum instability occurs. When rotor moves toward bearings, unstable regions shift toward larger velocities. Increasing the rotor mass shifts unstable velocities toward lower velocities.

1- مقدمه

می‌توانند بر هم اثر بگذارند. این اثرگذاری کوپلینگ¹ نامیده می‌شود. در سیستم روتور، وجود نامیزانی باعث ایجاد کوپلینگ می‌شود. به دلیل ایده‌آل نبودن فرآیند ساخت، همواره نامیزانی در روتورها وجود دارند. زمانی که نامیزانی زیاد باشد کوپلینگ ارتعاشات روتور قابل توجه خواهد بود. کوپلینگ پدیده‌ای است که می‌تواند باعث ایجاد تشدید² شود و سیستم را ناپایدار کند و در عمل باید حتی‌الامکان سعی کرد از این پدیده دوری کرد. در این

طبق تعریف استاندارد ISO، روتور جسمی است که با استفاده از لولاهای استوانه‌ای یا یاتاقان‌ها نگه داشته شده است به طوری که به آن اجازه می‌دهد حول یک محور در فضا دوران کند [1]. روتورها کاربرد زیادی در صنعت دارند. از جمله می‌توان ژنراتور، موتور هواپیما، هلی‌کوپتر، توربین و غیره را نام برد. بنابراین بررسی پایداری این اجزا حائز اهمیت می‌باشد.

برخی از سیستم‌ها دارای چند مود حرکتی می‌باشند. این مودها

1- Coupling
2- Resonance

Please cite this article using:

H. Zare'i, M. R. Ghazavi, A. Najafi, Stability analysis of the vibrations of unbalanced rotors with Krein's method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 128-136, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

اصلاح شده برای یافتن نواحی ناپایدار استفاده کرده است. رابکین [6] به مطالعه سیستم با چند روتور و یک شفت که تحت تأثیر گشتاور ضربانی بود پرداخت. روش و نتایج او بسیار شبیه به توندل [5] بود.

اسمیت و مبلی [7] به تحقیق در زمینه ناپایداری‌های موجود در توربین‌های بخار پرداخت. در زمینه رفتار روتور نامیزان، تحقیقات گسترده‌ای صورت پذیرفته است. از جمله می‌توان لاند و اراکات [8]، کاوامو و همکاران [9]، کیرک و گانتز [10]، برت و همکاران [11] و کوانگ [12] را نام برد. سلامون و گانتز [13] اثر انحراف زاویه‌ای¹³ بر روتور را بررسی کردند. آن‌ها از روتور یک سرگردار¹⁴ استفاده کردند تا اثر ترکیبی از نامیزانی و انحراف زاویه را بر دامنه و فاز بررسی کنند. کوهن و پورات [14] اثر تشدید ترکیبی¹⁵ بر ارتعاشات کوپله عرضی و پیچشی روتور نامیزان و انعطاف‌پذیر که با سرعت ثابت دوران می‌کند را بررسی کردند. سیرانیان [15] رفتار مقادیر ویژه در اطراف نقطه برخورد¹⁶ را مورد بررسی قرار داده است. کین و توربی [16] یک تبدیل مودال ارائه کردند که ماتریس‌های جرم و سختی را کاهش داده و نشان داد که مدل کاهش یافته، خواص مودال مدل اجزای محدود اصلی را حفظ می‌کند. محی‌الدین و خولیف [17] در ادامه کار قبلی [16] مدل دینامیکی سیستم روتور و یاتاقان را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند. شن و همکاران [18] ارتعاشات کوپله پیچشی-عرضی روتور شش درجه آزادی را بررسی کردند. یوان و همکاران [19] اثرات کوپلینگ داخلی و خارجی¹⁷ سیستم روتور با ارتعاشات پیچشی و خمشی را با استفاده از حل تحلیلی و عددی مطالعه کردند. نجفی و همکاران [3, 20, 21] تحلیل غیرخطی و انشعاب¹⁸ روتور پره‌دار را انجام دادند. با استفاده از تئوری کرین نشان دادند، زمانی که فرکانس مود گردشی پیشرو¹⁹ و حرکت جمعی پره‌ها²⁰ در نمودار کمپل برخورد می‌کنند، ناپایداری اتفاق می‌افتد یا خیر. در ادامه کارهای انجام شده توسط نجفی و همکاران [3, 20, 21] در این پژوهش، نامیزانی به روتور افزوده شده است. با استفاده از روش کرین تعیین شده است که در چه سرعت‌های زاویه‌ای امکان وقوع ادغام فرکانسی²¹ وجود دارد. در انتها، حل عددی معادلات غیرخطی انجام شده و با نتایج مقایسه شده است.

2- مدل‌سازی

مدلی که در این فصل ارائه شده است به صورت شماتیک در شکل 1 نشان داده شده است. سیستم شامل یک دیسک صلب و یک شفت انعطاف‌پذیر است. سرعت دورانی که از موتور به سیستم وارد می‌شود Ω است. جرم دیسک برابر است با m و اینرسی دورانی دیسک حول محور x و y برابر است با I و اینرسی دورانی دیسک حول محور z ، I می‌باشد. χ انحراف زاویه‌ای دیسک است که در جهت y فرض می‌شود. در این حالت با تغییر سرعت، حرکت دیسک در صفحه مقید نخواهد بود، ϕ_x ، ϕ_y و ϕ_z به ترتیب جابجایی زاویه‌ای دیسک حول محور x ، y و z هستند.

ابتدا باید سرعت‌های زاویه‌ای و خطی دیسک و مرکز جرم آن را نسبت به دستگاه واسطه محاسبه کرد. برای این منظور، باید ماتریس تبدیل بین دو

پژوهش سعی بر این است که نواحی که در آن احتمال کوپل شدن نامتعارف¹ وجود دارد شناسایی شوند، تا حوزه کاری، از این نواحی دور شود.

فرکانس طبیعی یک روتور، تحت اثرات ژيروسکوپی و سخت شوندگی ناشی از نیروی گریز از مرکز، تابعی از سرعت دورانی خواهد شد. این فرکانس‌ها را می‌توان در یک نمودار کمپل رسم کرد. اگر این فرکانس‌ها برای روتور غیرکوپل رسم شوند، در نقاطی یکدیگر را قطع می‌کنند. حال اگر کوچک‌ترین کوپلی بین مودهای حرکتی روتور به وجود آید تغییراتی در اطراف نقاط تقاطع به وجود می‌آید. مودهای حرکتی به واسطه کوپلینگ، بر یکدیگر اثر می‌گذارند. این اثرگذاری را تقابل² می‌نامند. در اثر تقابل فرکانس‌ها دو رفتار می‌تواند اتفاق بیافتد. این رفتار توسط کراندال مروسزکزیک [2] به دو دسته تقابل مودال متعارف³ و تقابل مودال نامتعارف⁴ تقسیم می‌شوند. در دسته اول، زمانی که دو مقدار ویژه به یکدیگر نزدیک می‌شوند، یکدیگر را دفع می‌کنند. این پدیده در بیشتر کتاب‌های دینامیک سازه به اثر انحراف منحنی⁵ معروف است. همچنین در برخی دیگر از منابع گریز از برخورد⁶ نامیده می‌شود. ولی در تقابل مودال نامتعارف، مقادیر ویژه یکدیگر را جذب کرده و منجر به پدیده ادغام فرکانسی⁷ و ناپایداری می‌شوند. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که تحت چه شرایطی تقابل متعارف یا نامتعارف ممکن است اتفاق بیافتد. در مورد سیستم‌های همیلتونی⁸ می‌توان این گونه به این سؤال پاسخ داد که از آنجایی که معادله مشخصه⁹ یک سیستم همیلتونی زوج است، مقادیر ویژه آن نمی‌توانند محور موهومی را با تغییر سرعت دورانی تا زمانی که یک جفت از آن‌ها با یکدیگر برخورد کنند، ترک نمایند. بر اساس نظریه کرین در صورتی برخورد مقادیر ویژه می‌تواند منجر به فاصله گرفتن آن‌ها از محور موهومی و ایجاد ناپایداری شود که علامت کرین¹⁰ آن‌ها متفاوت از یکدیگر باشند. نظریه کرین را می‌توان با مفهوم فیزیکی توضیح داد. کل انرژی یک سیستم همیلتونی مکانیکی، در طول زمان پایا است. از آنجایی که کل انرژی یک سیستم دینامیکی شامل انرژی مؤثر مودهای آن سیستم است، در صورتی که علامت انرژی تمام مودها یکسان باشد، الزاماً باید محدود باشند. زیرا تنها جمع مقادیر محدود است که می‌تواند ثابت باشد. بنابراین تا زمانی که دو مود با علامت انرژی متضاد وجود نداشته باشند، ناپایداری سیستم دینامیکی امکان‌پذیر نیست [3]. از لحاظ ریاضی، علامت کرین هر مود، با قرار دادن پاسخ هر مود در رابطه همیلتونین به دست می‌آید. با استفاده از این روش می‌توان دید کلی نسبت به مسئله پیدا کرد. بدون انجام محاسبات سنگین، قابلیت ناپایداری و شرط ایجاد ناپایداری توسط این روش کشف می‌شود. ولی محدوده دقیق پایداری توسط این روش قابل مشاهده نیست.

مطالعه روی دینامیک روتور به نیمه دوم قرن نوزدهم برمی‌گردد. رانکین [4] در سال 1869 اولین مقاله مربوط به دینامیک روتور را منتشر کرد. از اولین کسانی که در زمینه کوپلینگ حرکت پیچشی و عرضی، تحقیقات انجام داده، می‌توان توندل [5] را نام برد. او بر روی مدل توربوژنراتور¹¹، که شامل دو دیسک و شفت بدون جرم بود، مطالعه انجام داد. وی از تئوری فلوکه¹²

- 1- Nonconventional
- 2- Interaction
- 3- Conventional Modal Interaction
- 4- Nonconventional Modal Interaction
- 5- Curve veering effect
- 6- Avoided crossing
- 7- Frequency coalescence
- 8- Hamiltonian systems
- 9- Characteristic equation
- 10- Krein's signature
- 11- Torbogenerator
- 12- Floquet theory

در نظر گرفته می‌شدند. همین امر سبب می‌شد که نامیزانی دینامیکی، اثر خود را به صورت عامل غیرهمگن در سمت راست معادلات حرکت نشان دهد. افزایش دقت باعث می‌شود این پارامتر وارد معادلات حرکت شود و معادلات کوپل شوند و این می‌تواند عامل ناپایداری باشد. بنابراین در نظر گرفتن مرتبه‌های بالاتر حائز اهمیت می‌باشد.

می‌توان سرعت خطی مرکز جرم دیسک را از رابطه (10) محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} - y\omega_z + z\omega_y \\ v_y &= \dot{y} + (x + \varepsilon)\omega_z - z\omega_x \\ v_z &= \dot{z} - (x + \varepsilon)\omega_y + y\omega_x \end{aligned} \quad (10)$$

ε نامیزانی استاتیکی یا همان خروج از مرکز دیسک است. با استفاده از سرعت‌های زاویه‌ای و خطی به دست آمده می‌توان انرژی جنبشی را تشکیل داد.

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}I(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}J\omega_z^2 \quad (11)$$

انرژی پتانسیل از رابطه (12) به دست می‌آید [1]. اگر دیسک در وسط شفت نباشد k_{12} به وجود می‌آید. در این حالت k_{12} باعث تقابل بین x و y همچنین بین y و ϕ_x می‌شود. بنابراین k_{12} نیز از عوامل ایجاد کوپلینگ بوده و می‌تواند باعث ناپایداری شود.

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}[x \quad \phi_y] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \phi_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}k_a z^2 \\ + \frac{1}{2}[y \quad \phi_x] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \\ + \frac{1}{2}k_t \phi_z^2 \end{aligned} \quad (12)$$

تابع استهلاک ریلی به شکل زیر می‌باشد [22]. برای هر مود، استهلاک دوار و غیردوار در نظر گرفته شده است. اندیس r مربوط به استهلاک دوار و اندیس n مربوط به استهلاک غیردوار است. اندیس z مربوط به استهلاک در راستای z و b مربوط به استهلاک خمشی است.

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{2}(c_n + c_r)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(c_{zn} + c_{zr})\dot{z}^2 \\ + \frac{1}{2}(c_{bn} + c_{br})(\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2) + \frac{1}{2}(c_{tn} + c_{tr})\dot{\phi}_z^2 \\ + \frac{1}{2}c_n\Omega^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}c_{bn}\Omega^2(\phi_x^2 + \phi_y^2) \\ + c_n\Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + c_{bn}\Omega(\phi_x\dot{\phi}_y - \phi_y\dot{\phi}_x) \end{aligned} \quad (13)$$

به این ترتیب با استفاده از معادلات لاگرانژ می‌توان معادلات حرکت را به دست آورد. در نهایت، معادلات به دست آمده، غیرخطی و حجیم می‌باشند [22].

3- علامت کرین مودهای حرکتی

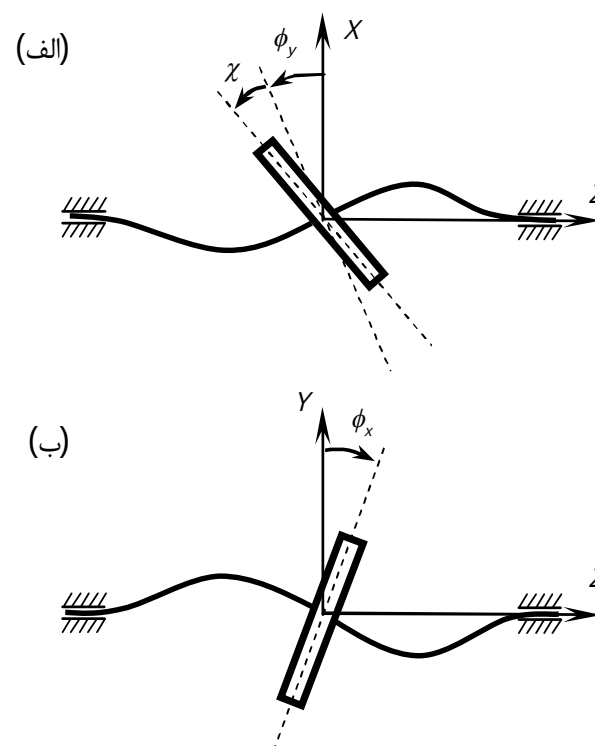
مودهای حرکتی در سیستم‌هایی که دارای چند مود حرکتی هستند می‌توانند به یکدیگر کوپل شوند و باعث تشدید یکدیگر شوند. بنابراین علامت کرین هر مود باید مشخص شود. به همین دلیل سیستم همیلتونی و بدون کوپلینگ در نظر گرفته شده است. چنانچه دو مود ارتعاشی دارای علامت کرین متضاد باشند می‌توانند باعث تشدید یکدیگر شوند. علامت کرین هر مود محاسبه شده و سپس نمودار کمپل و استهلاک آن‌ها در حالت کوپل رسم شده است. اگر از ε ، χ و k_{12} که عوامل کوپلینگ هستند، صرفنظر شود، معادلات حرکت غیرخطی به معادلات (14) تا (19) تبدیل می‌شوند.

$$m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} + (k_{11} - m\Omega^2)x = 0 \quad (14)$$

$$m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} + (k_{11} - m\Omega^2)y = 0 \quad (15)$$

$$m\ddot{z} + k_a z = 0 \quad (16)$$

$$I\ddot{\phi}_x + [k_{22} + (J - I)\Omega^2]\phi_x - (2I - J)\Omega\dot{\phi}_y = 0 \quad (17)$$



شکل 1 روتور دارای نامیزانی دینامیکی. نامیزانی در جهت محور Y است (الف) روتور پس از دوران حول محور Y (ب) روتور پس از دوران حول محور X

دستگاه ثابت و واسطه محاسبه شود. در این حالت ماتریس تبدیل کل، از حاصل ضرب چهار ماتریس تبدیل رابطه (1) به دست می‌آید.

$$R = R_4 \times R_3 \times R_2 \times R_1 \quad (1)$$

این ماتریس‌ها به شکل رابطه (2) تا (5) تعریف می‌شوند.

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & 0 & \sin(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\chi) & 0 & \cos(\chi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_x) & -\sin(\phi_x) \\ 0 & \sin(\phi_x) & \cos(\phi_x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & \sin(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \phi_z + \alpha) & -\sin(\Omega t + \phi_z + \alpha) & 0 \\ \sin(\Omega t + \phi_z + \alpha) & \cos(\Omega t + \phi_z + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

تانسور سرعت زاویه‌ای در دستگاه واسطه برابر خواهد بود با:

$$W = R^{-1} \times \dot{R} \quad (6)$$

از این تانسور می‌توان سرعت‌های زاویه‌ای را تشخیص داد.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi}_x - (\Omega + \dot{\phi}_z)(\chi + \phi_y) + \chi\phi_x\dot{\phi}_y - \frac{1}{2}\chi^2\dot{\phi}_x \\ &+ \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\chi\phi_y^2 + \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\chi\phi_x^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\chi^2\phi_y + \frac{1}{6}(\Omega + \dot{\phi}_z)\chi^3 + \frac{1}{6}(\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_y^3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \omega_y &= \dot{\phi}_y + (\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_x - \frac{1}{2}\phi_x^2\dot{\phi}_y \\ &- \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_x\phi_y^2 - \frac{1}{6}(\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_y^3 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= \Omega + \dot{\phi}_z + \chi\dot{\phi}_y - (\Omega + \dot{\phi}_z)\chi\phi_y \\ &- \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_y^2 - \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\phi_x^2 \\ &- \frac{1}{2}(\Omega + \dot{\phi}_z)\chi^2 + \frac{1}{6}\dot{\phi}_y\phi_x^3 + \frac{1}{2}\phi_x\chi^2\dot{\phi}_y - \frac{1}{6}\chi^3\dot{\phi}_x \end{aligned} \quad (9)$$

صرفنظر از پیچش و انحراف زاویه‌ای، روابط (7) تا (9) با مرجع [3] برابر خواهند بود.

در مطالعات صورت گرفته در گذشته، سرعت‌های زاویه‌ای با دقت کمتری

$$H_{\phi_x} = \frac{1}{2}I|\dot{\phi}_x|^2 + \frac{1}{2}[k_{22} + (J - I)\Omega^2]|\phi_x|^2 \quad (24)$$

$$H_{\phi_y} = \frac{1}{2}I|\dot{\phi}_y|^2 + \frac{1}{2}[k_{22} + (J - I)\Omega^2]|\phi_y|^2 \quad (25)$$

$$H_{\phi_z} = \frac{1}{2}J|\dot{\phi}_z|^2 + \frac{1}{2}k_t|\phi_z|^2 \quad (26)$$

با جایگذاری پاسخ مربوط به هر فرکانس در روابط (21) تا (26)، می‌توان علامت کرین مربوط به هر مود را مشخص کرد. در جدول 1 مقدار همیلتونین مربوط به هر مود آورده شده است. همیلتونین مثبت نشان دهنده علامت کرین مثبت و همیلتونین منفی نشان دهنده علامت کرین منفی می‌باشد. علامت کرین مدهای پیچشی و محوری همواره مثبت هستند و علامت کرین مدهای عرضی و خمشی می‌توانند مقادیر منفی نیز اختیار کنند. علامت کرین مدهای عرضی وابسته به سرعت دورانی هستند، در حالی که علامت کرین مدهای خمشی در درجه اول به هندسه دیسک، سپس به سرعت وابسته هستند. اگر روتور دیسکی باشد، علامت کرین همراه مثبت است و اگر روتور استوانه‌ای باشد، علامت کرین وابسته به سرعت خواهد بود [22].

$$I\ddot{\phi}_y + [k_{22} + (J - I)\Omega^2]\phi_y + (2I - J)\Omega\dot{\phi}_x = 0 \quad (18)$$

$$J\ddot{\phi}_z + k_t\phi_z = 0 \quad (19)$$

می‌توان با استفاده از معادله مشخصه مربوط به معادلات حرکت، فرکانس طبیعی پیشرو¹ و پسرو² هر مود را به دست آورد. پس از جایگذاری پاسخ در همیلتونین سیستم، علامت کرین هر مود محاسبه می‌شود.

تابع همیلتونین برای یک سیستم ژيروسکوپی از رابطه (20) به دست می‌آید [23]. این عبارت نشان دهنده انرژی سیستم است.

$$H = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2}q^T K q \quad (20)$$

همیلتونین دیسک برای مدهای مختلف حرکتی از روابط (21) تا (26) به دست می‌آیند.

$$H_x = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + \frac{1}{2}(k_{11} - m\Omega^2)|x|^2 \quad (21)$$

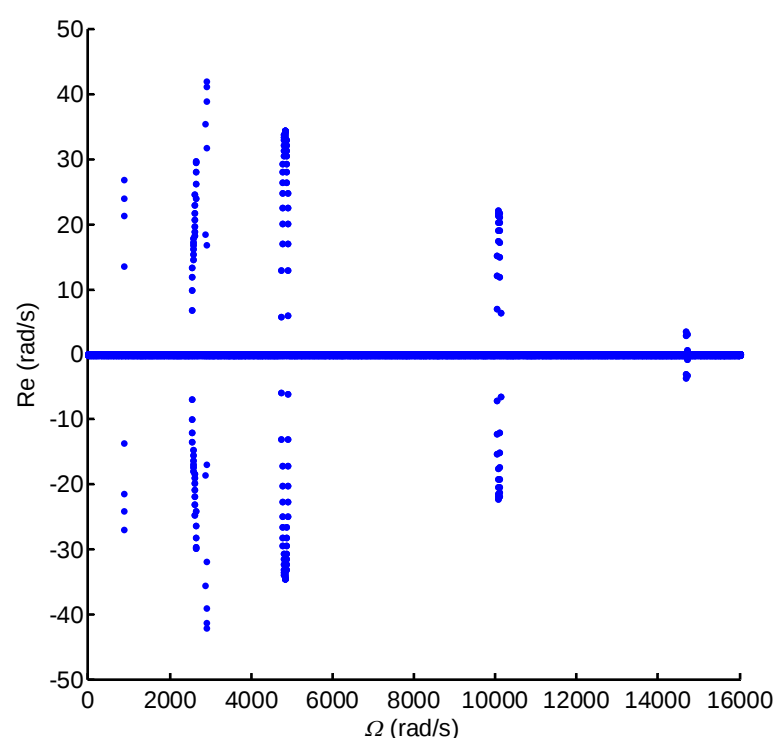
$$H_y = \frac{1}{2}m|\dot{y}|^2 + \frac{1}{2}(k_{11} - m\Omega^2)|y|^2 \quad (22)$$

$$H_z = \frac{1}{2}m|\dot{z}|^2 + \frac{1}{2}k_a|z|^2 \quad (23)$$

جدول 1 پاسخ و همیلتونین مربوط به هر مود. A_i, B_i, C_i, D_i, E_i و F_i که $i = 1, 2$ دامنه‌های پاسخ هستند.

همیلتونین	پاسخ	فرکانس
$H_x = mA_1^2\omega_n\omega_f > 0$	$x = A_1 e^{j\omega_f t}$	$\omega_f = \Omega + \omega_n$
$H_x = -mA_2^2\omega_n\omega_b \begin{cases} \Omega < \omega_n \Rightarrow H_x > 0 \\ \Omega > \omega_n \Rightarrow H_x < 0 \end{cases}$	$x = A_2 e^{j\omega_b t}$	$\omega_b = \Omega - \omega_n$
$H_y = mB_1^2\omega_n\omega'_f \begin{cases} \Omega < \omega_n \Rightarrow H_y > 0 \\ \Omega > \omega_n \Rightarrow H_y < 0 \end{cases}$	$y = B_1 e^{j\omega'_f t}$	$\omega'_f = -\Omega + \omega_n$
$H_y = -mB_2^2\omega_n\omega'_b > 0$	$y = B_2 e^{j\omega'_b t}$	$\omega'_b = -\Omega - \omega_n$
$H_z = C_1^2 k_a > 0$	$z = C_1 e^{j\kappa_f t}$	$\kappa_f = \sqrt{\frac{k_a}{m}}$
$H_z = C_2^2 k_a > 0$	$z = C_2 e^{j\kappa_b t}$	$\kappa_b = -\sqrt{\frac{k_a}{m}}$
$H_{\phi_x} = \frac{1}{2}D_1^2[I\gamma_f^2 + k_{22} + (J - I)\Omega^2] > 0$ $\begin{cases} J > I \Rightarrow H_{\phi_x} > 0 \\ J < I \Rightarrow \begin{cases} \Omega < \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_x} > 0 \\ \Omega > \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_x} < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\phi_x = D_1 e^{j\gamma_f t}$	$\gamma_f = \frac{(2I - J)\Omega + \sqrt{J^2\Omega^2 + 4Ik_{22}}}{2I}$
$H_{\phi_x} = \frac{1}{2}D_2^2[I\gamma_b^2 + k_{22} + (J - I)\Omega^2] > 0$ $\begin{cases} J > I \Rightarrow H_{\phi_x} > 0 \\ J < I \Rightarrow \begin{cases} \Omega < \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_x} > 0 \\ \Omega > \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_x} < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\phi_x = D_2 e^{j\gamma_b t}$	$\gamma_b = \frac{(2I - J)\Omega - \sqrt{J^2\Omega^2 + 4Ik_{22}}}{2I}$
$H_{\phi_y} = \frac{1}{2}E_1^2[I\gamma'_f{}^2 + k_{22} + (J - I)\Omega^2] > 0$ $\begin{cases} J > I \Rightarrow H_{\phi_y} > 0 \\ J < I \Rightarrow \begin{cases} \Omega < \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_y} > 0 \\ \Omega > \sqrt{\frac{k_{22}}{I - J}} \Rightarrow H_{\phi_y} < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\phi_y = E_1 e^{j\gamma'_f t}$	$\gamma'_f = \frac{-(2I - J)\Omega + \sqrt{J^2\Omega^2 + 4Ik_{22}}}{2I}$
$H_{\phi_y} = \frac{1}{2}E_2^2[I\gamma'_b{}^2 + k_{22} + (J - I)\Omega^2] > 0$	$\phi_y = E_2 e^{j\gamma'_b t}$	$\gamma'_b = \frac{-(2I - J)\Omega - \sqrt{J^2\Omega^2 + 4Ik_{22}}}{2I}$
$H_{\phi_z} = F_1^2 k_t > 0$	$\phi_z = F_1 e^{j\omega_f t}$	$\omega_f = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$
$H_{\phi_z} = F_2^2 k_t > 0$	$\phi_z = F_2 e^{j\omega_b t}$	$\omega_b = -\sqrt{\frac{k_t}{J}}$

1- Forward frequency
2- Backward frequency

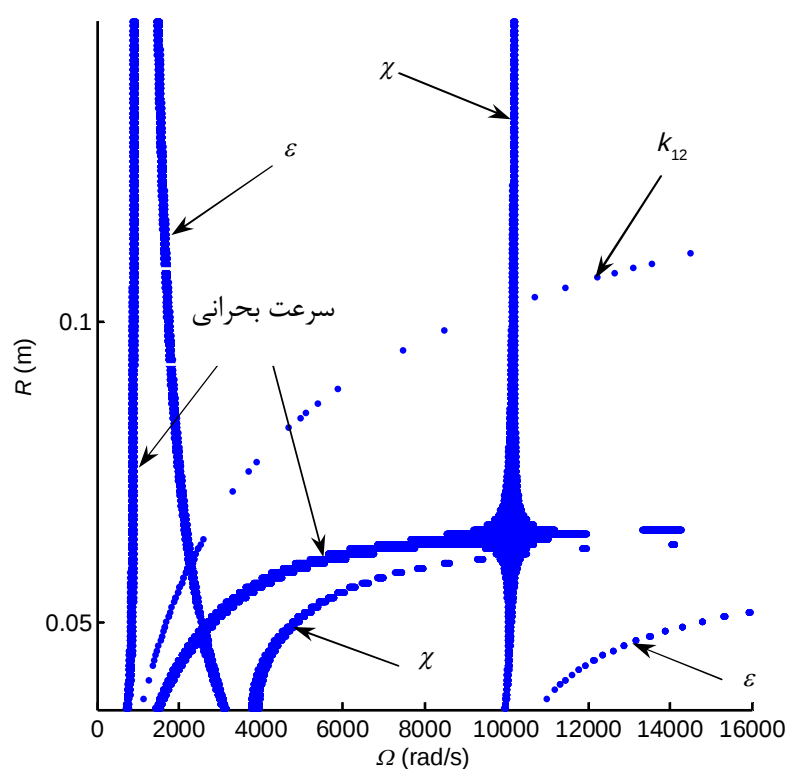


شکل 7 نمودار استهلاک روتور نمونه دوم در حالت کوپل

4- مرزهای پایداری

در این بخش نمودارهای مختلفی ارائه شده است که با استفاده از آن می‌توان چگونگی و میزان اثرگذاری یک پارامتر بر پایداری سیستم را مشاهده کرد. در اینجا سعی شده است تا اثر پارامترهایی که اثرگذاری بیشتری بر پایداری دارند نمایش داده شود. از مهمترین پارامترها می‌توان نسبت شعاع به ضخامت دیسک را نام برد. این نسبت تعیین می‌کند که روتور دیسکی است یا استوانه‌ای و چه تعداد برخورد با علامت کرین متضاد صورت گرفته است. بنابراین بررسی آن حائز اهمیت می‌باشد. نمودار پایداری این پارامتر در شکل 8 رسم شده است. به دلیل ثابت بودن فاصله دو تکیه‌گاه، شعاع دیسک از $R = 0.0354\text{m}$ نمی‌تواند کمتر باشد.

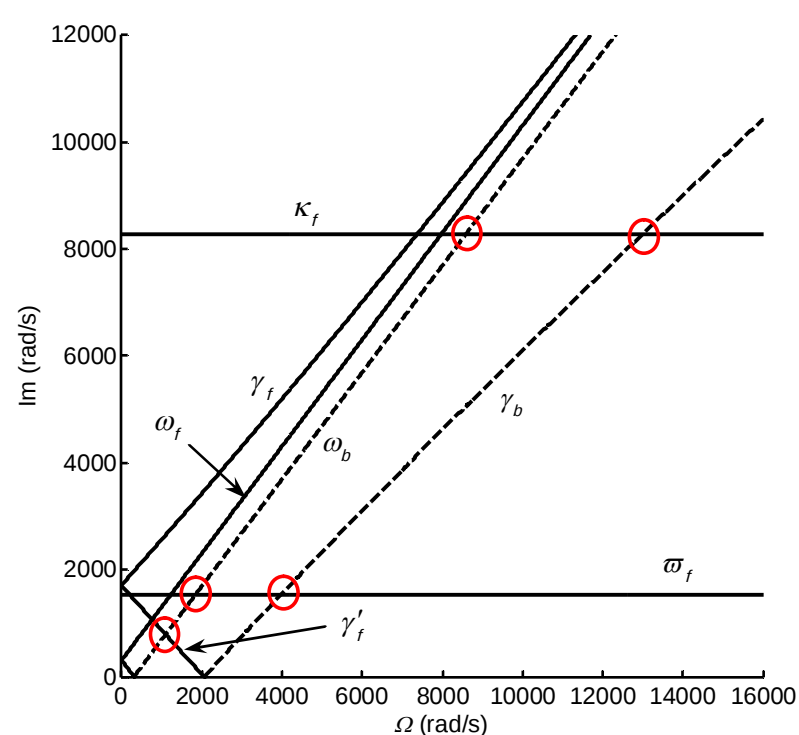
عامل ایجاد هر ناپایداری در شکل 8 نشان داده شده است. به ازای شعاع کمتر از $R = 0.066\text{m}$ روتور استوانه‌ای خواهد بود. روتور استوانه‌ای دارای



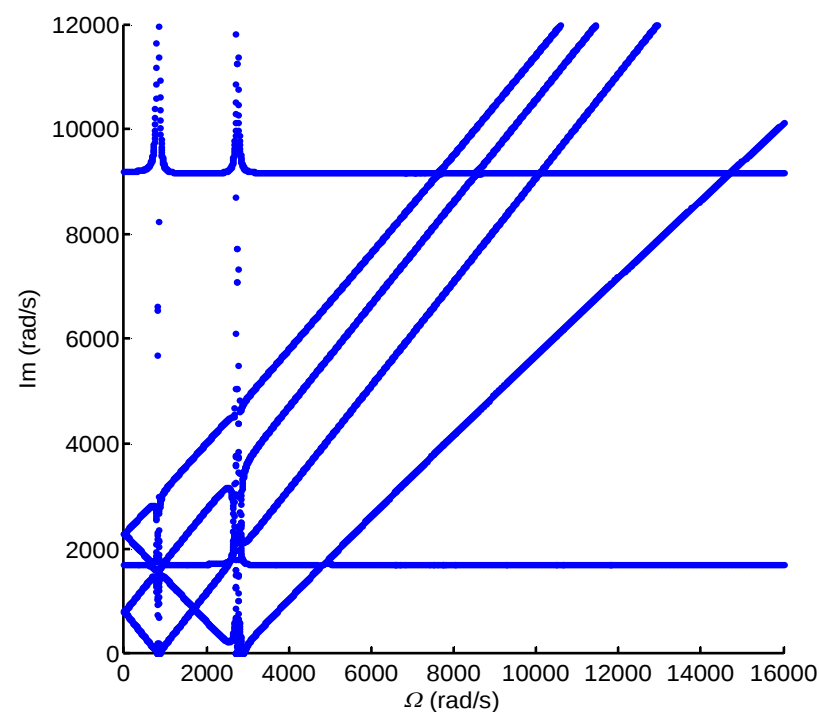
شکل 8 نمودار پایداری شعاع دیسک بر حسب سرعت دوران به ازای حجم یا جرم ثابت از دیسک. نقاط تیره رنگ نشان دهنده مناطق ناپایدار و نقاط سفید نشان دهنده مناطق پایدار هستند. عامل ایجاد هر ناپایداری در شکل نشان داده شده است.

$h = 0.02\text{m}$ می‌باشند. نمودار کمپل این روتور در حالت غیرکوپل در شکل 5 رسم شده است. در پنج نقطه برخورد با علامت کرین صورت گرفته است که در صورت وجود کوپلینگ بین آن‌ها ادغام فرکانسی رخ می‌دهد. ممکن است عوامل ایجاد کوپلینگ برای یک برخورد اثرگذاری بیشتری داشته باشد و برای یک برخورد دیگر اثر کمتری داشته باشد. هر چه اثرگذاری بیشتر باشد ادغام فرکانسی قوی‌تری رخ می‌دهد و حباب ناپایداری بزرگ‌تری ایجاد می‌شود. در شکل 5 این برخوردها با رسم دایره مشخص شدند.

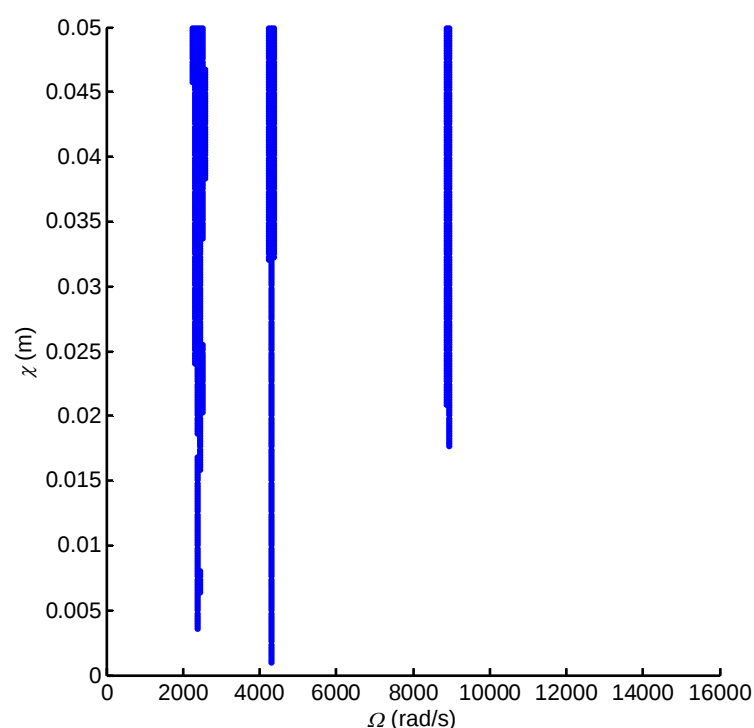
به ترتیب از سرعت صفر به سمت سرعت‌های بیشتر برخورد اول بین مود عرضی و خمشی، برخورد دوم بین مود عرضی و پیچشی، برخورد سوم بین مود خمشی و پیچشی، برخورد چهارم بین مود عرضی و محوری و برخورد پنجم بین مود خمشی و محوری می‌باشند. نمودار کمپل و استهلاک روتور کوپل نمونه دوم در شکل 6 و شکل 7 نشان داده شده است.



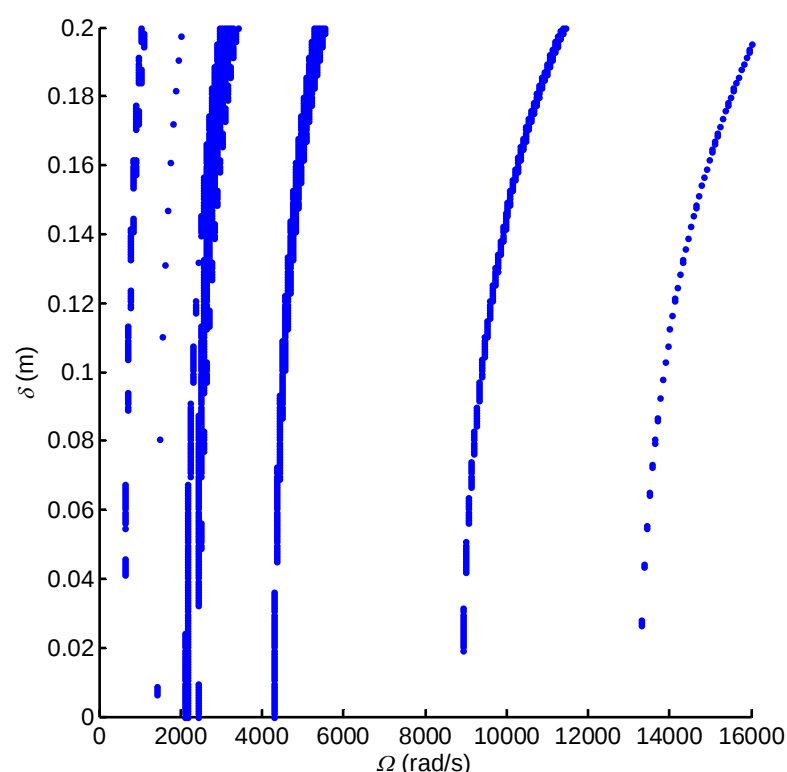
شکل 5 نمودار کمپل روتور نمونه دوم در حالت غیر کوپل. ω_f و ω'_f : فرکانس‌های پیشروی مود عرضی، ω_b : فرکانس پسروی مود عرضی، ω_f : فرکانس پیشروی مود پیچشی، γ_f و γ'_f : فرکانس‌های پیشروی مود خمشی و K_f : فرکانس پیشروی مود محوری. "—" علامت کرین مثبت، "- - -" علامت کرین منفی.



شکل 6 نمودار کمپل روتور نمونه دوم در حالت کوپل



شکل 10 نمودار پایداری نامیزانی دینامیکی بر حسب سرعت روتور نمونه دوم، نقاط تیره نشان دهنده مناطق ناپایدار و نقاط سفید نشان دهنده مناطق پایدار است.



شکل 11 نمودار پایداری δ بر حسب سرعت روتور نمونه دوم، نقاط تیره نشان دهنده مناطق ناپایدار و نقاط سفید نشان دهنده مناطق پایدار هستند.

5- پاسخ زمانی روتور غیر خطی

تا اینجا، محدوده‌های پایدار و ناپایدار توسط نمودارهای کمپل و پایداری به دست آمدند. به منظور ارزیابی صحت این نمودارها، پاسخ زمانی سیستم در سرعت‌های مختلف رسم شده است. در محدوده‌های ناپایدار دامنه ارتعاش افزایش، و در محدوده‌های پایدار دامنه ارتعاش ثابت و یا کاهش می‌یابد. به منظور از بین بردن پاسخ گذرای سیستم، مقداری استهلاک در نظر گرفته می‌شود. با وجود استهلاک، دامنه ارتعاش در سرعت‌های پایدار به صفر می‌رسد ولی در سرعت‌های ناپایدار بستگی به میزان استهلاک دارد. اگر مقدار استهلاک کم باشد دامنه از مقداری محدود، بیشتر نخواهد شد و اگر مقدار استهلاک از حدی بیشتر باشد، در تمام سرعت‌ها سیستم پایدار خواهد شد.

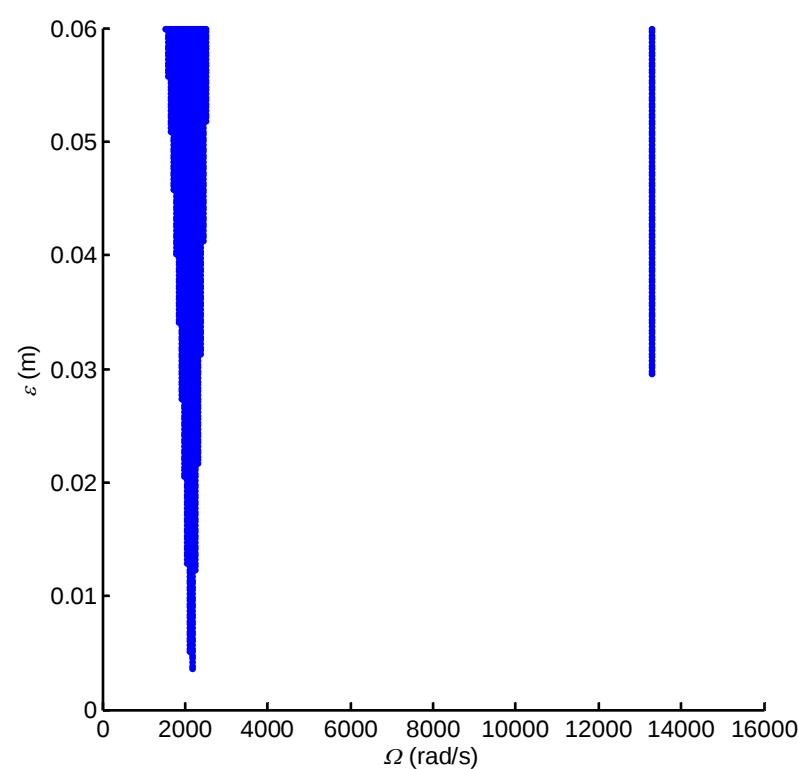
استهلاک‌های در نظر گرفته شده عبارتند از $c_{zn} = 250 \text{ kg/s}$ ، $c_{tn} = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ و $c_{bn} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ، به عنوان نمونه، پاسخ زمانی روتور دوم در سرعت‌های $\Omega = 2000 \text{ rad/s}$ ،

ناپایداری بیشتری است. بیشترین ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که $I = J$ باشد. این روتور رفتاری همانند کره دارد و هیچ‌گاه نباید از چنین روتوری استفاده شود.

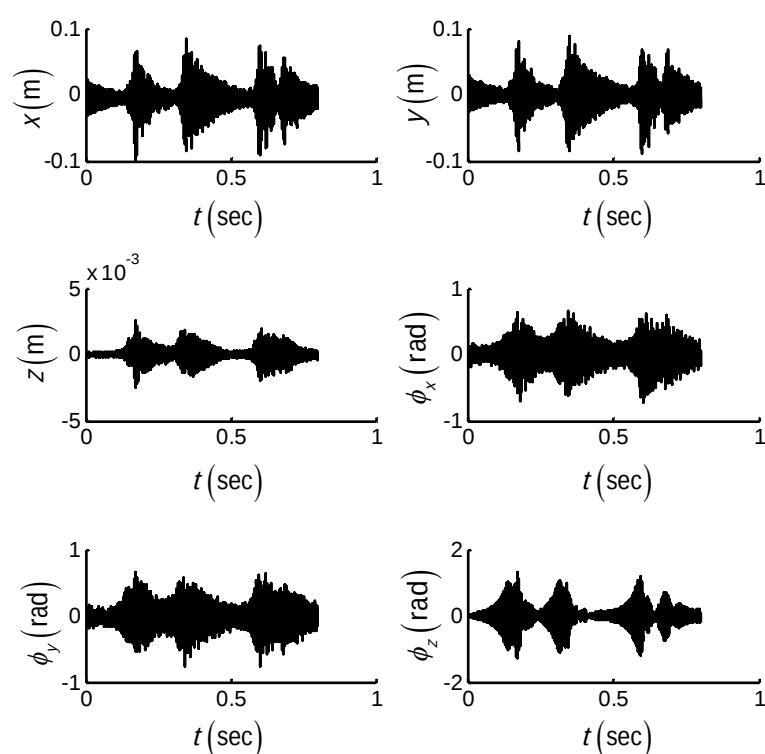
در ادامه روتور نمونه دوم بدون استهلاک برای بررسی اثر پارامترهای مختلف انتخاب شده است. پارامترهایی که باعث ایجاد کوپلینگ می‌شوند از جمله پارامترهای مهم در پایداری می‌باشند. سه پارامتر باعث کوپل شدن موده‌های حرکتی سیستم می‌شوند که عبارتند از ε ، χ و k_{12} . برای مشاهده اثر یک پارامتر، دو پارامتر دیگر صفر در نظر گرفته می‌شود. در شکل 9 نمودار پایداری ε بر حسب سرعت دوران نشان داده شده است. از آنجایی که χ و k_{12} صفر هستند، تنها حرکات پیچشی-عرضی و خمشی-محوری کوپلینگ دارد. با افزایش نامیزانی استاتیکی تنها این دو کوپلینگ قوی‌تر می‌شود و ناپایداری در این حوزه افزایش می‌یابد.

شکل 10 نشان دهنده نمودار پایداری نامیزانی دینامیکی بر حسب سرعت دوران است. این نمودار با فرض صفر بودن ε و k_{12} رسم شده است. با مقایسه این نمودار با نمودار کمپل شکل 6 می‌توان دریافت که نامیزانی دینامیکی باعث کوپل شدن حرکت عرضی با محوری، و همچنین حرکت خمشی با پیچشی می‌شود. با افزایش نامیزانی دینامیکی، بازه ناپایداری در محل این دو برخورد افزایش می‌یابد.

عامل اصلی ارتعاش روتور نامیزانی دینامیکی و استاتیکی است. اگر این دو نامیزانی وجود نداشته باشند در حقیقت تحریکی وجود ندارد که دیسک را از محور خود خارج کند. بنابراین برای مشاهده اثر k_{12} ، باید نامیزانی وجود داشته باشد. به همین منظور از مقدار ε و χ که در جدول 1 آمده است استفاده می‌شود. اگر دیسک در وسط شفت باشد، مقدار k_{12} صفر می‌شود و هر چه از مرکز شفت فاصله می‌گیرد مقدار آن افزایش می‌یابد [22]. شکل 11 نمودار پایداری δ بر حسب سرعت دوران است؛ که δ فاصله دیسک از مرکز شفت می‌باشد. با افزایش فاصله دیسک از مرکز شفت، بازه ناپایداری کمی افزایش می‌یابد و به سمت سرعت‌های بیشتر جابجا می‌شوند. باید توجه داشت که با تغییر δ همه ضریب سختی‌ها تغییر می‌کنند. به همین دلیل ناپایداری‌ها جابجا می‌شوند.



شکل 9 نمودار پایداری نامیزانی استاتیکی بر حسب سرعت روتور نمونه دوم، نقاط تیره نشان دهنده مناطق ناپایدار و نقاط سفید نشان دهنده مناطق پایدار است.

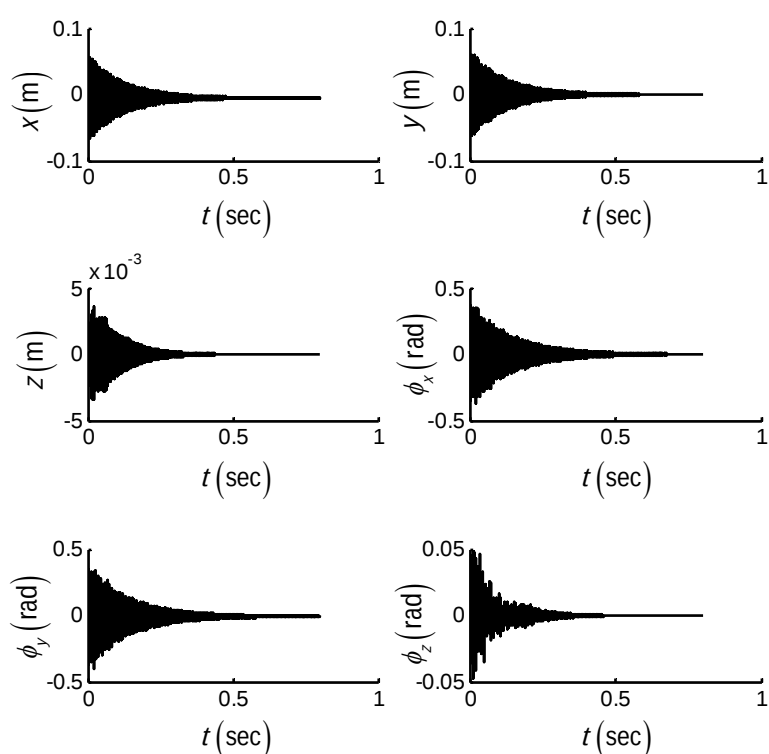


شکل 14 پاسخ زمانی روتور نمونه دوم در سرعت $\Omega = 4820 \text{ rad/s}$

در سرعت $\Omega = 12000 \text{ rad/s}$ سیستم پایدار است؛ بنابراین باید دامنه نوسانات به صفر برسد. شکل 15 که پاسخ زمانی سیستم به ازای سرعت $\Omega = 12000 \text{ rad/s}$ را نشان می‌دهد، درستی این مطلب را تأیید می‌کند.

6- جمع‌بندی

در این تحقیق، به تحلیل ارتعاشات روتورهای نامیزان با استفاده از روش کرین پرداخته شده است. مدل مورد بررسی شامل شش درجه آزادی است. برای به دست آوردن معادلات حرکت از روش لاگرانژ استفاده شده است. معادلات حرکت همگن شدند؛ زیرا در غیر اینصورت نمودار کمپل و فرکانس‌ها دچار خطا می‌شوند. علامت کرین هر مود به دست آورده شده است و طبق قضیه کرین محل‌های ناپایدار مشخص شدند. زمانی که روتور دارای نامیزانی دینامیکی است، هندسه روتور بسیار اهمیت پیدا می‌کند. روتورهای استوانه‌ای دارای ناپایداری بیشتری نسبت به روتورهای دیسکی هستند. بیشترین بازه

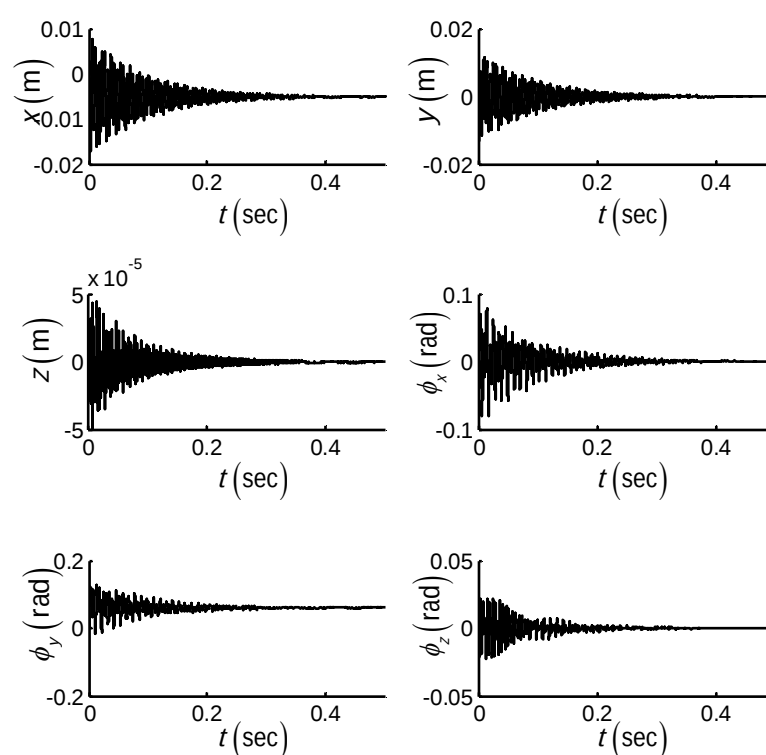


شکل 15 پاسخ زمانی روتور نمونه دوم در سرعت $\Omega = 12000 \text{ rad/s}$

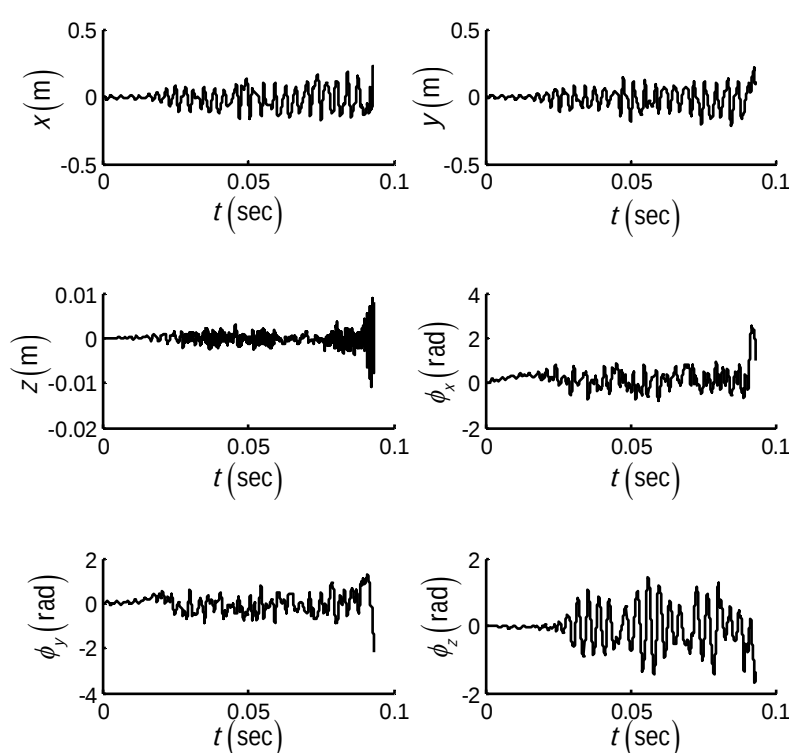
$\Omega = 2730 \text{ rad/s}$ ، $\Omega = 4820 \text{ rad/s}$ و $\Omega = 12000 \text{ rad/s}$ رسم شده است. بنا بر نمودارهای به دست آمده در گذشته، سرعت‌های $\Omega = 2000 \text{ rad/s}$ و $\Omega = 12000 \text{ rad/s}$ پایدار، و سرعت‌های $\Omega = 2730 \text{ rad/s}$ و $\Omega = 4820 \text{ rad/s}$ ناپایدار هستند. در شکل 12 پاسخ زمانی روتور در سرعت $\Omega = 2000 \text{ rad/s}$ نشان داده شده است. به دلیل پایدار بودن سیستم در این سرعت، دامنه ارتعاش به تدریج به صفر می‌رسد.

شکل 13 پاسخ زمانی روتور در سرعت $\Omega = 2730 \text{ rad/s}$ که در مجاورت سرعت بحرانی است را نشان می‌دهد. همانطور که پیش‌بینی می‌شد دامنه ارتعاش به تدریج زیاد شده و سیستم ناپایدار می‌شود.

شکل 14 مربوط به سرعت $\Omega = 4820 \text{ rad/s}$ است که سیستم در این سرعت ناپایدار است. دامنه نوسانات در این سرعت افزایش می‌یابد ولی از مقداری خاص فراتر نمی‌رود.



شکل 12 پاسخ زمانی روتور نمونه دوم در سرعت $\Omega = 2000 \text{ rad/s}$



شکل 13 پاسخ زمانی روتور نمونه دوم در سرعت $\Omega = 2730 \text{ rad/s}$

- [9] K. Kawamo, Y. Matsukura, T. Inoue, Analysis of Lateral Vibration Characteristics of Rotating Shafts with Flexible and Axi-symmetric Bearings, *Bulletin of JSME*, Vol. 20, No. 146, pp. 930-936, 1977.
- [10] R. G. Kirk, E. J. Gunter, The effect of support flexibility and damping on the synchronous response of a single-mass flexible rotor, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 94, No. 1, pp. 221-232, 1972.
- [11] L. Barrett, E. Gunter, P. Allaire, Optimum bearing and support damping for unbalance response and stability of rotating machinery, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 100, No. 1, pp. 89-94, 1978.
- [12] E. Koenig, Analysis for Calculating Lateral Vibration Characteristics of Rotating Systems With Any Number of Flexible Supports: Part 1—The Method of Analysis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, No. 4, pp. 585-590, 1961.
- [13] D. Salamone, E. Gunter, Synchronous unbalance response of an overhung rotor with disk skew, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 102, No. 4, pp. 749-755, 1980.
- [14] R. Cohen, I. Porat, Coupled torsional and transverse vibration of unbalanced rotor, *Journal of applied mechanics*, Vol. 52, No. 3, pp. 701-705, 1985.
- [15] A. Seiranyan, Collision of eigenvalues in linear oscillatory systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 58, No. 5, pp. 805-813, 1994.
- [16] K. Kane, B. Torby, The extended modal reduction method applied to rotor dynamic problems, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, No. 1, pp. 79-84, 1991.
- [17] M. Mohiuddin, Y. Khulief, Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 2, pp. 297-316, 1999.
- [18] X. Shen, J. Jia, M. Zhao, J. Jing, Coupled torsional-lateral vibration of the unbalanced rotor system with external excitations, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 42, No. 6, pp. 423-431, 2007.
- [19] Z. Yuan, F. Chu, Y. Lin, External and internal coupling effects of rotor's bending and torsional vibrations under unbalances, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 1, pp. 339-347, 2007.
- [20] M.-R. Ghazavi, A. Najafi, A.-A. Jafari, Bifurcation and nonlinear analysis of nonconservative interaction between rotor and blade row, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 65, No. 6, pp. 29-45, 2013.
- [21] A. Najafi, M.-R. Ghazavi, A.-A. Jafari, Application of Krein's theorem and bifurcation theory for stability analysis of a bladed rotor, *Meccanica*, Vol. 49, No. 6, pp. 1507-1526, 2014.
- [22] H. Zare'i, M.-R. Ghazavi, *Stability Analysis of the Coupled Torsional and Lateral Vibrations of Unbalanced Rotors with Krein's Method*, Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Faculty of Applied Mechanics, 2015. (in Persian فارسی)
- [23] A. P. Seyranian, A. A. Mailybaev, *Multiparameter stability theory with mechanical applications*: World Scientific, 2003.

ناپایداری زمانی مشاهده می‌شود که ممان اینرسی قطبی و عرضی دیسک برابر باشند. در این حالت روتور رفتاری همانند کره دارد. از نمودار کمپل و استهلاك برای ارزیابی درستی قضیه استفاده شده است. از نمودارهای پایداری برای مشاهده اثر پارامترها بر پایداری و همچنین مشاهده نواحی ناپایدار استفاده شده است. افزایش نامیزانی باعث قوی‌تر شدن کوپلینگ می‌شود و ناپایداری را افزایش می‌دهد. هر چه دیسک به یاتاقان‌ها نزدیک شود، برخوردهای فرکانسی به سمت سرعت‌های بیشتر جابجا می‌شوند. معادلات غیرخطی در سرعت‌های مختلف و با وجود استهلاك‌های $c_n = 250\text{kg/s}$ ، $c_{zn} = 250\text{kg/s}$ ، $c_{tn} = 0.3\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ و $c_{bn} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ حل عددی شدند و با نتایج به دست آمده از حل کرین و نمودارهای پایداری مقایسه شده است. وجود استهلاك برای از بین بردن پاسخ گذارای سیستم است. در سرعت‌های $\Omega = 2730\text{rad/s}$ و $\Omega = 4820\text{rad/s}$ که سیستم ناپایدار است، دامنه ارتعاش افزایش می‌یابد و به مقدار محدود می‌رسد. در سرعت‌های $\Omega = 2000\text{rad/s}$ و $\Omega = 12000\text{rad/s}$ که سیستم پایدار است، دامنه به صفر میل می‌کند.

7-مراجع

- [1] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*: Springer, 2007.
- [2] S. Crandall, J. Mrosczyk, Conservative and nonconservative coupling in dynamic systems, in *Proceeding of the institution of mechanical engineers, International conference*, Vol. 7, pp. 567-572.
- [3] A. Najafi, M.-R. Ghazavi, *Nonlinear Analysis of Dynamical Interaction Between Blade Group and Rotor*, Doctor of Philosophy Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Faculty of Applied Mechanics, 2014. (in Persian فارسی)
- [4] W. Rankine, Centrifugal whirling of shafts, *Engineer (London)*, Apr, Vol. 9, 1869.
- [5] A. Tondl, *Some problems of rotor dynamics*: Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1965.
- [6] M. Rabkin, Combined flexural-torsional vibrations of multidisk rotors, *International Applied Mechanics*, Vol. 9, No. 3, pp. 310-315, 1973.
- [7] R. Smith, R. K. Mobley, *Industrial machinery repair: best maintenance practices pocket guide*: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [8] J. W. Lund, F. Orcutt, Calculations and experiments on the unbalance response of a flexible rotor, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 89, No. 4, pp. 785-796, 1967.